Universidade Federal Fluminense

JULIANO VIEIRA DE OLIVEIRA

Análise numérica e simulação para uma equação parabólica não linear com termo de reação-difusão não local

Volta Redonda

2019

JULIANO VIEIRA DE OLIVEIRA

Análise numérica e simulação para uma equação parabólica não linear com termo de reação-difusão não local

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados à Engenharia e Ciência.

Orientador:

Jorge Ferreira

Coorientador:

Emerson Souza Freire

Universidade Federal Fluminense

Volta Redonda

2019

Ficha catalográfica automática - SDC/BEM
Gerada com informações fornecidas pelo autor

O48a Oliveira, Juliano Vieira de
Análise numérica e simulação para uma equação parabólica não linear com termo de reação-difusão não local / Juliano Vieira de Oliveira ; Jorge Ferreira, orientador ; Emerson Souza Freire, coorientador. Volta Redonda, 2019.
81 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2019.

DOI: http://dx.doi.org/10.22409/PPG-MCCT.2019.m.15439030700

1. Equação diferencial parcial não-linear. 2. Método de Galerkin. 3. Método dos elementos finitos. 4. Análise numérica. 5. Produção intelectual. I. Ferreira, Jorge, orientador. II. Souza Freire, Emerson, coorientador. III. Universidade Federal Fluminense. Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda. IV. Título.

CDD -

Bibliotecária responsável: Andreia de Oliveira Paim - CRB7/5183

Análise numérica e simulação para uma equação parabólica não linear com termo de reação-difusão não local

Juliano Vieira de Oliveira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados à Engenharia e Ciência.

Aprovada por:

Prof. Jorge Ferreira, D.Sc / UFF (Orientador)

Prof. Emerson Souza Freire, D.Sc. / UFF (Co-orientador)

Prof. Andrey Dione Ferreira, D.Sc. / IFRJ

Prof. Orlando dos Santos Pereira, D.Sc. / DEMAT-ICE-UFRRJ

Prof. Weslley Luiz da Silva Assis, D.Sc. / UFF

Volta Redonda, 29 de março de 2019.

Para minha avó, Maria das Graças Santos Vieira, que esteve ao meu lado nos momentos bons e ruins da minha vida e que me ensinou a sempre seguir em frente em busca de nossos objetivos

Agradecimentos

Ao professor Jorge Ferreira pelas orientações e conhecimentos transmitidos na área de equações diferencias nos cursos ministrados no mestrado e informações na área de EDP e sua ramificações, além das experiências acadêmicas que me proporcionou.

Ao professor Emerson Souza Freire pelo suporte ao desenvolvimento deste trabalho, em especial por ter me ensinado Análise Funcional que foi a base deste trabalho.

Aos professores do MCCT por todo conhecimento transmitido e pela grande disponibilidade de acesso para consultas acadêmicas que os senhores possuem para com todos os aluno.

Aos meus pais e toda minha família pelo apoio incondicional em todos os aspectos de minha vida.

À todos meus colegas que direta, ou indiretamente, me auxiliaram em toda minha trajetória até aqui.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Ao programa de Pós-Graduação pela oportunidade de expandir meus conhecimentos.

À Universidade Federal Fluminense Campus Volta Redonda por toda estrutura proporcionada à comunidade acadêmica.

Resumo

Neste trabalho estudamos as propriedades teóricas da solução analítica de um problema de reação-difusão não linear e obtivemos a existência, unicidade e o comportamento assintótico da solução fraca e forte global. Para mostrar a existência usamos o método de Faedo-Galerkin, o teorema de compacidade de Aubin-Lions e algumas inequações substânciais de análise funcional. Usamos o método da energia para a unicidade, devido à regularidade da solução, e para obter o comportamento assintótico.

O problema a ser abordado é descrito através do problema misto de evolução (P)

$$(P)\begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u + \lambda|u|^{p-2}u = f \text{ em } Q = D\times]0,T[, \\ \\ u\,(x,0) = u_0(x) \text{ em } D,\ u = 0 \text{ em } \Sigma = \partial D\times]0,T[\end{cases} \tag{1}$$

onde $f \in L^2(0,T,L^2(D)), \lambda > 0$ é uma constante, $u_0 \in H_0^1(D)$, $p \geq 2$, $a = a(s)$ é uma função Lipschitz-contínua, satisfazendo a desigualdade $0 < c < a(s) < C$ onde c e C são constantes.

Os resultados referentes a análise numérica do nosso problema foram obtidos usando o método de elementos finitos para discretização espacial e o método de diferenças finitas para a parte temporal. Além disso, foram feitas simulações usando MATLAB para comprovar que os resultados teóricos obtidos são condizentes.

Fizemos uma comparação entre diferentes termos de reação-difusão onde conseguimos observar a interferência do termo na solução junto com uma análise de diferentes tipos de polinômios interpoladores relacionados ao método de elementos finitos.

Palavras Chave: Termo de difusão não local, existência, unicidade, decaimento exponencial, método de elementos finitos, método de diferenças finitas.

Abstract

In this work we study the theoretical properties of the analytical solution of a non-linear reaction-diffusion problem and obtain the existence, uniqueness and asymptotic behavior of the weak and strong global solution. To show the existence we use the famous Faedo-Galerkin method, the Aubin-Lions compactness theorem and some substantial inequalities of the functional analysis. We use the energy method for the uniqueness, due to the regularity of the solution, and to obtain the asymptotic behavior.

The problem to be addressed is described through the mixed evolution problem (P)

$$\begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u + \lambda|u|^{p-2}u = f \text{ in } Q = D\times]0,T[, \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ in } D,\ u = 0 \text{ in } \Sigma = \partial D\times]0,T[\end{cases} \tag{1}$$

where $f \in L^2(0,T,L^2(D)), \lambda > 0$ is a constant, $u_0 \in H_0^1(D)$,$p \geq 2$, $a = a(s)$ is a Lipschitz-continuous function, satisfying the inequality $c < a(s) < C$ where c and C are constants.

The results concerning numerical analysis of our problem we use the finite element method for spatial discretization and the finite difference method for the temporal part. In addition, the simulations will be done using MATLAB to prove that the theoretical results obtained are consistent.

We have compared different terms of reaction-diffusion where we can observe the interference of the term in the solution together with an analysis of different types of interpolator polynomials related to the finite element method.

Keywords: Non-local diffusion term, existence, uniqueness, exponential decay, finite element method, finite difference method.

Glossário

$\mathcal{C}(\Omega)^k$	:	Espaço das funções com derivadas contínuas de ordem até k
$L^2(\Omega)$	:	Espaço das funções quadrado integráveis
$L^p(\Omega)$	:	Espaço das funções p integráveis
$H^1(\Omega)$	:	Espaço das funções quadrado integráveis com derivadas quadrado integráveis
$H^{-1}(\Omega)$	:	Espaço dual de H^1
$H_0^1(\Omega)$	:	$f \in H^1(\Omega)$ e $f(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$
$W^{m,n}(\Omega)$	:	Espaço das funções $f \in L^n(\Omega)$ tal que $D^\alpha f \in L^n(\Omega)$, onde $\alpha \leq m$
$supp(f)$	:	Conjunto de pontos do domínio de f, em que esta não se anula
$\mathcal{D}(\Omega)$	:	Conjunto das funções indefinidamente diferenciáveis com suporte em Ω
$\mathcal{D}'(\Omega)$	:	Espaço das distribuições
$((\cdot,\cdot))$	:	Produto interno em H^1
$(\cdot,\cdot)$	:	Produto interno em L^2
$\|\cdot,\cdot\|$	:	Norma em H^1
$\|\cdot,\cdot\|$	:	Norma interno em L^2
$q.s$	:	Quase sempre
$\mathfrak{B}(X;\mathbb{R})$	:	Conjunto das funções limitadas de X em $\mathbb{R}$
$d(x,y)$	:	Distância do ponto x ao y pela métrica d
(X,τ)	:	Espaço topológico do conjunto X pela topologia τ
E'	:	Espaço dual de E
E''	:	Espaço bidual de E
$\|E\|_{E'}$	:	Norma no espaço dual E'
$(\Omega,\mathcal{M},\mu)$	:	Espaço mensurável
$\sigma(E,E')$	:	Topologia fraca
$\sigma(E',E)$	:	Topologia fraca estrela
$\hookrightarrow$	:	Imersão
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	:	Imersão Compacta

Sumário

Objetivos **9**

1 Introdução **10**

2 Análise Funcional e Teoria das Distribuições **13**

2.1 Espaços Métricos e Espaços Normados 13

2.2 Espaço Topológico 14

2.2.1 O Espaço Dual 15

2.3 Espaços Reflexivos 16

2.4 Os Espaços $L^p(\Omega)$ 18

2.5 Outros Resultados Importantes 21

2.5.1 Teorema de Carathéodory - Prolongamento de Solução 23

2.6 Espaço de Funções Testes 26

2.7 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$ 28

2.8 Distribuições Escalares 29

2.9 Convergência e Derivada Distribucional 31

2.10 Espaços de Sobolev 33

2.10.1 O espaço $H^m(\Omega)$ 33

2.11 Espaços $L^p(0,T;X)$ e Distribuições Vetoriais 37

3 Equação parabólica não linear com termo de reação-difusão não local **42**

3.1 Apresentação do Problema de Evolução 42

3.2 Hipóteses 43

3.3 Existência de Solução Fraca Global 43
3.3.1 Verificação das Condições Iniciais 49
3.3.2 Existência de Solução Forte Global 50
3.4 Unicidade 51
3.5 Decaimento Exponencial da Solução 53

4 Análise Numérica **55**
4.1 Método de Elementos Finitos 55
4.1.1 Implementação básica do método de elementos finitos 56
Obtenção da forma fraca 56
Aproximação da solução 56
Modelo do método 57
4.1.2 Exemplo de aplicação do método de elementos finitos 57
4.2 Método de Diferenças Finitas 60
4.3 Solução semidiscreta 62
4.4 Solução totalmente discreta 63
4.5 Construção das Matrizes da Discretização 64
4.5.1 Matriz de Massa 64
4.5.2 Matriz de Força 65
4.5.3 Matriz de Rigidez 66

5 Resultados Computacionais **68**

6 Considerações Finais **74**

7 Trabalhos Futuros **75**

Referências **76**

Objetivos

Nosso objetivo neste trabalho foi fazer um estudo da existência e unicidade da solução fraca e forte da equação não linear com termo de reação-difusão não local abaixo:

$$(P)\begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u + \lambda|u|^{p-2}u = f \text{ em } Q = D\times]0,T[, \\ \\ u\,(x,0) = u_0(x) \text{ em } D,\ u = 0 \text{ em } \Sigma = \partial D\times]0,T[\end{cases} \tag{1}$$

Também fizemos o estudo do comportamento assintótico da solução quando t tende para o infinito, em especial focamos no decaimento exponencial da solução. Devido a complexidade do problema em questão não foram feitas as análises de erro e convergência do método.

Fizemos a análise numérica do problema usando como base o método de diferenças finitas para a parte temporal da equação e o método de elementos finitos para a parte espacial. Buscamos analisar a influência do termo de reação-difusão na solução do problema e verificar se condiz com seu significado físico apresentado. Além disso, comparamos as soluções para diferentes tipos de polinômios interpoladores, em especial o linear e o cúbico.

Capítulo 1

Introdução

Em um processo difusivo, de calor ou populacional, a velocidade de difusão v em x é dada pela lei de Fourier

$$v(x) = -a\nabla u(x) \tag{1.1}$$

onde u é a temperatura ou densidade populacional, ∇u é o gradiente usual de u e a é uma constante que depende do meio onde o processo é realizado.

O valor de a pode ser considerado como uma constante física atrelada ao material usado. Podemos também considerar o caso onde ela dependerá de uma quantidade não local.

Assim, estudando a difusão de uma população (por exemplo, uma população de bactérias) é razoável assumir que ela depende da população total no domínio Ω representado por

$$l(u) = \int_{\Omega} u dx \tag{1.2}$$

ou seja, ela representa a velocidade da migração dependente da população total em Ω.

O problema proposto é uma equação parabólica não-linear onde o termo de reação-difusão depende do tempo com uma pertubação não linear e uma força externa, mais precisamente este problema aparece em dinâmica populacional.

Este tipo de coeficiente de difusão foi proposto por Chipot e Rodrigues em 1992 ([8]) para problemas elípticos. Nesse trabalho os autores provaram a existência de soluções

fracas e que a unicidade não se verifica no caso geral.

Em 1997 e 1999, Chipot e Lovat ([6],[7]) estudaram a existência de soluções, além do comportamento assintótico, para problemas não locais na forma

$$\begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u = f(x,t) \text{ in } \Omega_T, \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ in } \Gamma_T \end{cases} \tag{1.3}$$

Em 2004, Corrêa, Menezes e Ferreira [12] estenderam os resultados obtidos por Chipot e Lovat, considerando $a(l(u))$ e $f(x,t)$ funções contínuas. Em 2013, Simsen e Ferreira [33] mostraram a existência, unicidade e continuidade dos dados iniciais além de um importante resultado sobre a existência de um atrator global, do seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u + |u|^{p-2}u = f \text{ em } Q = D\times]0,T[, \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ em } D,\ u = 0 \text{ em } \Sigma = \partial D\times]0,T[\end{cases} \tag{1.4}$$

Para mostrarmos a existência de soluções fracas usaremos o método de Faedo-Galerkin que consiste em um método de integração aproximada de equações diferenciais parciais. Este método foi primeiramente proposto por Boris Grigorievitch Galerkin(1871-1945) como uma generalização do método de Ritz, onde teve o primeiro trabalho publicado por Garlerkin sobre o assunto em 1915 [20]. Trinta anos depois Sandro Faedo [16] desenvolveu o método de Faedo-Galerkin como uma combinação dos métodos de Galerkin e Fourier, sendo criado para encontrar soluções para problemas de evolução.

A partir dos resultados teóricos obtidos em [12] vamos analisar as equações parabólicas não lineares com termo de reação-difusão não local no aspecto computacional, ou seja, vamos fazer a análise numérica de equações deste tipo com o objetivo de mostrar a influência do termo de reação-difusão quanto à velocidade de convergência, além dos diferentes tipos de funções interpoladoras que podem ser usadas para discretizar nosso problema.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: o capítulo 2 apresentamos definições básicas necessários para o início do estudo do problema proposto, como convergências e os espaços L^p. Também apresentaremos neste capítulo a teoria das distribuições junto com os espaços de Sobolev, assim como apresentamos o importante teorema de Caráteodory. No capítulo 3 faremos a apresentação mais detalhada do problema, bem como as

hipóteses colocadas sobre o problema, e depois demonstraremos a existência, unicidade e decaimento exponencial da solução do problema (P). No capítulo 4 trataremos da análise numérica do nosso problema, onde primeiramente definiremos os dois métodos cruciais usado para discretizar nossa equação, isto é, o método de elementos finitos e método de diferenças finitas. A seguir iremos discretizar o problema a partir da formulação variacional construída com objetivo de encontrar a forma matricial usada na implementação computacional. finalmente no capítulo 5 faremos a implementação do problema relacionado com o aspecto computacional onde consideramos dois termos distintos de reação-difusão além do comportamento da energia associada ao problema.

Capítulo 2

Análise Funcional e Teoria das Distribuições

Neste capítulo estaremos abordando conceitos importantes de Análise Funcional e teoria das distribuições, que serão utilizados ao decorrer desta dissertação.

2.1 Espaços Métricos e Espaços Normados

Começaremos definindo o que é um espaço métrico, para isso definiremos primeiramente o que é uma métrica.

Definição 1 *Uma métrica em um conjunto M, é uma função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa cada par ordenado $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

$d_1)$ $d(x, x) = 0$,

$d_2)$ *Se* $x \neq y$ *então* $d(x, y) > 0$,

$d_3)$ $d(x, y) = d(y, x)$,

$d_4)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

As propriedades $d_1)$ e $d_2)$, dizem que $d(x, y) \geq 0$, com, $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. A propriedade $d_3)$ nos diz que d é uma função simétrica das variáveis x e y, e por fim $d_4)$ trata da desigualdade triângular.

Agora podemos dizer que, um *espaço métrico* é um par (M, d), onde M é um conjunto e d uma métrica. Quando não houver ambiguidade, vamos simplesmente nos referir ao

espaço métrico M.

Duas métricas são ditas *equivalentes* se existir uma constante c, positiva, tal que $d(x,y) \leq cd'(x,y)$.

Definição 2 *Seja E um espaço vetorial real. Uma norma, em E, é uma aplicação $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, que satisfaz:*

i) $\|\xi\| \geq 0$ *para todo* $\xi \in E$ *e* $\|\xi\| = 0 \Longleftrightarrow \xi = 0$ *(comprimento positivo)*

ii) $\|\lambda\xi\| = |\lambda|\|\xi\|$ *para todo* $\xi \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(dilatação)*

iii) $\|\xi + \zeta\| \leq \|\xi\| + \|\zeta\|$ *para todo* $\xi, \zeta \in E$ *(desigualdade triangular)*

O par $(\|\cdot\|, E)$ é denominado *espaço normado*.

Podemos induzir uma métrica da seguinte forma, $d(\xi, \delta) = \|\xi - \delta\|$, onde $\xi, \delta \in E$. Desta forma podemos concluir que todo espaço normado é um espaço métrico.

Definição 3 *Um espaço normado E é dito um espaço de Banach, se o mesmo é completo com a métrica induzida pela norma deste espaço.*

Um dos principais resultados é que os espaços L^P são Banach.

2.2 Espaço Topológico

Nesta seção iremos abordar o conceito de espaços topológicos e suas principais definições. Primeiramente vamos definir o que é uma topologia.

Definição 4 *Uma topologia num conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X, chamados subconjuntos abertos segundo a topologia τ, satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *X e o subconjunto $\emptyset$ são abertos,*
2. *a reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto,*
3. *a intersecção finita de uma família de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.*

O par (X, τ), com X sendo um conjunto e τ uma topologia de X, é chamado espaço topológico. Caso não haja risco de confusão, chamaremos o espaço topológico (X, τ), por espaço topológico X.

Uma aplicação $F : X \to Y$, de um espaço topológico X em um espaço topológico Y é dita contínua, se a imagem inversa $F^{-1}(B)$, de todo aberto $B \subset Y$, for aberto em X.

Dado duas topologias, τ, τ', em um conjunto X, diremos que τ é *mais fina* que τ' se $\tau' \subset \tau$, isto é, se cada aberto de τ' for um aberto de τ.

Exemplo 1 *Para que um conjunto X seja um espaço topológico, basta considerar a topologia formada por todos os subconjuntos de X. Essa topologia é conhecida como topologia discreta. Para que X seja um espaço métrica, basta considerar a métrica $d(x, y) = 1$ se $x = y$ e 0 caso contrário.*

Outra topologia que podemos citar, é a topologia caótica, que é formada apenas pelos conjuntos X e $\emptyset$.

Para que duas métricas definam o mesmo espaço topológico é necessário e suficiente que elas sejam equivalentes. Dadas duas topologias τ, τ' em um conjunto X. Afim de que τ seja mais fina que τ' é necessário e suficiente que a aplicação identidade $i : (X, \tau) \to (X, \tau')$ seja contínua.

2.2.1 O Espaço Dual

Nesta seção falaremos sobre o Espaço Dual e suas aplicações. Começaremos definindo o que é o Espaço Dual.

Definição 5 *Denotemos por E' o conjunto das funções $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ lineares e contínuas, isto é:*

$E' := \{f : E \longrightarrow \mathbb{R} \big| f$ é linear e contínua $\}$. O conjunto E' é chamado o dual de E, e, a norma neste espaço é dada por,

$$\|f\|_{E'} := \sup_{\|x\|_{x \in E} < 1} |f(x)|.$$

Denotaremos por $f(x) = \langle f, x \rangle$, quando $f \in E'$ e $x \in E$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno pela dualidade E', E.

Proposição 1 *Uma aplicação linear f é contínua se, e somente se, ela é limitada.*

Demonstração 1 *Com efeito, pela continuidade de f teremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:*

$\|x\| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Isso significa que para cada $y \in E$, $\dfrac{\delta}{\|y\|}y$ satisfaz a condição: $\left\|\dfrac{\delta}{\|y\|}y\right\| \leq \delta$, daí então segue-se que:

$\left|f\left(\dfrac{\delta}{\|y\|}y\right)\right| < \varepsilon \Longrightarrow |f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{\delta}\|y\|$, *donde concluímos que f é uma função limitada.*

De maneira recíproca, vamos supor que f seja limitada. Mostraremos que f deve ser contínua. Lembremos que f é limitada se existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C\|x\|$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se:

$\|x - y\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. *Basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$ e aplicar a linearidade de f*

2.3 Espaços Reflexivos

Assim como construímos o espaço dual de um espaço vetorial, também podemos construir o espaço dual do dual. Isto é:

$E'' = \{f : E' \longrightarrow \mathbb{R}; \text{f é linear e contínua}\}$

Este espaço E'' é também um espaço normado e completo. A norma do espaço bidual esta dada por:

$$\|f\|_{\star\star} = \sup_{g \in E', \|g\|_\star \leq 1} f(g)$$

Em geral dado um espaço vetorial E qualquer, podemos definir o espaço dual e bi-dual. Inclusive podemos relacionar o espaço E com o bidual E'', através da aplicação $J : E \to E''$, definida a seguir:

Dado $x \in E$ fixo, a aplicação $f \to \langle f, x\rangle$ de E' em $\mathbb{R}$, e portanto, é uma elemento de

E''.

Definimos de forma natural: $\langle J(x), f\rangle = \langle f, x\rangle = f(x)$, $\forall x \in E, \forall f \in E'$.

Note que J é uma isometria entre os espaços E e E''.

Com efeito,

$$\|J(x)\|_{\star\star} = \sup_{f\in E', \|f\|_\star \leq 1} \langle J(x), f\rangle = \sup_{f\in E', \|f\|_\star \leq 1} \langle f, x\rangle = \|x\|$$

De onde obtemos uma aplicação injetora entre os espaços E e E''. A aplicação J é chamada de projeção canônica. Não é verdade, em geral, que J definida acima, seja sobrejetora. Os espaços nos quais J seja sobrejetora são chamados de Reflexivos.

Definição 6 *Seja E um espaço de Banach, diremos que E é um espaço reflexivo, quando a aplicação J definida acima é sobrejetora.*

Definição 7 *Diremos que um espaço normado E é separável, se existe um subconjunto enumerável e denso em E.*

Enunciaremos dois tipos de convergência, que serão usadas ao longo desta dissertação, são elas, convergência fraca e fraca $\star$.

Definição 8 *(Convergência Fraca): Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E. Então $u_\nu \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle \varphi, u_\nu\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$, $\forall \varphi \in E'$.*

Definição 9 *(Convergência Fraca $\star$) Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de E'. Diz-se $\varphi_\nu \to \varphi$ fraco $\star$ se, e somente se, $\langle \varphi_\nu, u\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$, $\forall u \in E$.*

Definiremos agora duas topologias que são essenciais para os resultados que virão a seguir. Seja E um espaço de Banach, e, $f \in E'$. Vamos denotar por $\phi_f : E \to \mathbb{R}$ o funcional linear definido como $\phi_f(x) := \langle f, x\rangle$. Com f percorrendo o conjunto E' nos obtemos uma coleção $(\phi_f)_{f\in E'}$ de funções de E em $\mathbb{R}$.

Agora nós vamos ignorar a topologia usual em E, que é a topologia associada com a norma, e definiremos uma nova topologia no conjunto E da seguinte forma:

Definição 10 *A topologia fraca, denotada por $\sigma(E, E')$ em E, é a topologia mais fina associada a coleção $(\phi_f)_f \in E'$.*

De forma similar definimos a topologia fraca $\star$ da seguinte forma:

Definição 11 *A topologia fraca, denotada por $\sigma(E', E)$ em E', é a topologia mais fina associada a coleção $(\phi_x)_x \in E$.*

2.4 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Vamos agora introduzir os espaços L^p, o que nos será de grande importância como ferramenta. Faremos uma breve definição e mostraremos alguns resultados relevantes para o que se segue. Ressaltamos que as integrais são integrais de Lebesgue, que é uma forma mais geral de calcular integrais ([14, 4]).

Seja $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, definimos:

$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \big| \int_\Omega |f|^p d\Omega < \infty\}$,

considerando agora $p = \infty$ tem-se:

$L^\infty := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f$ é mensurável e $\exists\ c \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ q.s em $\Omega\}$.

Definimos também as normas: $\|\cdot\|_p : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, para $0 < p < \infty$ e $\|\ \cdot\ \|_\infty$, para $p = \infty$, dadas respectivamente por:

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \quad \text{e} \quad \|f\|_\infty = inf\{c : |f(x)| \leq c \quad \text{q.s.} \quad \text{em } \Omega\}.$$

Lembramos que $L^\infty(\Omega) = [L^1(\Omega)]'$, como esta demonstração foge do escopo deste trabalho, apenas citaremos que ela pode ser encontrada em [4].

Definição: Se $1 \leq p \leq \infty$ denotamos por q o número definido por:

a) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ se $1 < p < \infty$

b) $q = 1$, se $p = \infty$ e $q = \infty$ se $p = 1$

O número p é denominado expoente conjugado de q.

Lema 1 *(Desigualdade de Young) Se* $1 < p, q < \infty$, *com,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *e,* a, b *são números reais não negativos então:*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

a igualdade só ocorre quando $a^p = b^q$.

Demonstração 2 *Seja* $\varphi(t) = (1-\lambda) + \lambda t - t^\lambda$ *então* $\varphi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$ *e se* $0 < \lambda < 1$, *temos que:*

- $\varphi'(t) < 0$ *para* $t < 1$
- $\varphi'(t) > 0$ *para* $t > 1$

Logo para $t \neq 1$, *temos* $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$, *de onde* $(1 - \lambda) + \lambda t \geq t^\lambda$

(a igualdade só vale se $t = 1$*)*

Se $b \neq 0$ *a desigualdade de Young segue substituindo* t *por* $\frac{a^p}{b^q}$ *em* $(1 - \lambda) + \lambda t \geq t^\lambda$. *Por outro lado, se* $b = 0$ *a desigualdade é trivial.*

Lema 2 *(Desigualdade de Hölder) Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *com* $1 \leq p \leq \infty$. *Então* $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ *e:*

$$\int_\Omega |f \cdot g| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demonstração 3 *Os casos* $p = 1$ *e* $p = \infty$ *seguem de modo imediato. Agora se* $1 < p < \infty$ *temos que:*

$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$, *devido a desigualdade de Young.*

Dessa forma, temos que:

$$\int_\Omega |f.g|dx \leq \frac{1}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q}\|g\|_{L^q}^q$$

mostrando portanto, que $f.g \in L^1(\Omega)$. *Substituindo* f *por* λf, $\lambda > 0$, *segue-se que*

$$\int_\Omega |f.g|dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda q}\|g\|_{L^q}^q$$

Por outro lado, minimizando o lado direito da desigualdade acima para $\lambda \in (0, \infty)$, *temos que o mínimo ocorre para* $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1}\|g\|_{L^q}^{q/p}$ *e o resultado segue.*

Teorema 1 *(da Convergência Dominada de Lebesgue):*

Seja (f_n) *uma sequência de funções integráveis definidas em* $L^1(\Omega)$. *Suponha que:*

1. $(f_n)_n$ *converge q.s. para uma função real, mensurável,* f,
2. *Existe uma função integrável* $g \in L^1(\Omega)$, *tal que* $|f_n(x)| \leq g(x), \forall n$ *q.s. em* Ω.

Então, $\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$.

Demonstração 4 *Ver [4].*

Usaremos a notação p' pra denotar o conjugado de p, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Teorema 2 *(Representação de Riez) Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $\varphi \in (L^p)'$. *Então existe um único* $u \in L^{p'}$ *tal que:*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf, \forall\ f \in L^p$$

Além disso, $\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$.

Demonstração 5 *ver [31].*

Segue como consequência deste teorema que podemos identificar,

$$(L^p)' = L^{p'},$$

onde $1 < p < \infty$.

Dizemos que uma seqüência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 12 *Seja H um espaço de Hilbert. Chama-se base Hilbertiana de H uma seqüência de elementos (ω_n) de H tais que:*

i) $|\omega_n| = 1 \ \forall n, (\omega_n, \omega_m) = 0 \ \forall n, m, \ m \neq n$;

ii) O espaço gerado pela (ω_n) é denso em H.

A seguinte proposição estabelece que a convergência em $L^p(\Omega)$ dá origem a uma convergência pontual.

Proposição 2 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $L^p(\Omega)$ convergindo para u em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subseqüência de (u_k), ainda denotada por (u_k), tal que:*

i) *$u_k(x) \to u(x)$, q.s. em Ω;*

ii) *$|u_k(x)| \leq h(x)$, q.s. em Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$, com $h \in L^p(\Omega)$*

Teorema 3 *Se $1 < p < \infty$, então o espaço $L^P(\Omega)$ é reflexivo.*

Demonstração 6 *Ver [4].*

2.5 Outros Resultados Importantes

A seguir enunciaremos algumas definições e resultados, de grande relevância, que serão utilizados posteriormente.

Teorema 4 ***(Banach - Steinhaus):***

Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja $(T_i)_{i\in I}$ uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de E em F.

Suponhamos que $\sup_{i\in I}\|T_iX\| < \infty$, $\forall\ x \in E$. *Então:* $\sup_{i\in I}\|T_iX\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$

Dito de outro modo, existe uma constante C tal que $\|T_ix\| \leq C\|x\|$, $\forall\ x \in E$ e $\forall\ i \in I$

Demonstração 7 *ver [4].*

Proposição 3 *Seja E um espaço de Banach e (x_n) uma sucessão em E. Se verifica:*

1. $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E,E^{'}) \Rightarrow \langle f,x_n\rangle \to \langle f,x\rangle$, $\forall\ f \in E^{'}$,
2. *Se* $x_n \to x$ *fortemente, então* $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente para* $\sigma(E,E^{'})$,
3. *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente para* $\sigma(E,E^{'})$, *então* $\|x_n\|$ *é limitada e* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$,
4. *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente em* $\sigma(E,E^{'})$ *e se* $f_n \to f$ *fortemente em* $E^{'}$ *(isto é,* $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$*), então* $\langle f_n,x_n\rangle \to \langle f,x\rangle$.

Demonstração 8 *ver [4].*

Observação- A parte (III) da proposição (1.1) é uma consequência do teorema de Banach-Steinhaus.

Proposição 4 *Seja E um espaço de Banach e (f_n) uma sucessão em $E^{'}$. Se verifica:*

1. $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E^{'},E) \Longleftrightarrow \langle f_n,x\rangle \longrightarrow \langle f,x\rangle, \forall\ x \in E$,
2. *Se* $f_n \to f$ *forte, então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E^{'},E'')$,
3. *Se* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E^{'},E'')$, *então* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E^{'},E)$,
4. *Se* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E^{'},E)$, *então* $\|f_n\|$ *esta limitada e* $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$,

5. *Se* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$ *e se* $x_n \to x$ *fortemente em* E, *então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração 9 *ver [4].*

Teorema 5 *Seja* E *um espaço de Banach separável e seja* (f_n) *uma sucessão limitada em* E'. *Então existe uma subsucessão* (f_{n_k}) *que converge na topologia* $\sigma(E', E)$.

Teorema 6 *(Banach-Alaoglu) Sejam* E *um espaço de Banach separável e* E' *o seu dual topológico. Então o conjunto:* $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ *é compacto na topologia fraca estrela.*

Demonstração 10 *ver [31].*

Lema 3 *(Compacidade de Aubin-Lions): Sejam* $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$ *e* B_0, B, B_1 *espaços de Banach sendo que* B_0 *e* B_1 *são reflexivos tais que* $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$ ($\overset{c}{\hookrightarrow}$ *indica imersão compacta). Para* $0 < T < \infty$, *consideremos o espaço*

$W = \{w;\ w \in L^{p_0}(0, T; B_0)\ e\ w' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$, *com a norma*

$\|w\|_W = \|w\|_{L^{P_0}(0,T;B_0)} + \|w\|_{L^{P_1}(0,T;B_1)}$. *Então:*

(I) W *é um espaço de Banach*

(II) $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{P_0}(0, T; B)$

Demonstração 11 *ver [31].*

Observação: Como conseqüência da Compacidade de Aubin-Lions, temos que se $(u_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0, T; B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ uma seqüência limitada em $L^2(0, T; B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada em W. Daí, segue que existe uma subseqüência $(u_{\nu_k})_{k\in\mathbf{N}}$ de (u_ν) tal que $u_{\nu_k} \longrightarrow u$ forte em $L^2(0, T; B)$.

2.5.1 Teorema de Carathéodory - Prolongamento de Solução

O próximo resultado é de grande importância para a solução de nosso problema principal, visto que nos permite prolongar a solução, ou seja, a solução se torna global. Vejamos primeiramente algumas condições para depois enunciarmos e demonstrarmos o

teorema.

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory sobre D se:

i) $f(t,x)$ é mensurável em t, para cada x fixo;

ii) $f(t,x)$ é contínua em x, para cada t fixo;

iii) Para cada compacto K em D, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que:

$$|f(t,x)| \leq m_K(t), \forall (t,x) \in D \tag{1.1}$$

Consideremos o retângulo $R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}\};\ |t-t_0| \leq a, |x-x_0| \leq b$, com $a, b > 0$.

Teorema 7 ***(Carathéodory)****: Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R. Então, sobre algum intervalo $|t-t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$, existe uma solução do problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Demonstração 12 *ver [31].*

Corolário 1 ***(Prolongamento de solução)****:*

Seja $D = [0,\omega] \times B$, com $0 < \omega < \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e f nas condições de Carathéodory. Seja ainda $\varphi(t)$ uma solução de:

$$\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(0) = X_0, \ \ \|X_0\| \leq b. \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ está definida, se tenha, $|\varphi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então φ tem um prolongamento até $[0,\omega]$.

Demonstração 13 *ver [31].*

Teorema 8 ***(Banach-Alaoglu)*** *Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha-se que a sequência $u_n \in X$ é limitada. Então existe uma subsequência $u_{n_k} \in u_n \in X$ tal que:*

$$u_{n_k} \rightharpoonup u$$

Demonstração 14 *ver [12].*

Teorema 9 ***(Banach-Alaoglu)*** *Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha-se que a sequência $f_n \in X'$ é limitada. Então existe uma subsequência $f_{n_k} \in f_n \in X'$ tal que:*

$$f_{n_k} \rightharpoonup {}^*f$$

Demonstração 15 *ver [12].*

Lema 4 ***(Lema de Gronwall)*** *: Sejam $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e não-negativas.*

Se $\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,ds$,
(com $\alpha \geq 0$), então: $\varphi(t) \leq \alpha \exp\left[\int_a^t \psi(s)\,ds\right], \forall t \in [a,b]$.

Em particular, $\varphi(t)$ é limitada e se $\alpha = 0$, então $\varphi \equiv 0$.

Demonstração 16 *Fazendo $\omega(t) = \alpha + \int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,ds$, decorre da hipótese que $\varphi(t) \leq \omega(t)$ e pelo teorema fundamental do cálculo, segue que $\omega'(t) = \varphi(t)\,\psi(t)$. Logo, $\omega'(t) \leq \omega(t)\,\psi(t)$, donde segue:*

$$\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \leq \psi(t)$$

Integrando a última desigualdade de a até t, obtemos:

$$\int_a^t \frac{\omega'(s)}{\omega(s)} ds \leq \int_a^t \psi(s)\,ds$$

Assim,

$$\int_a^t \frac{d}{ds} \ln(\omega(s))\, ds \leq \int_a^t \psi(s)\, ds$$

Portanto,

$$\ln\left(\frac{\omega(t)}{\omega(a)}\right) \leq \int_a^t \psi(s)\, ds, \text{ isto é,}$$

$$\omega(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t \psi(s)\, ds\right), \ t \in [a,b]$$

Desta desigualdade e de $\varphi(t) \leq \omega(t)$, segue o Lema.

Lema 5 *Seja $\gamma(t)$ contínua e não-negativa em $[0,T]$. Se:*

$\gamma(t) \leq C_1 + C_2 \int_a^t \left[\gamma(t) + \gamma(t)^2\right] ds$, $0 \leq t \leq T$, *então existem $T_0 > 0$ e $C > 0$ tais que:*

$\gamma(t) \leq C, \forall t \in [0, T_0]$ $C_1, C_2 \geq 0$.

2.6 Espaço de Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, uma função contínua. Denominamos suporte de φ ao fecho, em Ω, do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denota-se o suporte de φ por $supp(\varphi)$. Simbolicamente, tem-se:

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Usando a definição conclui-se que o $supp(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual φ se anula e valem as seguintes relações:

1) $supp(\varphi + \psi) \subset supp(\varphi) \cup supp(\psi)$,

2) $supp(\varphi\psi) \subset supp(\varphi) \cap supp(\psi)$,

3) $supp\,(\lambda\varphi) = \lambda \;\; supp\,(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 2 *Seja* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *tal que* $\varphi(x) = x^2$ *:*

Verifica-se que o $supp\,(\varphi)^c = \{0\}$*, portanto* $supp\,(\varphi)$ *não é um conjunto compacto.*

Neste nosso estudo, damos um destaque especial as funções $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω que , sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse intuito definamos o espaços $C_0^\infty(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis e suporte compacto contido em Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Exemplo 3 *Dados* $x_0 \in \mathbb{R}^n, \;\; r > 0$*, denotamos por* $B_r\,(x_0)$ *a bola aberta de centro* x_0 *de raio* r*, isto é,* $B_r\,(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| < r\}$ *. Se* $B_r\,(x_0) \subset \Omega$ *, define-se* $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *por:*

$$\varphi\,(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{r^2}{\|x - x_0\|^2 - r^2}\right) & se \;\; \|x - x_0\| < r \\ \\ 0 & se \;\; \|x - x_0\| \geq r. \end{cases}$$

Neste exemplo, verificamos que $supp\,(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$ é um compacto e que $C_0^\infty(\Omega)$ é não vazio. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar funcionais lineares contínuos definidos em $C_0^\infty(\Omega)$.

Observação: Por um multi-índice, entendemos, uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de números inteiros não negativos. Denotamos por $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ a ordem do multi-índice e por D^α o operador derivação parcial, de ordem $|\alpha|$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

Para $\alpha = (0, \ldots, 0)$, temos por definição $D^0\varphi = \varphi$

A seguir daremos noções de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, tornando-o um espaço vetorial topológico.

2.7 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$supp\,(\varphi) \subset K$ e $supp(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $D^\alpha \varphi_n \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, e é denominado espaços das funções testes.

Observação Sendo Ω limitado, obtemos $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)\ \forall\ p$, tal que $1 \leq p < \infty$, com imersão contínua e densa. De fato, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos que:

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p\, dx \leq \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)|^p\, m(\Omega) < \infty$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, seja $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Mostraremos que:

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\, dx \to 0 \text{ note que,}$$

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\, dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\, dx$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\, dx$$

$$= \int_K \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\, dx = 0$$

Podemos ainda mostrar que a imersão anterior é densa. Para isso ver [27].

2.8 Distribuições Escalares

Com o intuito de generalizar o conceito de funções sobre Ω, introduz-se o conceito de distribuições escalares.

Denomina-se distribuição escalar sobre Ω a todo funcional linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$,$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_\nu) \to T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

O valor da distribuição T na função teste φ é denotado por $\langle T, \varphi\rangle$. Definiremos o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:

Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, diz-se que a sucessão $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, converge para T quando a sucessão $(\langle T_\nu, \varphi\rangle)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω, com esta noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuições que aparecem com mais freqüência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 13 *Diz-se que uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω quando u é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolo temos:*

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Longleftrightarrow \int_K |u(x)|\, dx < \infty, \text{ para todo compacto } K \subset \Omega.$$

Exemplo 4 *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por:*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx$$

Nestas condições T_u é uma distribuição escalar sobre Ω.

De fato, não é difícil mostrar a linearidade de T_u, pois segue da linearidade da integral. Resta-nos mostrar que T_u é contínua; seja dada uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ. Então:

$$\begin{aligned}|\langle T_u,\varphi_\nu\rangle - \langle T_u,\varphi\rangle| = |\langle T_u,\varphi_\nu-\varphi\rangle| &= \left|\int_\Omega u(x)\,(\varphi_\nu-\varphi)\,(x)\,dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |u(x)\,(\varphi_\nu-\varphi)\,(x)|\,dx \\ &\leq \sup|\varphi_\nu-\varphi|\int_\Omega |u\,(x)|\,dx \to 0.\end{aligned}$$

Pois, $\varphi_\nu \to \varphi$ uniformemente.

A distribuição T_u assim definida é dita gerada pela função localmente integrável u"e, usando Lema Du Bois Raymond, tem-se que T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 6 ***(de Du Bois Raymond)**: Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração 17 *ver [4].*

Vale ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 5 *Seja x_0 um ponto de Ω e definamos a função $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\langle \delta_{x_0},\varphi\rangle = \varphi(x_0)$$

*É fácil verificar que δ_{x_0} é uma distribuição. Tal distribuição é conhecida por **Distribuição de Dirac**, em homenagem ao físico inglês Paul A.M. Dirac (1902-1984). Entretanto, mostra-se que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que:*

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

De fato, suponhamos que a distribuição δ_{x_0} *é definida por alguma função* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Então tem-se:*

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Tomando $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *definida por:* $\xi(x) = \|x - x_0\|^2 \varphi(x)$, *segue-se que:*

$$\xi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \xi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \|x - x_0\|^2 \varphi(x)dx = 0, \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Portanto, tem-se $\|x - x_0\|^2 u(x) = 0$ *quase sempre em* Ω, *logo* $u(x) = 0$ *quase sempre em* Ω, *isto é,* $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *ou seja,* $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *que é uma contradição.*

Com essa noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas:

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega), 1 \leq p < \infty.$$

2.9 Convergência e Derivada Distribucional

Com o intuito de estudar os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$

A motivação no conceito de derivada fraca e, posteriormente, o conceito de derivada distribucional, dado por Sobolev, se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada (no sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear:

$D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, tal que:

$$\langle D^{\alpha}T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^{\alpha}\varphi\rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação:

$$D^{\alpha} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que:

$$\lim_{v\longrightarrow\infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v\longrightarrow\infty} D^{\alpha}T_v = D^{\alpha}T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Observação: Outro resultado interessante a ser mencionado é que a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, que não é, em geral, uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 6 *Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma:*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x < 0 \end{cases},$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$.

Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Como $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\Omega)$, basta verificar que $u' = \delta_0$.

De fato:

$$\langle u', \varphi\rangle = -\langle u, \varphi'\rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \int_{\infty}^{0} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \delta_0, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev.

Observação: Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção derivada no sentido das distribuições, isto é:

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u} \forall\, |\alpha| \leq k,$$

é uma conseqüência simples da fórmula de integração de Gauss.

2.10 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais, que são os espaços de Sobolev.

2.10.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular Γ. Foi observado na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Viu-se que $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$, pois estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p(\Omega)$; tais espaços serão denominados *Espaços de Sobolev.*

O espaço vetorial $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é o espaço das (classes de) funções reais $v : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis, tais que $|v|^p$ é integrável a *Lebesgue* em Ω.

Este espaço quando munido da norma:

$$|v|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

é espaço de *Banach* ver ([4]) .

O conjunto de todas as funções mensuráveis v essencialmente limitadas em Ω é denotado por $L^\infty(\Omega)$, define-se a norma de v por:

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = supess\, |v(x)|\,, \forall v \in L^\infty(\Omega)$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é também um espaço de *Banach* ver ([4]) .

No caso particular onde $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*. Neste caso o produto interno é dado por:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx,$$

cuja norma induzida é:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$. Em símbolo temos:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{multi-índice, com } \ |\alpha| \leq m\}$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Em todos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach*.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, denotamos por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, \ |\alpha| \leq m\},$$

as derivadas D^{α}, evidentemente, no sentido das distribuições.

Define-se em $H^{m}(\Omega)$ o produto escalar:

$$((u,v))_{H^{m}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} \left(D^{\alpha}u, D^{\alpha}v\right)_{L^{2}(\Omega)} dx, \forall u, v \in H^{m}(\Omega),$$

com norma induzida por este produto escalar dada por:

$$\|u\|_{H^{m}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} (D^{\alpha}u)^{2}_{L^{2}(\Omega)} dx \right)^{1/2}$$

pode ser mostrado que que $H^{m}(\Omega)$ é espaço de *Hilbert separável.*ver ([4])

Para se ter uma idéia mais apurada dos espaços de Sobolev, descrevemos alguns casos particulares.

Em dimensão $n = 1$, temos,

$$H^{1}(a,b) = \left\{u \in L^{2}(a,b)\,; u^{'} \in L^{2}(a,b)\right\}, \;\; u^{'} = \frac{du}{dt}$$

Neste caso

$$\|u\|^{2}_{H^{1}(a,b)} = \int_{a}^{b} \left[u(t)\right]^{2} dt + \int_{a}^{b} \left[u'(t)\right]^{2} dt$$

Em dimensão $n \geq 2$, teremos

$$H^{1}(\Omega) = \left\{ u \in L^{2}(\Omega)\,; \frac{\partial u}{\partial x_{i}} \in L^{2}(\Omega), \;\; i = 1, \ldots, n \right\}$$

e neste caso,

$$\|u\|^{2}_{H^{1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left[u(x_{1}, x_{2}, \ldots, x_{n})\right]^{2} dx_{1}dx_{2}\ldots dx_{n} + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_{i}}(x_{1}, x_{2}, \ldots, x_{n}) \right)^{2} dx_{1}dx_{2}\ldots dx_{n},$$

ou, de modo mais conciso, escrevemos

$$\|u\|^{2}_{H^{1}(\Omega)} = \int_{\Omega} |u|^{2} dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{2} dx$$

É oportuno observar que, embora o espaço vetorial das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto ocorre porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é "bem maior"que a norma de $L^p(\Omega)$ e por isso $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos seqüência convergentes. Isto motivou a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo a aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. No caso $p = 2$ denotaremos esta aderência por $H_0^m(\Omega)$.

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham papel fundamental na Teoria dos *Espaços de Sobolev* e por conseguinte, na Teoria das EDP's.

Teorema 10 *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem funções $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Demonstração 18 *ver [24].*

Proposição 5 (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$) *Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n+1$ funções $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de $L^2(\Omega)$, tais que:*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Demonstração 19 *ver [24].*

De posse destes dois resultados podemos concluir que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, linear, contínuo e isométrico.

Lema 7 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\,|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}$$

Demonstração 20 *ver [25].*

Observação: Utilizando desigualdade de Poincaré podemos concluir que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

De fato, consideremos a norma em $H_0^1(\Omega)$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, tem-se:

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = |v|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)} \geq |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)}$$

Da desigualdade de Poincaré-Friedrichs, obtém-se:

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (1+C)\,|\nabla v|^2_{L^2(\Omega)}$$

Conclui-se das desigualdades acima que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

2.11 Espaços $L^p(0,T;X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real, com a norma $\|\cdot\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto E. Uma função vetorial $\varphi :]0,T[\to X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples $\varphi : (0,T) \longrightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i} \varphi_i$$

onde cada $E_i \subset (0,T)$ é mensurável, $i = 1,2,\ldots,k$, e os conjuntos E_i são dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, $i = 1,2,\ldots,k$, definimos a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t)\,dt = \sum_{i=1}^{k} m(E_i)\,\varphi_i$$

Dizemos que uma função vetorial $u : (0,T) \longrightarrow X$ é Bochner integrável ($\mathcal{B}-$*integrável*) se existir uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

(i) $\varphi_\nu \longrightarrow u$ em X, q.s em $(0,T)$;

$$(ii)\ \lim_{k,m\longrightarrow\infty}\int_0^T \|\varphi_k(t)-\varphi_m(t)\|_X\,dt=0$$

Neste caso, a integral de *Bochner* de u, é por defini ção, o vetor de X dado por

$$\int_0^T u(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^T \varphi_\nu(t)\,dt$$

onde o limite é considerado na norma de X.

Uma função vetorial $u:(0,T)\subset\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{X}$ é fracamente mensurável quando a função numérica $t\mapsto\langle\Phi,u(t)\rangle$ for mensurável, $\forall\Phi\in X'$, onde X' é o dual topológico de X; dizemos que u é fortemente mensurável quando u for limite quase sempre de uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t\mapsto\|u(t)\|_X$ é integrável a Lebesgue.

Aqui denotaremos por $L^p(0,T;X),1\leq p<\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u:(0,T)\longrightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t\mapsto\|u(t)\|_X^p$ é integrável à Lesbegue em $(0,T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)}=\left(\int_0^T\|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p}$$

Quando $p=2$ e $X=H$ é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;H)$ é também um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)}=\int_0^T(u(s),v(s))_H\,ds$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representaremos o espaço de Banach das (classes de) funções

$u:(0,T)\subset\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{X}$,

que são fortemente mensuráveis e tais que $t\mapsto\|u(t)\|_X\in L^\infty(0,T)$. A norma em $L^\infty(0,T;X)$ é definida por

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)}=supess_{t\in]0,T[}\,||u(t)||_X$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^q(0,T;X')$, onde p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. No caso, $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0,T;X')$. A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral:

$$\langle u, v\rangle_{(L^p(0,T;X))' \times L^p(0,T;X)} = \langle u, v\rangle_{L^q(0,T;X') \times L^p(0,T;X)}$$

Definição 14 *Uma função $f : [0,T] \to X$ é integrável se existe uma seqüência $\{S_k\}_k$ de funções vetoriais simples, tal que,*

$$\int_0^T ||S_k(t) - f(t)||_X dt \to 0, \ \ com \ k \to \infty$$

se f é integrável, define-se

$$\int_0^T f(t)d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_0^T S_k(t)dt$$

A expressão $\int_0^T f(t)d\mu$ é dita integral de Bochner de f, em relação a μ.

Exemplo 7 *Sejam $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$. Consideremos a função $T_u : \mathcal{D}(0,T) \longrightarrow X$, definida por*

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(s)\,\varphi(s)\,ds,$$

onde a integral é calculada no sentido de Bochner em X. A aplicação T_u é linear e contínua de $\mathcal{D}(0,T)$ em X e por esta razão é denominada distribuição vetorial. A distribuição T_u é univocamente determinada por u e, neste sentido, podemos identificar u com a distribuição T_u por ela definida e, portanto, $L^p(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;X)$ com injeção contínua e densa.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X, o qual denotaremos por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 15 *Seja $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Por $C^0([0,T];X)$, $0 < T < \infty$, estamos representando o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0,T] \longrightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X$$

Por $C_w^0([0,T];X)$, denotaremos o espaço das funções $u : [0,T] \longrightarrow X$ fracamente contínuas, isto é, a aplicação $t \mapsto \langle v, u(t)\rangle_{X',X}$ é contínua em $[0,T], \forall v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de Hilbert, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \longmapsto (u(t), v)_H$, $v \in H$.

Vamos enunciar e demonstrar um teorema sobre regularidade, que será de grande importância para garantir as condições do teorema de existência, antes porém, precisamos de três lemas auxiliares, os quais omitiremos as devidas provas ([4]). Vejamos:

Lema 8 *Se $u \in L^2(0,T,X)$, $u' \in L^2(0,T,X')$ e $\theta \in C^\infty([0,T])$, então:*

1) $\dfrac{d}{dt}(u,\eta)_X = \langle u', \eta\rangle_{X'X} \ \ \forall \eta \in X$

2) $\dfrac{d}{dt}(\theta u) = \theta u' + \theta' u$

Demonstração 21 *ver [21].*

Lema 9 *Consideremos o espaço de Hilbert $W = \{u;\ u \in L^2(0,T;X)$ e $u' \in L^2(0,T;X')\}$, como oproduto interno*

$$(u,v)_W = (u,v)_{L^2(0,T;X)} + (u',v')_{L^2(0,T;X')}$$

Então o conjunto dos vetores $v = \theta\eta$ com $\theta \in C^\infty([0,T])$ e $\eta \in X$ é total em W.

Demonstração 22 *ver [21].*

Teorema 11 *(de Regularidade) Seja Y um espaço de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$, X é denso em Y e a imersão de X em Y é contínua. Tem-se:*

i) Se $u \in W$ então $u \in C^0([0,T];Y)$

ii) Se u, v são funções satisfazendo i) então a função $t \longrightarrow (u(t), v(t))_Y$ é absolutamente contínua e vale a seguinte igualdade:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v(t))_Y = \langle u'(t), v(t)\rangle_{X'X} + \langle u(t), v'(t)\rangle_{X'X},$$

onde a derivada no primeiro membro da igualdade é a derivada no sentido das distribuições sobre $(0,T)$ da função $(u(t), v(t))_Y$

Demonstração 23 *ver [21].*

[Lema fundamental do calculo variacional] Seja f uma função continua em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que satisfaz a seguinte igualdade

$$\int_\Omega f(x)h(x)d\Omega = 0,$$

para todas as funções de suporte compacto h em Ω, então $f \equiv 0$.

Demonstração 24 *ver [22].*

Capítulo 3

Equação parabólica não linear com termo de reação-difusão não local

3.1 Apresentação do Problema de Evolução

Neste capítulo, vamos estudar a existência de solução fraca , forte, unicidade e decaimento exponencial para o PVI (P) dado a seguir:

$$(P)\quad \begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u + \lambda|u|^{p-2}u = f & em\ \ \Omega \times (0,T) \\ u(t) = 0 & sobre\ \ \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & em\ \ \Omega \end{cases}$$

Aqui Ω denota um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$, λ uma constante não negativa, $p \geq 2$, sendo u escalar.

A existência será feita, via método de Faedo Galerkin, teorema de compacidade de Aubin-Lions e alguns resultados importantes de Análise Funcional.

No que se segue, utilizaremos as seguintes notações: $((\ ,\ ))$; $\|\cdot\|$; $(\ ,\ )$; $|\cdot|$; para designar o produto interno e a norma em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente. Aqui estamos considerando o espaço $H_0^1(\Omega)$, munido da "norma do gradiente", ou seja, se $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, então $\|u(t)\| = |\nabla u(t)|$. Também estamos considerando $H^{-1}(\Omega)$ como sendo o dual topológico de $H_0^1(\Omega)$.

3.2 Hipóteses

Assumiremos as seguintes hipóteses:

$\mathcal{H}_1) u_0 \in L^2(\Omega)$,

$\mathcal{H}_2) a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é limitada com* $0 < a^- \leq a(l) \leq a^+, l \in \mathbb{R}$,

$\mathcal{H}_3) a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é Lipschitz-contínua com* $|a(s) - a(r)| \leq A|s - r|, s, r \in \mathbb{R}$,

$\mathcal{H}_4) l : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, é uma forma linear e contínua, isto é, $\exists g \in L^2(\Omega)$ tal que:
$l(u) = l_g(u) = \int_\Omega g(x)u(x)dx \ \forall u \in L^2(\Omega)$

$\mathcal{H}_5) f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$

3.3 Existência de Solução Fraca Global

Teorema 12 *Seja* $p \geqslant 2$, $\lambda > 0$ *e* $0 < T < +\infty$. *Se as hipóteses H1-H5 forem satisfeitas, então existe uma solução fraca u da equação, tal que:*

i) $u \in \left[L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T); L^2(\Omega)\right]$

ii) $u_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$

iii) $u(0) = u_0$

iv) $\frac{d}{dt}(u, h) + a(l(u)) \int_\Omega \nabla u.\nabla h dx + \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} uh dx = \int_\Omega fh dx$

Para toda $h \in H_0^1(\Omega)$ *no sentido* $\mathcal{D}'(0, T)$

Demonstração : Para demonstrar o teorema de solução fraca vamos dividi-la em três partes, problema aproximado, estimativas a priori e prolongamento da solução.

(Problema Aproximado)

Considere $\{w_j\}_{j\in N}$ a base hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$.

Definimos então o conjunto $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ como sendo o subespaço gerado por $w_1, w_2, ..., w_m$. O problema aproximado (PA), associado a (P) consiste em encontrar uma solução sob a forma:

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} \Theta_{jm}(t) w_j(x) \in V_m,$$

Assim, como u_m define uma solução para nosso problema, definimos o seguinte problema aproximado (PA):

$$(PA) \quad \left\| \begin{array}{l} (u'_m, h) - a(l(u_m))(\Delta u_m, h) + \lambda(|u_m|^{p-2}u_m, h) = (f, h) \\ \\ \{u_m(0)\} = \{u_{0m}\} \ \ em \ \ L^2(\Omega), \end{array} \right.$$

Onde u_{0m} é uma aproximação de u_0, ou seja, existe $\alpha_{jm} \in \mathbb{R}\,(j = 1, ..., m)$ tal que:

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm} w_j \longrightarrow u_0, \text{ forte em } L^2(\Omega)$$

Substituindo $u_m(t)$ e $h = w_i(x)$, para $i = 1, ..., m$, em (PA), e usando o fato de que $\{w_j\}$ em $H_0^1(\Omega)$ temos:

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} \Theta'_{jm}(t) w_j(x), w_i(x)\Big) - a\Big(l\Big(\sum_{j=1}^{m} \Theta_{jm}(t) w_j(x)\Big)\Big)\Big(\Delta\Big(\sum_{j=1}^{m} \Theta_{jm}(t) w_j(x)\Big), w_i(x)\Big)$$

$$+\lambda(\Big(\sum_{j=1}^{m} |\Theta_{jm}(t) w_j(x)|^{p-2} \Theta_{jm}(t) w_j(x), w_i(x)) = (f, w_i(x))$$

ou seja,

$$(\overline{PA}) \begin{cases} \Theta'_{jm}(t) = \lambda_j a(l(u_m))(\Delta u_m, w_i) - \lambda(|u_m|^{p-2}u_m, w_i) + (f, w_i) \\ \\ \Theta_{jm}(0) = \alpha_{jm} \ \ (j = 1, ..., m) \end{cases}$$

Colocando o problema em forma matricial temos

$$\begin{cases} \text{Y'=F(t,Y)} \\ Y(0) = Y_0, \quad onde \quad Y_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{mm} \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

Temos portanto um sistema matricial equivalente a um sistema de edo's de 1ª ordem.

(Estimativas a Priori)

Estimativa I:

Pelo Teorema de Carátheodory, sabemos que nosso problema tem uma solução local em algum intervalo $[0, t_n[, 0 < t_n < T$. Assim, para mostrar que podemos estender essa solução para todo intervalo usaremos a Estimativa I calculada a seguir.

Tomemos $h = u_m$ no problema aproximado PA, dessa maneira, temos:

$$(u'_m, u_m) - a(l(u_m))(\Delta u_m, u_m) + \lambda(|u_m|^{p-2}u_m, u_m) = (f, u_m) \tag{3.1}$$

Agora,

$\frac{d}{dt}|u_m|^2 = \frac{d}{dt}(u_m, u_m) = (u'_m, u_m) + (u_m, u'_m) = 2(u'_m, u_m)$,
logo
$(u'_m, u_m) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2$ e pela primeira identidade de Green

$\int_\Omega (-\Delta u)vdx - \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$, tomando $v = u_m$, e como $u_m|_\Gamma = 0$ temos:

$$(-\Delta u_m, u_m) = \int_\Omega (-\Delta u_m)u_m dx = \int_\Omega \nabla u_m.\nabla u_m dx = |\nabla u_m|^2 = \|u_m\|^2$$

Podemos escrever 3.1 como sendo:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + a(l(u_m))\|u_m\|^2 + \lambda|u_m|^p = (f, u_m) \tag{3.2}$$

Utilizando as desigualdades de Hölder e Poincaré, podemos reescrever o membro do lado direito da equação 3.2 como

$$\int_\Omega |fu_m|dx \leq C\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{a^-}{2}\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

Como a função a é limitada inferiormente, pode escrever a inequação da forma

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + a^-\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 2\lambda\|u_m\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Integrando em $[0,t]$, obtém-se

$$\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + a^- \int_0^t \|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}dt + 2\lambda\int_0^t \|u_m\|^p_{L^p(\Omega)}dt \leq \|u_m(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t \|f\|^2_{L^2(\Omega)}dt \leq C$$

onde C é uma constante que não depende de t e m.

Concluímos então que

$$u_m \text{ é limitada em } L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), \tag{3.3}$$

$$u_m \text{ é limitada em } L_2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.4}$$

$$u_m \text{ é limitada em } L_p(0,T;L_p(\Omega)) \tag{3.5}$$

Estimativa II:

Usando o sistema (P) como referência e seu respectivo problema aproximado (PA), tem-se:

$$u'_m = a(l(u_m))\Delta u_m - \lambda|u_m|^{p-2}u_m + f \in H^{-1}(\Omega) \tag{3.6}$$

Observe que $-a(l(u_m))\Delta u_m$ define um elemento de $H^{-1}(\Omega)$, dado pela dualidade:

$$\Big\langle -a(l(u_m))\Delta u_m, h_1 \Big\rangle = a(l(u_m))\int_\Omega \nabla u_m.\nabla h_1 dx$$

$\forall\ h_1 \in H_0^1(\Omega)$(3.7)

Usando o fato de que $-a(l(u_m))\Delta u_m \in H^{-1}(\Omega)$, ou seja, pertencem ao dual topoló-

gico de $H_0^1(\Omega)$, isto é, são formas lineares e contínuas, concluimos que ambos os termos são limitados.

Portanto, temos que:

$$(u'_m) \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \tag{3.8}$$

(Passagem ao Limite)

Pelo corolário de Banach-Alouglu-Bourbaki, podemos extrair uma subsequência de (u_m) que ainda denotaremos por (u_m) tais que:

$$u_m \overset{\star}{\rightharpoonup} u \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.9}$$

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{fraco em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{3.10}$$

$$(u'_m) \rightharpoonup u' \text{ fraco em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \tag{3.11}$$

Consequentemente:

$$\int_0^T (u_m,h)dt \longrightarrow \int_0^T (u,h)dt \ \forall \ h \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.12}$$

$$\int_0^T ((u_m,h))dt \longrightarrow \int_0^T ((u,h)dt \ \forall \ h \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{3.13}$$

Usando as convergências 3.9, 3.11 e o Lema de Compacidade de Aubin-Lions, observando que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, segue:

$$(u_m) \longrightarrow u \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \qquad \text{para todo } T>0 \tag{3.14}$$

Uma vez que $z \to |z|^{p-2}z$ é uma função contínua, deduz-se

$|u_n|^{p-2}u_n \to |u|^{p-2}u$ qtp em $\Omega\times]0,T]$

Observando que $p' = \frac{p}{p-1} > 1$ é o conjugado de p>1 conclui-se que

$$|u_n|^{p-2}u_n \ \textit{é limitada em}\ L_{p'}(0,T;L_{p'}(\Omega))$$

Além disso, podemos concluir que

$$|u_n|^{p-2}u_n \rightharpoonup |u|^{p-2}u \ \textit{em}\ L_{p'}(0,T;L_{p'}(\Omega))$$

o que implica que

$$\int_0^T \int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n h dx dt \to \int_0^T \int_\Omega |u|^{p-2}u h dx dt, \forall \chi \in L_p(0,T;L_p(\Omega))$$

Precisamos mostrar agora, que:

$$a(l(u_m)) \int_0^T \int_\Omega \nabla u_m . \nabla h dt \longrightarrow a(l(u)) \int_0^T \int_\Omega \nabla u . \nabla h dt \tag{3.15}$$

Para todo $h \in L^2(\Omega)$

É suficiente provarmos que:

$$a(l(u_m)) \longrightarrow a(l(u)) \ \textit{em}\ L^2(0,T), \forall\ T > 0 \tag{3.16}$$

Devido a continuidade de a basta mostrarmos que:

$$l(u_m) \longrightarrow l(u) \ \textit{forte em}\ L^2(0,T) \tag{3.17}$$

De fato, pois:

$$\int_0^T |l(u_m) - l(u))|^2 dt = \int_0^T |l(u_m - u)|^2 dt \leq C_5 \int_0^T |u_m - u|^2 dt < \varepsilon$$

Este último resultado, decorre da convergência 3.14

3.3.1 Verificação das Condições Iniciais

Do resultado de regularidade temos que:

$$u \in C^0(0, T; L^2(\Omega)) \tag{3.18}$$

Dessa maneira, faz sentido calcularmos $u(0)$. Seja $\theta \in C^1(0, T; \mathbb{R})$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$

Da convergência 3.12 obtemos:

$$\int_0^T (u_m, z)\theta dt \longrightarrow \int_0^T (u, z)\theta dt \tag{3.19}$$

onde $z \in L^2(\Omega)$

Integrando por partes 3.19 podemos escrever:

$(u_m(t), z)\theta(t) - (u_m(0), z)\theta(0) - \int_0^T (u_m, z)\theta' dt \longrightarrow (u(t), z)\theta(t) - (u(0), z)\theta(0) - \int_0^T (u, z)\theta' dt$

Dessa maneira, temos:

$$-(u_m(0), z) - \int_0^T (u_m, z)\theta' dt \longrightarrow -(u(0), z) - \int_0^T (u, z)\theta' dt \tag{3.20}$$

Usando a convergência 3.12 em 3.20 temos:

$(u_m(0), z) \longrightarrow (u(0), z)$

Como u_{0m} converge forte para u_0 em $L^2(\Omega)$, consequentemente fraco em $L^2(\Omega)$. Desta maneira:

$(u_{0m}, z) \longrightarrow (u_0, z)$

Da unicidade do limite tem-se:

$(u(0), z) \longrightarrow (u_0, z) \ \forall z \in L^2(\Omega)$

Portanto,

$$u(0) = u_0 \tag{3.21}$$

3.3.2 Existência de Solução Forte Global

Se considerarmos os dados mais regulares obtemos a solução mais regular dado pelo teorema abaixo:

Teorema 13 *Suponha-se que $u_0 \in L_\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $\int_0^T \|f\|_{L_\infty} dt \leq C$, então o problema (P) admite uma solução forte u.*

Demonstração :

Multiplicando a equação do problema por Δu e integrando em Ω, resulta em

$$\int_\Omega u_t \Delta u dx - \int_\Omega a(l(u))(\Delta u)^2 dx + \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u \Delta u dx = \int_\Omega f \Delta u dx$$

Aplicando o teorema de Green no primeiro e último termos, obtém-se

$$\int_\Omega \nabla u_t \nabla u dx + \int_\Omega a(l(u))(\Delta u)^2 dx + \lambda(p-1)\int_\Omega |u|^{p-2}|\nabla u|^2 dx = -\int_\Omega f\Delta u dx$$

Após isso, integramos em $[0,T]$,

$$\frac{1}{2}\int_0^T |\nabla u|^2 dx + \int_0^T\int_\Omega a(l(u))(\Delta u)^2 dxdt + \lambda(p-1)\int_0^T\int_\Omega |u|^{p-2}|\nabla u|^2 dxdt$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \int_0^T\int_\Omega f\Delta u dxdt$$

Pela desigualdade de Cauchy e o limite inferior de a, conclui-se que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + a^- \int_0^T\int_\Omega (\Delta u)^2 dxdt \leq C(\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + \int_0^T\int_\Omega f^2 dxdt)$$

Utilizando a hipótese do teorema, prova-se que $\Delta u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Assim, podemos deduzir que

$$u_t = a(l(u))\Delta u - \lambda|u|^{p-2}u + f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

Portanto a solução é uma solução forte, no sentido de $u_t, \Delta u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

3.4 Unicidade

Teorema 14 ***(de Unicidade)****: Seja $p \geqslant 2$, $\lambda \geq 0$ e $0 < T < +\infty$. Se as hipóteses H1-H5 forem satisfeitas, então o problema tem, no máximo uma solução.*

Demonstração :

Sejam $u_1, u_2 : [0,T] \longrightarrow L^2(\Omega)$, funções vetoriais soluções de (P), temos então:

$$\frac{d}{dt}(u_1,h) + a(l(u_1))\int_\Omega \nabla u_1.\nabla h dx + \int_\Omega \lambda|u_1|^{p-2}u_1 h dx = \int_\Omega fh dx$$

$$\frac{d}{dt}(u_2,h) + a(l(u_2))\int_\Omega \nabla u_2.\nabla h dx \int_\Omega \lambda|u_2|^{p-2}u_2 h dx = \int_\Omega fh dx$$

Subtraindo as duas equações anteriores e escolhendo $\phi = u_1 - u_2$ e $h = \phi$, obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\phi|^2 + a(l(u_1))\|\phi\|^2 + \lambda(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2, u_1 - u_2)$$
$$\leq |a(l(u_2)) - a(l(u_1))| \int \nabla u_2 \nabla \phi dx$$

No passo anterior usamos o fato que $\frac{d}{dt}((u_1 - u_2), h) + a(l(u_1)) \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2)\nabla h dx = \Big(a(l(u_2)) - a(l(u_1))\Big) \int_\Omega \nabla u_2 \nabla h dx$

Com efeito,pois:

$$\Big(a(l(u_2)) - a(l(u_1))\Big) \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla h dx = a(l(u_2)) \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla h dx$$

$$-a(l(u_1)) \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla h dx = a(l(u_2)) \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla h dx$$

$$-a(l(u_1)) \int_\Omega \nabla u_1 . \nabla h dx + \frac{d}{dt}(u_1, h) + a(l(u_1)) \int_\Omega \nabla u_1 . \nabla h dx - \frac{d}{dt}(u_2, h)$$

$$-a(l(u_2)) \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla h dx.$$

Segue portanto o resultado.

Usando o fato que $(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2, u_1 - u_2) \geq 0$, obtemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\phi|^2 + a(l(u_1))\|\phi\|^2 \leq |a(l(u_2)) - a(l(u_1))| \int \nabla u_2 \nabla \phi dx$$

Pelas propriedades de a e l, tem-se que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\phi|^2 + a^-\|\phi\|^2 \leq A|l(u_2) - l(u_1)|\|u_2\|\|\phi\| \leq$$

$$A|l(u_2 - u_1)|\|u_2\|\|\phi\| \leq C|u_2 - u_1|\|u_2\|\|\phi\|$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\phi|^2 + a^-\|\phi\|^2 \leq M(t)|\phi|^2$$

com

$$M(t) = \frac{C^2}{4a^-}\|u_2\|^2$$

Definindo $\alpha = |\phi|^2$, obtemos que

$$\frac{d\alpha}{dt} \leq M(t)\alpha$$

Logo $\alpha(t) = 0$ e portanto $u_1 = u_2$.

3.5 Decaimento Exponencial da Solução

Nesta seção, estudaremos o comportamento da solução quando $t \to \infty$, neste caso, mostraremos que a energia associada ao sistema decai exponencialmente. Para isso usaremos a função de energia associada ao sistema como sendo

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx$$

Teorema 15 *Seja $p \geq 2$ e $\lambda \geq 0$, considere $f(x,t) = 0$, então a energia satisfaz*

$$E(t) \leq E(0)e^{-\Theta t}$$

onde Θ é uma constante positiva que apenas depende de a^- e Ω.

Demonstração : Considerando o problema (P) e multiplicando-o por u e integrando em Ω, obtemos

$(u_t, u) - a(l(u))(\Delta u, u) + (|u|^{p-2}u, u) = 0$

Desta forma, teremos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega a(l(u))|\nabla u|^2 dx + \lambda\int_\Omega |u|^p dx = 0$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}E(t) + 2a(l(u))|\nabla u|^2 + 2\lambda\|u\|^p \leq 0$$

Como $\lambda\|u\|^p \geq 0$, temos

$$\frac{d}{dt}E(t) + 2a(l(u))|\nabla u|^2 \leq 0$$

Utilizando H2 e a desigualdade de Poincaré,

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -2a^-|\nabla u|^2$$

$$\leq -2a^-C_1|u|^2 \leq -2C_2a^-E(t)$$

Logo,

$$E(t) \leq E(0)e^{-\Theta t}$$

com $\Theta = -2C_2a^-$.

Segue portanto o resultado requerido.

Lema 10 *Seja $\Psi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função não negativa e limitada. Se existem duas constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que*

$$\sup_{t\leq s\leq t+1} \Psi^{1+\beta}(s) \leq \alpha[\Psi(t) - \Psi(t+1)], \forall t \geq 0$$

Então existem constantes positivas C e γ tais que

$$\begin{cases} \Psi(t) \leq Ce^{-\gamma t}, & \forall t \geq 0, \quad \textit{quando } \beta = 0 \\ \Psi(t) \leq C(t+1)^{-\frac{1}{\beta}}, & \forall t \geq 0, \quad \textit{quando } \beta > 0 \end{cases}$$

Demonstração 25 *ver [29].*

Teorema 16 *Seja $p \geq 2$ e $\lambda \geq 0$, considere f(x,t)≠0, então a energia satisfaz*

$$E(t) \leq E(0)e^{-\Theta t}$$

onde Θ é uma constante positiva que apenas depende de a^- e Ω.

Demonstração 26 *ver [17].*

Capítulo 4

Análise Numérica

Neste capítulo vamos fazer um estudo do nosso problema de valor inicial com uma abordagem numérica. Utilizaremos para isso dois métodos para discretizar nossa equação no espaço e no tempo, o método de elementos finitos (FEM) e o método de diferenças finitas, respectivamente.

Primeiramente, vamos mostrar as definições básicas destes dois métodos, para maiores informações ver [15], [22], [13] e [34]. Em seguida vamos utilizar a formulação variacional para discretizar nossa equação e obter, assim, uma forma prática de simular nosso problema.

4.1 Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos (MEF) é uma técnica para construção de soluções aproximadas para problemas de valor de fronteira. O método consiste em dividir o domínio da solução em um número finito de subdomínios, os elementos finitos, e usando conceitos de formulação variacional construímos uma aproximação da solução nesta coleção de subdomínios.

Formalmente, um elemento finito consiste na seguinte tripla:

- Uma geometria K
- Um espaço de funções polinomiais P em K
- Um conjunto de $n = \dim(P)$ funcionais $L_i, i = 1, 2, ..., n$ definindo os graus de liberdade

4.1.1 Implementação básica do método de elementos finitos

Considere o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -u_{xx} + p(x)u_x + r(x)u = f(x), x \in \omega_i = (0, L) \\ u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Para aplicar o MEF neste problema em 1D, temos que seguir os seguintes passos.

Obtenção da forma fraca

A fim de aplicar o método proposto devemos primeiramente obter a forma fraca da equação 4.1, dada por

$$\int_{x_1}^{x_n} v_x u_x dx + r \int_{x_1}^{x_n} vudx = \int_{x_1}^{x_n} vfdx \tag{4.2}$$

Aproximação da solução

O próximo passo é subdividir o domínio, neste caso o intervalo]0,L[, em N subintervalos nos quais são chamados elementos finitos. Nestes subintervalos definem-se funções aproximadoras ou interpolantes, comumente escolhem-se funções polinomiais pois se consegue uma boa aproximação para a grande maioria dos problemas.

Fazendo uso da função interpoladora ϕ, aproximamos u por uma função $\overline{u}$ dada por $\overline{u}(x) = \phi_i(x)\widehat{u}(x)$. Escolhendo v como sendo ϕ obtermos

$$\Big(\int \frac{\partial \phi^T(x)}{dx}\frac{\partial \phi(x)}{dx}dx\Big)\widehat{u} + r\Big(\int \phi^T(x)\phi(x)dx\Big)\widehat{u} - \int \phi f dx = 0 \tag{4.3}$$

Podendo reduzir para a seguinte equação $(K + rM)\widehat{u} = F$.

Para problemas de dimensão 2, por exemplo, as subdivisões se dão por meio de uma certa geometria, sendo as mais comuns as escolhas por malhas triangulares ou utilizando tetraedros pois estas se adaptam bem ao contorno dos domínios.

A escolha tanto da malha quanto das funções interpoladoras são de grande importância pois malhas muito finas com muitos nós apresentam grande precisão mas geram maiores

custos computacionais.

Modelo do método

A última etapa consiste em calcular a solução aproximada do seu problema. Após a etapa anterior nosso objetivo é calcular a solução aproximada $\widehat{u}$ resolvendo o sistema $(K + rM)\widehat{u} = F$.

4.1.2 Exemplo de aplicação do método de elementos finitos

Considere a equação do calor em duas dimensões

$$\begin{cases} u_t = \alpha\Delta u, (x, y, t) \in \Omega \times [0, T] \\ u(x, y, 0) = 0, (x, y) \in \Omega \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, 0, t) = 100, u(x, 1, t) = 500, t \in [0, T] \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

Em seguida tomamos uma função teste (polinômio interpolador) ϕ e multiplicamos 4.4 por ela,integrando em sequência

$$\int_\Omega u_t \phi_j dx = \int_\Omega \alpha \nabla u \nabla \phi_j dx \quad (4.4)$$

Tomando $u = \phi_i(x)\widehat{u}(t)$ obtemos

$$\int_\Omega \phi_i \phi_j dx \widehat{u}' = \int_\Omega \nabla \phi_i \nabla \phi_j dx \widehat{u} \quad (4.4)$$

ou numa forma reduzida, $M\widehat{u}' = A\widehat{u}$. Discretizando também no tempo temos $(M + \Delta tA)\widehat{u}^{(n)} = M\widehat{u}^{(n-1)}$. Esta discretização temporal será abordada na próxima sessão.

Para resolver numericamente esta equação foi utilizada uma malha triangular não uniforme com espaçamento de 0.1 e com $\Delta t = 0.01$. A figura 4.1 ilustra a malha utilizada.

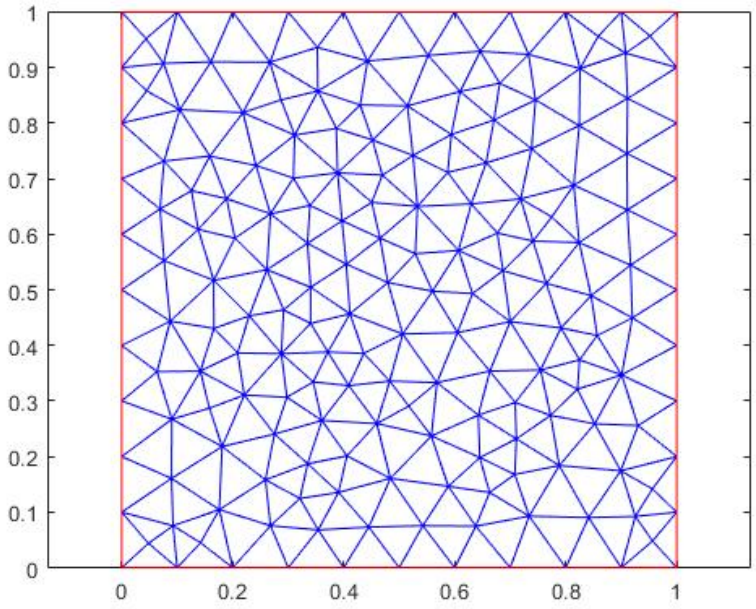

Figura 4.1: Malha

As figuras seguintes mostram o resultado obtido para alguns tempos. O estado estacionário foi obtido no passo 277.

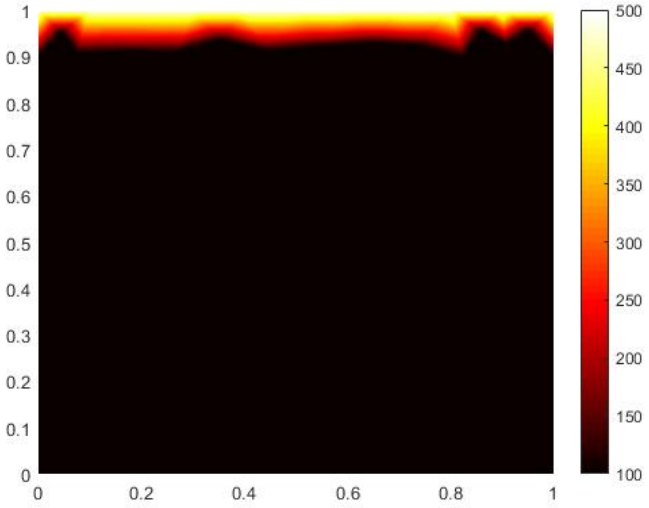

Figura 4.2: t=0

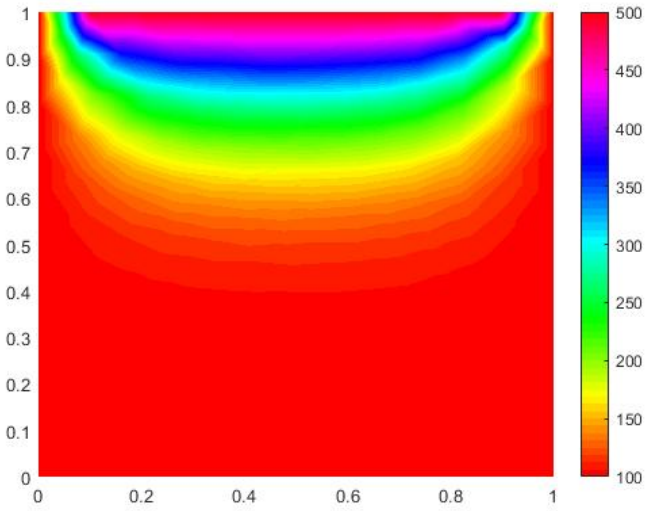

Figura 4.3: t=0.03

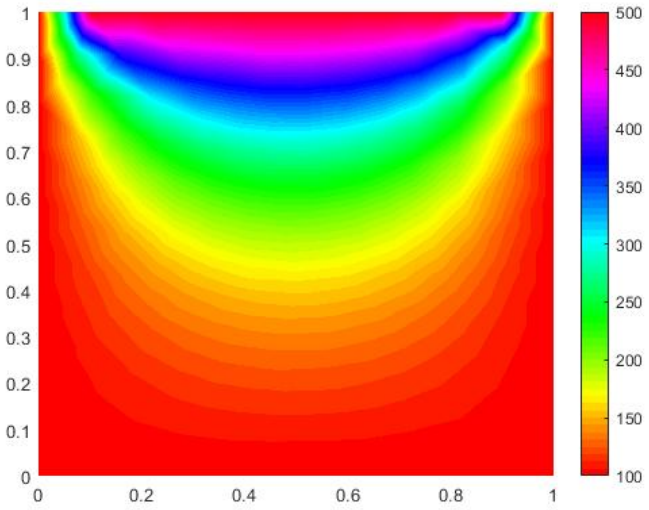

Figura 4.4: t=0.12

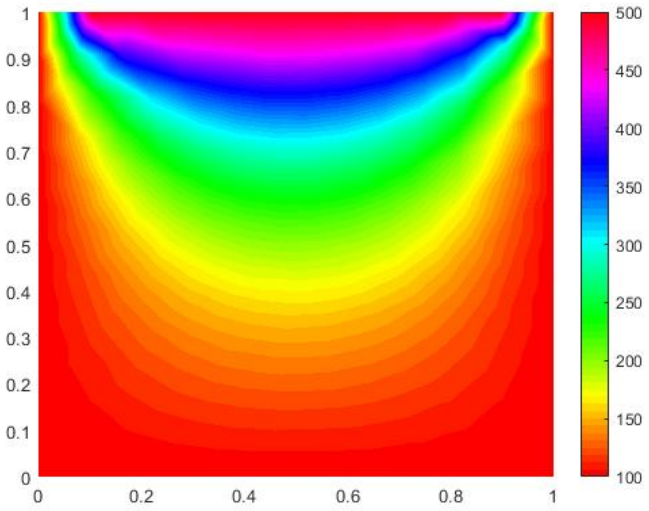

Figura 4.5: Solução nos tempos t=0.2,0.3,0.4,0.5 com o termo de difusão

4.2 Método de Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas consiste em particionar o domínio da função incógnita criando um domínio discreto e substituir as derivadas existentes no problema por aproximações de diferenças. Essas aproximações são determinadas pela expansão de Taylor. Assim, chega-se às equações discretizadas que são utilizadas em para encontrar soluções numéricas.

Para isso, é feita a subdivisão do domínio em x e t utilizando um espaçamento Δx e Δt.

Vamos procurar as aproximações da solução u(x,t) sobre os pontos da malha, onde denotaremos por U_j^n,

$$U_j^n \approx u(x_j, t_n)$$

Agora vamos discretizar as derivadas aproximando as derivadas parciais pela diferença de U_j^n com seus pontos vizinhos. Para isso é utilizado a expansão de Taylor em torno de (x_j, t_n).

Teorema 17 *Seja v uma função derivável, até a ordem (k+1) em x, então para cada* (x_j, t_n)*, existe um número* η *entre* x_j *e* x_{j+1} *tal que*

$$v(x_{j+1}, t_n) = v(x_j, t_n) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_j, t_n)\Delta x + ... + \frac{\partial^k v}{\partial x^k}(x_j, t_n)\frac{\Delta x^k}{k!} + \frac{\partial^{k+1} v}{\partial x^{k+1}}(\eta, t_n)\frac{\Delta x^{k+1}}{(k+1)!}$$

onde o último termo representa o erro da aproximação da expansão pelo polinômio de Taylor de ordem k e $\Delta x = x_{j+1} - x_j$.

Demonstração : Ver [34]

Assim, tomando u e expandindo até a ordem 2 em x, temos

$$u(x_{j+1}, t_n) = u(x_j, t_n) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n)\Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\eta_1, t_n)\frac{\Delta x^2}{2}$$

isolando a derivada, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) = \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_n)}{\Delta x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\eta_1, t_n)\frac{\Delta x}{2}$$

Esta expressão é denominada diferença avançada na variável x. Assim usando as aproximações, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) \approx \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x}$$

Analogamente podemos refazer para a variável t. Tomando u e expandindo até a ordem 2 em t, temos

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n)\Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \eta_2)\frac{\Delta t^2}{2}$$

isolando a derivada, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) = \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \eta_2)\frac{\Delta t}{2}$$

Esta expressão é denominada diferença avançada na variável t. Assim usando as aproximações, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) \approx \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t}$$

4.3 Solução semidiscreta

Nesta seção iremos discretizar o problema no espaço. Para isso, tomemos ζ_j uma função teste onde assumimos que ela se anula na fronteira do domínio e é integrável por partes. Assim multiplicamos nossa equação pela função teste, obtendo

$$\int_\Omega u_t \zeta_j dx + a(l(u) \int_\Omega \nabla u_t \nabla \zeta_j dx + \int_\Omega |u|^{p-2} u \zeta_j dx = \int_\Omega f \zeta_j dx$$

Aqui, assumimos que a função teste será definida pela função de interpolação dada por:

$$\zeta_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/(xi - x_{i-1}), \ x \in [x_{i-1}, x_i] \\ (x_{i+1} - x)/(x_{i+1} - x_i), \ x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4.4}$$

A figura 4.6 representa a interpolação ζ dada acima

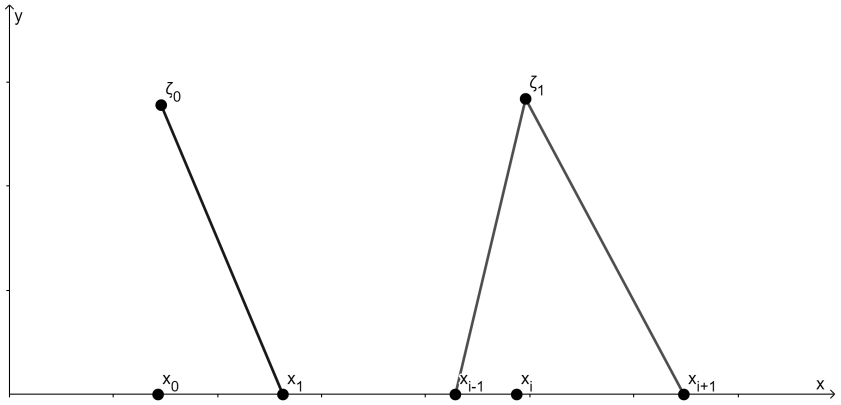

Figura 4.6: Função de interpolação

Podemos também formular o problema semidiscreto tendo como objetivo encontrar os coeficientes $\xi_i(t)$ com

$$u(x,t) \approx \widehat{u}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) \zeta_i(x)$$

tal que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \zeta_i \zeta_j dx \xi_i' + \sum_{i=1}^{n} a(L(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \zeta_i)) \int_\Omega \nabla \zeta_i \nabla \zeta_j dx \xi_i + \int_\Omega g(\xi_i)\zeta_j dx = \int_\Omega f \zeta_j dx \\ \xi_i(0) = \xi_i^0 = u_o \end{cases}$$

onde $g(x,t) = |u|^{p-2}u$. Podemos reescrever o problema acima na forma matricial como

$$\begin{cases} M\xi_i' + A\xi_i + C(u) = F(t) \end{cases}$$

onde $M = \int_\Omega \zeta\zeta dx, A = a(l(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \zeta dx)) \int_\Omega \nabla\zeta\nabla\zeta dx, C = \int_\Omega g(\xi_i)\zeta dx, F = \int_\Omega f\zeta dx$

Assim reduzimos nosso problema em uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

4.4 Solução totalmente discreta

Para finalizar o estudo teórico do problema, discretizamos o mesmo no tempo utilizando diferenças finitas. A discretização temporal será feita utilizando o método de Euler regressivo. Desta maneira, aproximamos a derivada temporal em cada instante de tempo t_n pela diferença finita

$$u'(x,t_n) = \frac{u(x,t_{n+1}) - u(x,t_n)}{\Delta t}$$

Considere U_n a aproximação de $u(x,t_n)$, então o problema totalmente discreto sera calcular U_n de tal forma que se anule na fronteira de Ω e satisfaça

$$\int_\Omega (U_n)_t \zeta dx + a(l(u) \int_\Omega \nabla U_n \nabla \zeta dx + \int_\Omega |U_n|^{p-2} U_n \zeta dx = \int_\Omega f\zeta dx$$

Definindo novamente a base ζ e utilizando $U(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t)\zeta_i(x)$, podemos escrever em forma matricial

$$\begin{cases} (M + \Delta t A(\xi_{n-1}))\xi_n = \Delta t F(t_n) - \Delta t C(\xi_{n-1}) + M\xi_{n-1} \end{cases}$$

4.5 Construção das Matrizes da Discretização

Nas sessões anteriores vimos como discretizar nosso problema afim de que pudessemos chegar numa forma matricial que facilita a implementação computacional. Nesta seção vamos discutir um pouco mais sobre as matrizes geradas.

4.5.1 Matriz de Massa

Vamos definir a forma da matriz de massa, deste jeito vamos calcular as entradas M_{ij} da matriz, lembrando que ela envolve o produto das funções testes, ou seja, $M = \int_\Omega \zeta\zeta dx$.

Como a interpolação é um polinômio de primeiro grau, podemos usar a fórmula de Simpson para calcular a integral de M_{ij}. Como as funções interpoladoras não apresentam entradas para $|i-j| > 1$ podemos calcular apenas as entradas M_{ii}, M_{i+1i} e M_{ii+1}. Todas as outras entradas são nulas. desta forma a matriz de massa M é tridiagonal.

Calculando as entradas M_{ii} usando a fórmula de Simpson, temos

$$M_{ii} = \int_I \zeta_i^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \zeta_i^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \zeta_i^2 dx =$$
$$\frac{0 + 4(\frac{1}{2})^2 + 1}{6} h_i + \frac{1 + 4(\frac{1}{2})^2 + 0}{6} h_{i+1} = \frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3}$$

onde $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Em seguida calculamos as entradas M_{i+1i}

$$M_{i+1i} = \int_I \zeta_i \zeta_{i+1} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \zeta_i \zeta_{i+1} dx =$$
$$\frac{1 * 0 + 4(\frac{1}{2})^2 + 0 * 1}{6} h_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{6}$$

Similarmente encontramos que $M_{ii+1} = \frac{h_{i+1}}{6}$

Portanto a matriz de massa toma forma

$$M = \begin{vmatrix} \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 & \cdots & & 0 \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1}{3}+\frac{h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{h_2}{6} & \frac{h_2}{3}+\frac{h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}}{3}+\frac{h_n}{3} & \frac{h_n}{6} \\ 0 & & \cdots & & 0 & \frac{h_n}{6} & \frac{h_n}{3} \end{vmatrix}$$

A matriz global M pode ser escrita como a soma de n matrizes mais simples

$$M = \begin{vmatrix} \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1}{3} \\ & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & \\ & \frac{h_2}{3} & \frac{h_2}{6} \\ & \frac{h_2}{6} & \frac{h_2}{3} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & \frac{h_n}{3} & \frac{h_n}{6} \\ & \frac{h_n}{6} & \frac{h_n}{3} \end{vmatrix} = M^1 + M^2 + \cdots + M^n$$

Desta forma podemos observar que cada matriz M^I é da forma

$$M^I = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \text{h}$$

4.5.2 Matriz de Força

Agora vamos definir a matriz de força F. Note que por ser definida por $F = \int_\Omega f\zeta dx$ ela depende da função f o que nos impede de ter um cálculo exato. Mesmo assim, podemos aproximar F usando quadratura. Por exemplo, usando a regra do trapezoidal, nós temos

$$F_i = \int_\Omega f\zeta_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\zeta_i dx + \int_{x_i} x_{i+1} f\zeta_i dx$$

$$\approx (f(x_{i-1})\zeta_i(x_{i-1}) + f(x_i)\zeta_i(x_i))h_i/2 + (f(x_{i+1})\zeta_i(x_{i+1}) + f(x_i)\zeta_i(x_i))h_{i+1}/2 =$$

$$(0 + f(x_i))h_i/2 + (f(x_i) + 0)h_{i+1}/2 = f(x_i)(h_i + h_{i+1})/2$$

O vetor força aproximada toma forma

$$F = \begin{vmatrix} f(x_0)(h_1)/2 \\ f(x_1)(h_1+h_2)/2 \\ f(x_2)(h_2+h_3)/2 \\ \vdots \\ f(x_{n-1})(h_{n-1}+h_n)/2 \\ f(x_n)(h_n)/2 \end{vmatrix}$$

4.5.3 Matriz de Rigidez

Vamos definir a matriz de rigidez A, lembrando que ela foi definida por $A = a\int_\Omega \nabla\zeta\nabla\zeta dx$. Como nos ítens anteriores não precisamos calcular todas as entradas da matriz de rigidez pois ela é tridiagonal e simétrica, assim, valos calcular as entras A_{ii} e A_{ii+1}. Para isso usaremos a quadratura do ponto médio para aproximar A. Definimos então a_i como o valor de a no ponto médio do intervalo. Quando i=j temos

$$A_{ii} = \int_I a\zeta_i'^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} a\zeta_i'^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} a\zeta_i'^2 dx$$
$$a_i \frac{1}{h_i^2} h_i + a_{i+1}\frac{(-1)^2}{h_{i+1}^2}h_{i+1} = \frac{a_i}{h_i} + \frac{a_{i+1}}{h_{i+1}}$$

Do mesmo modo fazemos para quando $j = i+1$

$$A_{ii+1} = \int_I a\zeta_{i+1}'\zeta_i' dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} a\zeta_{i+1}'\zeta_i' dx$$
$$a_{i+1}\frac{-1}{h_{i+1}}\frac{1}{h_{i+1}}h_{i+1} = -\frac{a_{i+1}}{h_{i+1}}$$

A matriz de rigidez fica da seguinte forma

$$A = \begin{vmatrix} \frac{a_1}{h_1} & -\frac{a_1}{h_1} & 0 & & \cdots & & 0 \\ -\frac{a_1}{h_1} & \frac{a_1}{h_1}+\frac{a_2}{h_2} & -\frac{a_2}{h_2} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -\frac{a_2}{h_2} & \frac{a_2}{h_2}+\frac{a_3}{h_3} & -\frac{a_3}{h_3} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & & -\frac{a_{n-1}}{h_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{h_{n-1}}+\frac{a_n}{h_n} & -\frac{a_n}{h_n} \\ 0 & & \cdots & & 0 & -\frac{a_n}{h_n} & \frac{a_n}{h_n} \end{vmatrix}$$

A matriz de rigidez global A pode ser escrita como a soma de n matrizes mais simples

$$A = \frac{a_1}{h_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix} + \frac{a_2}{h_2}\begin{vmatrix} & & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix} + \cdots + \frac{a_n}{h_n}\begin{vmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{vmatrix} = A^1 + A^2 + \cdots + A^n$$

Desta forma podemos observar que cada matriz A^I é da forma

$$A^I = \frac{a_i}{h_i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Capítulo 5

Resultados Computacionais

Para exemplificar a teoria exposta foram feitas as simulações para o problema apresentado considerando alguns casos.As simulações foram feitas usando o MATLAB por causa da sua vasta variedade de recursos internos da linguagem que facilita a obtenção e a análise de resultados preliminares. Como mostrado no capítulo anterior, na análise numérica dos exemplos feitos foi aplicado o método de elementos finitos na variável espacial e diferenças finitas avançadas na variável temporal.

Primeiramente consideramos como condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$ e a função $f(x,t) = (sen(\pi x)e^{-\pi^2 t})^3$. Os termos não lineares são dados por $l(u) = \int u dx$, , p = 3 e $\lambda = 2$. Discretizamos a variável temporal e espacial por $\Delta t = 0.01, \Delta x = 0.01$, respectivamente, utilizando o polinômio interpolante mostrado anteriormente em 4.3.

Na figura 5.1 é apresentada a evolução da solução no tempo.

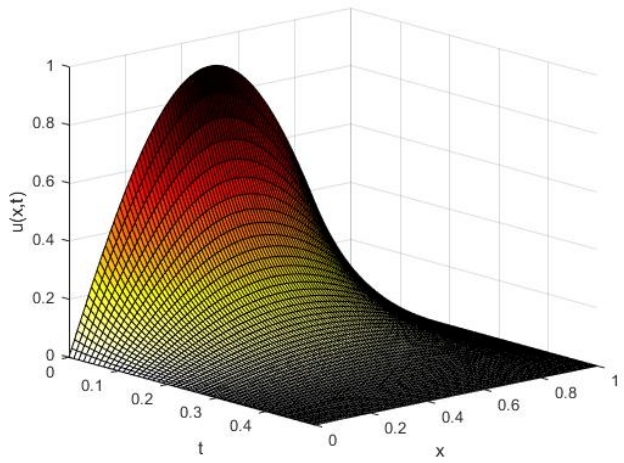

Figura 5.1: Evolução da solução aproximada no tempo

Em seguida utilizamos o mesmo exemplo só que para dois casos diferentes, primeiramente foi realizada a simulação para o caso em que não existe o termo de reação-difusão, ou seja, $a(l(u)) = 1$. Em seguida foi considerado o termo de reação-difusão usando $a(l(u)) = e^{\int u dx}$.

Nas figuras 5.2 e 5.3 apresentemos a curva da solução para tempos específicos. Observa-se que com o termo de reação-difusão a solução decai mais rápido, o que condiz com o fato dela estar associada a velocidade de propagação no domínio.

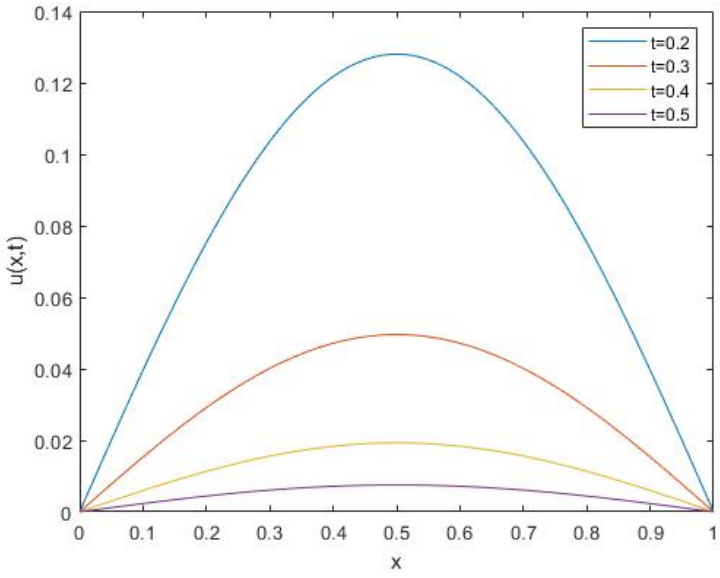

Figura 5.2: Solução sem o termo de difusão

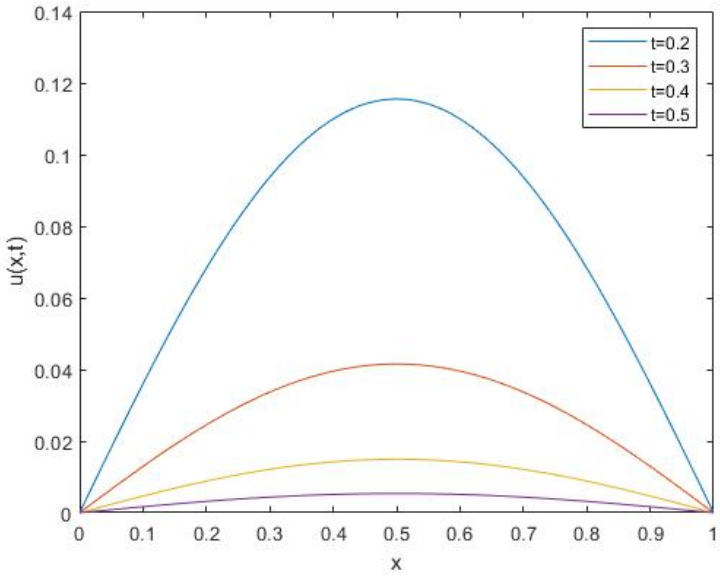

Figura 5.3: Solução com o termo de difusão

A figura 5.4 representa a análise da energia associada da solução para $t \to \infty$. Como era de se esperar, com base nos resultados teóricos, a solução de fato decai exponencialmente no tempo.

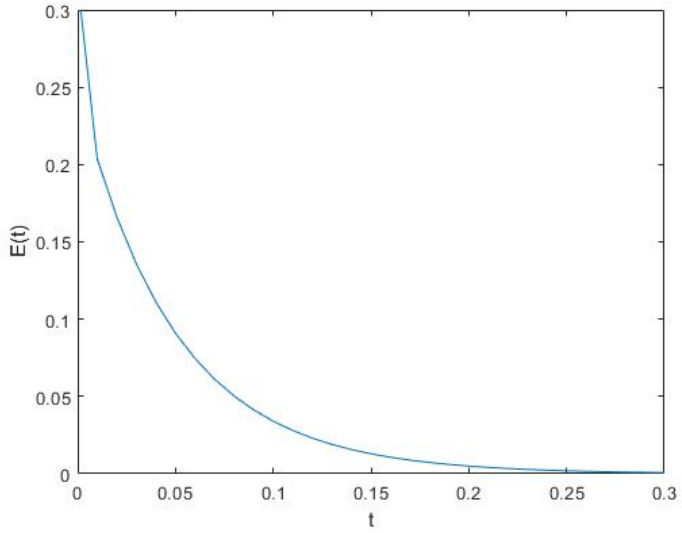

Figura 5.4: Decaimento da energia associada ao problema

No segundo exemplo consideramos como condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$ e a função $\frac{1}{2}\pi^2 sin(\pi x)e^{-\pi^2 t/2} + sin(sin(\pi x)e^{\pi^2 t/2})$. Os termos não lineares são dados por $l(u) = \int udx$, , p = 7 e $\lambda = 5$. Discretizamos a variável temporal e espacial por $\Delta t = 0.01, \Delta x = 0.01$, respectivamente.

Porém, diferente do primeiro exemplo, usamos como função interpoladora um polinômio cúbico por partes dada a seguir

$$\zeta_i = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-2})^3}{4h^3} \ se \ x \in [x_{i-2}, x_{i-1}]; \\ \frac{1}{4} + \frac{3(x-x_{i-1})}{4h} + \frac{3(x-x_{i-1})^2}{4h^2} - \frac{3(x-x_{i-1})^3}{4h^3} \ se \ x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ \frac{1}{4} + \frac{3(x_{i+1}-x)}{4h} + \frac{3(x_{i+1}-x)^2}{4h^2} - \frac{3(x_{i+1}-x)^3}{4h^3} \ se \ x \in [x_i, x_{i+1}]; \\ \frac{(x_{i+2}-x)^3}{4h^3} \ se \ x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]; \\ 0 \ se \ x \notin [x_{i-2}, x_{i+2}]; \end{cases} \tag{5.0}$$

Na figura 5.5 é apresentada a evolução da solução no tempo.

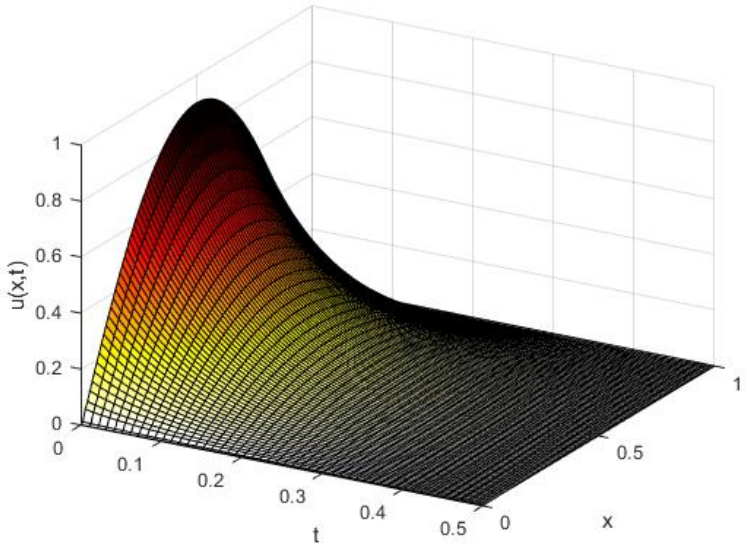

Figura 5.5: Evolução da solução aproximada no tempo

Em 5.6 apresentamos um recorte da solução para certos tempos especificados.

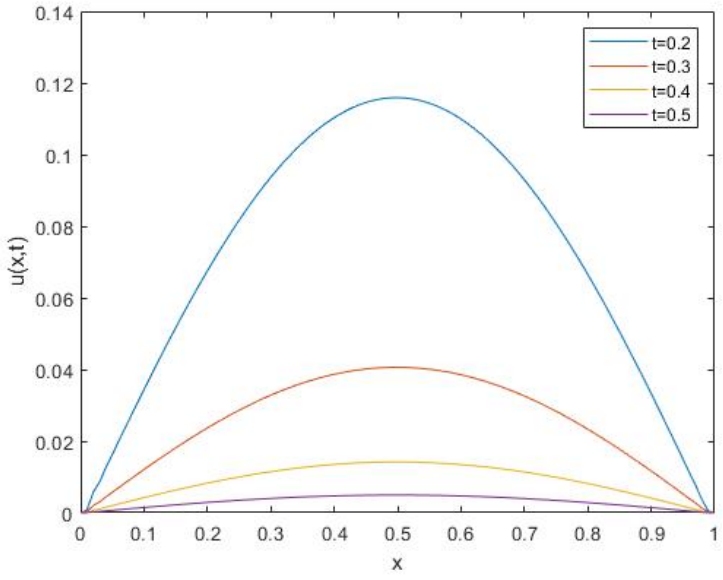

Figura 5.6: Solução aproximada para t=0.2,t=0.3,t=0.4 e t=0.5

A fim de fazer uma comparação da convergência da solução entre as funções interpolantes lineares e cúbicas, foi feita a simulação com os mesmos parâmetros do exemplo 2 para uma função linear.

Na figura 5.7 apresentamos a solução para o polinômio linear(U1) e para o polinômio cúbico(U2) para o tempo t=0.2 e na figura 5.8 para o tempo t=0.5

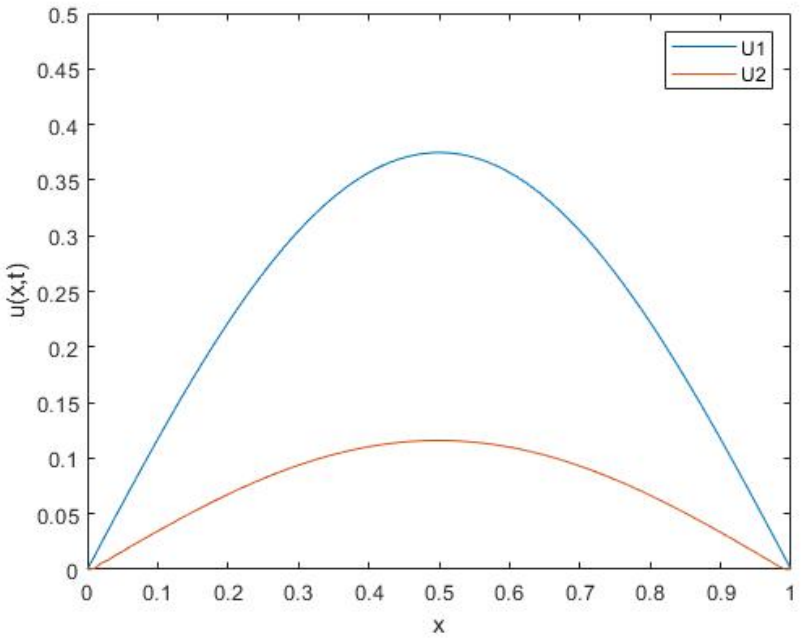

Figura 5.7: Soluções para t=0.2

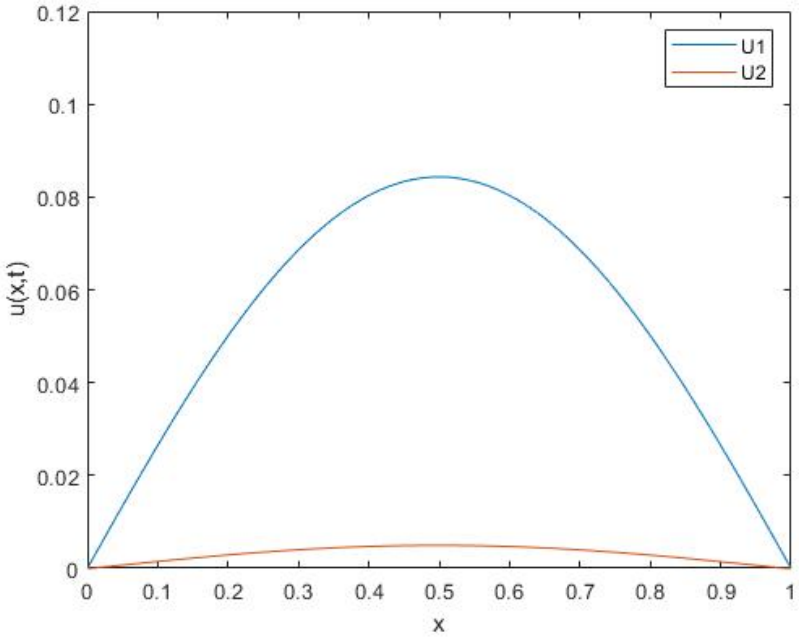

Figura 5.8: Soluções para t=0.5

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho foi feito o estudo para a existência e a unicidade das soluções para a equação de reação-difusão (P). Além disso foi mostrado o comportamento da solução considerando o decaimento exponencial, ou seja, que a solução decai a uma taxa exponencial com o tempo.

As simulações apresentaram resultados numéricos condizentes com a teoria proposta. As simulações com e sem o termo de reação-difusão mostraram que o termo realmente aumenta a velocidade de propagação da solução. Os resultados obtidos pelo decaimento seguiu o esperado mostrando de fato que a solução decai exponencialmente quando o tempo tende para o infinito. Por fim mostramos que ao utilizar polinômios interpoladores de maior grau que por sua vez se ajustam melhor à sua discretização obtemos melhores resultados para a solução.

Capítulo 7

Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros podemos estender diversas propriedades relacionadas com o problema (P), por exemplo dependência contínua dos dados iniciais de posse que o mesmo seja bem posto, pode-se ainda generaliza-lo com relação a solvabilidade (existência e unicidade das soluções fraca e forte) considerando o operador não linear p-laplaciano, laplaciano de p(x). Podemos também fazer a análise do erro numérico das simulações, além de um estudo da convergência e estabilidade do método usado.

Vale ressaltar que existe poucos resultados na literatura relacionado com o problema (P) considerando os operadores mencionados anteriormente. Além disso pode-se ainda estudar a análise numérica do problema em questão e suas simulações usando métodos adequados, por exemplo, o método de Rothe.

Referências

[1] Almeida, R. M., Duque, J. C., Ferreira, J., Robalo, R. J. The crank–nicolson–galerkin finite element method for a nonlocal parabolic equation with moving boundaries. *Numerical Methods for Partial Differential Equations 31*, 5 (2015), 1515–1533.

[2] Almeida, R. M., Duque, J. C., Ferreira, J., Robalo, R. J. Finite element schemes for a class of nonlocal parabolic systems with moving boundaries. *Applied Numerical Mathematics 127* (2018), 226–248.

[3] BACHMAN, G. . N. *Functional Analysis*. Academic Press, New York and London, 1968.

[4] Brézis, H., Funcional, A. Teoría y aplicaciones. *Alianza Editorial* (1984).

[5] Chipot, M. The diffusion of a population partly driven by its preferences. *Archive for rational mechanics and analysis 155*, 3 (2000), 237–259.

[6] Chipot, M., Lovat, B. Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems. *In Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysis 30*, 10 (1997), 4619–4627.

[7] Chipot, M., Lovat, B. On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems. *Positivity 3*, 1 (1999), 65–81.

[8] Chipot, M., Rodrigues, J.-F. On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis 26*, 3 (1992), 447–467.

[9] Chipot, M., Savitska, T. Nonlocal p-laplace equations depending on the lp norm of the gradient. *Advances in Dierential Equations 19*, 11-12 (2014), 997–1020.

[10] Chipot, M., Valente, V., Caffarelli, G. V. Remarks on a nonlocal problem involving the dirichlet energy. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 110*, 4 (2003), 199–220.

[11] Coayla-Teran, E. A., Dias de Magalhães, P. M., Ferreira, J. Existence of optimal controls for spde with locally monotone coefficients. *International Journal of Control* (2018), 1–9.

[12] Corrêa, F. J., Menezes, S. D., Ferreira, J. On a class of problems involving a nonlocal operator. *Applied Mathematics and Computation 147*, 2 (2004), 475–489.

[13] da Silva, N. H. L. Aspectos teóricos e numéricos sobre uma equação de difusão não linear. *Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ* (2010).

[14] Debnath, L. *Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers*. Springer Science & Business Media, 2011.

[15] Duque, J. C. M. Método dos elementos finitos para problemas com fronteiras livres.

[16] Faedo, S. Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze 1*, 1-4 (1949), 1–41.

[17] Ferreira, J. *Sobre uma equação hiperbólica-parabólica semilinear*. PhD thesis, Dissertaçao de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1991.

[18] Ferreira, J., de Oliveira, H. B. Parabolic reaction-diffusion systems with nonlocal coupled diffusivity terms. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A 37*, 5 (2017), 2431–2453.

[19] Ferreira, J., Messaoudi, S. On the general decay of a nonlinear viscoelastic plate equation with a strong damping and p (x, t)-laplacian. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 104* (2014), 40–49.

[20] Galerkin, B. Sterzhni i plastinki: Riady v nekotorykh voprosakh uprugogo ravnovesiia sterzhnei i plastinok. *Vestnik inzhenerov 1* (1915), 897–908.

[21] Herrero, M. A., Vazquez, J. L. The one-dimensional nonlinear heat equation with absorption: Regularity of solutions and interfaces. *SIAM journal on mathematical analysis 18*, 1 (1987), 149–167.

[22] Larson, M. G., Bengzon, F. The finite element method: theory, implementation, and practice. *Texts in Computational Science and Engineering 10* (2010).

[23] Lima, E. L. *Espaços métricos*, vol. 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983.

[24] LIONS, J. Quelques méthodes de résolutions des problémes aux limites non linéaris. *Dunod II* (1969).

[25] Lobato, R. F. C., Pereira, D. C. *Solvabilidade e Decaimento Exponencial para um Sistema de EDP Não Linear com Acoplamento na Fonte*. PhD thesis, Dissertaçao de Mestrado, PPGME, UFPA, 2006.

[26] LOVAT, M. B. Centre d'analyse non linéaire université de metz.

[27] Medeiros, L. A., Miranda, M. M. Espaços de sobolev. *Rio de janeiro, IM-UFRJ* (2000).

[28] Michel, C., Lue, M. Asymptotic behaviour of some nonlocal diffusion problems. *Applicable Analysis 80*, 3-4 (2001), 279–315.

[29] Nakao, M. Energy decay for the quasilinear wave equation with viscosity. *Mathematische Zeitschrift 219*, 1 (1995), 289–299.

[30] OLIVEIRA, C. R. d. *Introdução à Análise Funcional*. Associação Nacional Instituto de Matemática Pura e Aplicada IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

[31] Rivera, J. E. M. *Teoria das distribuiçoes e equaçoes diferenciais parciais*. Laboratorio Nacional de Computação Cientifica, 1999.

[32] Robalo, R. J., Almeida, R. M., do Carmo Coimbra, M., Ferreira, J. A reaction–diffusion model for a class of nonlinear parabolic equations with moving boundaries: Existence, uniqueness, exponential decay and simulation. *Applied Mathematical Modelling 38*, 23 (2014), 5609–5622.

[33] Simsen, J., Ferreira, J. A global attractor for a nonlocal parabolic problem. *Nonlinear Stud 21* (2014), 405–416.

[34] Sousa, N. d., others. Metodos de diferenças finitas: conceitos e interpretações.

[35] Thomée, V. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, vol. 1054. Springer, 1984.