

Universidade Federal Fluminense

RAFAEL GUIMARÃES DE ALMEIDA

Uma análise do processo de agregação aditiva de  
resultados do método Analytic Hierarchy Process  
baseada em Sistemas de Equações Lineares

VOLTA REDONDA

2019

RAFAEL GUIMARÃES DE ALMEIDA

Uma análise do processo de agregação aditiva de resultados do método Analytic Hierarchy Process baseada em Sistemas de Equações Lineares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Orientador:

Cecília Toledo Hernández

Coorientador:

Gustavo Benítez Alvarez

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

VOLTA REDONDA

2019

Ficha catalográfica automática - SDC/BEM  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

A447a Almeida, Rafael Guimarães de  
Uma análise do processo de agregação aditiva de resultados do método Analytic Hierarchy Process baseada em Sistemas de Equações Lineares / Rafael Guimarães de Almeida ; Cecília Toledo Hernández, orientadora ; Gustavo Benítez Alvarez, coorientador. Volta Redonda, 2019.  
95 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2019.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPG-MCCT.2019.m.14166316745>

1. Apoio Multicritério à Decisão. 2. Analytic Hierarchy Process. 3. Álgebra Linear. 4. Sistemas Lineares. 5. Produção intelectual. I. Hernández, Cecília Toledo, orientadora. II. Alvarez, Gustavo Benítez, coorientador. III. Universidade Federal Fluminense. Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda. IV. Título.

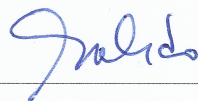
CDD -

Uma análise do processo de agregação aditiva de resultados do método  
Analytic Hierarchy Process baseada em Sistemas de Equações Lineares

Rafael Guimarães de Almeida

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada por:



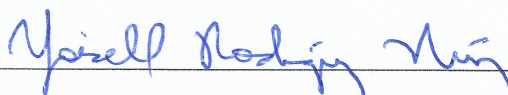
---

Prof. Cecília Toledo Hernández, D.Sc. / MCCT-UFF



---

Prof. Gustavo Benítez Alvarez, Ph.D. / MCCT-UFF



---

Prof. Yoissell Rodríguez Núñez, D.Sc. / MCCT-UFF



---

Prof. Panters Rodríguez Bermudez, D.Sc. / MCCT-UFF



---

Prof. Rafael Alves Bonfim de Queiroz, D.Sc. / UFJF



---

Prof. Francisco Santos Sabbadini, D.Sc. / UERJ

Volta Redonda, 05 de Novembro de 2019.

*Dedico este trabalho aos meus pais, familiares e à todos aqueles que, de alguma forma,  
contribuíram nesta trajetória.*

# Resumo

O método *Analytic Hierarchy Process* (AHP) vem sendo amplamente testado e implementado em inúmeras problemáticas de decisão que requerem, por meio de avaliações de múltiplos critérios, a priorização de soluções potenciais. Conquanto, apesar de seus aspectos positivos e de sua vasta aplicabilidade, o método AHP tem sido objeto de frequentes críticas na literatura, o que justifica o surgimento de extensivos estudos e novos refinamentos para o método. Propõe-se, então, neste trabalho, analisar o procedimento de síntese global dos resultados do método AHP, que originalmente é feito por uma agregação aditiva, segundo um modelo baseado em Sistemas de Equações Lineares. Com esta análise, tornou-se possível maiores interpretações geométricas/matemáticas desta etapa de agregação final de resultados do AHP. Por meio de uma metodologia qualitativa, de caráter exploratório e explicativo, procedeu-se com o formalismo teórico pretendido, que foi verificado e validado utilizando-se estudos de múltiplos casos. Estes estudos foram, em sua maioria, artigos científicos que versavam sobre aplicações do AHP tradicional. Constatou-se, mediante verificações computacionais, que o método AHP não é arbitrário na entrega de soluções, isto é, o método AHP entregará soluções específicas conforme o número de critérios/alternativas do modelo. Por outro lado, com a análise de sensibilidade destas soluções retornadas pelo AHP, revelou-se que as perturbações nos elementos do vetor de prioridades dos critérios não foram modificadas com o modelo baseado em Sistemas de Equações Lineares e ainda, que não foram constatadas, a princípio, correlações entre estas perturbações e o número de condicionamento, embora não seja plausível afirmar que estas correlações inexistam. Por fim, analisou-se brevemente a dependência linear entre vetores-coluna e vetores-linha da matriz de preferências locais das alternativas em relação aos critérios e mostrou-se algumas implicações do procedimento de fatoração dos vetores-coluna redundantes desta matriz de preferências, o que indicou uma necessidade de maiores estudos deste procedimento.

# Abstract

The Analytic Hierarchy Process (AHP) method has been extensively tested and implemented on numerous decision problems that require, through multi-criteria assessments, the prioritization of potential solutions. Although, despite its positive aspects and its wide applicability, the AHP method has been frequently criticized in the literature, which justifies the emergence of extensive studies and further refinements to the method. In this research, it is proposed to analyze the overall synthesis procedure of the results of the AHP method, which is originally made by an additive aggregation, according to a model based on Systems of Linear Equations. With this analysis, greater geometric / mathematical interpretations of this stage of the final aggregation of AHP results became possible. Through a qualitative methodology, exploratory and explanatory type, proceeded with the intended theoretical formalism, which was verified and validated using multiple case studies. These studies were mostly scientific articles about traditional AHP applications. It was found out, by computational checks, that the AHP method is not arbitrary in giving solutions, i.e. the AHP method will give specific solutions according to the number of criteria / alternatives of the model. On the other hand, with the sensitivity analysis of these solutions returned by the AHP, it was revealed that the perturbations in the elements of criteria priority vector were not modified with the model based on Systems of Linear Equations and, also, that were not found, at first, correlations between these perturbations and the conditioning number, although it is not plausible to say that these correlations do not exist. Finally, the linear dependence between column and line vectors of the local preferences matrix of alternatives over criteria was briefly analyzed and some implications of the redundant column vectors factorization procedure of this preference matrix were shown, indicated a need for further studies of this procedure.

# Palavras-chave

1. Apoio Multicritério à Decisão
2. *Analytic Hierarchy Process* (AHP)
3. Álgebra Linear
4. Sistemas Lineares



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
1.1	Justificativa . . . . .	9
1.2	Objetivo geral . . . . .	11
1.3	Objetivos específicos . . . . .	11
1.4	Procedimento metodológico . . . . .	11
1.5	Estruturação da dissertação . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Revisão da literatura</b>	<b>14</b>
2.1	Apoio Multicritério à Decisão (AMD) . . . . .	14
2.1.1	Tipos de problemas de decisão multicritério . . . . .	16
2.1.2	Principais abordagens dos métodos de decisão multicritério . . . . .	18
2.2	Analytic Hierarchy Process (AHP) . . . . .	20
2.2.1	Axiomas e fundamentações que sustentam o AHP . . . . .	23
2.2.2	Sistematização do AHP . . . . .	24
2.2.2.1	Comparação entre pares e Escala Fundamental de Saaty . . . . .	26
2.2.2.2	Dedução das prioridades locais . . . . .	30
2.2.2.3	Mensuração da consistência dos julgamentos . . . . .	33
2.2.2.4	Síntese das prioridades globais das alternativas . . . . .	35
2.2.2.5	Análise de sensibilidade das prioridades globais das alternativas . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Uma análise matemática do método AHP</b>	<b>38</b>

---

3.1	Formulação matemática equivalente para o método AHP . . . . .	40
3.1.1	Número de critérios maior do que o número de alternativas . . . . .	41
3.1.2	Número de critérios igual ao número de alternativas . . . . .	43
3.1.3	Número de critérios menor do que o número de alternativas . . . . .	44
3.2	Formulação matemática equivalente generalizada . . . . .	46
3.3	Número de condicionamento para Sistema de Equações Lineares . . . . .	49
3.4	Formulação matemática equivalente parametrizada . . . . .	51
3.5	Análise de dependência linear na matriz de prioridades locais das alternativas	55
3.6	Síntese dos principais resultados do Capítulo 3 . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>61</b>
4.1	Análise das soluções via Formulação Tradicional e Equivalente . . . . .	62
4.2	Análise de sensibilidade via Formulação Equivalente . . . . .	65
4.3	Análise da fatoração de vetores-coluna redundantes . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>73</b>
	<b>Referências</b>	<b>76</b>
	<b>Apêndice A</b>	<b>88</b>
	<b>Apêndice B</b>	<b>89</b>
	<b>Apêndice C</b>	<b>91</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Decisões permeiam todas as atividades humanas, seja em nível pessoal ou em nível organizacional, e muitas dessas decisões são tomadas de maneira informal ou intuitiva. No entanto, ao longo dos tempos, a necessidade de melhores decisões levou à busca de abordagens estruturadas que conduzissem a um processo decisório mais satisfatório, baseado em tudo que o decisor sabe, julga e sente, satisfazendo suas preferências de forma eficaz e lógica [94].

Por conseguinte, na década de 70 surgiram os métodos de Apoio Multicritério à Decisão (AMD), que se firmou como área da Pesquisa Operacional, com o intuito de enfrentar situações específicas em que um decisor, de forma sistemática, deveria resolver um problema de decisão, composto por fatores tangíveis e/ou intangíveis, em que várias eram as restrições (ou, critérios) a serem satisfeitas de forma simultânea [19, 58]. Dentre as várias metodologias para problemas de AMD que existem, o *Analytic Hierarchy Process* (AHP) deve ser destacado por sua ampla utilização em problemáticas de decisão complexas. Essencialmente, o AHP fornece um procedimento compreensivo e racional para modelar problemáticas de decisão multicritério numa hierarquia linear descendente, quantificar seus elementos tangíveis e/ou intangíveis, relacionar estes elementos com as metas globais e avaliar ou priorizar soluções alternativas. Em termos práticos, o AHP quebra um problema em subproblemas e, posteriormente, agrega as soluções dos subproblemas - obtidas por um processo de priorização, após a realização dos julgamentos humanos - em uma solução geral, ou seja, o método AHP parte do problema geral para um problema mais particular e concreto [131, 119, 125, 128].

Aplicações do AHP podem ser encontradas em diferentes campos, sejam em situações, por exemplo, de priorizações de ações/alternativas, avaliação de custos e benefícios, alocação de recursos, medidas de desempenho, decisões estratégicas, resolução de conflitos,

decisões e previsões políticas ou sociais ou priorização de projetos [41, 108, 160]. Estas aplicações são comumente executadas com a utilização do AHP, devido sua versatilidade, combinado com outras metodologias, o que maximiza a robustez dos resultados pretendidos. Entretanto, em paralelo com a popularidade crescente do método AHP, encontram-se suas críticas, em diversas perspectivas [47, 57, 132].

Quanto as críticas mais difundidas e debatidas na literatura, destacam-se aquelas destinadas ao procedimento de síntese global das prioridades locais do método AHP, que é realizado mediante uma agregação aditiva destas prioridades e que determina as prioridades globais das alternativas. Estas críticas, em geral, estão relacionadas à: (1) dependência do processo de agregação com a escolha da técnica de normalização das prioridades locais das alternativas; (2) quebra da condição de reciprocidade de julgamentos; (3) distorções inesperadas dos julgamentos locais quando as prioridades globais das alternativas são deduzidas; (4) ocorrência de inversões no *ranking* de prioridades globais das alternativas com a inclusão/remoção de alternativas e/ou critérios no modelo (a este fenômeno, dá-se o nome de *rank reversals*) [77]. Neste contexto, com o intuito de evitar o *rank reversals*, que é um fenômeno comum também à outros método de AMD, sugestões de modificações nesta etapa de síntese das prioridades locais do AHP foram propostas [17, 85, 110, 139].

Historicamente, tais modificações sugeridas destinaram-se, essencialmente, ao processo de normalização envolvido na agregação aditiva das prioridades locais, quando este processo é dado como a causa do problema, e à própria agregação aditiva dos resultados, quando esta é dada como a causa de todos os problemas, devendo ser substituída por uma agregação multiplicativa. No entanto, nenhuma destas modificações sugeridas ao método AHP, a princípio, analisou a etapa de agregação aditiva das prioridades locais em termos de um Sistema de Equações Lineares. E, analisar esta etapa por este outro ponto de vista, torna possível inéditos desdobramentos, no âmbito matemático, e maiores entendimentos das pendências existentes na literatura associadas ao procedimento de síntese das prioridades locais do AHP. Isto porque existe um vasto conhecimento da Álgebra Linear já deduzido, no que tange à Sistemas de Equações Lineares, que pode ser extrapolado ao método AHP quando este último é reformulado nestes termos [8, 48, 54, 83, 152].

## 1.1 Justificativa

Os motivos que justificam a presente pesquisa podem ser subdivididos sob alguns pontos de vista. Tomando como ponto de partida a escolha do método AHP, três aspectos

fundamentais devem ser considerados: relevância do AHP no cenário mundial, já que é um dos métodos de decisão multicritério mais utilizados historicamente; disponibilidade da formulação matemática do AHP na literatura, o que traduz uma maior compreensão de seu funcionamento; críticas frequentes, oriundas da comunidade científica, em diversos aspectos do método AHP.

No campo científico, em contrapartida, vislumbra-se a importância da presente proposta, primeiramente, pela ausência de trabalhos semelhantes no que tange à reformulação da síntese das prioridades locais do método AHP em termos de Sistemas de Equações Lineares. Agora, em relação ao tipo de análise realizada nesta dissertação, a justificativa deve ser orientada à dois estudos principais realizados: (1) estudo de unicidade/existência da solução retornada pelo AHP; (2) estudo da estabilidade da solução retornada pelo AHP.

Em relação ao estudo de unicidade/existência da solução realizado nesta dissertação, isto é relevante porque o procedimento de agregação aditiva das prioridades locais, utilizado tradicionalmente no AHP, não garante matematicamente que a solução entregue com o AHP não seja arbitrária, já que o processo de agregação de forma aditiva ignora outras possíveis soluções matemáticas do problema. Logo, este estudo de unicidade/existência, sobretudo, permite demonstrar qual solução o AHP retorna e, por conseguinte, aceitar/rejeitar a hipótese desta solução retornada ser arbitrária, uma vez que, se esta hipótese for aceita, a utilização do método AHP em problemas reais perde todo o sentido.

Por outro lado, o estudo da estabilidade da solução retornada pelo AHP é relevante, principalmente, porque esta solução retornada pode ser sensível à pequenas perturbações, que podem estar associadas às incertezas na etapa de comparações entre pares de elementos, uma vez que pode envolver variáveis subjetivas. Contudo, esta análise já existe para a síntese global dos resultados do AHP, mas não em termos de Sistemas de Equações Lineares. E, note que o estudo da estabilidade de Sistemas de Equações Lineares é um problema bem conhecido da matemática, com diversos conteúdos construídos e que podem ser estendidos ao AHP. Efetuar esta análise com Sistemas de Equações Lineares, portanto, pode destacar possíveis influências das incertezas na etapa de comparações entre pares de elementos, de um modo não observado, e, ainda, mostrar novas evidências quanto à confiabilidade da solução do AHP.

## 1.2 Objetivo geral

Esta dissertação busca analisar a síntese de resultados globais do método AHP, que tradicionalmente utiliza o processo de agregação aditiva das prioridades locais, baseado em Sistemas de Equações Lineares, possibilitando, assim, interpretações geométricas e/ou matemáticas de alguns aspectos da metodologia AHP e, não menos importante, maiores contribuições para as discussões atuais.

## 1.3 Objetivos específicos

Os objetivos específicos desta dissertação são:

- apresentar uma revisão bibliográfica sobre os métodos de AMD, principalmente, o método AHP, onde, este último, por ser o foco desta pesquisa, será amplamente enfatizado;
- reformular, sem perda de generalidade, o processo de agregação aditiva das prioridades locais em termos de um Sistema de Equações Lineares;
- procurar compreender, com a formulação em termos de Sistemas de Equações Lineares, quais são as soluções retornadas pelo método AHP;
- analisar, com a formulação em termos de Sistemas de Equações Lineares, a estabilidade das soluções retornadas pelo método AHP;
- examinar, por meio de fundamentos de Álgebra Linear e simulações computacionais, quais são os impactos da existência de idênticos vetores de prioridades locais das alternativas em relação aos critérios e de sua respectiva fatoração para com o método AHP.

## 1.4 Procedimento metodológico

Esta dissertação delimita-se a analisar os fundamentos matemáticos unicamente do método AHP tradicional, proposto por Saaty, embora sejam descritos outros formalismos ou modificações do AHP tradicional, isto é, todos os procedimentos algébricos, análises e interpretações serão realizados pontualmente no procedimento de síntese global ou agregação aditiva das prioridades locais do método AHP. E, levando-se em consideração esta

problemática, os procedimentos técnicos da pesquisa serão descritos com base em três tipologias principais, segundo os autores [113], que são elas: pesquisa quanto aos objetivos, que contempla a pesquisa exploratória, descritiva e explicativa; pesquisa quanto aos procedimentos, que aborda o estudo de caso, o levantamento, a pesquisa bibliográfica, documental, participante e experimental; e a pesquisa quanto à abordagem do problema, que compreende a pesquisa qualitativa e quantitativa.

Em relação, inicialmente, aos objetivos, a presente pesquisa pode ser classificada como exploratória e explicativa. Exploratória, por objetivar, a partir de um aprofundamento nos conceitos preliminares sobre o objeto de estudo, tornar o problema estudado menos complexo, reunir mais conhecimento e construir questões importantes para a condução da pesquisa. E, explicativa pelo fato desta pesquisa ampliar generalizações e definir modelos teóricos, na tentativa de conectar as ideias e fatores identificados para compreender o porquê de determinados fenômenos [49, 113].

Os procedimentos na pesquisa científica referem-se à maneira pela qual se conduz o estudo e, portanto, se obtém os dados [113]. Neste caso, esta dissertação está classificada como: estudo de múltiplos casos, pela necessidade de verificação e validação da proposta deste trabalho em contextos reais e claramente definidos; pesquisa bibliográfica, pela necessidade, por exemplo, da compreensão das fundamentações do método a ser estudado e de dados quantitativos para os testes comparativos [49, 113]. Agora, cabe dizer que a pesquisa bibliográfica foi elaborada a partir de livros, periódicos indexados e artigos científicos que tratavam, principalmente, do método AHP e de Álgebra Linear e, como mencionado, o intuito desta pesquisa transcendeu a ideia da compreensão teórica do tema, visto que havia uma necessidade de obtenção de dados, oriundos de aplicações reais do método AHP, para a realização dos testes computacionais.

Estes dados, que seriam a matriz de prioridades das alternativas em relação aos critérios e o vetor de prioridades dos critérios em relação aos objetivos, foram agrupados de acordo com o número de alternativas e critérios dos problemas de decisão: número de critérios maior que o número de alternativas ( $C > A$ ); número de alternativas igual ao número de critérios ( $C = A$ ); número de critérios menor que o número de alternativas ( $C < A$ ). Isto, além de organizar e sumarizar os dados gerados a partir da pesquisa bibliográfica, será útil no desenvolvimento algébrico da formulação em termos de Sistemas de Equações Lineares e nos testes computacionais. Deve-se dizer, ainda, que não houve uma abundância de dados, visto que não é raro, na literatura, autores disponibilizarem dados parciais ou, ainda, somente os resultados finais.

Por outro lado, os códigos computacionais, utilizados pela necessidade de verificação e validação da proposta deste trabalho, foram desenvolvidos mediante o *software MATLAB*<sup>®</sup>. Maiores detalhes dos procedimentos computacionais utilizados estarão disponibilizados nos Apêndices A, B e C. E, para finalizar, quanto a abordagem do problema, classifica-se como qualitativa. Isso se dá pela ausência de técnicas e instrumentos estatísticos como base de análise do tema e, por outro lado, pela presente análise ser, de fato, mais profunda em relação ao fenômeno estudado, com o foco na interpretação ou desenvolvimento de ideias ou hipóteses [49, 113].

## 1.5 Estruturação da dissertação

O Capítulo 1, portanto, expôs uma breve contextualização e descrição do problema estudado, descrevendo, em seguida, a justificativa, os objetivos, a metodologia e a delimitação da pesquisa. Neste sentido, o restante do trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 2 será apresentado uma revisão bibliográfica sobre os métodos de AMD, versando suas principais abordagens, problemáticas e evolução ao longo dos anos, e, ainda, exibindo alguns dos principais aspectos e fundamentos do método AHP. Posteriormente, no Capítulo 3 será desenvolvido, por meio da aplicação de alguns conceitos de Álgebra Linear, a proposta desta pesquisa. Já no Capítulo 4, serão apresentados os resultados atingidos, mediante simulações computacionais, e a análise dos mesmos. Por último, no Capítulo 5 são encontradas as conclusões do presente trabalho, bem como algumas recomendações para trabalhos futuros.



# Capítulo 2

## Revisão da literatura

Este capítulo, pode ser dividido em duas principais seções, no qual apresentará uma breve revisão bibliográfica sobre: (i) o Apoio Multicritério à Decisão, contextualizando suas principais abordagens, problemáticas e evolução temporal; (ii) o método AHP, onde será apresentado alguns de seus aspectos constitutivos, fundamentos matemáticos que o sustentam e os principais avanços e propostas de melhoria para o método, oriundos de suas respectivas críticas, ao longo dos anos.

### 2.1 Apoio Multicritério à Decisão (AMD)

Os primeiros métodos de Apoio Multicritério à Decisão (AMD) ou, simplesmente, métodos de decisão multicritério, começaram a surgir na década de 70 e podem ser definidos como um conjunto de diferentes estruturas e métodos analíticos criados para atuar em problemáticas de decisão, onde é preciso selecionar, ordenar ou classificar alternativas, em um sistema com alto grau de possibilidades de interação entre múltiplos elementos [19, 89]. Estes métodos objetivam apoiar decisores em contextos complexos e repletos de incertezas. Complexos por envolverem diversas variáveis tangíveis e/ou intangíveis, parcialmente explicitadas ou não, que podem interagir entre si ou não e únicas para cada problema [42]. Incertos no âmbito: epistêmico, por contextos de decisão demandarem um conhecimento de informações qualitativas/quantitativas que os decisores nem sempre possuem e/ou nem sempre conseguem mensurar, o que implica em incerteza para os fatos e preferências; ontológico, por estes contextos não permitirem uma previsibilidade total dos riscos e das consequências oriundas de uma decisão; da ambiguidade, por estes contextos envolverem decisores com visões e julgamentos (sustentados por seus próprios valores, conhecimento, experiência e o que consideram racional), geralmente, discordantes

[34].

Em virtude, por exemplo, de uma maior incerteza e subjetividade, prazos mais curtos, condições que mudam rapidamente e riscos mais altos, os problemas de decisão atuais estão se tornando cada vez mais complexos [21]. Contudo, o AMD é uma das áreas da Pesquisa Operacional que mais cresceram nas últimas duas décadas, objetivando, principalmente, auxiliar o decisor a organizar e sintetizar todas as informações presentes no problema de decisão, possibilitando, assim, a recomendação de ações ou cursos de ações à quem vai tomar a decisão [19, 90]. Agora, cabe mencionar que, apesar do AMD ser uma área da Pesquisa Operacional, devido às restrições de um problema com estrutura multicritério serem, geralmente, conflitantes e pela influência das variáveis qualitativas, surge a suposição de ausência de uma solução ótima capaz de atender todos os fatores ao mesmo tempo, diferentemente da tradicional Pesquisa Operacional [144, 146].

Desde há alguns anos, pesquisadores vêm demonstrando o aumento significativo na utilização dos métodos de decisão multicritério e a expansão destes métodos para novos campos de aplicações [78, 151, 165]. Isto pode ser notado, por exemplo, na área da saúde, mediante uma revisão de 521 publicações entre os anos de 1960 e 2011 realizada em [35], como se vê na Figura 2.1, ou, ainda, na área de ciências ambientais, como ressaltado em [25, 66].

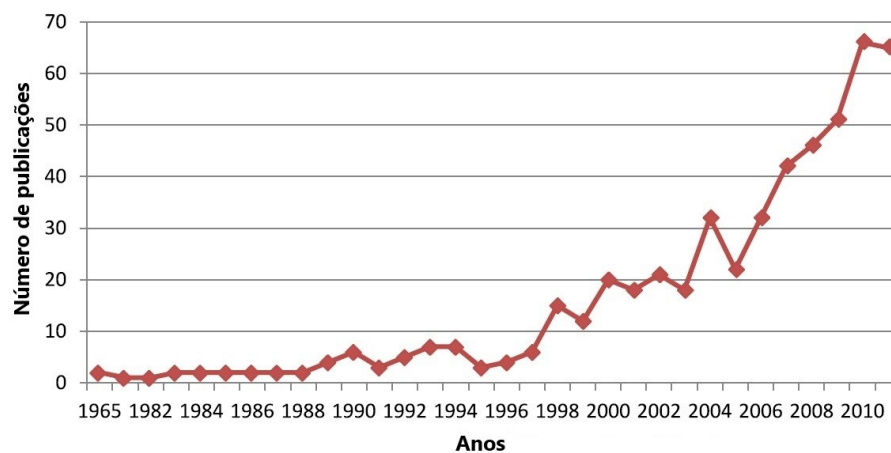


Figura 2.1: Os métodos de decisão multicritério em problemas na área da saúde ao longo dos anos.

Fonte: Adaptado de [35]

O AMD, portanto, tenta representar o mais fielmente possível os valores e julgamentos do decisor, mesmo que estas não sejam totalmente consistentes, para, com isso, estabelecer uma relação de preferências entre as alternativas que estão sendo avaliadas, priorizadas ou ordenadas, sob a influências de múltiplos critérios. Dentre as diversas áreas de aplica-

ção, podem ser citadas: Engenharia Industrial, Engenharia Mecânica, Engenharia Civil, Pesquisa Operacional, Ciência da Computação, Gestão e Negócios, Economia, Matemática Aplicada (interdisciplinar), Tecnologias e Ciências Ambientais, Saúde e Sociedade, Sistemas de Informação e, finalmente, Energia e Recursos Hídricos [41, 165]. A seguir, serão desdobrados aspectos mais específicos quanto aos possíveis resultados pretendidos ao lidar com problemáticas de decisão multicritério.

### 2.1.1 Tipos de problemas de decisão multicritério

O resultado pretendido em problemáticas de decisão multicritério, segundo [116], pode ser identificado em quatro tipos básicos:

- Problema tipo  $\alpha$ : Nesse tipo de problema, também chamado de problemática de escolha, a partir de um conjunto de alternativas ( $A$ ), deseja-se identificar a melhor alternativa (ou ação) ou um conjunto finito, tão pequeno quanto possível, das melhores ou mais satisfatórias alternativas ( $A' \subset A$ ) [98, 108, 116, 146]. A Figura 2.2 demonstra uma possível representação deste respectivo problema.

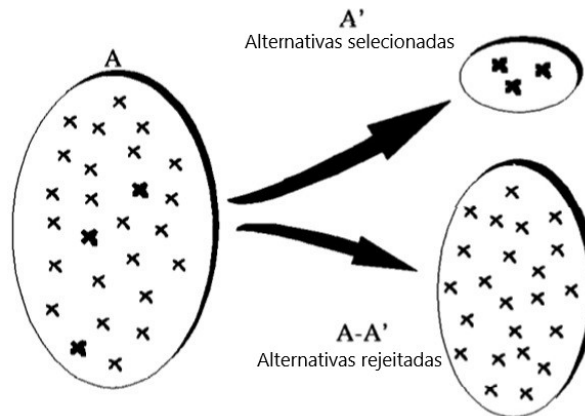


Figura 2.2: Problema tipo  $\alpha$  ou problemática de escolha.  
Fonte: Adaptado de [98]

- Problema tipo  $\beta$ : Nesse tipo de problema, também chamado de problemática de classificação, a partir de um conjunto de alternativas ( $A$ ), deseja-se distribuir as alternativas em categorias pré-definidas, que guardem algum tipo de ordem de preferência ou importância entre si, com o intuito de esclarecer a decisão por uma triagem resultante da alocação de cada ação a uma categoria (ou classe) [98, 108, 116, 146]. A Figura 2.3 demonstra uma possível representação deste respectivo problema.

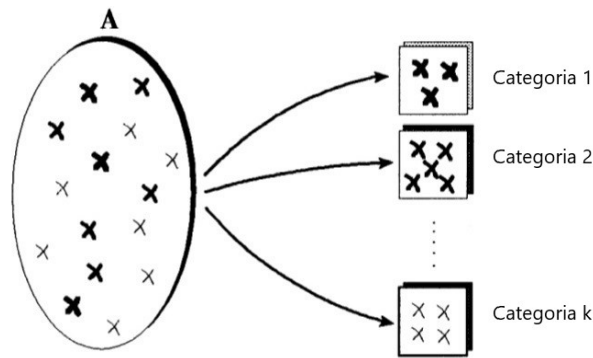


Figura 2.3: Problema tipo  $\beta$  ou problemática de classificação.  
Fonte: Adaptado de [98]

- Problema tipo  $\gamma$ : Nesse tipo de problema, também chamado de problemática de ordenação (*ranking*), a partir de um conjunto de alternativas ( $A$ ), deseja-se estabelecer uma ordem de preferências (parcial ou completa) das alternativas, das melhores para as piores [98, 108, 116, 146]. A Figura 2.4 demonstra uma possível representação deste respectivo problema.

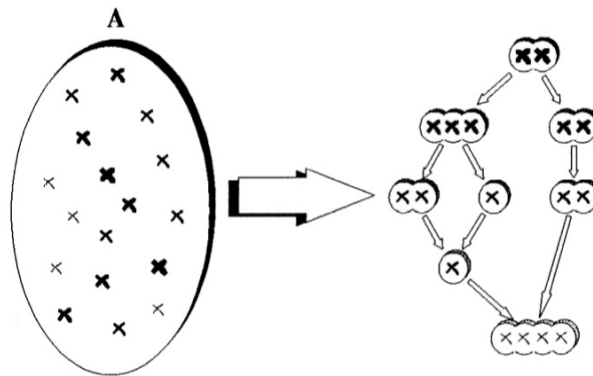


Figura 2.4: Problema tipo  $\gamma$  ou problemática de ordenação.  
Fonte: Adaptado de [98]

- Problema tipo  $\delta$ : Nesse tipo de problema, também chamado de problemática de descrição (*description*), deseja-se identificar e descrever as principais características que distinguem as alternativas, visando esclarecer a decisão por uma descrição por meio de um procedimento cognitivo de análise, que pode ser automatizado e utilizado repetidamente [98, 108, 116, 146].

Neste contexto, diversos métodos surgiram para ajudar no entendimento e análise dos problemas de decisão com múltiplos critérios. O desenvolvimento desses métodos foi motivado não somente pelo amplo campo de aplicações reais, mas também pela busca,

por parte dos profissionais, de técnicas sofisticadas baseadas em otimização matemática e computação científica, capazes de reduzir a subjetividade dos problemas de tomada de decisão, em conjunto com os avanços tecnológicos ao longo dos anos [90, 173]. A seguir, serão mostradas as principais abordagens dos métodos de decisão multicritério e suas respectivas características.

### 2.1.2 Principais abordagens dos métodos de decisão multicritério

Os métodos de decisão multicritério, em geral, serão diferentes entre si, seja pela fundamentação teórica, pelos questionamentos demandados, pela área de atuação ou, ainda, pelos tipos de resultados gerados [84]. E, estas distinções implicam em diversos agrupamentos e/ou classificações para estes métodos [45, 104, 150, 164]. Tomando como referência a classificação proposta em [116], três principais linhas de abordagem podem ser destacadas: critério único de síntese; sobreclassificação ou superação; julgamento interativo. Esta classificação, que é apresentada na Figura 2.5, é similarmente encontrada em [19, 84, 156], contudo, a abordagem do critério único de síntese e a abordagem do julgamento interativo são tratadas, respectivamente, como modelos de mensuração de valor e modelos de níveis de referência, aspiração ou meta.

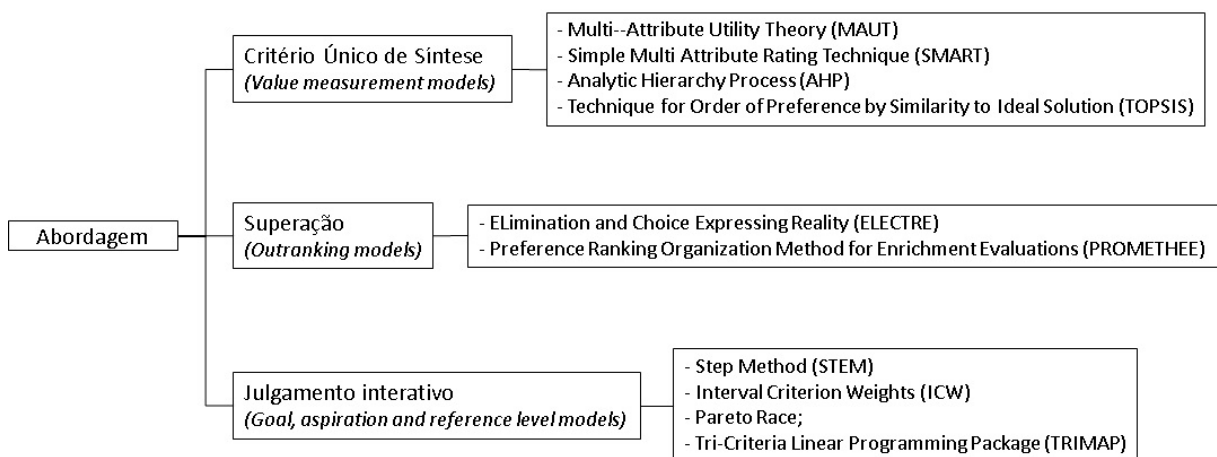


Figura 2.5: Alguns métodos de decisão multicritério e suas respectivas classificações.  
Fonte: Adaptado de [59]

Os métodos que utilizam a abordagem do critério único de síntese são derivados da Escola Americana de pensamento e baseados na teoria da utilidade multiatributo (*Multi-attribute Utility Theory* - MAUT). Alguns autores referem-se aos modelos ligados à Escola Americana como Métodos Multicritério de Tomada de Decisão (MCDM), classificando-os como racionalistas, por serem formulados segundo regras pré-estabelecidas consideradas

necessárias para assegurar um comportamento racional e determinar como os métodos devem funcionar, e se caracterizam por auxiliar o decisor a construir uma função utilidade para representar o valor de uma opção em relação a outra, conforme suas preferências, e, ainda, por agregar todas as informações acerca do problema por meio de uma grande síntese [106, 112].

Os métodos da abordagem de sobreclassificação, por sua vez, são inspirados na Escola Francesa (Europeia) de pensamento e se diferem por possibilitar a elaboração de modelos mais flexíveis, ausentes de comparação entre todas as alternativas do problema, e equilibrados, tendo em vista que é escolhida a alternativa que possui um desempenho superior na maioria dos critérios [106, 112]. Os métodos relacionados à Escola Francesa passaram a ser denominados como Métodos de Apoio Multicritério à Decisão (MCDA) e, diferentemente da abordagem anterior, são ditos serem construtivistas, já que, com relações de superioridade, auxiliam o decisor a construir o conhecimento sobre o problema por meio da especificação de apenas alguns confiáveis parâmetros de entrada e da execução de algoritmos complexos, sem a necessidade de hierarquização das alternativas [106].

Já os modelos baseados na abordagem do julgamento interativo, em geral, são desenvolvidos no âmbito de tentativas e erros e estruturas de programação matemática multiobjetivo. Essa abordagem, alternando entre cálculos computacionais iterativos de soluções eficientes e diálogos com o decisor, possibilita a convergência da solução final para as alternativas que mais se aproximam de níveis desejáveis de satisfação de um determinado critério, diferentemente das abordagens do critério único de síntese ou de sobreclassificação que buscam a alternativa dominante [9, 59]. Geralmente, então, essa abordagem é utilizada com o intuito de filtrar, de maneira eficiente, as alternativas mais adequadas. Segundo [9], os modelos de otimização multiobjetivo permitem não apenas captar mais adequadamente as características essenciais do problema real mas também melhorar a percepção dos problemas por parte dos decisores.

Vale ressaltar que, segundo [112], alguns métodos não se enquadram exclusivamente dentro de uma dessas três abordagens, sendo referenciados como métodos híbridos, como o método Tomada de Decisão Interativa Multicritério (TODIM), que possui elementos tanto da Escola Francesa quanto da Escola Americana. Além disso, existem métodos que, a partir de seus conceitos iniciais, englobam outros conceitos de diferentes formalismos, como o AHP-*Fuzzy*.

Portanto, além de depender dos critérios que compõe um determinado problema, a solução final obtida em um problema de decisão multicritério irá depender do método uti-

lizado, visto que cada método é construído com diferentes fundamentações axiomáticas ou formalismos matemáticos, possuindo pontos fortes e pontos fracos [106]. Os modelos oriundos da Escola Americana, por exemplo, são criticados por exigirem um decisor completamente racional, sempre capaz de definir sua preferência entre quaisquer duas alternativas, enquanto os modelos da Escola Francesa podem gerar interpretações ambíguas e comportamento inesperado de seus métodos, já que não se fundamentam em uma teoria axiomática bem estruturada e completa [106]. E, isto mostra, então, que a escolha do método dependerá, pelo menos, da racionalidade do decisor, da escolha e a estruturação dos critérios, do problema específico de decisão e de seu respectivo contexto [59, 115]. A seguir, serão explorados maiores detalhes do método AHP.

## 2.2 Analytic Hierarchy Process (AHP)

Originalmente proposto por Thomas Saaty, na década de 70, o AHP é um dos métodos mais conhecidos e utilizados mundialmente em problemáticas de decisão multicritério, com aumento de publicações nos países em desenvolvimento [70, 160]. Isto se justifica por sua simplicidade de utilização e capacidade de lidar com fatores qualitativos e quantitativos, o que é considerado um avanço em comparação com outros métodos de AMD e faz com que seu uso seja indicado para diversos problemas relacionados à priorização de soluções potenciais por meio da avaliação de um conjunto de critérios [11, 41, 72, 117, 131].

A teoria construtiva do AHP é baseada no funcionamento da mente humana diante de problemas complexos, no qual se caracteriza por transformar problemas, que envolvem múltiplos critérios, em uma estrutura hierárquica mais fácil de ser compreendida e avaliada, reduzindo um problema maior para uma sequência de comparações entre pares que considera o conhecimento e a experiência do decisor, para estimar magnitudes relativas no processo comparativo, como tão importantes quanto dados quantitativos [119, 122]. Assim, segundo [79], o AHP pode ser visto como um método que organiza sentimentos, intuição e lógica, de uma ou mais partes interessadas, numa abordagem estruturada que permite uma maior objetividade na tomada de decisão, mesmo que nesta decisão estejam envolvidos atributos intangíveis.

A Figura 2.6, então, fornece uma boa perspectiva da evolução temporal das publicações relacionadas ao AHP. Esta figura foi gerada por 9.069 artigos publicados contendo os termos “Analytic Hierarchy Process” nos campos Resumo, Título e/ou Palavras-chave, entre 1979 e Outubro de 2019, utilizando a *Web of Science* como base de dados.

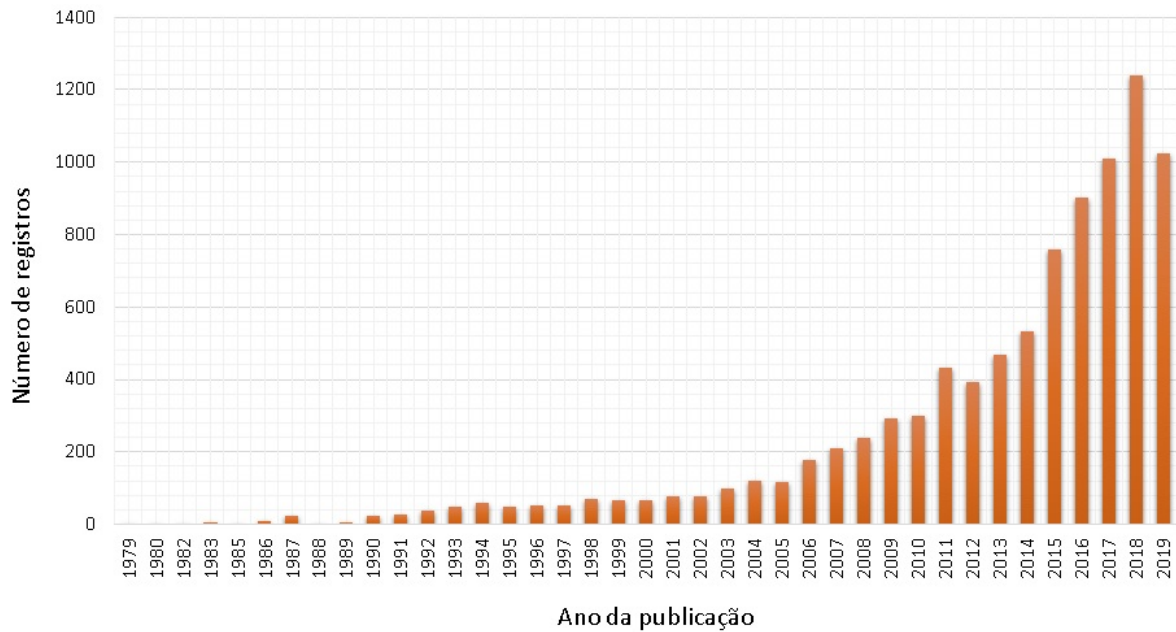


Figura 2.6: Número de publicações relacionadas ao método AHP ao longo dos anos.  
Fonte: O autor

Agora, note que na Figura 2.6, devido à restrição imposta pelos termos de busca, a primeira publicação referente ao AHP, que acontece em 1977 com [117], não é mencionada. Por outro lado, segundo [125], o AHP é baseado em quatro princípios:

1. Decomposições: o problema complexo é decomposto em níveis hierárquicos que demonstram as relações entre o objetivo global, os critérios, os subcritérios (se houverem) e as alternativas, como exemplificado na Figura 2.7. Como característica implícita em estruturas hierárquicas, o AHP assume independência entre os elementos do mesmo nível, sendo esse um requisito para a sua aplicação.

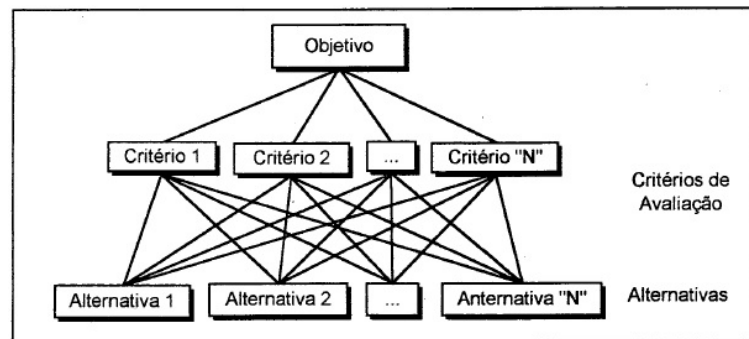


Figura 2.7: Estrutura Básica do AHP.  
Fonte: [136]

2. Priorizações: o impacto de cada elemento na hierarquia é determinado por compa-



rações entre pares de elementos separadamente, tendo como referência comparativa um dos elementos do nível acima. O processo de comparações entre pares demanda a utilização de uma escala.

3. Síntese: as prioridades são reunidas por meio do Princípio da Composição Hierárquica para a síntese geral das alternativas que compõe a hierarquia.
4. Análise de sensibilidade: a estabilidade do resultado é analisada por meio de variações nas prioridades dos elementos.

Existe uma gama de aplicações bem-sucedidas do AHP, especialmente em problemas de larga escala que envolvem múltiplos critérios e onde a avaliação das alternativas é principalmente subjetiva [41, 127]. Estas aplicações podem ser agrupadas de acordo com as características do problema em questão, onde tal problema poderá ser de: seleção, avaliação, análise de custo-benefício, alocações, planejamento e desenvolvimento, priorização e *ranking*, e, por último, tomada de decisão [160]. Em [41], por sua vez, é destacado como possíveis áreas de aplicação do método AHP: Métodos Matemáticos, Negócios e Administração, Economia, Questões Sociais e Saúde, Ciência da Computação, Engenharia Mecânica, Tecnologia e Ciência Ambiental, Ciência dos Materiais, Ecologia, Geociência e Estudos Sociais. Devido ainda à sua versatilidade, atualmente, há uma tendência de aplicações do AHP em conjunto à outras técnicas, tais como: Programação Linear, Redes Neurais ou Conjuntos Fuzzy [82, 148, 160]. Em [148], por exemplo, 61% das publicações faziam referência à aplicações utilizando o AHP integrado com outros métodos, como detalhado na Figura 2.8.

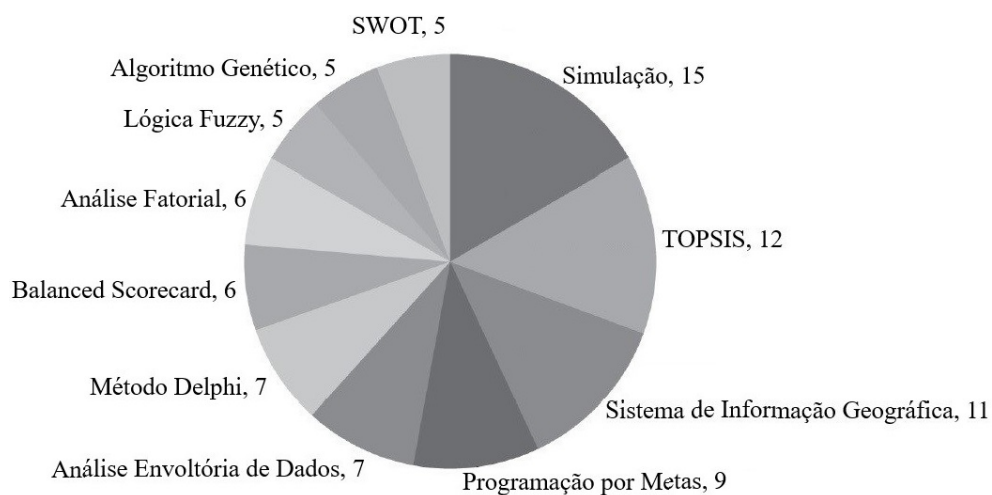


Figura 2.8: Ferramentas e técnicas utilizadas em conjunto com o AHP.  
Fonte: Adaptado de [148]

O AHP, portanto, é um método, segundo [136], simples e claro, útil para analistas e tomadores de decisão, na resolução de problemas complexos, composto por elementos mensuráveis de forma qualitativa e/ou quantitativa. Ele é útil, também, quando diversos interesses estão envolvidos na problemática de decisão e o número de pessoas que participam do processo é grande. Os julgamentos aplicados no modelo são uma construção pessoal dos tomadores de decisão (percepção, experiência, tendência e contribuição). Mas, existem exigências que devem ser respeitadas para um bom funcionamento deste método, como será visto nas seções a seguir.

### 2.2.1 Axiomas e fundamentações que sustentam o AHP

Como apresentado na Seção 2.2, o método AHP, basicamente, divide o problema em níveis hierárquicos, facilitando sua compreensão e avaliação, e determina, por meio de uma síntese dos valores dos agentes de decisão, uma medida global para cada uma das alternativas, priorizando-as ou classificando-as ao final do método [147]. Quatro axiomas governam o método AHP [119, 123]:

- Axioma 1: (Comparação Recíproca). O tomador de decisão deve ser capaz de realizar comparações entre pares de elementos e declarar a intensidade de suas preferências respeitando a condição de reciprocidade: se  $x$  denota a preferência de A em relação à B, então  $1/x$  deve denotar a preferência de B em relação à A.
- Axioma 2: (Homogeneidade). Os elementos de um mesmo nível na hierarquia devem possuir um mesmo nível de importância, sendo possível a comparação entre eles, de modo que as preferências são representadas por meio de uma escala limitada.
- Axioma 3: (Independência). Os elementos de um nível da hierarquia devem ser mutuamente excludentes entre si e, ao expressar preferências, os critérios são assumidos independentemente das propriedades das alternativas, assim como as alternativas não possuem dependência entre si.
- Axioma 4: (Expectativa). Para o propósito de tomar uma decisão, a estrutura hierárquica deve ser considerada completa.

A não validade dos axiomas apresentados podem gerar diversas consequências na metodologia AHP [125]. Se o Axioma 1 não é satisfeito, provavelmente o questionamento utilizado para extrair os julgamentos, nas comparações entre pares, não é claro ou corretamente declarado. Se, por sua vez, o Axioma 2 não é satisfeito, seria possível comparar

pares de elementos amplamente díspares, como um grão de areia comparado com uma laranja. Quando essa disparidade é grande, é recomendável que os elementos sejam colocados em grupos separados de tamanho comparável ou em níveis diferentes (*clusters*). Já se o Axioma 3 não é satisfeito, haveria uma dependência entre os pesos dos critérios e as alternativas consideradas. E, finalmente, se o Axioma 4 não é satisfeito, então o decisor não está utilizando todos os critérios e/ou todas as alternativas disponíveis, o que implica numa decisão incompleta. Conhecendo os axiomas que sustentam o método AHP, torna-se importante, agora, mencionar como o AHP irá funcionar. Isto, então, é desenvolvido a seguir.

### 2.2.2 Sistematização do AHP

O método AHP pode ser estruturado, com base em [65, 127, 128, 136], nas seguintes etapas:

- Etapa 1: Definição do problema, formulação dos objetivos ou determinação do tipo de conhecimento procurado. Nesta etapa, portanto, deve-se definir o problema cuidadosamente, incluindo todos os detalhes, partes afetadas, viabilidade de resolução e informações possíveis.
- Etapa 2: Hierarquização dos elementos presentes no problema de decisão. Nesta etapa, então, o problema é subdividido em múltiplas partes e a hierarquia é construída, onde, no topo, situa-se o objetivo da decisão, nos níveis intermediários se encontram os critérios (para os quais os elementos subsequentes dependem) e, por último, no nível mais baixo, geralmente, um conjunto de alternativas ou ações. Essa etapa facilita a compreensão e a avaliação do problema, entretanto, para não violar o Axioma 4, deve-se verificar se os níveis estão internamente completos e consistentes e, ainda, se as relações entre os níveis estão claras.
- Etapa 3: Construção de uma matriz de comparação entre pares para os elementos de um mesmo nível sob cada elemento localizado no nível imediatamente superior, pois, em uma hierarquia completa, os elementos de um nível inferior afetam aqueles de nível superior. Essas matrizes de julgamentos, que deverão ser quadradas, serão utilizadas, basicamente, para a obtenção do vetor de prioridades locais das alternativas, após a realização da Etapa 4 e da Etapa 5.
- Etapa 4: Execução dos julgamentos para as matrizes de comparações entre pares. Nesta etapa, a partir de uma escala pré-definida (que possibilita transformar os juí-

zos dos decisores em valores numéricos), o decisor deve representar suas preferências entre os elementos comparados, tendo como referência os elementos do nível superior. Por exemplo, em um problema composto apenas por critérios e alternativas, para o nível dos critérios, cada par de critérios será comparado entre si com relação ao objetivo e, analogamente, cada par de alternativas, do nível das alternativas, será comparado entre si sob cada critério. Contudo, julgamentos pessoais ou subjetivos podem provocar inconsistências nesta etapa.

- Etapa 5: Mensuração da inconsistência nos julgamentos para cada matriz de julgamentos construída na Etapa 3 e julgada na Etapa 4. Esta etapa é necessária para garantir que os julgamentos estejam consistentes entre si. Quando a consistência não for satisfatória, recomenda-se revisar ou refazer julgamentos.
- Etapa 6: Obtenção das prioridades locais das alternativas e síntese global dos resultados. Uma vez que todas as comparações entre pares foram realizadas e estão consistentes, o vetor de prioridades locais das alternativas pode ser deduzido para cada matriz de comparações e utilizado em uma grande síntese hierárquica, mediante um processo de agregação aditiva, para determinar a prioridade global de cada alternativa ou ação.
- Etapa 7: Análise de sensibilidade de cada valor segundo os juízos estabelecidos. Por último, devem ser observados os efeitos gerados no *ranking* das alternativas em função de alterações no vetor de prioridades locais dos critérios ou das alternativas.

Estas etapas, referentes à estrutura AHP, podem ser caracterizadas em um diagrama sequencial explicativo, como indica a Figura 2.9.

Pelo intuito fundamental desta dissertação, que está no tratamento e análise de alguns aspectos matemáticos do AHP, torna-se necessário abordar, mais sucintamente, algumas das etapas apresentadas. Isto, portanto, será desenvolvido nas seções subsequentes.

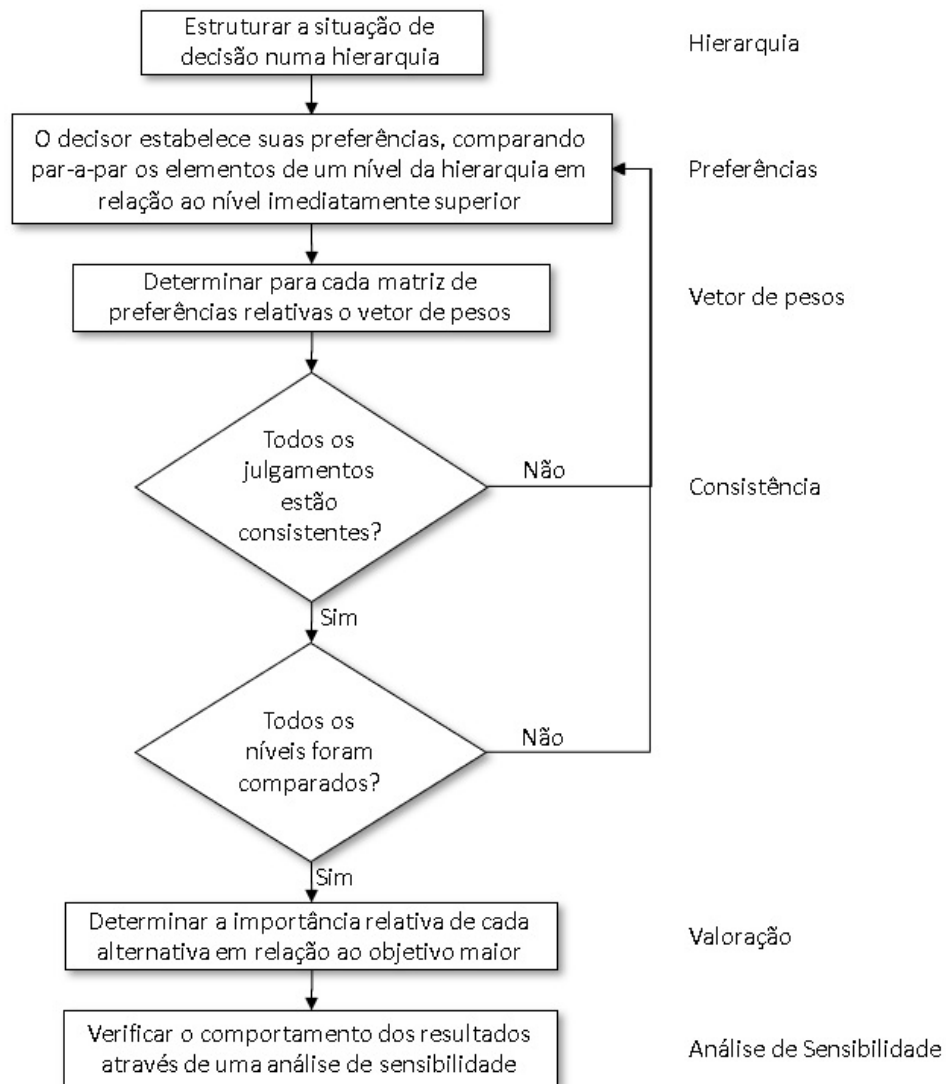


Figura 2.9: Fluxograma geral do AHP.  
Fonte: Adaptado de [136, 65]

### 2.2.2.1 Comparação entre pares e Escala Fundamental de Saaty

Sabe-se que o método AHP procura reduzir a complexidade de resolução de um problema a partir da decomposição do mesmo em níveis hierárquicos. Contudo, apesar da definição da estrutura hierárquica, as relações entre os elementos de um mesmo nível ainda não são bem compreendidas. Sendo assim, subsequente ao processo de hierarquização, encontra-se o processo de comparação entre pares de elementos situados em um mesmo nível da hierarquia, que pode ser realizado por um único julgador ou pode ser realizado em grupo.

Esta etapa de comparação entre pares de elementos (critérios, subcritérios ou alternativas), demandada pelo AHP, pode ser realizada de dois modos: o modo relativo e o modo

absoluto [118]. O modo relativo, para determinar a melhor dentre as alternativas, procede com comparações entre pares de alternativas de acordo com algum critério/subcritério específico (tangível ou intangível). Por outro lado, o modo absoluto, ou abordagem com *ratings*, se difere por utilizar um conjunto de níveis de categorias, baseado em padrões estabelecidos, por exemplo, pela sociedade ou pela experiência do decisor, associado a cada critério/subcritério para a comparação das alternativas. Embora, segundo [126], o modo absoluto permita uma maior quantidade de alternativas acopladas ao modelo e, ainda, um menor número de julgamentos a serem realizados pelo decisor, este trabalho enfatizará no modo relativo, visto que a fundamentação do AHP se deu com sua utilização.

Os elementos de um nível hierárquico são comparados, em termos relativos, de acordo com a sua importância ou contribuição, para um dado atributo, que ocupa o nível, imediatamente acima dos elementos que estão sendo comparados [136]. Nesse processo, a determinação dos graus de preferência é realizada utilizando-se a Escala Fundamental de Saaty, apresentada na Tabela 2.1, onde os valores variam de 1 a 9 e fazem referência à intensidade da preferência de um elemento sobre o outro.

Intensidade de preferência	Definição	Explicação
1	Igualmente importante	As duas atividades contribuem igualmente para o objetivo.
3	Moderadamente mais importante	A experiência e o julgamento favorecem levemente um elemento em relação à outro.
5	Fortemente mais importante	A experiência e o julgamento favorecem fortemente um elemento em relação à outro.
7	Muito fortemente mais importante	Um elemento é muito fortemente favorecido em relação à outro.
9	Extremamente mais importante	A evidência favorece um elemento em relação à outro com o mais alto grau de certeza.
2,4,6,8	Valores importantes intermediários	Quando se procura uma condição de compromisso entre as duas definições.
1.1-1.95	Quando todos os elementos comparados são muito próximos e quase indistinguíveis, um decimal é adicionado à 1 para mostrar uma diferença apropriada	Pela dificuldade na atribuição de decimais, uma maneira alternativa seria comparar duas atividades próximas com outras muito contrastantes.
Recíprocos aos valores de cima	Se ao elemento $i$ for atribuído um dos valores acima quando comparado ao elemento $j$ , então $j$ possui o valor recíproco quando comparado com o $i$ .	Consideração lógica.

Tabela 2.1: Escala Fundamental de Saaty.

Fonte: Adaptado de [120, 127]

Para a utilização da escala, o decisor deve estar ciente que os julgamentos associados aos números ímpares asseguram razoável distinção entre os pontos de medição, enquanto aos números pares, representam situações com necessidade de um ponto médio como solução negociada. Assim, além da escala apresentada não impedir a comparação de elementos intangíveis, ela é capaz de converter os dados empíricos em um modelo matemático, o que distingue o AHP das demais técnicas comparativas [125, 127, 174].

O processo de comparação, por sua vez, fornece uma escala relativa de medidas de prioridade ou peso dos elementos. Para a formalização da matriz de comparações entre pares, consideremos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  como o conjunto de elementos (alternativas, subcritérios ou critérios) a serem comparados entre pares e, ainda,  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  como os seus respectivos pesos. Dessa forma, para cada par de elementos  $(x_i, x_j)$ , a razão  $w_i/w_j$  representa o valor relativo entre a prioridade do elemento dominante ( $x_i$ ) em relação ao elemento dominado ( $x_j$ ). Com a execução de  $n(n-1)/2$  julgamentos, onde  $n$  é o número de elementos, torna-se possível a construção de uma matriz de comparações entre pares arbitrária  $A$ , de dimensão  $n \times n$ , como definida na Equação (2.1).

$$A = (w_i/w_j) = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

A Equação (2.1), como se vê, representa a intensidade da preferência do decisor mediante a comparação de pares de elementos. É possível, também, denotar  $a_{ij}$  como o elemento referente à razão  $w_i/w_j$ , o que permite reescrever a Equação (2.1) conforme mostra a Equação (2.2). Note que  $a_{ij}$  traduz o quão mais (ou menos) importante é o elemento  $x_i$  em relação à  $x_j$  quando comparados em relação ao elemento do nível superior na hierarquia.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{1}{a_{1j}} & \frac{1}{a_{2j}} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \dots & \frac{1}{a_{in}} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Ademais, é importante destacar que a matriz de comparação entre pares, definida na Equação (2.2), é dita ser positiva, recíproca e consistente. Positiva, porque esta matriz deverá ser composta por elementos positivos, isto é,  $a_{ij} = w_i/w_j > 0$ ,  $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ , cujo  $a_{ii} = w_i/w_i = 1$ , uma vez que não existe, a priori, diferença de preferência entre dois elementos iguais quando comparados entre si,  $a_{ii} = w_i/w_i = 1$ . Recíproca, porque  $a_{ji} = a_{ij}^{-1}$ , conforme diz o Axioma 1, presente na Seção 2.2.1. Consistente, porque  $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$ ,  $\forall i, j, k = 1, 2, \dots, n$ . Mas, note que, como será visto na Seção 2.2.2.3, a propriedade  $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$ , que é chamada de propriedade da transitividade, não sempre será satisfeita em casos práticos, visto que esta depende, por exemplo, da precisão dos julgamentos do decisor. Portanto, pode-se dizer que toda matriz consistente é uma matriz recíproca, mas nem todas as matrizes recíprocas serão consistentes [74, 121].

Agora, com a construção da matriz de comparações entre pares  $A$ , como definida na Equação (2.2), torna-se necessário, em segundo momento, a determinação do vetor prioridades associado à ela. Contudo, duas críticas devem ainda ser mencionadas neste momento, embora fujam do escopo desta dissertação. A primeira crítica está no fato do AHP poder demandar um alto número de comparações, uma vez que o número de comparações é proporcional ao número de critérios, subcritérios e alternativas que compõem a hierarquia, o que pode gerar, além de um maior esforço computacional, indesejáveis impactos na qualidade dos julgamentos. Como forma de minimizar este número de comparações e suas possíveis consequências, algumas metodologias podem ser encontradas em [63, 96, 145, 161, 172]. Em contrapartida, a segunda crítica refere-se à Escala Fundamental de Saaty, utilizada no processo de comparações entre pares de elementos, uma vez que: (1) não existem fundamentos teóricos ou evidências de correspondência entre as descrições verbais da Escala Fundamental e os seus respectivos valores absolutos; (2) esta é internamente inconsistente, já que valores superiores à 9 não são permitidos; (3) há uma dificuldade, por parte do decisor, no entendimento interpretativo no uso desta escala, podendo gerar ambiguidades e, por conseguinte, possíveis erros na realização dos julgamentos; (4) não existem zeros absolutos na escala. Logo, para contornar este conjunto de críticas, novas escalas foram propostas, cada uma das quais com diferentes impactos nas prioridades deduzidas - possibilitando um maior destaque ao elemento julgamento como mais preferencial - e na consistência das comparações, como pode se ver em [15, 37, 40, 44, 56, 64, 67, 88, 133].



### 2.2.2.2 Dedução das prioridades locais

Para isto, Saaty propõe o Método do Autovetor. Este método, formalizado inicialmente com uma matriz de comparações entre pares perfeitamente consistente e estendido, independente da consistência, para quaisquer matrizes, em termos gerais, deduz o vetor de prioridades mediante a resolução da Equação (2.3), cujo  $\lambda_{max}$  é o autovalor principal de  $A$  e  $w$  é o seu autovetor principal associado (ou, em termos do AHP, o vetor de prioridades procurado). Maiores detalhes das razões para o uso da Equação (2.3) na dedução do vetor de prioridades locais, a partir de uma matriz de comparações entre pares  $A$ , podem ser encontrados em [117, 64, 121, 129, 140].

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}w_j = \lambda_{max}w_i \quad (2.3)$$

Note que, para uma matriz de comparações  $A$  perfeitamente consistente, pode-se demonstrar, uma vez que todas as linhas desta matriz são combinações lineares da primeira, que todos os  $n$  autovalores de  $A$ , exceto um, serão iguais à zero. Agora, como a soma dos autovalores de  $A$  deve ser igual à soma dos elementos da diagonal principal de  $A$ , isto é,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ , cujo  $a_{ii} = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , pode-se dizer que, neste caso particular, o único e maior autovalor  $\lambda_i$  que existirá será igual à  $n$  e será chamado de  $\lambda_{max}$  [117]. Perceba que, se a matriz  $A$  representa a comparação de  $C$  critérios em relação aos objetivos, é correto afirmar que  $n = C$ . Por outro lado, apesar de ser natural suspeitar que  $\lambda_{max}$  possa ser um número complexo, visto que autovalores são raízes de polinômios, o Teorema de Perron-Frobenius [46] para matrizes composta por elementos positivos, isto é,  $a_{ij} > 0, \forall i, j$ , garante que sempre existirá solução única (autovalor e autovetor, ambos reais e positivos) para a Equação (2.3).

Ademais, por meio da teoria das perturbações, em [117, 119, 121] é mostrado que a matriz  $[a_{ij}]$  representa uma pequena perturbação de uma matriz perfeitamente consistente e subjacente a ela, e, ainda, que o autovetor principal de  $[a_{ij}]$ , além de coincidir com o vetor de prioridades procurado, sofrerá pequenas variações mediante pequenas perturbações na matriz consistente. Isto pode ser observado na Figura 2.10, segundo [69], com a plotagem da função do polinômio característico de duas matrizes de comparações entre pares, sendo a primeira consistente ( $M_1$ ), com autovetor  $\vec{m}_1 \approx (0, 67; 0, 11; 0, 22)$ , e a segunda quase consistente ( $M_2$ ), com autovetor  $\vec{m}_2 \approx (0, 61; 0, 12; 0, 27)$ , ambas as matrizes definidas na Equação (2.4).

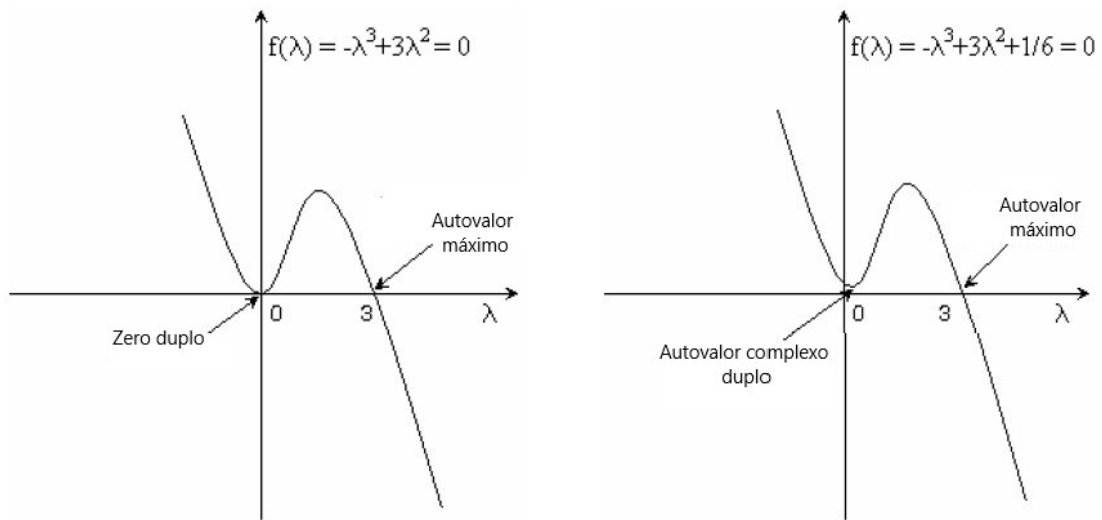


Figura 2.10: Plotagem gráfica dos polinômios característicos de  $M_1$  e  $M_2$ .  
Fonte: Adaptado de [69]

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Em contrapartida, o problema se torna encontrar um autovalor dominante ( $\lambda_{max}$ ) que satisfaça a Equação (2.3) e, com isso, forneça o vetor de prioridades. Com esse intuito, então, três métodos são destacados em [24]: o Método de Saaty, o Método das Potências e, não menos importante, o Método da Média Geométrica. Cabe dizer que, Independente do método escolhido, o autovetor  $w$  será entendido como o vetor de prioridades dos elementos e deverá satisfazer a Equação (2.5).

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (2.5)$$

### 1. Método de Saaty

O Método de Saaty, descrito pela Equação (2.6), fornece, de forma menos trabalhosa, resultados aproximados para o autovalor e autovetor da matriz de comparação entre pares  $A$ . É importante mencionar que os resultados gerados, à partir de médias aritméticas, possuirão maior precisão quando os julgamentos forem mais consistentes [24].

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^n \left( \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}} \right)}{n} \quad (2.6)$$

## 2. Método das Potências

O Método das Potências é um método numérico aplicável a matriz de comparações entre pares  $A$ , visto que o Teorema de Perron-Frobenius garante a existência de um autovalor dominante para ela. Então, se os autovalores de  $A$  satisfazem  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ , logo o método das potências pode ser utilizado para calcular o autovalor  $|\lambda_1|$  de maior magnitude e seu autovetor correspondente [81].

Quanto ao funcionamento, o método das potências procede de forma iterativa, sob certo grau de precisão  $\varepsilon$ , na produção de escalares e vetores que convergem para o autovalor e o autovetor dominante, respectivamente. Contudo, se  $|\lambda_2|$  é quase tão grande quanto  $|\lambda_1|$ , a convergência será lenta.

Seja, então, a iteração denotada por  $k$ , onde  $k = 1, \dots, m$ , e a primeira aproximação do autovetor dada por  $w^1 = [n^{-1}, \dots, n^{-1}, \dots, n^{-1}]^T$ . Para aproximações sucessivas ( $k > 2$ ), um valor auxiliar  $d^k = Aw^{k-1}$  é introduzido. O autovetor é, portanto, determinado pelo processo iterativo definido pela Equação (2.7), onde processo é finalizado quando o critério de parada, representado pela Equação (2.8), é satisfeito [24].

$$w_i^k = \frac{d_i^k}{\sum_{i=1}^n d_i^k} \quad (2.7)$$

$$\bigwedge_{i=1, \dots, n} (\max |w_i^k - w_i^{k-1}| < \varepsilon) \quad (2.8)$$

## 3. Método da Média Geométrica

E, por final, outra maneira de dedução do vetor de prioridades, segundo [29], seria utilizar o Método da Média Geométrica, também chamado de Método dos Mínimos Quadrados Logarítmicos. Logo, para um determinado elemento da matriz de julgamentos positiva e recíproca  $A$ , a prioridade local é determinada mediante normalização da média geométrica da linha associada à esse elemento, como definido pela Equação (2.9).

$$w_i = \frac{\left( \prod_{j=1}^n a_{ij} \right)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^n a_{ij} \right)^{\frac{1}{n}}} \quad (2.9)$$

É válido mencionar que existem críticas também ao Método do Autovetor como metodologia de dedução do vetor de prioridades locais. Isto pode ser visto, por exemplo, em [12], onde foi mostrado a existência de distorções nos julgamentos realizados pelos decisores após o cálculo do autovetor principal da matriz de comparação entre pares, o que sugere que o Método do Autovetor é capaz de violar a condição de preservação de ordem. Isto significa que, no que tange à dominância, se o elemento  $x_1$  é fortemente superior ao elemento  $x_2$  e o elemento  $x_3$  é moderadamente superior ao elemento  $x_4$ , não é garantido que, para um vetor de prioridades  $w$ , a relação  $w(x_1)/w(x_2) > w(x_3)/w(x_4)$  não seja violada. Neste contexto, metodologias alternativas para este fim foram propostas. Mais especificamente, segundo [28], há uma disponibilidade na literatura de, pelo menos, 18 metodologias para se obter o vetor de prioridades de uma matriz de comparação positiva e recíproca. Estas metodologias, conforme [52], podem ser divididas em duas classes principais, sendo uma baseada na ideia de pequenos erros mediante pequenas perturbações (como, por exemplo, o Método do Autovetor - à Direita [117], à Esquerda [71] ou Modificado - e o Método da Média Aritmética das Linhas) e outra baseada na minimização da distância entre a matriz consistente mais próxima e a matriz definida pelo decisor (como o Método da Média Geométrica [85]).

### 2.2.2.3 Mensuração da consistência dos julgamentos

Como se vê, o AHP é um método de decisão multicritério que, em suma, hierarquiza problemas, que podem ser complexos e/ou incertos, e utiliza comparações entre pares de elementos que compõem esta hierarquia para deduzir, de maneira intuitiva, as preferências locais em cada nível. Contudo, este procedimento comparativo pode gerar problemas na obtenção dos resultados finais, uma vez que não são raras as situações cuja propriedade de transitividade nos julgamentos é violada. Isto porque, na prática, quando o decisor lida com problemas que demandam comparações entre pares de elementos e nestas comparações estão envolvidos, de alguma maneira, critérios/subcritérios/alternativas que dependem da subjetividade do decisor, os julgamentos realizados tornam-se imprecisos - e, provavelmente, inconsistentes - e a propriedade de transitividade melhor representada

por  $a_{ik} \approx a_{ij} \cdot a_{jk}$ ,  $\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  [6, 61, 117, 174].

Neste âmbito, como os julgamentos  $a_{ij}$  raramente serão perfeitos, Saaty propõe uma maneira de mensurar o quão consistentes estão estes julgamentos efetuados. Esta mensuração, que é definida na Equação (2.10), é tratada como índice de consistência (CI) e está fundamentada no Método do Autovetor. Note que, no caso da matriz  $A$  ser perfeitamente consistente,  $\lambda_{max} = n$  e, conseqüentemente,  $CI = 0$  [117, 174].

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} \quad (2.10)$$

Mas, como o  $CI$  cresce de acordo com a dimensão matricial  $n$ , Saaty, alegou que apenas o  $CI$  não era suficiente para mensurar a consistência. Assim, o autor propõe a razão de consistência (CR), definida na Equação (2.11), com o intuito de analisar o quão inconsistentes os julgamentos foram em relação a grandes amostras de julgamentos puramente aleatórios. Para tal, o  $CR$  acopla na sua formulação o índice randômico (RI), que representa os valores médios de  $CI$ , detalhados em [6] e gerados a partir de simulações randômicas que utilizaram grandes amostras de matrizes aleatórias de ordem crescente. Para aceitar a matriz como consistente, não tendo que o decisor proceder com a revisão dos julgamentos, os valores de  $CR$  não devem ser maiores que 0,1. Maiores detalhes das razões para o uso da Equação (2.11) na mensuração dos julgamentos, a partir de uma matriz de comparações entre pares  $A$  qualquer, podem ser encontrados em [117, 121, 129].

$$CR = \frac{CI}{RI} \quad (2.11)$$

A mensuração da consistência nos julgamentos, por sua vez, não se limitou à metodologia desenvolvida por Saaty e, além de contribuir com o surgimento de procedimentos alternativos para mensuração da consistência, o tema ainda produz diversas discussões entre pesquisadores [1, 68]. Isso se dá pela metodologia de Saaty gerar diversos questionamentos, como, por exemplo: Faz, realmente, sentido utilizar um índice de consistência, Equação (2.11), que compara os julgamentos com matrizes puramente aleatórias? O que garante o limite de 10% como critério para consistência? Esse limite de 10% não deveria variar conforme a dimensão da matriz? E, ainda, se utilizados outros procedimentos para dedução das prioridades locais, como apresentado na Seção 2.2.2.2, seria apropriado mensurar a consistência com a metodologia tradicional (Método do Autovetor)? Portanto, uma investigação mais profunda destes questionamentos, da metodologia de mensuração da consistência fornecida por Saaty e de índices de consistência alternativos podem ser

encontrados em [3, 14, 39, 53, 75, 92, 107, 111, 145, 149].

#### 2.2.2.4 Síntese das prioridades globais das alternativas

A última etapa na utilização do AHP consiste na síntese global dos resultados, que acontece por intermédio de um processo de agregação por adição das prioridades locais dos elementos em todos os níveis. Este procedimento se caracteriza por ser um dos modos mais populares para se classificar as alternativas, com base nas comparações entre pares, e por obter tais classificações mediante uma soma ponderada do desempenho de cada alternativa em todos os critérios. Assim, após o processo de agregação, a prioridade global de cada alternativa é determinada, possibilitando ao decisor a escolha da melhor alternativa [100, 119, 174].

Logo, suponha que um decisor possua  $n$  critérios e  $m$  alternativas. Seja  $b_j$  a prioridade local do  $j$ -ésimo critério com respeito ao objetivo, em que  $\sum_{j=1}^n b_j = 1$ . E, seja  $g_{ij}$  a prioridade local da  $i$ -ésima alternativa com respeito ao  $j$ -ésimo critério, em que  $\sum_{i=1}^m g_{ij} = 1$ . Em outras palavras,  $[g_{ij}]$  é dito ser a matriz de prioridades locais das alternativas em relação aos critérios, onde seus vetores-coluna são constituídos por  $n$  autovetores  $w_i$  (um para cada critério) oriundos das matrizes de comparações entre pares de alternativas. Neste contexto, o procedimento de síntese global ou agregação aditiva das prioridades locais do método AHP é apresentado pela Equação (2.12), em que  $X_i$  representa a prioridade global da  $i$ -ésima alternativa [110, 138].

$$X_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} b_j \quad (2.12)$$

Cabe dizer que o método AHP, quando utiliza o procedimento de agregação aditiva das prioridades locais para obter as prioridades globais das alternativas, como definido na Equação (2.12), este é também chamado de AHP Distributivo. Maiores detalhes das razões para o uso da Equação (2.12) podem ser encontrados em [117, 121, 129].

Ademais, é importante mencionar, mesmo que superficialmente, que o uso do AHP Distributivo proporciona o surgimento de um fenômeno conhecido como *rank reversals*. Este fenômeno foi percebido, primeiramente, na década de 80, em [17], quando foi notado que o acréscimo de uma alternativa, cópia de uma já existente, tinha capacidade de alterar toda uma ordem de prioridades, em um conjunto de avaliações consistentes, mesmo quando os critérios e seus pesos permanecessem os mesmos. Portanto, o *rank reversals* é um fenômeno que refere-se à alteração da ordenação final das alternativas, previamente

definida, em consequência, por exemplo, da inclusão/remoção de alternativas/critérios cópias de algum já existente no modelo [4, 85, 90, 130]. As diferentes tipologias deste fenômeno podem ser encontradas em [4]. O *rank reversals*, que não é uma exclusividade do AHP e que ocorre independente da consistência da matriz de julgamentos, pode acontecer devido: o procedimento de agregação das prioridades locais; o procedimento de normalização; os pesos dos critérios; o uso indevido do método; a incerteza do processo de decisão; e, a dependência estrutural entre os critérios e as alternativas [4, 68]. Em virtude do *rank reversals*, inúmeros debates surgiram quanto à validade do AHP, o que favoreceu na eclosão de novas propostas de melhorias/modificações ao método AHP de Saaty. Dentre estas propostas, podem ser citados:

- AHP B-G [17, 18, 124];
- AHP Referenciado [135, 138];
- *Linking Pin* AHP [102, 139, 137, 171];
- AHP Multiplicativo [16, 85, 162, 158];
- *Benchmark* AHP [170];
- *Dominant* AHP [73];
- *Data Envelopment* AHP [97, 110, 168, 167].

#### 2.2.2.5 Análise de sensibilidade das prioridades globais das alternativas

A análise de sensibilidade pode ser definida como estabilidade ou comportamento da solução para pequenas variações nas preferências ou nos parâmetros que ocorrem durante o processo de resolução sistemático. Em geral, se com estas pequenas variações o *ranking* não mudar, os resultados obtidos são considerados robustos e, caso contrário, são considerados sensíveis. E, como modelos de decisão complexos podem ser inerentemente instáveis, esta análise torna possível a geração de diferentes cenários que podem resultar em outros *rankings*, necessitando de discussões adicionais para se chegar a um consenso [68, 99]. Entretanto, segundo [159], há uma maior limitação de pesquisas relacionadas à análise de sensibilidade em modelos de decisão multicritério determinístico, que são modelos mais intuitivos e cujas variáveis envolvidas recebem apenas um conjunto de valores não-probabilísticos, no processo de avaliação de desempenhos dos elementos, e são combinadas de maneira determinística, a fim de avaliar o impacto das mudanças em uma ou mais variáveis [105].

Em relação ao AHP, por exemplo, que é considerado um modelo de decisão multicritério determinístico, o desenvolvimento do procedimento metodológico para análise de sensibilidade iniciou-se em [91], onde, utilizando-se múltiplos níveis hierárquicos, foram analisados os efeitos causados nas prioridades dos subcritérios ou das alternativas mediante modificações nos vetores de prioridades que compõem a matriz de prioridades locais das alternativas e, ainda, a relação das modificações com possíveis impactos na reversão de prioridades entre as alternativas. Contudo, o procedimento apresentado em [91] não era capaz de realizar uma análise de sensibilidade de dados pontuais, cujo intuito fosse, por exemplo, saber a sensibilidade de um único critério ou de uma única alternativa em termos de um determinado critério.

Posteriormente, em [10] foi apresentado um procedimento de identificação do critério mais crítico em um problema de múltiplos níveis. Mas, como esta metodologia não especifica qual deverá ser a menor perturbação no peso dos critérios que possibilite alterações nas prioridades globais das alternativas, uma análise de sensibilidade complementar é desenvolvida em [159], onde foi aplicada em dois problemas específicos. No primeiro problema, após alguns desenvolvimentos algébricos, uma formulação para retornar o quão crítico cada critério era foi demonstrada e, com isso, tornou-se possível deduzir a menor modificação nos pesos dos critérios capaz de provocar a reversão no *ranking* das alternativas. Já no segundo problema, por argumentos similares, uma formulação para retornar o quão críticos os desempenhos das alternativas (ou, em outras palavras, dos elementos da matriz de prioridades locais) eram foi demonstrada e, assim, tornou-se possível identificar a menor modificação no desempenho das alternativas também capaz de provocar a reversão no *ranking* das alternativas após o procedimento de síntese. Maiores detalhes desta última análise de sensibilidade podem ser encontrados em [103, 159].



## Capítulo 3

# Uma análise matemática do método AHP

A síntese global dos resultados, abordada na Seção 2.2.2.4 com a Equação (2.12), pode ser redefinida, por sua vez, na forma matricial. Consideremos, então, um problema composto por  $C$  critérios e  $A$  alternativas. Logo, define-se  $B_{C,1}$  como o vetor de prioridades locais dos critérios em relação aos objetivos e  $G_{A,C}$  como a matriz de prioridades locais das alternativas em relação aos critérios. Deste modo, o vetor de prioridades globais das alternativas de um problema genérico, designado por  $X_{A,1}$ , satisfaz a Equação (3.1).

$$X_{A,1} = G_{A,C}B_{C,1} \quad (3.1)$$

Observemos, pela Equação (3.1), que a solução (ou, vetor de prioridades globais das alternativas)  $X_{A,1}$  do método AHP já é explicitamente dada. Isto é, não é necessário resolver um Sistema de Equações Lineares para obter a solução de um problema genérico. Por este motivo, a representação definida pela Equação (3.1), que representa o processo de síntese global ou agregação aditiva das prioridades locais, será chamada de Formulação Tradicional ou Formulação com Solução Explícita. Também é importante notar que, com a Formulação Tradicional, a solução é sempre única e será denotada por  $X_{A,1}^{ORG}$ .

Por outro lado, a síntese global dos resultados do método AHP também pode ser escrita na forma de um Sistema de Equações Lineares tradicional, como mostra a Equação (3.2). Para deduzir a Equação (3.2), dentre as diversas formas possíveis, basta pré-multiplicar a Equação (3.1) pela matriz arbitrária  $C_{C,A}$ . Esta formulação, por sua vez, será tratada como Formulação Equivalente do método AHP ou Formulação com Solução Implícita, onde, neste momento, é necessário resolver este Sistema de Equações Lineares para obter o vetor de prioridades globais das alternativas. A solução da Equação (3.2) será denotada por  $X_{A,1}^{EQV}$ .

$$C_{C,A}X_{A,1} = D_{C,1} = C_{C,A}G_{A,C}B_{C,1} \quad (3.2)$$

Embora tenha sido definido  $D_{C,1} = C_{C,A}G_{A,C}B_{C,1}$ , a Equação (3.2) ainda não está parametrizada em termos de todas as variáveis da Formulação Tradicional. Este ajuste de  $C_{C,A}$  será realizado na Seção 3.4 e, por hora, continuemos com a Formulação Equivalente na forma mais genérica, como a definida na Equação (3.2). Agora, veja que, diferentemente da Formulação Tradicional, o Sistema de Equações Lineares definido na Formulação Equivalente pode, ainda, ter nenhuma ou outras soluções, o que dependerá de como foram construídas a matriz  $G_{A,C}$  e o vetor  $B_{C,1}$ . Isto, portanto, permite que conceitos de unicidade/existência e estabilidade da solução retornada pelo AHP sejam, então, estudados.

Note que o estudo destes conceitos poderia, a título de exemplo, viabilizar a classificação do AHP conforme [60]. Isto é, se a solução com a Formulação Equivalente existe, é única e contínua em relação aos dados observados, ou seja,  $X_{A,1}^{EQV} = X_{A,1}^{ORG}$  e  $X_{A,1}^{EQV}$  é uma solução estável, pode-se dizer que o método AHP tradicional é um problema matemático “bem-posto”, em consonância com a definição presente em [60]. Caso um destes três requisitos seja violado, ou seja,  $X_{A,1}^{EQV} = X_{A,1}^{ORG}$  mas  $X_{A,1}^{EQV}$  seja uma solução instável ou, simplesmente, caso  $X_{A,1}^{EQV} \neq X_{A,1}^{ORG}$ , visto que a Formulação Tradicional ignora ou desconhece outras possíveis soluções matemáticas do problema, o método AHP tradicional, segundo ainda [60], é dito ser “mal-posto” e com graves implicações para seu uso prático. Mas, esta classificação não será desenvolvida nesta dissertação, uma vez que inúmeros problemas reais, bem como os problemas inversos, são mal-postos quando traduzidos num modelo matemático aceitável [62].

Cabe, por último, mencionar que a formulação em termos de um Sistema de Equações Lineares é, de fato, útil do ponto de vista matemático porque existem muitos resultados da Álgebra Linear que podem ser aproveitados [48, 54, 83, 152]. A título de exemplo, em consequência da Equação (3.2), torna-se possível atribuir uma interpretação geométrica inédita ao método AHP. Seja  $S$  um subespaço vetorial com dimensão igual ao número de alternativas ( $S \subseteq \mathbb{R}^A$ ) e seja um vetor desse espaço denotado pelo vetor de prioridades globais das alternativas  $X_{A,1}$ . Então, cada equação do sistema denotado na Equação (3.2) pode ser geometricamente interpretada como a equação de um hiperplano no subespaço  $S$ . Desta forma, o número de hiperplanos, definidos pela matriz  $C_{C,A}$ , seria igual ao número de critérios e o vetor  $X_{A,1}$ , se existir, determinaria os pontos comuns a todos estes hiperplanos. Dependendo das entradas da matriz de prioridades das alternativas em relação aos critérios

e das componentes do vetor de prioridades locais dos critérios em relação aos objetivos, existiriam três possibilidades para as interseções entre os hiperplanos: um único ponto comum, nenhum ponto em comum ou infinitos pontos em comum.

Na Seção 3.1, então, serão destacadas algumas peculiaridades matemáticas da reformulação do processo de síntese global dos resultados do método AHP definido na Equação (3.2), discutindo, principalmente, como serão as soluções da Equação (3.2) e quando estas serão iguais a solução retornada pela Formulação Tradicional.

### 3.1 Formulação matemática equivalente para o método AHP

Em Álgebra Linear se diz que, para uma matriz  $C_{C,A}$ , o posto (ou, *rank*) de  $C_{C,A}$  é a dimensão do subespaço de  $\mathbb{R}^C$  gerado pelas colunas de  $C_{C,A}$ . Logo, o posto de  $C_{C,A}$ , definido segundo as colunas da matriz, é o número máximo de colunas linearmente independentes da matriz  $C_{C,A}$ . De maneira análoga, o posto pode ser definido segundo as linhas da matriz, como o número máximo de linhas linearmente independentes de  $C_{C,A}$ , que é equivalente ao posto definido segundo colunas [83]. Então, pode-se dizer que  $\text{posto}(C_{C,A}) = K \in \mathbb{N}$ , cujo  $K$  é o número máximo de linhas, ou de colunas, linearmente independentes dessa matriz. Ademais, o posto de  $C_{C,A}$  pode ser também interpretado como o número de pivôs da forma escalonada de  $C_{C,A}$  [8, 83, 152].

Por outro lado, como os vetores-linha de  $C_{C,A}$  estão em  $\mathbb{R}^A$  e os vetores-coluna, em  $\mathbb{R}^C$ , o espaço linha de  $C_{C,A}$  tem, no máximo, dimensão  $A$ , e o espaço coluna tem, no máximo, dimensão  $C$ . Como o posto de  $C_{C,A}$  é a dimensão comum dos espaços linha e coluna, segue que o posto é, no máximo, o menor dos dois números  $C$  e  $A$ , isto é,  $\text{posto}(C_{C,A}) \leq \min\{C, A\}$  [8]. Cabe ressaltar que, sempre quando o posto de uma matriz  $C_{C,A}$  for igual a  $\min\{C, A\}$ , dizemos que a matriz é de posto completo. Em caso contrário, dizemos que a matriz é deficiente em posto ou é de posto incompleto [8, 81]. Neste sentido, se  $\text{posto}(C_{C,A}) = A$ , é dito que a matriz  $C_{C,A}$  possui posto completo por colunas (*full-column rank*) e, em contrapartida, se  $\text{posto}(C_{C,A}) = C$ , é dito que a matriz  $C_{C,A}$  possui posto completo por linhas (*full-row rank*). Veja que, como caso particular para matrizes quadradas ( $C = A$ ), a matriz  $C_{A,A}$  ser deficiente em posto é equivalente a esta matriz ser singular ( $\det(C_{A,A}) = 0$ ) [152].

A definição do posto matricial, brevemente apresentada, fornece uma relação entre um Sistema de Equações Lineares e sua matriz de coeficientes. Por exemplo, quando a matriz

aumentada  $[C_{C,A}; D_{C,1}] \in \mathbb{R}^{C \times (A+1)}$  possui o mesmo posto da matriz  $C_{C,A}$ , que é igual ao número de incógnitas do sistema, a solução é única. Isto equivale dizer que o vetor  $D_{C,1} \in \mathbb{R}^C$  pertence ao subespaço gerado pelas colunas de  $C_{C,A}$ . No entanto, quando o posto da matriz aumentada  $[C_{C,A}; D_{C,1}] \in \mathbb{R}^{C \times (A+1)}$  é maior que o posto da matriz  $C_{C,A}$ , não haverá solução para o sistema. E, por último, quando se tem  $\text{posto}[C_{C,A}; D_{C,1}] = \text{posto}(C_{C,A}) = K \in \mathbb{N}$ , cujo  $K < A$ , existirão uma infinidade de soluções, tendo a solução do sistema  $K$  variáveis básicas e  $(A - K)$  variáveis livres (consequentemente, se  $K = A$ , então não haverá variáveis livres) [83].

Para a análise de soluções da Formulação Equivalente, portanto, três possibilidades devem ser analisadas: número de critérios maior do que o número de alternativas ( $C > A$ ); número de critérios igual ao número de alternativas ( $C = A$ ); número de critérios menor que o número de alternativas ( $C < A$ ).

### 3.1.1 Número de critérios maior do que o número de alternativas

Neste caso, a matriz  $C_{C,A}$ , que compõe a Equação (3.2), é retangular, onde o número de equações é maior do que o número de incógnitas ( $C > A$ ). Este Sistema de Equações Lineares é dito ser sobredeterminado (*overdetermined*) e, caso o vetor  $D_{C,1}$  seja combinação linear dos vetores-coluna da matriz  $C_{C,A}$ , existirá solução e este sistema é dito ser consistente. Caso contrário, a solução inexistente e este sistema é dito ser inconsistente. Na maior parte dos casos, não haverá uma solução que satisfaça exatamente a Equação (3.2), pois uma das equações será impossível de ser satisfeita, mas é possível procurar uma solução que torne o erro tão pequeno quanto possível, ou seja, uma solução que minimize  $\| D_{C,1} - C_{C,A}X_{A,1} \|_2^2$ ,  $\forall X_{A,1} \in \mathbb{R}^{A \times 1}$ , que será dada pela projeção ortogonal de  $D_{C,1}$  sobre o espaço coluna da matriz  $C_{C,A}$  [48, 54, 109, 141, 152].

Por conseguinte, esta solução procurada e minimizadora de  $\| D_{C,1} - C_{C,A}X_{A,1} \|_2^2$ , é sempre definida pela Equação (3.3), independente de quão consistente/inconsistente seja o Sistema de Equações Lineares [86]. Porém, se as colunas da matriz  $C_{C,A}$  for linearmente independentes, isto é,  $\text{posto}(C_{C,A}) = A$ , existirá uma inversa à esquerda, denotada por  $C_{A,C}^{-left}$ , tal que  $C_{A,C}^{-left}C_{C,A} = I_{A,A}$ , cujo  $I_{A,A}$  denota a matriz identidade, e a solução será definida por  $X_{A,1} = C_{A,C}^{-left}D_{C,1}$ , devendo ser única e coincidente com a solução da Equação (3.1). Esta solução, definida na Equação (3.3) para posto completo por colunas, é oriunda das chamadas Equações Normais do problema de mínimos quadrados. Em contrapartida, se  $\text{posto}(C_{C,A}) < A$  (posto incompleto), existirão infinitas soluções para a Equação (3.2), isto é, a solução definida na Equação (3.3) não é única, uma vez que inúmeros vetores

$X_{A,1}$  minimizam o resíduo  $\| D_{C,1} - C_{C,A}X_{A,1} \|_2^2$ .

$$X_{A,1} = C_{A,C}^{-left} D_{C,1} = [C_{A,C}^T C_{C,A}]^{-1} C_{A,C}^T C_{C,A} G_{A,C} B_{C,1} \quad (3.3)$$

Ademais, a matriz  $Q_{A,A} \equiv C_{A,C}^T C_{C,A}$ , por ser formada pelo produto de uma matriz com sua transposta, é dita ser simétrica. E, se  $Q_{A,A}$  é não-singular, então sua respectiva inversa também será simétrica, isto é,  $Q_{A,A}^{-1} = [Q_{A,A}^{-1}]^T$  [8]. Considerando que  $Q_{A,A}$  é não-singular, isto é,  $posto(C_{C,A}) = A$ ,  $C_{A,C}^{-left} = [C_{A,C}^T C_{C,A}]^{-1} C_{A,C}^T = Q_{A,A}^{-1} C_{A,C}^T$ , onde o expoente  $[\cdot]^T$  denota a transposta de uma matriz ou vetor, isto é,  $[C_{C,A}]^T = C_{A,C}^T$ . E, ainda no caso da matriz  $C_{C,A} \in \mathbb{R}^{C \times A}$  ser de posto completo por colunas, pode-se dizer que a matriz  $Q_{A,A} \equiv C_{A,C}^T C_{C,A}$  é simétrica e positiva definida [48].

Neste contexto, a Equação (3.3) seria um caso favorável para utilizar a decomposição de Cholesky, isto é,  $C_{A,C}^T C_{C,A}$  poderia ser decomposta unicamente no produto  $L_{A,A} L_{A,A}^T$ , onde  $L_{A,A}$  é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos. Com  $C_{A,C}^T C_{C,A}$  fatorada em duas matrizes triangulares, a solução da Equação (3.3) seria obtida com a resolução de  $L_{A,A}^T X_{A,1} = Y_{A,1}$ , cujo vetor  $Y_{A,1}$  é determinado pela resolução de  $L_{A,A} Y_{A,1} = C_{A,C}^T C_{C,A} G_{A,C} B_{C,1}$ . Isto nos daria um custo computacional de, aproximadamente,  $CA^2 + (1/3)A^3$  operações. Contudo, devido a erros de arredondamento, o cálculo de  $C_{A,C}^T C_{C,A}$  poderá ser afetado por uma perda de algarismos significativos, com a consequente perda do caráter definido positivo da própria matriz, como será visto na Seção 3.3 [33, 36, 54].

Uma alternativa mais conveniente à decomposição de Cholesky, por questões de eficiência e precisão, seria obter a solução definida na Equação (3.3) com a decomposição QR, que utiliza de transformações ortogonais para reduzir o problema de mínimos quadrados à um sistema triangular. Esta decomposição pode ser implementada, por exemplo, usando reflexões de Householder ou processo de Gram–Schmidt, e, para toda matriz  $C_{C,A}$ , com  $C \geq A$  e  $posto(C_{C,A}) = A$ , ela existe e é única. Logo, escrevendo a decomposição QR da matriz  $C_{C,A}$ , vêm  $C_{C,A} = Q_{C,C}^{ort} R_{C,A}$ , cuja matriz  $Q_{C,C}^{ort}$  é ortogonal e a matriz  $R_{C,A}$  é triangular (trapezoidal) superior. Particionando, agora, a decomposição QR anterior, obtemos  $C_{C,A} = Q_{C,C}^{ort} R_{C,A} = [\tilde{Q}_{C,A} \quad \tilde{Q}_{A,C}] \begin{bmatrix} \tilde{R}_{A,A} \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{Q}_{C,A} \tilde{R}_{A,A}$ , cujas matrizes  $\tilde{Q}_{C,A}$  e  $\tilde{R}_{A,A}$  são formadas, respectivamente, pelas primeiras  $A$  colunas ortonormais de  $Q_{C,C}^{ort}$  e primeiras  $A$  linhas não-nulas da matriz  $R_{C,A}$ . Então, quando aplicado ao problema de mínimos quadrados, a solução da Equação (3.2), definida na Equação (3.3), é única e idêntica à solução de  $X_{A,1} = \tilde{R}_{A,A}^{-1} \left( \tilde{Q}_{C,A} \right)^T D_{C,1}$ . Isto nos daria um custo computacional

de, aproximadamente,  $2CA^2 - 2C^3$  operações (se,  $A \gg C$ , o custo seria em torno de  $2CA^2$  operações) [33, 36, 48, 54, 109].

Entretanto, percebe-se que, pela hipótese de  $\text{posto}(C_{C,A}) = A$ , a matriz  $\tilde{R}_{A,A}$ , gerada na decomposição QR, é não-singular (e, por ser triangular, muito mais fácil de ser invertida). Por outro lado, se  $\text{posto}(C_{C,A}) < A$  (posto incompleto),  $\tilde{R}_{A,A}$  será singular (assim como a matriz  $C_{A,C}^T C_{C,A}$  da Equação (3.3), por pelo menos uma de suas entradas da diagonal principal ser nula, e a solução do Sistema de Equações Lineares mostrada na Equação (3.3) em termos da decomposição QR irá falhar. Neste caso de posto incompleto (ou, de posto desconhecido), outro método deverá ser empregado, como, por exemplo, a decomposição QR com pivotamento de coluna, variante da decomposição QR, ou a decomposição SVD, que será formulada na Seção 3.2. E, como em problemas carentes da hipótese de posto completo existem infinitas soluções de mínimos quadrados, dentre estas, haverá uma única solução de mínimos quadrados no espaço-linha de  $C_{C,A}$ , que será aquela de menor norma [48, 54].

### 3.1.2 Número de critérios igual ao número de alternativas

Neste caso, a matriz  $C_{A,A}$ , que compõe a Equação (3.2), é quadrada, onde o número de equações é igual ao número de incógnitas ( $C = A$ ). Logo, resolver este Sistema de Equações Lineares é, portanto, encontrar as  $A$  incógnitas que satisfaçam as  $A$  equações. Este Sistema de Equações Lineares terá solução se, e somente se, o vetor  $D_{A,1}$  for combinação linear dos vetores-coluna da matriz  $C_{A,A}$ . Se  $\text{posto}(C_{A,A}) = A$  (posto completo), isto é, as colunas referentes às variáveis do sistema possuem posição de pivô, o sistema terá uma única solução, como mostra a Equação (3.4). Note que esta solução irá coincidir com a solução da Formulação Tradicional, definida na Equação (3.1).

$$X_{A,1} = C_{A,A}^{-1} D_{A,1} = C_{A,A}^{-1} C_{A,A} G_{A,A} B_{A,1} = G_{A,A} B_{A,1} \quad (3.4)$$

Ademais, quando  $\text{posto}(C_{A,A}) = A$ ,  $C_{A,A}^T C_{A,A}$  é positiva definida e não haverá autovalores nulo para a matriz  $Q_{A,A}$ . Por outro lado, se  $\text{posto}(C_{A,A}) < A$  (posto incompleto), o sistema pode ter infinitas soluções ou nenhuma. Haverão infinitas soluções quando as equações do sistema são consistentes mas alguma coluna não é pivô, isto é, quando o vetor  $D_{A,1}$  é combinação linear dos vetores-coluna da matriz  $C_{A,A}$  para muitas escolhas de  $X_{A,1}$ . Mas, não existirá solução quando uma das equações é impossível de ser satisfeita, isto é, quando o vetor  $D_{A,1}$  não é combinação linear dos vetores-coluna da matriz

$C_{A,A}$ , característica de um sistema inconsistente. Isto, portanto, irá depender do vetor  $D_{A,1} = C_{A,A}G_{A,A}B_{A,1}$ . Neste caso, seria interessante conhecer qual é a escolha das variáveis livres que fazem a solução da Equação (3.2) igual à solução da Equação (3.1) ( $X_{A,1}^{EQV} = X_{A,1}^{ORG}$ ).

### 3.1.3 Número de critérios menor do que o número de alternativas

Neste caso, a matriz  $C_{C,A}$ , que compõe a Equação (3.2), é retangular, onde o número de equações é menor do que o número de incógnitas ( $C < A$ ), e o Sistema de Equações Lineares é dito ser subdeterminado (*underdetermined*). Embora seja possível a um sistema subdeterminado ser inconsistente, eles serão, em geral, consistentes com um número infinito de soluções [81]. Logo, a Equação (3.2) pode ter infinitas soluções ou nenhuma, mas nunca uma única solução, visto que a solução envolverá  $K$  variáveis principais e  $A - K$  variáveis livres, cujo  $\text{posto}(C_{C,A}) = K \leq \min\{C, A\}$ . Se o sistema for consistente, isto é,  $\text{posto}(C_{C,A}) = C$  (posto completo por linhas), por meio da Fatoração LU, é possível fixar as variáveis livres e obter soluções particulares do conjunto infinito de soluções [54].

Agora, por não existirem restrições para  $D_{C,1}$ , para todo  $D_{C,1}$  a Equação (3.2) pode ser resolvida. Uma solução básica para este sistema é obtida fazendo-se as  $A - K$  variáveis livre iguais à zero e resolvendo-se as  $K$  equações para as  $K$  incógnitas remanescentes [27]. Mas esta solução não é de grande interesse, pelo fato do método AHP retornar vetores de prioridades globais das alternativas ( $X_{A,1}$ ) ausentes de elementos nulos.

Por outro lado, uma possível solução do sistema subdeterminado é exibida na Equação (3.5). Esta solução é proveniente do problema de otimização, onde deseja-se minimizar  $\|X_{A,1}\|_2^2$  sujeito à  $C_{C,A}X_{A,1} = D_{C,1}$ . Portanto, a escolha de uma solução particular, de modo a proporcionar uma solução ótima para o problema de otimização, é feita mediante a solução de norma mínima [80, 152]. Porém, se  $\text{posto}(C_{C,A}) = C$  (posto completo por linhas), existirá uma inversa à direita, denotada por  $C_{A,C}^{-right}$ , tal que  $C_{C,A}C_{A,C}^{-right} = I_{C,C}$ , e uma possível solução seria  $X_{A,1} = C_{A,C}^{-right}D_{C,1}$ , embora seja aceitável existirem outras soluções caso existam outras inversas à direita. Esta solução, definida na Equação (3.5) para  $\text{posto}(C_{C,A}) = C$ , é oriunda das chamadas Equações Normais do problema de norma mínima [80, 152].

$$X_{A,1} = C_{A,C}^{-right}D_{C,1} = C_{A,C}^T[C_{C,A}C_{A,C}^T]^{-1}C_{C,A}G_{A,C}B_{C,1} \quad (3.5)$$

Ademais, a matriz  $P_{C,C} \equiv C_{C,A}C_{A,C}^T$ , por ser formada pelo produto de uma matriz

com sua transposta, é dita ser simétrica. E, se  $P_{C,C}$  é não-singular, então sua respectiva inversa também será simétrica, isto é,  $P_{C,C}^{-1} = [P_{C,C}^{-1}]^T$  [8]. Considerando que  $P_{C,C}$  é não-singular (e, por conseguinte,  $Q_{A,A}$  é singular), isto é,  $\text{posto}(C_{C,A}) = A$ ,  $C_{A,C}^{-right} = C_{A,C}^T [C_{C,A} C_{A,C}^T]^{-1} = C_{A,C}^T P_{C,C}^{-1}$ . E, ainda no caso da matriz  $C_{C,A} \in \mathbb{R}^{C \times A}$  ser de posto completo por linhas, pode-se dizer que a matriz  $P_{C,C} \equiv C_{C,A} C_{A,C}^T$  é simétrica e positiva definida [48].

Agora, para que a solução mostrada na Equação (3.5) coincida com a solução da Equação (3.1), é necessário que se verifique a condição  $C_{A,C}^T [C_{C,A} C_{A,C}^T]^{-1} C_{C,A} = I_{A,A}$ . Esta condição implica em que  $C_{A,C}^{-right}$  também seja uma inversa à esquerda de  $C_{C,A}$ , o que é impossível para  $C < A$ . Logo, a Equação (3.2) sempre possuirá uma solução quando existir  $C_{A,C}^{-right}$  e, se  $C_{A,C}^{-left}$  também existir, pode-se dizer que esta solução será única. Entretanto, somente matrizes quadradas não-singulares ( $K = A = C$ ) possuirão inversa à esquerda e à direita ( $C_{A,C}^{-left} = C_{A,C}^{-right} = C_{K,K}^{-1}$ ).

A solução mostrada na Equação (3.5) pode ser obtida, por exemplo, com a resolução de dois Sistema de Equações Lineares acoplados, isto é,  $X_{A,1} = C_{A,C}^T Z_{C,1}$ , onde  $[C_{C,A} C_{A,C}] Z_{C,1} = C_{C,A} G_{A,C} B_{C,1}$  [141]. Conquanto, a Equação (3.5) enfrentará as mesmas dificuldades de resolução da solução mostrada na Equação (3.3). Assim, para uma matriz  $C_{C,A}$  de posto completo, é viável utilizar, novamente, a decomposição QR para a obtenção da solução via Equação (3.5).

Neste contexto, considerando a hipótese de posto completo por linhas, a decomposição QR será dada, agora em termos da transposta, por  $C_{A,C}^T = Q_{A,A}^{ort} R_{A,C}$ . Particionando, agora, a decomposição QR anterior, obtemos  $C_{A,C}^T = [\tilde{Q}_{A,C} \quad \tilde{Q}_{C,A}] \begin{bmatrix} \tilde{R}_{C,C} \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{Q}_{A,C} \tilde{R}_{C,C}$ , cujas matrizes  $\tilde{Q}_{A,C}$  e  $\tilde{R}_{C,C}$  são, respectivamente, formadas pelas primeiras  $C$  colunas ortonormais de  $Q_{A,A}^{ort}$  e primeiras  $C$  linhas não-triviais da matriz  $R_{A,C}$ . Portanto, a solução via Equação (3.5), em termos da decomposição QR, é dada por  $X_{A,1} = \tilde{Q}_{A,C} \tilde{R}_{C,C}^{-1} D_{C,1}$ , no qual poderá ser obtida com a resolução de dois Sistemas de Equações Lineares acoplados, onde o primeiro sistema  $X_{A,1} = \tilde{Q}_{A,C} Y_{C,1}$  dependeria da resolução de  $\tilde{R}_{C,C} Y_{C,1} = D_{C,1}$ .

Entretanto, perceba que, pela hipótese de  $\text{posto}(C_{C,A}) = C$ , a matriz  $\tilde{R}_{C,C}$ , gerada na decomposição QR, é não-singular. Por outro lado, se  $\text{posto}(C_{C,A}) < C$  (posto incompleto),  $\tilde{R}_{C,C}$  será singular, bem como a matriz  $C_{C,A} C_{A,C}^T$  da Equação (3.5). Neste caso de posto incompleto (ou, de posto desconhecido), outro método deverá ser empregado, como, por exemplo, a decomposição SVD, que será formulada na Seção 3.2. Resumindo, quando  $C < A$  o sistema pode ter infinitas soluções (no caso de posto completo ou não) ou pode



não ter solução. Assim, seria interessante conhecer qual é a escolha das componentes livres que fazem a solução da Equação (3.5) igual à solução da Equação (3.1) ( $X_{A,1}^{ORG} = X_{A,1}^{EQV}$ ).

## 3.2 Formulação matemática equivalente generalizada

Como visto, a Seção 3.1 abordou com maiores detalhes a Formulação Equivalente e caracterizou, de acordo com o número de alternativas e critérios, possíveis soluções com esta formulação, como destacam as Equações 3.3, 3.4 e 3.5, geradas a partir da Equação (3.2). Entretanto, quando, por exemplo,  $C_{C,A}$  é uma matriz de posto incompleto, devido à singularidade das matrizes  $C_{A,C}^T C_{C,A}$ ,  $C_{A,A}$  ou  $C_{C,A} C_{A,C}^T$ , as Equações 3.3, 3.4 e 3.5 podem não ter solução única. Torna-se necessário, então, generalizar o conceito de matriz inversa com garantia de unicidade. Maiores detalhes deste tópico podem ser encontrados em [13, 22, 33, 48, 54, 152].

Sendo assim, consideremos um Sistema de Equações Lineares genérico, como definido pela Equação (3.2), onde a matriz  $C_{C,A} \in \mathbb{R}^{C \times A}$  é retangular ( $C \neq A$ ). Então, como demonstrado em [48, 54], sempre existe uma única matriz  $C_{A,C}^\dagger \in \mathbb{R}^{A \times C}$ , denominada de inversa generalizada de Moore-Penrose ou pseudo-inversa de  $C_{C,A}$ , que satisfaz quatro propriedades:

- $C_{C,A} C_{A,C}^\dagger C_{C,A} = C_{C,A}$
- $C_{A,C}^\dagger C_{C,A} C_{A,C}^\dagger = C_{A,C}^\dagger$
- $[C_{C,A} C_{A,C}^\dagger]^T = C_{C,A} C_{A,C}^\dagger$
- $[C_{A,C}^\dagger C_{C,A}]^T = C_{A,C}^\dagger C_{C,A}$

Embora as matrizes  $C_{C,A} C_{A,C}^\dagger$  e  $C_{A,C}^\dagger C_{C,A}$  aparentam desempenhar o papel de matriz identidade na multiplicação à esquerda por  $C_{C,A}$  e  $C_{A,C}^\dagger$ , respectivamente, essas matrizes só serão mesmo iguais à matriz identidade em casos especiais, como, por exemplo, no caso onde a matriz  $C_{C,A}$  é quadrada ( $C = A$ ) e de posto completo. Neste caso, então, a pseudo-inversa coincide com a matriz inversa, isto é,  $C_{A,A}^\dagger = C_{A,A}^{-1}$  [152, 153]. Logo, na hipótese da matriz  $C_{C,A}$  ser de posto completo (isto é,  $posto(C_{C,A}) = \min\{C, A\}$ ) e mediante algumas manipulações algébricas, a pseudo-inversa de  $C_{C,A}$  pode ser determinada conforme a Equação (3.6) [13, 33, 166].

$$C_{A,C}^\dagger = \begin{cases} [C_{A,C}^T C_{C,A}]^{-1} C_{A,C}^T, & \text{se } C > A \\ C_{A,A}^{-1}, & \text{se } C = A \\ C_{A,C}^T [C_{C,A} C_{A,C}^T]^{-1}, & \text{se } C < A \end{cases} \quad (3.6)$$

Por outro lado, se  $C_{C,A}$  não for de posto completo, embora ainda exista uma única pseudo-inversa, a representação definida na Equação (3.6) não é válida. Agora, note que, com a pseudo-inversa de  $C_{C,A}$  definida, torna-se viável postular a Formulação Equivalente de forma generalizada. Para este fim, basta pré-multiplicarmos a pseudo-inversa de  $C_{C,A}$  na Equação (3.2), isto é,  $C_{A,C}^\dagger C_{C,A} X_{A,1} = C_{A,C}^\dagger D_{C,1} = C_{A,C}^\dagger C_{C,A} G_{A,C} B_{C,1} = G_{A,C} B_{C,1}$ . Isto mostra, em outras palavras, que por meio da pseudo-inversa é possível obter para a Formulação Equivalente a mesma solução da Formulação Tradicional. Neste âmbito, a Equação (3.7), cujo  $D_{C,1} = C_{C,A} G_{A,C} B_{C,1}$ , estabelece uma conexão entre a inversa generalizada de Moore-Penrose e a Equação (3.2).

$$X_{A,1} = C_{A,C}^\dagger D_{C,1} \quad (3.7)$$

Por último, para completar esta argumentação, é importante mencionar que existem várias formas de computar uma pseudo-inversa. E, uma destas formas, como será visto, está na utilização da decomposição SVD da matriz que se deseja inverter [54, 153]. A decomposição SVD, por sua vez, sempre existe e é numericamente estável, apesar do alto custo computacional, e, em termos gerais, usa transformações ortogonais para reduzir o problema em um sistema diagonal, diferentemente da decomposição QR. Nesta conjuntura, pode-se dizer que toda matriz  $C_{C,A} \in \mathbb{R}^{C \times A}$ , com  $\text{posto}(C_{C,A}) = K \leq \min\{C, A\}$ , real ou complexa, pode ser fatorada em um produto  $U_{C,C} \Sigma_{C,A} V_{A,A}^T$ . A matriz  $U_{C,C} \in \mathbb{R}^{C \times C}$  diagonaliza ortogonalmente a matriz  $C_{C,A} C_{A,C}^T$ , tendo suas colunas compostas pelos denominados vetores singulares à esquerda de  $C_{C,A}$ . A matriz  $V_{A,A} \in \mathbb{R}^{A \times A}$ , diferentemente, diagonaliza ortogonalmente a matriz  $C_{A,C}^T C_{C,A}$ , tendo suas colunas compostas pelos denominados vetores singulares à direita de  $C_{C,A}$ . E, por último, a matriz  $\Sigma_{C,A} \in \mathbb{R}^{C \times A}$  é uma matriz diagonal composta pelos  $K$  valores singulares de  $C_{C,A} C_{A,C}^T$ , definidos por  $\sigma$ , cujos os mesmos satisfazem  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_K > 0$ , como se vê na Equação (3.8) [22, 81, 153].

$$\Sigma_{C,A} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{K,K} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{C \times A}, \quad \hat{\Sigma}_{K,K} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_K) \in \mathbb{R}^{K \times K}. \quad (3.8)$$

Baseada na fatoração  $C_{C,A} = U_{C,C} \Sigma_{C,A} V_{A,A}^T$ , a pseudo-inversa ou inversa generali-

zada de Moore-Penrose da matriz  $C_{C,A}$  em termos da decomposição SVD é definida como  $C_{A,C}^\dagger = V_{A,A} \Sigma_{A,C}^\dagger U_{C,C}^T$ , cuja matriz  $\Sigma_{A,C}^\dagger$ , apresentada na Equação (3.9), é a pseudo-inversa de  $\Sigma_{A,C}$  [22, 48, 54, 81, 153]. É fácil mostrar também que a Equação (3.6) não se altera com a pseudo-inversa de  $C_{C,A}$  em termos da decomposição SVD. Veja, por exemplo, quando o número de critérios for maior do que o número de alternativas ( $C > A$ ) e  $C_{C,A}$  de posto completo por colunas:  $[C_{A,C}^T C_{C,A}]^{-1} C_{A,C}^T = [V_{A,A} \Sigma_{A,C}^T \Sigma_{C,A} V_{A,A}^T]^{-1} V_{A,A} \Sigma_{A,C}^T U_{C,C}^T = V_{A,A} [\Sigma_{A,C}^T \Sigma_{C,A}]^{-1} \Sigma_{A,C}^T U_{C,C}^T = C_{A,C}^\dagger$ . Argumentos semelhantes podem ser utilizados quando o número de critérios for menor do que o número de alternativas ( $C < A$ ) e  $C_{C,A}$  com posto completo por linhas [13].

$$\Sigma_{A,C}^\dagger = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{K,K}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{A \times C}, \quad \hat{\Sigma}_{K,K}^{-1} = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_K^{-1}) \in \mathbb{R}^{K \times K}. \quad (3.9)$$

Deste modo, a Equação (3.7) poderia ser reescrita como  $X_{A,1} = V_{A,A} \Sigma_{A,C}^\dagger U_{C,C}^T D_{C,1}$ , sendo  $C_{C,A}$  uma matriz quadrada ou não, de posto completo ou não. Em síntese, então, é admissível dizer que quando  $C > A$  e  $\text{posto}(C_{C,A}) = A$ , a solução da Equação (3.7) (e, coincidente com a solução da Formulação Tradicional) será aquela que minimiza o erro  $\| D_{C,1} - C_{C,A} X_{A,1} \|$  sobre  $\mathbb{R}^A$ . No caso de  $C < A$  e  $\text{posto}(C_{C,A}) = C$ , a solução da Equação (3.7) de melhor escolha (e, coincidente com a solução da Formulação Tradicional) será a de menor norma dentre todas as demais [22, 33, 36]. Agora, quando  $\text{posto}(C_{C,A}) = K < \min\{C, A\}$ , haverão uma infinidade de soluções em  $\mathbb{R}^A$  que minimizam  $\| D_{C,1} - C_{C,A} X_{A,1} \|$ . Logo, a solução da Equação (3.7) é obtida, por exemplo, com a decomposição SVD Truncada, e é dita ser a solução de mínima norma do problema de mínimos quadrados. Maiores detalhes deste caso de posto incompleto são encontrados em [13, 33, 54, 166].

Agora, para evitar soluções com erros gerados por incertezas/imprecisões e julgados inadequados para o uso a que se destina, sempre devemos nos atentar para a sensibilidade dos dados que compõe a Formulação Equivalente e, ainda, para a influência do arredondamento em ponto flutuante e suas operações aritméticas. Esta análise será desenvolvida na Seção 3.3 e, embora seja considerada uma análise de sensibilidade do problema e existam outros modos de efetuar-la, aqui, será realizada pelo número de condicionamento, onde será examinado relações entre incertezas dos elementos do problema e a precisão da solução [32, 48, 54, 80].

### 3.3 Número de condicionamento para Sistema de Equações Lineares

Existem várias abordagens para estimar o número de condicionamento de uma matriz [32, 54, 80]. Neste contexto, apresentaremos uma das primeiras abordagens para este número, tomando a Formulação Equivalente, Equação (3.2), como ponto de partida. Deste modo, considerando, inicialmente,  $C_{A,A} \in \mathbb{R}^{A \times A}$ , caso específico cujo número de critérios e alternativas são iguais, isto é,  $C = A$ , é possível definir o número de condicionamento desta matriz, caso esta não seja singular, como  $cond(C_{A,A}) = \|C_{A,A}\| \|C_{A,A}^{-1}\| = cond(C_{A,A}^{-1})$ , onde  $cond(\cdot) \in \mathbb{R}$  e  $\|\cdot\|$  representa alguma norma matricial. Embora o número de condicionamento varie de acordo com a norma utilizada, os resultados serão “próximos” [48, 54]. Além disso, veja que  $1 \leq cond(\cdot) \leq \infty$ . Para o caso de  $cond(\cdot) = 1$ , é dito que a matriz é perfeitamente condicionada.

Sejam, então,  $\Delta D_{A,1}$ ,  $\Delta C_{A,A}$  e  $\Delta X_{A,1}$  as incertezas em  $D_{A,1}$ ,  $C_{A,A}$  e  $X_{A,1}$ , respectivamente. Então, após algumas manipulações algébricas, é possível obter duas desigualdades, como mostrado pelas Equações 3.10 e 3.11 em [54, 80]. Estas desigualdades determinam como pequenas modificações no vetor  $D_{A,1}$  e na matriz  $C_{A,A}$  irão influenciar na solução  $X_{A,1}$ , isto é, elas estabelecem uma relação entre os erros relativos provocados pelas incertezas dos dados de entrada do Sistema de Equações Lineares, onde o limite superior para o erro relativo na solução tem uma dependência proporcional com o erro relativo dos dados do problema, cujo fator de proporcionalidade é o  $cond(C_{A,A})$ . Desta forma, para um  $cond(C_{A,A}) \gg 1$ , o que classificaria a matriz como mal condicionada, pequenas incertezas nos dados de entrada, como em  $D_{A,1}$  ou em  $C_{A,A}$ , conduzirão a grandes variações nos dados de saída ( $X_{A,1}^{ALT}$ ) [32, 48, 54, 80].

$$\frac{\|\Delta X_{A,1}\|}{\|X_{A,1}\|} \leq cond(C_{A,A}) \frac{\|\Delta D_{A,1}\|}{\|D_{A,1}\|} \quad (3.10)$$

$$\frac{\|\Delta X_{A,1}\|}{\|X_{A,1} + \Delta X_{A,1}\|} \leq cond(C_{A,A}) \frac{\|\Delta C_{A,A}\|}{\|C_{A,A}\|} \quad (3.11)$$

Como mencionado, um alto número de condicionamento está, relativamente, associado a uma grande variação na solução de Sistema de Equações Lineares. E, geralmente, quanto maior é o número de condicionamento de uma matriz, menor é seu determinante, ou seja, para  $cond(C_{A,A}) \rightarrow \infty$ , é esperado ter  $\det(C_{A,A}) \rightarrow 0$ . Deste modo, é possível interpretar o problema em termos de “proximidade”, onde, quanto maior for o número de

condicionamento da matriz  $C_{A,A}$ , menor é a diferença relativa entre a matriz  $C_{A,A}$  e a matriz singular mais próxima a ela (ou, equivalentemente, mais próximo seus autovalores estarão da origem) [32]. E, como o determinante está relacionado com a singularidade da matriz ou, ainda, com a dependência linear das colunas da matriz considerada, caberia outra interpretação geométrica consistente com a anterior, isto é, quanto maior é o número de condicionamento, mais “próximo” estão as colunas (ou, linhas) da matriz de serem linearmente dependentes [169]. No entanto, deve ser dito que não é aconselhável utilizar o determinante ou os autovalores de uma determinada matriz como mensuração do condicionamento, como demonstra o contra-exemplo em [32]. Na verdade, é o conjunto de valores singulares de  $C_{A,A}$  que fornece a mensuração do condicionamento [32, 48].

Torna-se necessário, finalmente, generalizar o conceito do número de condicionamento para matrizes retangulares e, não menos importante, matrizes singulares, visto que estes também são possíveis casos com a Formulação Equivalente. Logo, para  $C_{C,A} \in \mathbb{R}^{C \times A}$ , onde  $C \neq A$ , como não está definida a inversa para matrizes retangulares, pode-se escrever  $cond(C_{C,A}) = \|C_{C,A}\| \|C_{A,C}^\dagger\|$ , como se vê em [32]. Com respeito à norma-2, o número de condicionamento também pode ser definido, como mencionado, por  $cond(C_{C,A}) = \|C_{C,A}\| \|C_{A,C}^\dagger\| = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$ , cuja relação pode ser entendida como a razão entre o maior e o menor valor singular da matriz  $C_{C,A}$  [32, 33, 48, 54, 152].

Com a generalização do número de condicionamento, pode-se observar os efeitos do fator de proporcionalidade, designado por  $cond(C_{C,A})$ , na solução da Formulação Equivalente. É importante também mencionar que o número de condicionamento da matriz  $C_{A,C}^T C_{C,A}$ , presente, por exemplo, na Equação (3.3), é dado pelo quadrado do número de condicionamento da matriz  $C_{C,A}$ , isto é,  $cond(C_{A,C}^T C_{C,A})_2 = cond(C_{C,A})_2^2$ . Sendo assim, qualquer mal condicionamento de  $C_{C,A}$  faz-se muito maior na matriz  $C_{A,C}^T C_{C,A}$ , o que, comumente, reflete na estabilidade e precisão de qualquer método numérico utilizado para resolução da Equação (3.3) ou 3.5 [32, 48]. Isto, segundo [36], justificaria a Decomposição QR ser mais precisa e recomendável em relação à Decomposição de Cholesky e, ainda, o motivo da Decomposição SVD não ampliar as perturbações dos dados de entrada ( $\|C_{C,A}\|_2 = \|\Sigma_{C,A}\|_2$ ). Agora, em um caso de matrizes altamente mal-condicionadas, a fim de estabilizar o problema, pode ser necessário a utilização de outros métodos, como o método de regularização de Tikhonov ou, ainda, a decomposição SVD Truncada. Maiores detalhes podem ser encontrados em [48, 54].

Agora, com a descrição e generalização do número de condicionamento, é necessário, por final, destacar que o problema estudado neste trabalho possibilita incertezas e/ou

imprecisões: (1) incertezas na construção do vetor  $B_{C,1}$  e/ou da matriz  $G_{A,C}$ , visto que são matrizes formadas por autovetores oriundos do processo de comparações entre pares de elementos, podendo envolver variáveis subjetivas; (2) imprecisões devido aos erros de arredondamento/truncamento ao realizar os cálculos devido a aritmética de precisão finita do computador. Logo, não seria absurdo dizer que estas incertezas presentes na construção do vetor  $B_{C,1}$  e/ou da matriz  $G_{A,C}$  podem influenciar na solução da Formulação Equivalente ( $X_{A,1}^{EQV}$ ). E, se estas incertezas de  $B_{C,1}$  e/ou de  $G_{A,C}$  influenciam na solução, surge a hipótese do número de condicionamento estar relacionado com a estabilidade/confiabilidade das soluções retornadas pelo método AHP. Neste contexto, o número de condicionamento pode ser dito, a princípio, como uma análise de sensibilidade para a Formulação Equivalente (diferente, por sinal, da análise mencionada na Seção 2.2.2.5) e busca determinar como pequenas incertezas no vetor  $B_{C,1}$  e/ou na matriz  $G_{A,C}$ , que vêm dos julgamentos efetuados pelo decisor, irão influenciar na solução  $X_{A,1}$ . Esta é a importante decorrência da presente seção. Adiante, na Seção 3.4, a matriz  $C_{C,A}$  e, por conseguinte, o vetor  $D_{C,1} = C_{C,A}G_{A,C}B_{C,1}$ , presentes na Equação (3.2), serão ajustados para as variáveis da Formulação Tradicional.

### 3.4 Formulação matemática equivalente parametrizada

Tomando como referência a matriz de preferências locais das alternativas sob cada critério  $G_{A,C}$ , uma possível escolha particular (não a única), respeitando as dimensões matriciais, seria  $C_{C,A} = G_{C,A}^T$ . Isto, portanto, define a Formulação Equivalente como a Equação (3.12), cujo  $D_{C,1} = G_{C,A}^T G_{A,C} B_{C,1}$ . Cabe dizer que a Equação (3.12), embora esteja parametrizada, ainda será tratada como Formulação Equivalente do método AHP ou Formulação com Solução Implícita, visto que todas as argumentações elaboradas nas Seções 3.1 e 3.3 são completamente válidas também com esta escolha.

$$G_{C,A}^T X_{A,1} = D_{C,1} \quad (3.12)$$

Com esta escolha particular, bem como para Equação (3.2), existirão três possibilidades para o sistema definido na Equação (3.12): número de critérios maior do que o número de alternativas ( $C > A$ ); número de critérios igual ao número de alternativas ( $C = A$ ); número de critérios menor do que o número de alternativas ( $C < A$ ).

Quando o número de critérios for maior do que o número de alternativas ( $C > A$ ), o Sistema de Equações Lineares será sobredeterminado e, provavelmente, inconsistente,

uma vez que o vetor  $D_{C,1}$  não será combinação linear dos vetores-coluna da matriz  $G_{C,A}^T$ . Neste contexto, inexistirá solução que satisfaça simultaneamente todas as restrições impostas na Equação (3.12), mas pode-se determinar a solução que está mais próxima possível da solução procurada, que será dada pela solução de mínimos quadrados:  $X_{A,1} = [G_{A,C}G_{C,A}^T]^{-1}G_{A,C}D_{C,1}$ . Note que, se as colunas da matriz  $G_{C,A}^T$  são linearmente independentes ( $\text{posto}(G_{C,A}^T) = A$ ), a solução de mínimos quadrados da Equação (3.12) deverá ser única e coincidirá com a solução da Equação (3.1), isto é,  $X_{A,1} = [G_{A,C}G_{C,A}^T]^{-1}G_{A,C}D_{C,1} = [G_{A,C}G_{C,A}^T]^{-1}G_{A,C}G_{C,A}^T G_{A,C}B_{C,1} = I_{A,A}G_{A,C}B_{C,1} = G_{A,C}B_{C,1}$ . Perceba também que, em termos da interpretação geométrica mencionada anteriormente, em que o método AHP poderia ser visto como um conjunto de hiperplanos, esta caracterização da solução final  $X_{A,1}$  é equivalente a buscar o hiperplano que minimize a soma dos quadrados das distâncias perpendiculares entre os todos os hiperplanos deste conjunto.

Já quando o número de critérios for igual ao número de alternativas ( $C = A$ ), o Sistema de Equações Lineares será quadrado e poderá ser consistente, existindo uma ou mais soluções, ou inconsistente, inexistindo solução. Neste contexto, existirá uma única solução que satisfaça simultaneamente todas as restrições impostas na Equação (3.12) quando  $\text{posto}(G_{A,A}^T) = A$ . Note que, se as linhas e colunas da matriz  $G_{A,A}^T$  são linearmente independentes, a solução da Equação (3.12) é única e coincide com a solução da Equação (3.1), isto é,  $X_{A,1} = [G_{A,A}^T]^{-1}D_{A,1} = [G_{A,A}^T]^{-1}G_{A,A}^T G_{A,A}B_{A,1} = I_{A,A}G_{A,A}B_{A,1} = G_{A,A}B_{A,1}$ . Mas, se  $\text{posto}(G_{A,A}^T) < A$ , existirá uma infinidade de soluções ou a solução inexistirá.

Em contrapartida, quando o número de critérios for menor do que o número de alternativas ( $C < A$ ), o Sistema de Equações Lineares será subdeterminado e, provavelmente, consistente com um número infinito de soluções, uma vez que o vetor  $D_{C,1}$  será combinação linear dos vetores-coluna da matriz  $G_{C,A}^T$  para muitas escolhas de  $X_{A,1}$ . Em outras palavras, pode-se dizer que a solução, neste caso, deverá conter parâmetros (graus de liberdade) que, quando escolhidos, levarão a diferentes soluções. Logo, existirá uma infinidade de soluções que satisfarão simultaneamente todas as restrições impostas na Equação (3.12), mas pode-se determinar uma solução particular, com garantia de unicidade, que será dada pela solução de menor norma:  $X_{A,1} = G_{A,C}[G_{C,A}^T G_{A,C}]^{-1}D_{C,1}$ . Note que, se as linhas da matriz  $G_{C,A}^T$  são linearmente independentes ( $\text{posto}(G_{C,A}^T) = C$ ), a solução de menor norma da Equação (3.12) deverá ser única e coincidirá com a solução da Equação (3.1), isto é,  $X_{A,1} = G_{A,C}[G_{C,A}^T G_{A,C}]^{-1}D_{C,1} = G_{A,C}[G_{C,A}^T G_{A,C}]^{-1}G_{C,A}^T G_{A,C}B_{C,1} = G_{A,C}I_{C,C}B_{C,1} = G_{A,C}B_{C,1}$ .

Nestas circunstâncias, é apropriado mencionar que a pseudo-inversa de  $C_{C,A}$ , em ter-

mos de  $G_{A,C}$ , é representada pela Equação (3.13) unicamente na hipótese de posto completo. Quando  $\text{posto}(G_{C,A}^T) = K < \min\{C, A\}$  (posto incompleto), embora ainda exista uma única pseudo-inversa, a representação definida na Equação (3.13) não é válida. Porém, mesmo nestes casos, é possível utilizar a pseudo-inversa para obter uma solução da Equação (3.12) com, por exemplo, a decomposição SVD Truncada, como mencionado na Seção 3.2.

$$C_{A,C}^\dagger = \begin{cases} [G_{A,C}G_{C,A}^T]^{-1}G_{A,C} = [Q_{A,A}]^{-1}G_{A,C}, & \text{se } C > A \\ G_{A,A}^{-1}, & \text{se } C = A \\ G_{A,C}[G_{C,A}^TG_{A,C}]^{-1} = G_{A,C}[P_{C,C}]^{-1}, & \text{se } C < A \end{cases} \quad (3.13)$$

A partir ainda de  $C_{C,A} = G_{C,A}^T$ , algumas verificações algébricas também podem ser realizadas. A título de exemplo, pode-se verificar que o produto entre as matrizes  $C_{C,A}$  e  $C_{A,C}^T$  não será comutativo, nem quando  $A = C$ , isto é,  $C_{A,C}^TC_{C,A} \neq C_{C,A}C_{A,C}^T$ . Para ser comutativo, no caso de  $A = C$ , devemos ter  $C_{A,A}^TC_{A,A} = C_{A,A}C_{A,A}^T$ , que seria possível se, e somente se, a matriz  $C_{A,A}$  fosse uma matriz simétrica ( $C_{A,A} = C_{A,A}^T$ ). Mas, como  $C_{C,A} = G_{C,A}^T$ , esta é uma condição improvável para o método AHP, uma vez que as linhas da matriz  $C_{C,A}$  serão autovetores normalizados, oriundos de comparações entre pares, ausentes de um padrão pré-definido.

Por outro lado, também pode-se verificar se as matrizes quadradas  $Q_{A,A}$  e  $P_{C,C}$  são ortogonais ou, ainda, *involutory* (que, numa possível tradução para o português, podem ser ditas matrizes involutivas). Tal verificação é relevante devido a existência de muitos resultados da Álgebra Linear para matrizes com estas características. Cabe apontar que uma matriz quadrada  $C_{K,K}$  é dita ser ortogonal se os vetores formados pelas colunas da matriz tem comprimento unitário e são ortogonais. Deste modo, toda matriz ortogonal verifica  $C_{K,K}C_{K,K}^T = I_{K,K}$  e  $C_{K,K}^TC_{K,K} = I_{K,K}$ , cujo  $C_{K,K}$  é não-singular e  $C_{K,K}^{-1} = C_{K,K}^T$  [8]. Também, é sabido que uma matriz quadrada é *involutory* se esta é a própria inversa, isto é,  $C_{K,K} = C_{K,K}^{-1}$ . Por conseguinte, se  $C_{K,K}$  é uma matriz *involutory*,  $C_{K,K}^2 = I_{K,K}$  [23]. No caso particular de  $C_{K,K}$  ser uma matriz simétrica, então  $C_{K,K}$  será ortogonal se, e somente se, for *involutory*. Neste sentido, será provado que, dada a construção da matriz  $G_{A,C}$  do método AHP, é impossível que as matrizes  $Q_{A,A}$  e  $P_{C,C}$  sejam ortogonais ou *involutory*, considerando a escolha particular  $C_{C,A} = G_{C,A}^T$ .

**Proposição:** Sejam as matrizes  $Q_{A,A} \equiv G_{A,C}G_{C,A}^T$  e  $P_{C,C} \equiv G_{C,A}^TG_{A,C}$  definidas pela matriz  $G_{A,C}$  do método AHP. Se  $Q_{A,A}$  e  $P_{C,C}$  são não-singulares, então estas matrizes não



são ortogonais e nem *involutory*.

**Prova:** A prova será baseada em redução ao absurdo, também conhecida como prova por contradição. Primeiro mostraremos que a matriz  $Q_{A,A}$  não pode ser *involutory*.

Suponha o contrário, que a matriz  $Q_{A,A}$  é *involutory*. Logo,  $Q_{A,A}^{-1} = Q_{A,A}$  e, conseqüentemente, a Equação (3.14) é gerada. Entretanto, todas as entradas de  $Q_{A,A}$  são estritamente positivas ( $q_{i,j} > 0$ ), devido a  $G_{A,C}$  ser formada por vetores normalizados oriundos de matrizes de comparações entre pares locais. Isto é,  $g_{i,j} > 0, \forall i = 1, \dots, A$  e  $\forall j = 1, \dots, C$ . Portanto, o produto e soma das entradas de  $Q_{A,A}$  nunca poderá ser igual a zero. Conseqüentemente, as entradas zeros fora da diagonal principal da matriz identidade  $I_{A,A}$  nunca serão obtidas. Logo, a identidade definida pela Equação (3.14) não se verifica, e isto implica em que a matriz  $Q_{A,A}^{-1} \neq Q_{A,A}$ .

$$I_{A,A} = Q_{A,A}^{-1} Q_{A,A} = Q_{A,A} Q_{A,A} = G_{A,C} G_{C,A}^T G_{A,C} G_{C,A}^T \quad (3.14)$$

Neste instante, será mostrado que a matriz  $Q_{A,A}$  não pode ser ortogonal. Suponha o contrário, que a matriz  $Q_{A,A}$  é ortogonal. Logo,  $Q_{A,A}^{-1} = Q_{A,A}^T$  e considerando que  $Q_{A,A}$  é simétrica segue, a Equação (3.15). Note que esta é a mesma Equação (3.14). Logo, todos os argumentos apresentados acima também são válidos aqui. Portanto,  $Q_{A,A}^{-1} \neq Q_{A,A}^T$ .

$$I_{A,A} = Q_{A,A}^{-1} Q_{A,A} = Q_{A,A}^T Q_{A,A} = Q_{A,A} Q_{A,A} = G_{A,C} G_{C,A}^T G_{A,C} G_{C,A}^T \quad (3.15)$$

Argumentos semelhantes podem ser usados para realizar a prova referente à matriz  $P_{C,C}$ . ■

Note, por último, que ao pré-multiplicarmos ambos os lados da Equação (3.12) por  $G_{A,C}$  e obtermos  $G_{A,C} G_{C,A}^T X_{A,1} = G_{A,C} D_{C,1} = G_{A,C} G_{C,A}^T G_{A,C} B_{C,1}$ , pode-se escrever o lado direito deste sistema como  $G_{A,C} P_{C,C} B_{C,1} = Q_{A,A} G_{A,C} B_{C,1}$ , cujo  $Q_{A,A} \equiv C_{A,C}^T C_{C,A} = G_{A,C} G_{C,A}^T$  e  $P_{C,C} \equiv C_{C,A} C_{A,C}^T = G_{C,A}^T G_{A,C}$ , o que sugere a identidade  $G_{A,C} P_{C,C} = Q_{A,A} G_{A,C}$ . Tomando a transposta e sabendo que as matrizes  $Q_{A,A}$  e  $P_{C,C}$  são matrizes simétricas, obtemos, a partir dos argumentos anteriores, a identidade designada por  $[G_{C,A}^T G_{A,C}] G_{C,A}^T = G_{C,A}^T [G_{A,C} G_{C,A}^T]$ . Esta identidade sempre irá se verificar, independente do posto matricial.

Embora tenha sido mencionado, estritamente no segundo parágrafo da presente seção, as situações cuja solução da Equação (3.12) coincide com a solução da Formulação Tradicional, deve-se destacar que estas situações apenas são válidas nos casos em que a matriz

$C_{C,A}$  é de posto completo. Por outro lado, quando a matriz  $C_{C,A}$  não é de posto completo, a Equação (3.12) terá uma infinidade de soluções, o que pode ser contornado com a utilização de outros métodos, como, por exemplo, a Equação (3.7), isto é,  $X_{A,1} = C_{A,C}^\dagger D_{C,1}$ , onde  $C_{C,A} = G_{C,A}^T$ . Mas, cabe dizer que, devido à escolha particular  $C_{C,A} = G_{C,A}^T$ , surge uma possibilidade de assegurar que a matriz  $C_{C,A}$  seja sempre uma matriz de posto completo, o que viabiliza, em todo caso, o uso das Equações Normais. Este procedimento será desenvolvido na Seção 3.5.

### 3.5 Análise de dependência linear na matriz de prioridades locais das alternativas

Como abordado na Seção 3.1, uma das principais aplicações do posto matricial, definido por  $\text{posto}(G_{C,A}^T) \leq \min\{C, A\}$  para a matriz  $G_{C,A}^T$  (recordando a escolha particular  $C_{C,A} = G_{C,A}^T$ ), está no número de soluções de um Sistema de Equações Lineares, isto é, dados  $G_{C,A}^T$  e  $D_{C,1}$ , quando existe uma solução para  $G_{C,A}^T X_{A,1} = D_{C,1}$ ? Quando, por exemplo, o posto de  $G_{C,A}^T$  for menor que  $\min\{C, A\}$ , a matriz  $G_{C,A}^T$  é dita ser de posto incompleto, existindo infinitas soluções para o Sistema de Equações Lineares definido na Equação (3.12). Esta situação de posto incompleto surge, por exemplo, quando as colunas de uma matriz são combinações lineares umas das outras (em termos da matriz  $G_{A,C}$ , isto é análogo a dizer que o decisor julgou, no processo de comparação entre pares, ter as mesmas preferências para o conjunto de alternativas em pelo menos dois critérios diferentes).

No entanto, pelo modo com que é colocada a Formulação Tradicional, é possível, mediante a fatoração dos vetores-coluna de  $G_{A,C}$  que são iguais (fatoração por meio do termo em comum), utilizar a Formulação Equivalente ausente de matrizes de coeficientes de posto incompleto. Isto porque são os vetores-coluna redundantes de  $G_{A,C}$  que tornam o posto da matriz de coeficientes da Equação (3.12) menor que  $C$  ou  $A$ , isto é,  $\text{posto}(G_{C,A}^T) < \{C, A\}$ , o que com este tratamento poderia ser evitado. Por conseguinte, espera-se que com esta fatoração a matriz em questão, seja ela oriunda da Formulação Tradicional ou da Formulação Equivalente, tenha um menor número de condicionamento, o que implica em menor sensibilidade dos dados.

Mas, cabe lembrar que os vetores-coluna de  $G_{A,C}$  (vetores-linha de  $G_{C,A}^T$ ) são autovetores (ou, vetores de preferências locais) oriundos do processo de julgamento entre pares de alternativas em relação à algum critério. Logo, não é raro (e, nem errado) no

método AHP existirem matrizes  $G_{A,C}$  com autovetores (vetores-coluna) iguais. Então, perceba que ao fatorar um vetor-coluna de  $G_{A,C}$ , este critério não é removido do modelo em questão, apesar deste fornecer as mesmas preferências para alternativas que algum outro critério, isto é, o modelo é o mesmo, porém escrito matematicamente de forma diferente. Desta maneira, a solução obtida com a fatoração de vetores-coluna de  $G_{A,C}$  será idêntica à solução inicial se, e somente se, os pesos em  $B_{C,1}$  destes critérios fatorados forem redistribuídos ao peso em  $B_{C,1}$  do critério fixado. A prova disto é demonstrada a seguir.

**Proposição:** Seja a matriz de prioridades locais das alternativas sob cada critério definida por  $G_{A,C}$ . Se existirem quaisquer  $n$  colunas de  $G_{A,C}$  idênticas entre si, onde  $\forall n \in \{2, 3, \dots, C\}$ , então, de todas estas colunas idênticas,  $n-1$  colunas podem ser fatoradas da matriz de preferências locais das alternativas e a solução, neste caso, permanece idêntica à solução original.

**Prova:** Considere a Formulação Tradicional definida na Equação (3.1) reescrita em termos da combinação linear dos vetores-coluna de  $G_{A,C}$ , como mostra a Equação (3.16), cujo  $\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_C$  representam os vetores-coluna de  $G_{A,C}$ , isto é,  $\hat{g}_k = \begin{bmatrix} g_{1k} & g_{2k} & \dots & g_{Ak} \end{bmatrix}^T$ ,  $\forall k = \{1, 2, \dots, C\}$ .

$$X_{A,1} = \begin{bmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \dots & g_{1,C} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & \dots & g_{2,C} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{A,1} & g_{A,2} & \dots & g_{A,C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{C,1} \end{bmatrix} = b_{1,1}\hat{g}_1 + b_{2,1}\hat{g}_2 + \dots + b_{C,1}\hat{g}_C \quad (3.16)$$

Suponha, então, que as duas primeiras colunas da matriz  $G_{A,C}$  sejam idênticas ( $n = 2$ ), isto é,  $\hat{g}_1 = \hat{g}_2$ . Neste caso, teremos  $X_{A,1} = b_{1,1}\hat{g}_1 + b_{2,1}\hat{g}_2 + b_{3,1}\hat{g}_3 + \dots + b_{C,1}\hat{g}_C = (b_{1,1} + b_{2,1})\hat{g}_2 + b_{3,1}\hat{g}_3 + \dots + b_{C,1}\hat{g}_C$ . Suponha, agora, que as três primeiras colunas da matriz  $G_{A,C}$  sejam idênticas ( $n = 3$ ), isto é,  $\hat{g}_1 = \hat{g}_2 = \hat{g}_3$ . Neste segundo caso, teremos  $X_{A,1} = b_{1,1}\hat{g}_1 + b_{2,1}\hat{g}_2 + b_{3,1}\hat{g}_3 + b_{4,1}\hat{g}_4 + \dots + b_{C,1}\hat{g}_C = (b_{1,1} + b_{2,1} + b_{3,1})\hat{g}_3 + b_{4,1}\hat{g}_4 + \dots + b_{C,1}\hat{g}_C$ . E, por último, suponha que para as  $n$  primeiras colunas da matriz  $G_{A,C}$  sejam idênticas, isto é,  $\hat{g}_1 = \hat{g}_2 = \dots = \hat{g}_n$ . Neste último caso, teremos:  $X_{A,1} = b_{1,1}\hat{g}_1 + b_{2,1}\hat{g}_2 + \dots + b_{n,1}\hat{g}_n + b_{(n+1),1}\hat{g}_{n+1} + \dots + b_{C,1}\hat{g}_C = (b_{1,1} + b_{2,1} + \dots + b_{n,1})\hat{g}_n + b_{(n+1),1}\hat{g}_{n+1} + \dots + b_{C,1}\hat{g}_C$ , como mostra a Equação (3.17).

$$X_{A,1} = \begin{bmatrix} g_{1,n} & g_{1,(n+1)} & \cdots & g_{1,C} \\ g_{2,n} & g_{2,(n+1)} & \cdots & g_{2,C} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{A,n} & g_{A,(n+1)} & \cdots & g_{A,C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n b_{j,1} \\ b_{(n+1),1} \\ \vdots \\ b_{C,1} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Note que, ainda no caso das  $n$  primeiras colunas da matriz  $G_{A,C}$  serem iguais, se anteriormente tínhamos  $X_{A,1} = G_{A,C}B_{C,1}$  como solução inicial com a Formulação Tradicional, pode-se afirmar que esta mesma solução também pode ser obtida, porém em um modelo ausente de vetores-coluna de  $G_{A,C}$  iguais, por  $X_{A,1} = \tilde{G}_{A,W}\tilde{B}_{W,1}$ , cujo  $W = C - (n - 1)$ . Mas, deve ser reiterado que as soluções apenas serão equivalentes se, e somente se, houver uma redistribuição dos pesos de  $B_{C,1}$  referentes às colunas fatoradas para a coluna colocada em evidência, pois, deste modo, é possível partir da forma fatorada e retornar para Equação (3.16). Isto, inclusive, é demonstrado pela Equação (3.17), onde as  $n - 1$  primeiras colunas da matriz  $G_{A,C}$  são fatoradas (pelo fato das  $n$  primeiras serem iguais) e seus respectivos pesos, referentes à  $B_{C,1}$ , são agregados ao peso do  $n$ -ésimo elemento de  $B_{C,1}$ .

Argumentos semelhantes, portanto, podem ser usados para quaisquer  $n$  combinações de vetores-coluna de  $G_{A,C}$  que sejam idênticos, estando ordenados ou não. ■

Mas, para afirmar que a matriz  $G_{A,C}$  é composta por vetores-coluna redundantes, é recomendável mensurar o ângulo entre os vetores-coluna da matriz  $G_{A,C}$ . Este ângulo, denotado por  $\theta$ , pode ser determinado conforme a Equação (3.18), cujo  $Y_{1,N}$  e  $Z_{1,N}$ ,  $\forall N \in \{1, 2, \dots, C\}$ , designam dois vetores-coluna quaisquer de  $G_{A,C}$ . Como resultado desta mensuração, duas ocasiões principais podem surgir: (1) vetores-coluna de  $G_{A,C}$  paralelos, isto é,  $\theta = 0$ ; (2) vetores-coluna de  $G_{A,C}$  quase paralelos, isto é,  $\theta \approx 0$ . Quando temos vetores de  $G_{A,C}$  paralelos, que são ditos linearmente dependentes, um deles não agrega novas informações na matriz do método AHP e isto pode tornar  $G_{A,C}$  uma matriz de posto incompleto. Quando temos vetores de  $G_{A,C}$  quase paralelos, que são ditos quase linearmente dependentes, então a matriz  $G_{A,C}$  é de posto quase incompleto (e pode se tornar de posto incompleto pelos erros de arredondamento/truncamento ao realizar os cálculos devido a aritmética de precisão finita do computador).

$$\cos(\theta) = \frac{Y_{1,N} \cdot Z_{N,1}^T}{|Y_{1,N}|_2 |Z_{1,N}|_2} \quad (3.18)$$

Isto nos permite concluir que mensurar o ângulo entre os vetores-coluna da matriz

$G_{A,C}$  proporciona conhecer o quão paralelos estes vetores estão e identificar quais conjuntos de vetores são estes. No caso de existirem vetores-coluna de  $G_{A,C}$  paralelos pode-se afirmar então que, dada a Formulação Tradicional  $X_{A,1} = G_{A,C}B_{C,1}$  com  $G_{A,C}$  composto por vetores-coluna linearmente dependentes, sempre existirá uma matriz fatorada  $\tilde{G}_{A,W}$  e um vetor  $\tilde{B}_{W,1}$  tal que  $G_{A,C}B_{C,1} = \tilde{G}_{A,W}\tilde{B}_{W,1}$ . E, dentre as notáveis contribuições deste procedimento algébrico, podem estar: (1) escolhas mais apropriadas para  $C_{C,A}$  quando  $G_{A,C}$  tem posto incompleto; (2) melhor número de condicionamento da matriz fatorada, visto que os vetores-coluna linearmente dependentes da matriz original são removidos, garantindo maior robustez ao modelo; (3) soluções da Formulação Equivalente sempre em conformidade com as Equações 3.3, 3.4 e 3.5, uma vez que, com a escolha particular  $C_{W,A} = \tilde{G}_{W,A}^T$ , a matriz  $C_{W,A}$  será carente de vetores-linha paralelos e, portanto, será de posto completo.

Ademais, deve ser mencionado que, além das colunas, as linhas da matriz  $G_{A,C}$  também podem ser combinações lineares umas das outras, o que também pode tornar a matriz  $G_{C,A}^T$  de posto incompleto, existindo infinitas soluções para o Sistema de Equações Lineares definido na Equação (3.12). Em termos do método AHP, esta representa a situação, que pode ser dita mais atípica, porém não impossível, em que o decisor detém das mesmas preferências para, ao menos, duas alternativas em relação a todos os critérios do modelo (isto é, observando todos os autovetores oriundos da comparação entre pares de alternativas, ao menos duas componentes, para todos os autovetores, deveriam ter os mesmos valores), o que leva a dizer que os critérios presentes no modelo em questão não permitem fazer uma distinção entre as alternativas redundantes. Neste caso, que também deve ser constatado com a mensuração prévia dos ângulos entre os vetores-linha de  $G_{A,C}$ , a fatoração não se aplica do modo demonstrado e a remoção direta dos vetores-linha redundantes de  $G_{A,C}$ , apesar de possivelmente trazer melhorias, quebraria alguns padrões do AHP, como, por exemplo, uma solução  $X_{A,1}$  normalizada. Portanto, este caso específico de vetores-linha idênticos, na matriz  $G_{A,C}$ , não será explorado nesta dissertação.

A seção 3.6, por final, irá discorrer e sumarizar, mesmo que superficialmente, os principais desdobramentos abordados no Capítulo 3. Isto, além de condensar tudo o que foi exposto, irá proporcionar uma maior compreensão do que será realizado no Capítulo 4.

### 3.6 Síntese dos principais resultados do Capítulo 3

Como mencionado, o método AHP, em sua forma tradicional, utiliza um processo de agregação aditiva para sintetizar as preferências locais dos elementos que compõem uma determinada hierarquia. Esta síntese, que nesta dissertação foi chamada de Formulação Tradicional, é escrita como  $X_{A,1} = G_{A,C}B_{C,1}$ , cujo  $G_{A,C}$  é a matriz de prioridades locais das alternativas em relação aos critérios,  $B_{C,1}$  é o vetor de prioridades locais dos critérios em relação aos objetivos e  $X_{A,1}$  é o vetor de prioridades globais das alternativas. E, como característica ímpar da Formulação Tradicional, sempre existirá uma única solução.

Em contrapartida, com a pré-multiplicação de uma matriz  $C_{C,A}$  na Formulação Tradicional, este processo de agregação aditiva das prioridades locais torna-se formulado em termos de um Sistema de Equações Lineares, isto é,  $C_{C,A}X_{A,1} = C_{C,A}G_{A,C}B_{C,1}$ . Esta formulação, por sua vez, foi tratada como Formulação Equivalente do método AHP ou Formulação com Solução Implícita. Note que uma escolha particular viável (não a única) seria  $C_{C,A} = G_{C,A}^T$ , o que permitiu escrever o Sistema de Equações Lineares, agora com todas as variáveis em termos de  $G_{A,C}$  e  $B_{C,1}$ , como  $G_{C,A}^T X_{A,1} = G_{C,A}^T G_{A,C} B_{C,1}$  ou  $G_{C,A}^T X_{A,1} = D_{C,1}$ , cujo  $D_{C,1} = G_{C,A}^T G_{A,C} B_{C,1}$ . E, como nesta formulação é necessário resolver um Sistema de Equações Lineares para obter o vetor de prioridades globais das alternativas, não existem garantias de unicidade ou, até mesmo, de existência de solução, diferentemente da Formulação Tradicional. Neste contexto, devem ser reiteradas as situações nas quais a solução da Formulação Equivalente e da Formulação Tradicional se coincidirão.

Estas situações de coincidência das soluções retornadas irão depender, basicamente, da dimensão da matriz  $G_{C,A}^T$  e, ainda, da dependência linear entre linhas e colunas - ou, equivalentemente, do  $\text{posto}(G_{C,A}^T)$  - desta respectiva matriz. Considerando, inicialmente, que as linhas e as colunas da matriz  $G_{C,A}^T$  são linearmente independentes, isto é,  $\text{posto}(G_{C,A}^T) = \min\{C, A\}$ , a Formulação Equivalente retornará a mesma solução da Formulação Tradicional se esta for:  $X_{A,1} = [G_{A,C}G_{C,A}^T]^{-1}G_{A,C}D_{C,1}$ , para número de critérios maior do que o número de alternativas;  $X_{A,1} = [G_{A,A}^T]^{-1}D_{A,1}$ , para número de critérios igual ao número de alternativas;  $X_{A,1} = G_{A,C}[G_{C,A}^T G_{A,C}]^{-1}D_{C,1}$ , para número de critérios menor do que o número de alternativas. Por outro lado, quando  $\text{posto}(G_{C,A}^T) < \min\{C, A\}$ , reflexo da dependência linear entre linhas e/ou colunas da matriz  $G_{C,A}^T$ , a Formulação Equivalente retornará a mesma solução da Formulação Tradicional se esta for:  $X_{A,1} = C_{A,C}^\dagger D_{C,1}$ , cujo  $C_{C,A} = G_{C,A}^T$ , independente do número de critérios e de alternativas.

Ademais, se esta dependência linear estiver contida nas linhas da matriz  $G_{C,A}^T$ , o que poderia ser afirmado com a mensuração dos ângulo entre os vetores-linha desta matriz, uma outra alternativa seria fatorar os vetores-coluna redundantes de  $G_{A,C}$  para, então, utilizar a Formulação Equivalente. Isto é, considerando que  $\text{posto}(G_{C,A}^T) < \min\{C, A\}$  e, após uma mensuração, é constatado que existem  $n$  vetores-coluna de  $G_{A,C}$  idênticos, pode-se escrever a Formulação Tradicional, sem perda de generalidade, como  $X_{A,1} = \tilde{G}_{A,W} \tilde{B}_{W,1}$ , cujo  $W = C - (n - 1)$  e, com isto, reformular a Formulação Equivalente como  $\tilde{G}_{W,A}^T X_{A,1} = \tilde{D}_{W,1}$ , cujo  $\tilde{D}_{W,1} = \tilde{G}_{W,A}^T \tilde{G}_{A,W} \tilde{B}_{W,1}$ . Com isto, a Formulação Equivalente retornará a mesma solução da Formulação Tradicional se esta for:  $X_{A,1} = [\tilde{G}_{A,A}^T]^{-1} \tilde{D}_{A,1}$ , para  $W$  igual ao número de alternativas;  $X_{A,1} = [\tilde{G}_{A,W} \tilde{G}_{W,A}^T]^{-1} \tilde{G}_{A,W} \tilde{D}_{W,1}$ , para  $W$  maior do que o número de alternativas;  $X_{A,1} = \tilde{G}_{A,W} [\tilde{G}_{W,A}^T \tilde{G}_{A,W}]^{-1} \tilde{D}_{W,1}$ , para  $W$  menor do que o número de alternativas. Em contrapartida, se a dependência linear estiver nas colunas da matriz  $G_{C,A}^T$ , este procedimento não se aplicará.

Por último, diversos conceitos da Álgebra Linear podem ser, com a Formulação Equivalente, ainda estendidos à esta etapa de síntese de resultados do AHP, como, por exemplo, análises de sensibilidade para Sistemas de Equações Lineares. Dentre estas análises, está o número de condicionamento, que é um conceito que visa examinar, em termos da Formulação Equivalente  $G_{C,A}^T X_{A,1} = D_{C,1}$ , como erros ou incertezas em  $G_{C,A}^T$  e/ou  $D_{C,1}$ , dados de entrada, se propagam para  $X_{A,1}$ , que são os dados de saída do modelo. Neste contexto, como  $G_{C,A}^T$  e  $D_{C,1}$  são matrizes construídas por  $G_{A,C}$  e  $B_{C,1}$  e, por outro lado, as matrizes  $G_{A,C}$  e  $B_{C,1}$  são oriundas do etapa de comparação entre pares de elementos, etapa esta que pode envolver variáveis qualitativas e julgamentos subjetivos, o número de condicionamento é um conceito que, ao ser aplicado de forma ainda não vista ao AHP, poderá evidenciar como variações nos julgamentos locais e erros de truncamento irão influenciar na estabilidade de  $X_{A,1}$ . Ademais, como o número de condicionamento é um forma de análise de sensibilidade, correlações deste com a análise proposta em [159] poderão ser ainda buscadas.

# Capítulo 4

## Resultados

Nesta Seção, a Formulação Tradicional será confrontada com a Formulação Equivalente e os resultados computacionais exibidos. Estes resultados, necessários para a verificação e validação da proposta desta dissertação, foram gerados com o *software* MATLAB<sup>®</sup>, tendo como variáveis de entrada a matriz de prioridades locais das alternativas em relação aos critérios ( $G_{A,C}$ ) e o vetor de prioridades locais dos critérios em relação aos objetivos ( $B_{C,1}$ ), ambos oriundos de alguma aplicação do método AHP.

Agora, para selecionar as aplicações do AHP de onde seriam retiradas  $G_{A,C}$  e  $B_{C,1}$ , duas restrições tiveram de ser respeitadas: aplicações cujo processo de síntese global dos resultados era efetuado via agregação aditiva, uma vez que este originou todo o desenvolvimento da Formulação Equivalente; e aplicações em que  $G_{A,C}$  e  $B_{C,1}$  possuíam colunas constituídas por autovetores normalizados, o que garante o padrão do AHP tradicional.

Em consequência das variáveis de entrada, três resultados foram retornados: (1) a solução final  $X_{A,1}$  (ou, o vetor de prioridades globais das alternativas), obtida, de maneiras diferentes, com a Formulação Tradicional e com a Formulação Equivalente; a estabilidade da solução final  $X_{A,1}$ , obtida com a Formulação Tradicional e com a Formulação Equivalente, utilizando perturbações percentuais nos elementos de  $B_{C,1}$  e o número de condicionamento (este último aplicado unicamente na Formulação Equivalente); (3) a fatoração de vetores-coluna idênticos da matriz  $G_{A,C}$  e sua influência em modelos tratados com o AHP. Estas, portanto, foram as variáveis de saídas dos testes computacionais, sendo a base das análises e conclusões deste estudo.



## 4.1 Análise das soluções via Formulação Tradicional e Equivalente

A primeira etapa de testes computacionais consistiu em confrontar a solução da Formulação Tradicional ( $X_{A,1}^{ORG}$ ), que já é explicitamente dada, com a obtida via Formulação Equivalente. Esta etapa era de fundamental interesse nesta dissertação, uma vez que na eventualidade de divergência entre soluções, toda a construção algébrica elaborada deveria ser invalidada.

Mas, para a realização desta etapa, deve-se mencionar que a Formulação Equivalente retornará soluções em conformidade com o método numérico empregado na resolução de seu Sistema de Equações Lineares. Neste caso, serão consideradas três possíveis soluções para a Formulação Equivalente:

1.  $X_{A,1}^{EQV1}$ , que se deu pela resolução da Equação (3.12) por meio do comando barra invertida ( $\backslash$ ), isto é,  $X_{A,1}^{EQV1} = G_{C,A}^T \backslash D_{C,1}$ , cujo  $D_{C,1} = G_{C,A}^T G_{A,C} B_{C,1}$ ;
2.  $X_{A,1}^{EQV2}$ , que se deu pela resolução da Equação (3.12) utilizando as Equações Normais, onde existirão três eventualidades: número de critérios maior do que o número de alternativas, que implica em  $X_{A,1}^{EQV2} = [G_{A,C} G_{C,A}^T]^{-1} G_{A,C} D_{C,1}$ ; número de critérios igual ao número de alternativas, que implica em  $X_{A,1}^{EQV2} = [G_{A,A}^T]^{-1} D_{A,1}$ ; e, número de critérios menor do que o número de alternativas, que implica em  $X_{A,1}^{EQV2} = G_{A,C} [G_{C,A}^T G_{A,C}]^{-1} D_{C,1}$ . Aqui, bem como em  $X_{A,1}^{EQV1}$ , utilizou-se o comando de barra invertida ( $\backslash$ );
3.  $X_{A,1}^{EQV3}$ , que se deu pela resolução da Equação (3.12) via pseudo-inversa, isto é,  $X_{A,1}^{EQV3} = C_{A,C}^\dagger D_{C,1}$ , cujo  $C_{A,C}^\dagger$  está definido na Equação (3.13) (em caso de posto completo) e  $D_{C,1} = G_{C,A}^T G_{A,C} B_{C,1}$ .

O Algoritmo 1 exibe um esquemático da implementação computacional. Maiores detalhes do código computacional utilizado são encontrados no Apêndice A.

Perceba que o comando barra invertida ( $\backslash$ ) do MATLAB<sup>®</sup>, utilizado na obtenção de  $X_{A,1}^{EQV1}$  e  $X_{A,1}^{EQV2}$ , implementará, visando reduzir o tempo computacional, diferentes métodos numéricos de acordo com as matrizes de coeficientes do Sistema de Equações Lineares em questão. Por exemplo, para  $X_{A,1}^{EQV1}$ , quando o número de critérios for igual ao número de alternativas, será utilizada a Fatoração LU. Mas, quando o número de critérios não coincidir com o número de alternativas, a fatoração utilizada será a QR,

**Algoritmo 1** ( $G_{A,C}$ ,  $B_{C,1}$ )

- 
- 1: A solução via Formulação Tradicional é dada por  $X_{A,1}^{ORG} = G_{A,C}B_{C,1}$
  - 2: Tomando a escolha particular  $C_{C,A} = G_{C,A}^T$  e  $D_{C,1} = G_{C,A}^T G_{A,C} B_{C,1}$
  - 3: Calcule  $X_{A,1}^{EQV1} = C_{C,A} \setminus D_{C,1}$
  - 4: **se**  $C > A$  **então**
  - 5: Calcule  $X_{A,1}^{EQV2} = [C_{A,C}^T C_{C,A}] \setminus C_{A,C}^T D_{C,1}$
  - 6: **senão se**  $C = A$  **então**
  - 7: Calcule  $X_{A,1}^{EQV2} = [C_{A,A}] \setminus D_{A,1}$
  - 8: **senão**
  - 9: Calcule  $X_{A,1}^{EQV2} = C_{A,C}^T [[C_{C,A} C_{A,C}^T] \setminus D_{C,1}]$
  - 10: **fim se**
  - 11: Calcule  $X_{A,1}^{EQV3} = C_{A,C}^\dagger D_{C,1}$
  - 12: Compare  $X_{A,1}^{ORG}$  com  $X_{A,1}^{EQV1}$
  - 13: Compare  $X_{A,1}^{ORG}$  com  $X_{A,1}^{EQV2}$
  - 14: Compare  $X_{A,1}^{ORG}$  com  $X_{A,1}^{EQV3}$
- 

onde retornará a solução que minimiza  $\| D_{C,1} - G_{C,A}^T X_{A,1} \|_2^2$ , sendo única para sistemas lineares sobredeterminados e não única para subdeterminados (neste último caso,  $X_{A,1}^{EQV1}$  é escolhido de forma que o número de entradas diferentes de zero seja minimizado). Agora, para  $X_{A,1}^{EQV2}$ , que, independente do número de critérios e alternativas, sempre será obtida com matrizes de coeficientes quadradas, a Fatoração LU será o método implementado.

Logo, torna-se viável confrontar a solução via Formulação Tradicional ( $X_{A,1}^{ORG}$ ), com aquelas obtidas via Formulação Equivalente. Então, tomando a matriz de prioridades locais das alternativas em relação aos critérios ( $G_{A,C}$ ) e o vetor de prioridades locais dos critérios em relação aos objetivos ( $B_{C,1}$ ) como parâmetros das simulações, foram deduzidos  $X_{A,1}^{EQV1}$ ,  $X_{A,1}^{EQV2}$  e  $X_{A,1}^{EQV3}$  em conformidade com o Algoritmo 1. As Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 apontam os resultados computacionais gerados, onde no Teste 1, Teste 2 e Teste 3 buscou-se comparar  $X_{A,1}^{ORG}$ , respectivamente, com  $X_{A,1}^{EQV1}$ ,  $X_{A,1}^{EQV2}$  e  $X_{A,1}^{EQV3}$ . No momento em que estas soluções comparadas foram iguais, atribuiu-se “V”. Caso contrário, atribuiu-se “F”. A fonte utilizada para obter  $G_{A,C}$  e  $B_{C,1}$ , a dimensão da matriz  $C_{C,A}$ , a classificação do Sistema de Equações Lineares (quadrado, subdeterminado e sobredeterminado) e o posto da matriz  $C_{C,A}$  também são mostrados.

1	Fonte	dim( $C_{C,A}$ )	Posto	Teste 1	Teste 2	Teste 3
2	[154]	3x3	Completo	V	V	V
3	[157]	5x5	Completo	V	V	V
4	[51]	5x5	Completo	V	V	V
5	[38]	5x5	Completo	V	V	V
6	[93]	8x8	Completo	V	V	V

Tabela 4.1: Comparações entre soluções para  $C = A$  (sistema quadrado)

Fonte: O autor.

1	Fonte	$\dim(C_{C,A})$	Posto	Teste 1	Teste 2	Teste 3
2	[31]	3x6	Completo	F	V	V
3	[134]	4x6	Completo	F	V	V
4	[7]	5x6	Completo	F	V	V
5	[76]	5x6	Incompleto	F	V	V
6	[87]	5x6	Completo	F	V	V
7	[136]	3x7	Completo	F	V	V
8	[175]	6x7	Completo	F	V	V
9	[155]	8x10	Completo	F	V	V

Tabela 4.2: Comparações entre soluções para  $C < A$  (sistema subdeterminado)  
Fonte: O autor.

Como se vê na Tabela 4.2, o Teste 1 não verificou nos casos de número de critérios menor do que o número de alternativas, independente do posto matricial, e nos casos cuja matriz  $G_{A,C}$  é de posto incompleto (linha 5 da Tabela 4.2). Este resultado era esperado, visto que a solução da Formulação Equivalente gerada pelo comando barra invertida terá no máximo  $K$  componentes não-nulas, cujo  $K$  é o posto de  $G_{A,C}$ , e ausentes de garantias de unicidade.

1	Fonte	$\dim(C_{C,A})$	Posto	Teste 1	Teste 2	Teste 3
2	[43]	5x2	Completo	V	V	V
3	[2]	5x3	Completo	V	V	V
4	[20]	5x3	Completo	V	V	V
5	[101]	7x3	Completo	V	V	V
6	[50]	7x3	Completo	V	V	V
7	[50]	7x3	Completo	V	V	V
8	[50]	7x3	Completo	V	V	V
9	[50]	7x3	Completo	V	V	V
10	[24]	7x3	Completo	V	V	V
11	[143]	8x3	Completo	V	V	V
12	[143]	8x3	Completo	V	V	V
13	[26]	5x4	Completo	V	V	V
14	[142]	6x4	Completo	V	V	V
15	[55]	9x4	Incompleto	F	F	V
16	[5]	6x5	Completo	V	V	V
17	[30]	7x5	Completo	V	V	V
18	[95]	9x5	Completo	V	V	V
19	[114]	10x5	Completo	V	V	V
20	[163]	12x6	Completo	V	V	V

Tabela 4.3: Comparações entre soluções para  $C > A$  (sistema sobredeterminado)  
Fonte: O autor.

Agora, no caso de maior número de critérios em relação a alternativas e de posto completo (exceto a linha 15 da Tabela 4.3), o Teste 1 se verifica, pelo fato da solução da Formulação Equivalente gerada pelo comando barra invertida ser a de mínimos quadrados. Por outro lado, o Teste 2 não se verificou quando a matriz  $G_{A,C}$  era de posto incompleto (linha 15). Este resultado, que era esperado de acontecer nos dois casos de posto incompleto encontrados (e, provavelmente, não aconteceu no caso mostrado na linha

5, da Tabela 4.3, pela estrutura por trás do comando de barra invertida), evidencia que, quando  $\text{posto}(G_{A,C}) < \min\{A, C\}$ , as soluções via Equações Normais perdem a validade pela singularidade das matrizes  $G_{A,C}G_{C,A}^T$  e/ou  $G_{C,A}^TG_{A,C}$ .

E, por final, o Teste 3 se verificou em todos os casos, independente do posto matricial e da dimensão da matriz  $G_{A,C}$ , o que mostra que a solução da Formulação Equivalente via pseudo-inversa sempre coincide com a solução da Formulação Tradicional.

Finalmente, esta análise na solução final  $X_{A,1}$  retornada via Formulação Tradicional e Formulação Equivalente permite, portanto, validar a construção algébrica elaborada, na medida em que cada situação se comportou da maneira esperada. Com esta análise, revelou-se que a solução obtida com a Formulação Tradicional, Equação (3.1), será análoga a solução da Formulação Equivalente se esta última for aquela que minimiza o resíduo  $\|D_{C,1} - G_{C,A}^T X_{A,1}\|$  sobre  $\mathbb{R}^A$ , cujo  $D_{C,1} = G_{C,A}^T G_{A,C} B_{C,1}$ . E, no caso de uma infinidade de soluções em  $\mathbb{R}^A$  que minimizam este resíduo, a solução da Formulação Tradicional coincidirá com a solução da Formulação Equivalente se esta última for a de menor norma. Além disto, esta análise ainda possibilita, indiretamente, demonstrar como aplicar a Formulação Equivalente em situações reais, que estejam de acordo com as condições iniciais impostas, e quando sua solução coincidirá com a retornada pela Formulação Tradicional. A próxima etapa, de modo geral, verificará o quão estáveis serão as soluções retornadas pelo método AHP.

## 4.2 Análise de sensibilidade via Formulação Equivalente

A segunda etapa de testes computacionais consistiu em estudar os impactos das incertezas na construção do vetor  $B_{C,1}$  e/ou da matriz  $G_{A,C}$  na estabilidade da solução via Formulação Equivalente. Para esta análise, que é uma análise de sensibilidade, duas vertentes foram primordiais:

1. determinação da perturbação percentual (ou, relativa) mínima para provocar mudança ordinal no *ranking* de prioridades globais das alternativas e o elemento associado a esta perturbação, que será chamado de elemento crítico;
2. obtenção do número de condicionamento da matriz em questão utilizada na Formulação Equivalente.

O propósito principal deste estudo é confrontar esta perturbação percentual mínima com o número de condicionamento, visto que é esperado existir uma relação entre estas

estimações, uma vez que para um número de condicionamento muito maior que 1, maiores sejam as incertezas presentes na construção do vetor  $B_{C,1}$  e/ou da matriz  $G_{A,C}$ , o que implica em soluções menos estáveis. Cabe mencionar que esta extensão do conceito de número de condicionamento, que é uma das análises de sensibilidade de Sistemas de Equações Lineares, para o método AHP é realizada de maneira inédita. Logo, tomando a matriz de prioridades locais das alternativas em relação aos critérios ( $G_{A,C}$ ) e o vetor de prioridades locais dos critérios em relação aos objetivos ( $B_{C,1}$ ) como parâmetros das simulações, deduziu-se a perturbação percentual mínima suportada pelo vetor  $B_{C,1}$  e o número de condicionamento do Sistema de Equações Lineares em questão.

A determinação da perturbação percentual (ou, relativa) mínima se deu por intermédio de pequenas perturbações unicamente nos elementos do vetor  $B_{C,1}$ , que se incrementariam continuamente a fim de induzir mudanças ordinais no *ranking* das alternativas. Este procedimento incorreu na Formulação Tradicional e na Equivalente e foi validado computacionalmente, por conta da equivalência entre os resultados retornados, utilizando-se como referência o estudo de [103], cujo processo de dedução das perturbações percentuais mínimas em  $B_{C,1}$  se deu mediante a generalização do método proposto por [159].

Mas, deve-se dizer que, além de perturbações nos elementos do vetor  $B_{C,1}$ , é possível perturbar, da mesma forma, os elementos da matriz  $G_{A,C}$ . No entanto, por conta da escolha particular  $C_{C,A} = G_{C,A}^T$ , a perturbação dos elementos da matriz  $G_{A,C}$  geraria um efeito indesejável no lado esquerdo ( $C_{C,A}$ ) e no lado direito ( $D_{C,1}$ ) da Formulação Equivalente, o que dificultaria na visualização dos efeitos do número de condicionamento na solução da Formulação Equivalente. Isto, então, justifica a determinação de perturbações unicamente em  $B_{C,1}$ .

O Algoritmo 2, por sua vez, demonstra uma maneira da obtenção da perturbação percentual (ou, relativa) mínima no vetor  $B_{C,1}$ . Note que  $R^{ORG}$  refere-se ao *ranking* ordinal das alternativas via Formulação Tradicional, *ranking* este oriundo do vetor de prioridades globais das alternativas que é obtido nas condições iniciais de  $G_{A,C}$  e de  $B_{C,1}$  do problema em questão, e  $R^{PERT}$  ao *ranking* ordinal perturbado das alternativas via Formulação Tradicional ou Formulação Equivalente. Por outro lado,  $\epsilon$  refere-se à perturbação percentual incorrida nos elementos do vetor  $B_{C,1}$ , que tende a incrementar-se continuamente em um valor  $\delta$ . Esta perturbação deverá ter um valor mínimo positivo, quando o propósito é ampliar a prioridade de algum elemento, e um valor mínimo negativo, quando este propósito for o oposto, o que irá depender da pré-fixação de  $\delta$ . Portanto, a perturbação percentual mínima no vetor  $B_{C,1}$  será o mínimo dentre a perturbação percentual positiva

mínima, obtida, por exemplo, para  $\delta = 0.00001$ , e a perturbação percentual negativa mínima, para  $\delta = -0.00001$ . Cabe mencionar que a escolha de  $\delta = \pm 0.00001$ , em termos gerais, é justificada por retornar a perturbação percentual mínima com uma boa precisão e num tempo computacional baixo. Maiores detalhes do código computacional utilizado são encontrados no Apêndice B.

---

**Algoritmo 2** ( $G_{A,C}, B_{C,1}, R^{ORG}, \delta$ )

---

- 1: Faça, inicialmente,  $R^{PERT} = R^{ORG}$
  - 2: Seja  $\epsilon = 0$
  - 3: Seja  $\delta = 0.00001$
  - 4: **enquanto**  $R^{PERT}$  for igual a  $R^{ORG}$  **faça**
  - 5:   Faça  $\epsilon = \epsilon + \delta$
  - 6:   **para todo** elemento presente em  $B_{C,1}$  **faça**
  - 7:     Perturbe em  $\epsilon$  um elemento de  $B_{C,1}$  e renormalize  $B_{C,1}$
  - 8:     Obtenha a solução perturbada via Formulação Tradicional ou Formulação Equivalente
  - 9:     Atualize  $R^{PERT}$
  - 10:   **se**  $R^{PERT}$  for diferente de  $R^{ORG}$  **então**
  - 11:     A perturbação percentual positiva mínima é  $\epsilon_{pos} = \epsilon$
  - 12:     Encerre o processo
  - 13:   **fim se**
  - 14:   **fim para**
  - 15: **fim enquanto**
  - 16: Refaça o processo anterior, a partir da Linha 1, agora com  $\delta = -0.00001$
  - 17: A perturbação percentual negativa mínima é  $\epsilon_{neg}$
  - 18: Retorne a perturbação percentual mínima  $\epsilon = \min\{\epsilon_{pos}, \epsilon_{neg}\}$
  - 19: Retorne o elemento crítico de  $B_{C,1}$  associado a esta perturbação
- 

Neste âmbito, a Tabela 4.4 retrata os resultados provindos dos testes computacionais desta etapa. É válido destacar, em virtude das discussões dos resultados, os três conjuntos mais relevantes de dados desta tabela: o elemento crítico de  $B_{C,1}$ , denotado por  $B_{i,j}^*$ ; a perturbação percentual mínima associada à  $B_{i,j}^*$ , denotada por  $\epsilon$ , que são entendidos como as perturbações percentuais  $\epsilon$ , incidida nos elementos críticos  $B_{i,j}^*$ , para provocar mudanças ordinais no *ranking* das alternativas; o número de condicionamento; (3) e, por final, o erro relativo na solução, denotado por  $\frac{|\Delta X|}{|X|}$ , e o limite superior deste erro relativo, com base na Equação (3.10), denotado por  $cond \times \frac{|\Delta D|}{|D|}$ .

Ademais, deve ser dito que os números de condicionamento, apresentados na Tabela 4.4 em termos da norma-2, foram calculados conforme a dimensão matricial. Neste contexto, quando o número de critérios for maior do que o número de alternativas (sistema sobredeterminado), o número de condicionamento será  $cond(Q_{A,A})_2$ , cujo  $Q_{A,A} = G_{A,C}G_{C,A}^T$ . Quando o número de critérios e alternativas forem iguais, o número de condicionamento

será  $\text{cond}(G_{A,A})_2$ . Em contrapartida, quando o número de critérios for menor do que o número de alternativas (sistema subdeterminado), o número de condicionamento será  $\text{cond}(P_{C,C})_2$ , cujo  $P_{C,C} = G_{C,A}^T G_{A,C}$ . Note que estas são as matrizes de coeficientes nos possíveis casos, sendo, portanto, estas que devem ser invertidas e mensuradas. Agora, se estas matrizes de coeficientes são mal-condicionadas, pequenas variações em seus elementos fazem as soluções ficarem bem distintas, visto que os erros se propagarão de forma mais significativa.

1	Fonte	$\epsilon(\%)$	$B_{i,j}^*$	$\text{cond}(G_{A,A})_2$	$\text{cond}(P_{C,C})_2$	$\text{cond}(Q_{A,A})_2$	$\frac{ \Delta X }{ X }$	$\text{cond} \times \frac{ \Delta D }{ D }$
2	[154]	-79,6910	$B_{1,1}$	8,2345	-	-	0,1938	0,8528
3	[157]	9,9010	$B_{1,1}$	47,9739	-	-	0,0227	0,5744
4	[51]	-5,0020	$B_{5,1}$	498,2661	-	-	0,0162	7,3651
5	[38]	-74,4420	$B_{3,1}$	221,3326	-	-	0,0909	4,1629
6	[93]	-36,8760	$B_{3,1}$	186,2421	-	-	0,0264	1,2514
7	[31]	-38,6050	$B_{3,1}$	-	2,758E+03	-	0,0049	4,5586
8	[134]	-9,0270	$B_{4,1}$	-	25,0309	-	0,0185	0,2187
9	[7]	-4,1670	$B_{2,1}$	-	78,0754	-	0,0056	0,1253
10	[76]	-69,8140	$B_{2,1}$	-	6,787E+16	-	0,1047	2,385E+15
11	[87]	40,8280	$B_{3,1}$	-	377,6452	-	0,2949	100,7044
12	[136]	33,9840	$B_{2,1}$	-	22,6116	-	0,0396	0,3325
13	[175]	-29,4080	$B_{5,1}$	-	5,702E+04	-	0,0836	2,908E+03
14	[155]	-1,4400	$B_{4,1}$	-	1,475E+03	-	0,0015	1,7841
15	[43]	-11,8080	$B_{1,1}$	-	-	2,0669	0,0445	0,0700
16	[2]	-134,1280	$B_{1,1}$	-	-	5,7264	0,3471	1,0154
17	[20]	-99,6120	$B_{4,1}$	-	-	73,3376	0,1507	6,8817
18	[101]	-67,2970	$B_{1,1}$	-	-	13,4576	0,1532	0,8192
19	[50]	-49,5730	$B_{3,1}$	-	-	14,5518	0,1110	0,8584
20	[50]	-86,7190	$B_{3,1}$	-	-	382,7132	0,2455	43,4359
21	[50]	-20,9890	$B_{3,1}$	-	-	14,2122	0,0263	0,1329
22	[50]	-67,6260	$B_{3,1}$	-	-	6,0269	0,2045	0,6118
23	[24]	-27,6010	$B_{6,1}$	-	-	6,0334	0,0389	0,1260
24	[143]	-80,4630	$B_{5,1}$	-	-	17,9689	0,0610	0,3661
25	[143]	-131,5810	$B_{3,1}$	-	-	29,1212	0,0657	0,4588
26	[26]	-44,9060	$B_{3,1}$	-	-	370,8743	0,1030	23,4785
27	[142]	-69,3190	$B_{2,1}$	-	-	204,9365	0,1910	37,4067
28	[55]	-105,4830	$B_{5,1}$	-	-	6,288E+18	0,0517	5,584E+16
29	[5]	-21,1140	$B_{2,1}$	-	-	1,257E+05	0,0330	1,487E+03
30	[30]	-40,1560	$B_{3,1}$	-	-	1,554E+03	0,0445	38,9694
31	[95]	8,4660	$B_{9,1}$	-	-	245,4658	0,0097	0,7202
32	[114]	10,4570	$B_{3,1}$	-	-	1,935E+05	0,0087	499,6355
33	[163]	-41,9850	$B_{5,1}$	-	-	532,5898	0,0227	6,0605

Tabela 4.4: Análise de sensibilidade em termos relativos

Fonte: O autor.

Agora, com os resultados produzidos, a primeira decorrência que deve ser destacada está na perturbação percentual (ou, relativa) mínima, cuja Formulação Tradicional retornou o mesmo valor da Formulação Equivalente. Este resultado, que não está explicitado na Tabela 4.4, significa que a perturbação percentual mínima  $\epsilon$ , que incide em seu respectivo critério crítico  $B_{i,j}^*$ , irá provocar mudanças ordinais na solução independente da

formulação (Formulação Tradicional ou Formulação Equivalente) utilizada. E, isto justifica o porquê da existência de uma única coluna para as perturbações percentuais mínimas e para os critérios mais críticos e, ainda, reforça a equivalência entre a Formulação Tradicional e a Formulação Equivalente também no âmbito da sensibilidade dos dados.

Por outro lado, os resultados mostrados na Tabela 4.4 não evidenciam, a princípio, uma relação entre perturbações percentuais mínimas e o número de condicionamento. Como se vê, existiram situações cujos números de condicionamento estão próximos mas com perturbações percentuais mínimas bem diferentes (linhas 22 e 23 ou linhas 25 e 30), como mostra a Figura 4.1, e situações de baixo número de condicionamento mas com perturbações percentuais mínimas, relativamente, pequenas (linha 9).

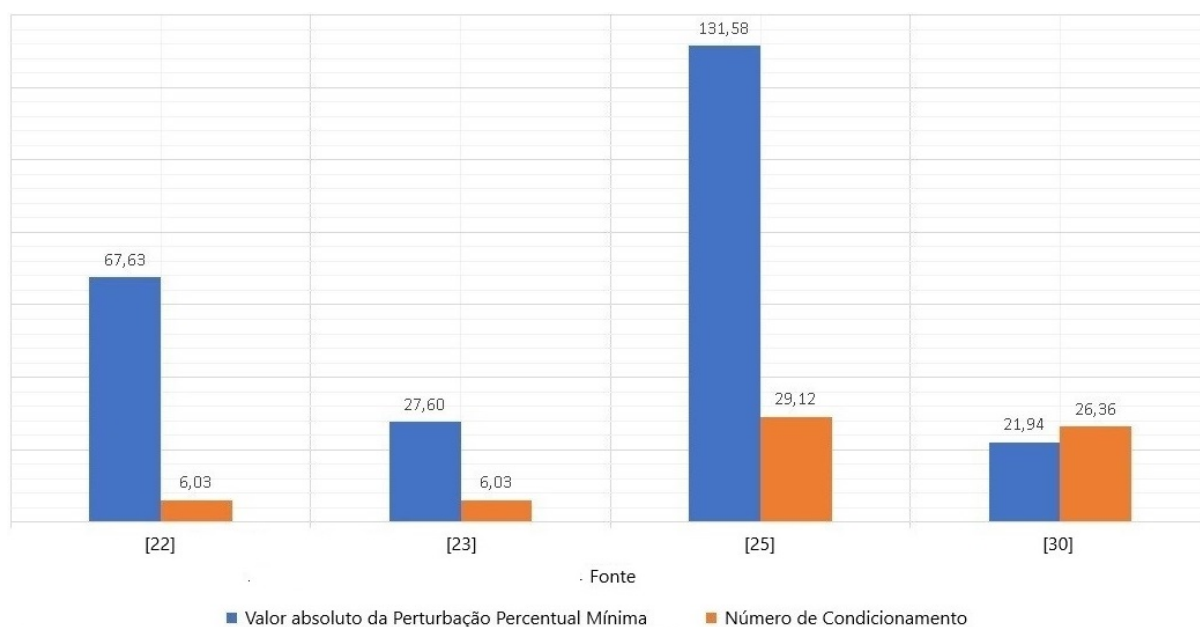


Figura 4.1: Números de condicionamento próximos e o comportamento das perturbações percentuais mínimas.

Fonte: O autor

Existe também outra forma de perceber que não é notória a relação entre perturbações percentuais mínimas no vetor  $B_{C,1}$  e o número de condicionamento. Para isto, consideremos como referência a linha 14 da Tabela 4.4, esta que representa o caso de maior instabilidade do vetor  $B_{C,1}$ , onde apenas uma perturbação de  $-1,4400\%$  na preferência do elemento  $B_{4,1}$  já seria suficiente para modificar a ordem das prioridades globais das alternativas. Note que o número de condicionamento deste caso é dado por  $1,475E + 03$ . Agora, na existência de uma relação direta entre perturbações percentuais mínimas e o número de condicionamento, seria esperado que, com o aumento do número de condicionamento, maior seria a sensibilidade de  $B_{C,1}$  e, conseqüentemente, a solução  $X_{A,1}$ . Porém,



como se vê na Figura 4.2, o aumento do número de condicionamento não necessariamente implica em soluções  $X_{A,1}$  mais instáveis.

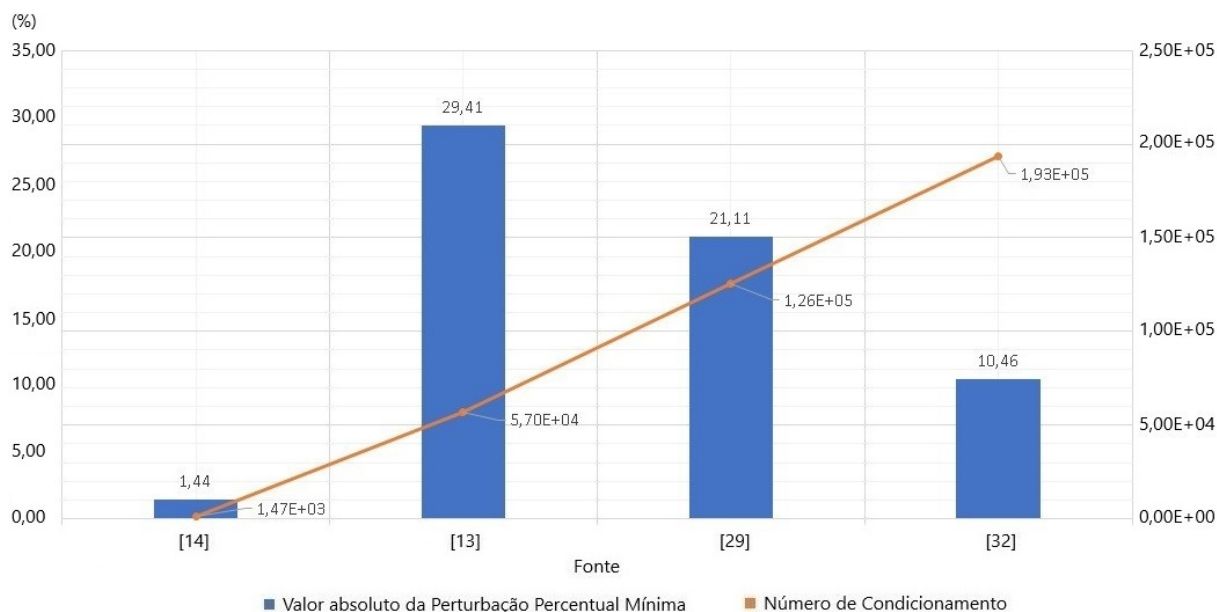


Figura 4.2: Elevação do número de condicionamento e o comportamento das perturbações percentuais mínimas.

Fonte: O autor

Mas, embora a relação entre estas perturbações percentuais mínimas com o número de condicionamento não tenha sido bem evidenciada, o erro relativo da solução mediante as perturbações percentuais, onde é gerado uma solução perturbada (ordinalmente diferente da solução inicial) e esta permite o cálculo de  $\frac{|\Delta X|}{|X|}$ , em todos os casos esteve abaixo do limite superior obtido pelo número de condicionamento.

### 4.3 Análise da fatoração de vetores-coluna redundantes

Esta terceira etapa consistirá no estudo das implicações da fatoração dos vetores-coluna redundantes da matriz  $G_{A,C}$ . O interesse neste simples procedimento algébrico, em termos gerais, está em uma provável melhoria na robustez do modelo em questão, seja ele tratado pela Formulação Tradicional ou, ainda, pela Formulação Equivalente. Neste contexto, os seguintes parâmetros foram necessários: dimensão matricial antes e depois da fatoração, denotada, respectivamente, por  $\dim(G_{A,C})$  e  $\dim(\tilde{G}_{A,W})$ ; o posto da matriz  $G_{A,C}$ , classificado em “C” (posto completo) ou “I” (posto incompleto); o elemento crítico de  $B_{C,1}$ , denotado por  $B_{i,j}^*$ ; a perturbação percentual mínima associada à  $B_{i,j}^*$ , denotada por  $\epsilon$ ; o número de condicionamento na norma-2, denotado por  $\text{cond}(\cdot)_2$ ; e, por

último, o par de vetores-coluna (PVC) de  $G_{A,C}$  com a menor mensuração de ângulo, em graus, denotado por  $\theta$ . A Tabela 4.5 apresenta, então, estes parâmetros unicamente nos casos considerados neste estudo em que existiram ao menos dois vetores-coluna de  $G_{A,C}$  paralelos (linearmente dependentes). Maiores detalhes do código computacional utilizado são encontrados no Apêndice C.

1	Fonte	$dim(G_{A,C})$	Posto	$\epsilon(\%)$	$B_{i,j}^*$	$cond(P_{C,C})_2$	$cond(Q_{A,A})_2$	PVC	$\theta$ (°)
2	[76]	6x5	I	-69,8140	$B_{2,1}$	6,787E+16	-	1 e 3	8,537E-07
3	[43]	2x5	C	-11,8080	$B_{1,1}$	-	2,0669	3 e 5	0
4	[24]	3x7	C	-27,6010	$B_{6,1}$	-	6,0334	3 e 5	0
5	[55]	4x9	I	-105,4830	$B_{5,1}$	-	6,288E+18	2 e 3	0

Tabela 4.5: Casos de vetores-coluna redundantes de  $G_{A,C}$  antes da fatoração  
Fonte: O autor.

Cabe dizer que, para elaboração da Tabela 4.5, uma mensuração prévia dos ângulos entre os vetores-coluna de  $G_{A,C}$  deu-se como necessária. E, a partir da Tabela 4.5, é fácil observar que dois destes casos selecionados são dados como de posto incompleto e, por conseguinte, com um elevado número de condicionamento. A Tabela 4.6, por sua vez, apresenta os mesmos parâmetros da Tabela 4.5, porém avaliados após o procedimento de fatoração de vetores-coluna redundantes de  $G_{A,C}$ .

1	Fonte	$dim(\tilde{G}_{A,W})$	Posto	$\epsilon(\%)$	$B_{i,j}^*$	$cond(P_{C,C})_2$	$cond(Q_{A,A})_2$	PVC	$\theta$ (°)
2	[76]	6x4	C	-69,8140	$B_{2,1}$	694,7642	-	1 e 2	19,0562
3	[43]	2x4	C	-11,8080	$B_{1,1}$	-	1,7867	3 e 4	1,0051
4	[24]	3x6	C	-27,6010	$B_{6,1}$	-	5,3481	5 e 6	14,9425
5	[55]	4x3	C	-105,4830	$B_{5,1}$	1,888E+03	-	1 e 2	4,0524

Tabela 4.6: Casos de vetores-coluna redundantes de  $G_{A,C}$  após a fatoração  
Fonte: O autor.

Como se vê, ao confrontar os resultados das Tabelas 4.5 e 4.6, a fatoração de vetores-coluna redundantes da matriz  $G_{A,C}$  tende, em geral, a reduzir o número de condicionamento desta matriz, principalmente se esta for muito mal condicionada (veja esta mudança nas linhas 2 e 5 das Tabelas 4.5 e 4.6). Isto era esperado porque, com este simples procedimento, a matriz  $G_{A,C}$  - que não terá mais esta dimensão e, sim,  $\tilde{G}_{A,W}$ , cujo  $W = C - (n-1)$  e  $n-1$  é o número de vetores-coluna fatorados - passa a não ter vetores-coluna linearmente dependentes. E, como a matriz  $\tilde{G}_{A,W}$  sempre será de posto completo, é sempre garantido a existência de soluções da Formulação Equivalente mediante as Equações Normais, pela não-singularidade das matrizes  $\tilde{G}_{A,W}\tilde{G}_{W,A}^T$  e/ou  $\tilde{G}_{W,A}^T\tilde{G}_{A,W}$ . Em contrapartida, esta fatoração pode ter pouca ou nenhuma influência nos valores das perturbações percentuais mínimas em  $B_{C,1}$ , como mostram as Tabelas 4.5 e 4.6. Nos casos aqui tratados, por exemplo, não houve influência, mas isto não implica que não exista nenhuma (seja para

melhorar ou para piorar a sensibilidade dos dados). Portanto, pode-se dizer que maiores desenvolvimentos devem ser feitos com o procedimento de fatoração de vetores-coluna para indicar uma efetividade real, uma vez que este procedimento modificou, com relação ao modelo antecedente à fatoração, o número de condicionamento da matriz  $G_{A,C}$  (principalmente quando esta matriz era de posto incompleto), mas não gerou grandes mudanças na perturbação percentual mínima no vetor  $B_{C,1}$ .

# Capítulo 5

## Conclusões e Trabalhos Futuros

Nesta dissertação, é realizada uma análise matemática da síntese global ou agregação aditiva das prioridades locais do método AHP, que se deu pela reformulação deste procedimento em termos de Sistemas de Equações Lineares. Esta reformulação, tratada como Formulação Equivalente e validada na etapa de análise das soluções, foi obtida com a pré-multiplicação de uma matriz genérica  $C_{C,A}$  (que, quando é assumido a escolha particular,  $C_{C,A} = G_{C,A}^T$ ) na Formulação Tradicional e foi motivada, principalmente, pela diversidade de críticas atribuídas ao método AHP (inclusive em sua forma de agregar os resultados finais) em conjunto com a ausência de garantias de unicidade de solução com a Formulação Tradicional desta síntese. Isto, então, gerou um procedimento de síntese global dos resultados dependente da resolução de um Sistema de Equações Lineares para retornar o vetor de prioridades globais das alternativas, o que permitiu contribuições incomuns em alguns aspectos da metodologia AHP, indo de encontro ao cumprimento objetivo geral e dos específicos.

Neste contexto, a primeira contribuição a ser destacada está na caracterização da solução final  $X_{A,1}$  do método AHP. Isto porque a etapa de análise das soluções revelou que a solução obtida com a Formulação Tradicional coincidirá com a solução da Formulação Equivalente se esta última for a solução de mínimos quadrados e, na circunstância de uma infinidade de soluções de mínimos quadrados (como nos casos de  $G_{A,C}$  ser de posto incompleto), se esta última for a solução de menor norma. Note, então, que esta caracterização da solução retornada pelo método AHP, que apenas foi possível quando utilizou-se a Formulação Equivalente, mostra que o método AHP em sua Formulação Tradicional, embora desconheça outras possíveis soluções, por alguma razão, não escolhe soluções arbitrariamente. Caso as soluções retornadas com o AHP fossem arbitrárias, a sua utilização em problemas reais perderia todo o sentido.

Agora, a segunda contribuição relevante, alcançada com a reformulação proposta, está na análise de sensibilidade da solução final  $X_{A,1}$ , uma vez que esta análise revelou que existe uma equivalência entre a Formulação Tradicional e a Formulação Equivalente também no limite de perturbação suportado nos elementos do vetor de prioridades dos critérios antes de quaisquer mudanças ordinais no *ranking* de prioridades globais das alternativas. Esta equivalência, que pode indicar mais um ponto positivo da Formulação Equivalente, não era esperada. Em contrapartida, o propósito principal desta análise de sensibilidade, que era confrontar a perturbação percentual mínima com o número de condicionamento (este que é uma análise de sensibilidade para Sistemas de Equações Lineares acoplado ineditamente ao método AHP), não gerou maiores conclusões, visto que o número de condicionamento muito maior que 1 não implicou em soluções menos estáveis, quando o parâmetro de estabilidade foi a perturbação percentual mínima no vetor  $B_{C,1}$ . Mas, esta ausência de maiores conclusões não implica numa irrelevância do número de condicionamento para com o método AHP, apenas sugere que maiores estudos devem ser realizados.

A terceira, e última, contribuição a ser destacada está na fatoração de vetores-coluna redundantes da matriz  $G_{A,C}$ , no qual mostrou-se como um procedimento simples e transparente, cujo intuito principal estaria, a princípio, na garantia de maior robustez ao modelo e, por conseguinte, na maior estabilidade da solução obtida. E, como esta fatoração deveria ser utilizada apenas na existência de vetores-coluna redundantes/paralelos (ou, linearmente dependentes), este procedimento foi complementado com a mensuração dos ângulos entre os vetores-coluna da matriz  $G_{A,C}$ , que deveria anteceder a fatoração. Em termos, mais uma vez, da interpretação geométrica mencionada, mensurar os ângulos entre os vetores-coluna de  $G_{A,C}$  é análogo a mensurar o quão paralelos os hiperplanos do modelo estão. No entanto, apesar deste procedimento de fatoração proporcionar, por exemplo, matrizes bem condicionadas e a existência das Equações Normais, ainda não se pode afirmar quais são as reais melhorias com esta fatoração, uma vez que as perturbações percentuais em  $B_{C,1}$  tenderam a ser as mesmas do modelo não-fatorado. Este último resultado, em particular, vai de encontro com os resultados gerados na etapa de análise de sensibilidade e evidencia, novamente, a dificuldade na correlação entre o número de condicionamento e perturbações percentuais mínimas nos elementos de  $B_{C,1}$ .

Como se vê, o estudo desenvolvido nesta dissertação abordou diversos aspectos importantes do procedimento de síntese global dos resultados do método AHP de um modo não visto na literatura, alcançando todos os objetivos pretendidos. E, além de analisar este procedimento em outra perspectiva e buscar compreender algumas particulares desta

etapa quase final do método AHP, deve-se mencionar que a maior contribuição deste trabalho está na apresentação de uma Formulação Equivalente para o processo de síntese global dos resultados, que é esperado ser continuamente empregada no intuito de contribuir nas discussões atuais e, por conseguinte, sanar os diversos questionamentos que ainda pairam o método AHP, uma vez que esta reformulação abre maiores possibilidades de análises.

Como proposta, então, para a realização de trabalhos futuros, há a sugestão do desenvolvimento de uma nova análise de sensibilidade para a Formulação Equivalente, uma vez que existem outras análises de sensibilidade para Sistemas de Equações Lineares. Com esta nova análise, outros conceitos poderão ser estudados, até mesmo a mensuração da consistência dos julgamentos efetuados no processo de comparação entre pares. Há, ainda, a sugestão de analisar o *rank reversals* agora com a utilização da Formulação Equivalente, buscando compreender melhor este fenômeno e suas causas, uma vez que esta é uma das principais críticas ao AHP. Outra proposta seria verificar como a dependência linear ou a quase dependência linear entre vetores-coluna e vetores-linha realmente influenciam as soluções com a Formulação Equivalente.

# Referências

- [1] ABBAS, M. S., KOCAOGLU, D. F. Consistency thresholds for hierarchical decision model. Em *2016 Portland International Conference on Management of Engineering and Technology (PICMET)* (2016), IEEE, p. 566–575.
- [2] ABREU, L. D., GRANEMANN, S. R., GARTNER, I., BERNARDES, R. S. Escolha de um programa de controle da qualidade da água para consumo humano aplicação do método ahp. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental* 4, 2 (2000), 257–262.
- [3] AGUARON, J., MORENO-JIMÉNEZ, J. M. The geometric consistency index: Approximated thresholds. *European journal of operational research* 147, 1 (2003), 137–145.
- [4] AIRES, R. F. D. F., FERREIRA, L. The rank reversal problem in multi-criteria decision making: A literature review. *Pesquisa Operacional* 38, 2 (2018), 331–362.
- [5] AL-HARBI, K. M. A.-S. Application of the ahp in project management. *International journal of project management* 19, 1 (2001), 19–27.
- [6] ALONSO, J. A., LAMATA, M. T. Consistency in the analytic hierarchy process: a new approach. *International journal of uncertainty, fuzziness and knowledge-based systems* 14, 04 (2006), 445–459.
- [7] ALVES, J. R. X., ALVES, J. M. Definição de localidade para instalação industrial com o apoio do método de análise hierárquica (ahp). *Production Journal* 25, 1 (2015), 13–26.
- [8] ANTON, H., RORRES, C. *Álgebra linear com aplicações*, vol. 8. Bookman Porto Alegre, 2001.
- [9] ANTUNES, C., ALVES, M. Programação linear multiobjetivo-métodos interativos e software. Em *Anais do Congresso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa* (2012), vol. 24, p. 4725–4736.
- [10] ARMACOST, R. L., HOSSEINI, J. C. Identification of determinant attributes using the analytic hierarchy process. *Journal of the Academy of Marketing Science* 22, 4 (1994), 383.
- [11] ASAHI, T., TURO, D., SHNEIDERMAN, B. Technical research report: Using tre-emaps to visualise the analytic hierarchy process. *Institute for Systems Research* (1994).

- 
- [12] BANA E COSTA, C. A., VANSNICK, J.-C. A critical analysis of the eigenvalue method used to derive priorities in ahp. *European Journal of Operational Research* 187, 3 (2008), 1422–1428.
- [13] BARATA, J. C. A., HUSSEIN, M. S. The moore–penrose pseudoinverse: A tutorial review of the theory. *Brazilian Journal of Physics* 42, 1-2 (2012), 146–165.
- [14] BARZILAI, J. Consistency measures for pairwise comparison matrices. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 7, 3 (1998), 123–132.
- [15] BARZILAI, J. Notes on the analytic hierarchy process. Em *Proceedings of the NSF design and manufacturing research conference* (2001), p. 1–6.
- [16] BARZILAI, J., LOOTSMA, F. Power relations and group aggregation in the multiplicative ahp and smart. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 6, 3 (1997), 155–165.
- [17] BELTON, V., GEAR, T. On a short-coming of saaty’s method of analytic hierarchies. *Omega* 11, 3 (1983), 228–230.
- [18] BELTON, V., GEAR, T. The legitimacy of rank reversal—a comment. *Omega* 13, 3 (1985), 143–144.
- [19] BELTON, V., STEWART, T. *Multiple criteria decision analysis: an integrated approach*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [20] BENÍTEZ, J., CARPITELLA, S., CERTA, A., IZQUIERDO, J. Characterization of the consistent completion of analytic hierarchy process comparison matrices using graph theory. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 26, 1-2 (2019), 3–15.
- [21] BENÍTEZ, J., DELGADO-GALVÁN, X., IZQUIERDO, J., PÉREZ-GARCÍA, R. Improving consistency in ahp decision-making processes. *Applied Mathematics and Computation* 219, 5 (2012), 2432–2441.
- [22] BOOS, E. Métodos iterativos para a pseudo-inversa de moore-penrose e aplicações na resolução de sistemas lineares. Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2015.
- [23] BRAWLEY, J., GAMBLE, R. Involutory matrices over finite commutative rings. *Linear Algebra and its Applications* 21, 2 (1978), 175–188.
- [24] CABALA, P. Using the analytic hierarchy process in evaluating decision alternatives. *Operations research and decisions* 20, 1 (2010), 5–23.
- [25] CEGAN, J. C., FILION, A. M., KEISLER, J. M., LINKOV, I. Trends and applications of multi-criteria decision analysis in environmental sciences: literature review. *Environment Systems and Decisions* 37, 2 (2017), 123–133.
- [26] CHALÚPKOVÁ, E., FRANEK, J. Application of the analytic hierarchy process method in a comparison of financial leasing and loans. 75–84.
- [27] CHAPRA, S. C., CANALE, R. P. *Métodos numéricos para engenharia*. McGraw-Hill, 2008.



- [28] CHOO, E. U., WEDLEY, W. C. A common framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices. *Computers & Operations Research* 31, 6 (2004), 893–908.
- [29] CRAWFORD, G., WILLIAMS, C. A note on the analysis of subjective judgment matrices. *Journal of mathematical psychology* 29, 4 (1985), 387–405.
- [30] DAMDINSUREN, M., ISHDAMBA, B. Application of the ahp in choosing project manager. *International Journal of English Literature and Social Sciences* 2, 4 (2017).
- [31] DE PAULA, J. O., MELLO, C. H. P. Seleção de um modelo de referência de pdp para uma empresa de autopeças através de um método de auxílio à decisão por múltiplos critérios. *Production* 23, 1 (2013), 144–156.
- [32] DEIF, A. *Sensitivity analysis in linear systems*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [33] DEMMEL, J. W. *Applied numerical linear algebra*, vol. 56. Siam, 1997.
- [34] DEWULF, A., BIESBROEK, R. Nine lives of uncertainty in decision-making: strategies for dealing with uncertainty in environmental governance. *Policy and Society* 37, 4 (2018), 441–458.
- [35] DIABY, V., CAMPBELL, K., GOEREE, R. Multi-criteria decision analysis (mcda) in health care: a bibliometric analysis. *Operations Research for Health Care* 2, 1-2 (2013), 20–24.
- [36] DO Q, L. Numerically efficient methods for solving least squares problems, 2012.
- [37] DODD, F., DONEGAN, H. Comparison of prioritization techniques using interhierarchy mappings. *Journal of the Operational Research Society* 46, 4 (1995), 492–498.
- [38] DOS ANJOS BAINHA, F. S., VIANNA, D. S., MEZA, E. B. M. Aplicação do método ahp à tomada de decisão gerencial: um estudo de caso em serviço de hotelaria offshore. *Marketing & Tourism Review* 3, 2 (2018).
- [39] DUSZAK, Z., KOCZKODAJ, W. W. Generalization of a new definition of consistency for pairwise comparisons. *Information processing letters* 52, 5 (1994), 273–276.
- [40] DYER, J. S. Remarks on the analytic hierarchy process. *Management science* 36, 3 (1990), 249–258.
- [41] EMROUZNEJAD, A., MARRA, M. The state of the art development of ahp (1979–2017): a literature review with a social network analysis. *International Journal of Production Research* 55, 22 (2017), 6653–6675.
- [42] ENSSLIN, L., GIFFHORN, E., ENSSLIN, S. R., PETRI, S. M., VIANNA, W. B. Avaliação do desempenho de empresas terceirizadas com o uso da metodologia multicritério de apoio à decisão-constructivista. *Pesquisa Operacional* 30, 1 (2010), 125–152.

- [43] FRANCO, M. M., MONEGAT, A. D. R., LIMA, D. D., CORSO, L. L. Aplicação do método ahp na tomada de decisão do processo de terceirização de componentes usados em uma empresa multinacional. *XXXVII Encontro Nacional de Engenharia de Produção* (2017).
- [44] FRANEK, J., KRESTA, A. Judgment scales and consistency measure in ahp. *Procedia Economics and Finance* 12 (2014), 164–173.
- [45] FRENCH, S. Multicriteria methodology for decision aiding. *Journal of the Operational Research Society* 48, 12 (1997), 1257–1258.
- [46] GANTMACHER, F. R. The theory of matrices. volume one. *Translated by KA Hirsch, Chelsea Publishing Company, Printed in USA, Card Nr. 59-11779, ISBN: 8284-0131-4* (1960).
- [47] GARUTI, C., SALOMON, V. P., GONZÁLEZ, I. S. A systemic rebuttal to the criticism of using the eigenvector for priority assessment in the analytic hierarchy process for decision making. *Computación y Sistemas* 12, 2 (2008), 192–207.
- [48] GENTLE, J. E. *Matrix algebra*, vol. 10. Springer, 2007.
- [49] GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6. ed. Editora Atlas SA, 2008.
- [50] GINER-SANTONJA, G., CALVO, V. V., LEPE, G. R. Application of ahp and corrective factors for the determination of best available techniques and emission limit values at installation level: A case study in four cement installations. *Science of The Total Environment* 660 (2019), 834–840.
- [51] GIRI, S., NEJADHASHEMI, A. P. Application of analytical hierarchy process for effective selection of agricultural best management practices. *Journal of environmental management* 132 (2014), 165–177.
- [52] GOLANY, B., KRESS, M. A multicriteria evaluation of methods for obtaining weights from ratio-scale matrices. *European Journal of Operational Research* 69, 2 (1993), 210–220.
- [53] GOLDEN, B. L., WANG, Q. An alternate measure of consistency. In *The Analytic Hierarchy Process*. Springer, 1989, p. 68–81.
- [54] GOLUB, G. H., VAN LOAN, C. *Matrix computations 4th Edition*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2013.
- [55] GOMEDE, E., BARROS, R. Utilizando o método analytic hierarchy process (ahp) para priorização de serviços de ti: Um estudo de caso. *VIII Simpósio Brasileiro de Sistemas de Informação, São Paulo* (2012), 408–419.
- [56] GOMES, L. Avaliações estratégicas com múltiplos critérios: porque o método ahp deve continuar a ser usado. *Visão Estratégica* 1 (2003).
- [57] GOMES, L. F. A. M. *Teoria da decisão*. Thomson, 2007.
- [58] GOMES, L. F. A. M., GONZÁLEZ, M. C. A., CARIGNANO, C. *Tomada de decisões em cenários complexos: introdução aos métodos discretos do apoio multicritério à decisão*. Thomson, 2004.

- [59] GUARNIERI, P. Síntese dos principais critérios, métodos e subproblemas da seleção de fornecedores multicritério. *RAC-Revista de Administração Contemporânea* 19, 1 (2015), 1–25.
- [60] HADAMARD, J. *Lectures on Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. New Haven, CT, 1923.
- [61] HAN, S. A practical approaches to decrease the consistency index in ahp. Em *2014 Joint 7th International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems (SCIS) and 15th International Symposium on Advanced Intelligent Systems (ISIS)* (2014), IEEE, p. 867–872.
- [62] HANSEN, P. C. *Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion*, vol. 4. Siam, 2005.
- [63] HARKER, P. T. Incomplete pairwise comparisons in the analytic hierarchy process. *Mathematical modelling* 9, 11 (1987), 837–848.
- [64] HARKER, P. T., VARGAS, L. G. The theory of ratio scale estimation: Saaty’s analytic hierarchy process. *Management science* 33, 11 (1987), 1383–1403.
- [65] HO, W. Integrated analytic hierarchy process and its applications—a literature review. *European Journal of operational research* 186, 1 (2008), 211–228.
- [66] HUANG, I. B., KEISLER, J., LINKOV, I. Multi-criteria decision analysis in environmental sciences: ten years of applications and trends. *Science of the total environment* 409, 19 (2011), 3578–3594.
- [67] ISHIZAKA, A., BALKENBORG, D., KAPLAN, T. Influence of aggregation and measurement scale on ranking a compromise alternative in ahp. *Journal of the Operational Research Society* 62, 4 (2011), 700–710.
- [68] ISHIZAKA, A., LABIB, A. Review of the main developments in the analytic hierarchy process. *Expert systems with applications* 38, 11 (2011), 14336–14345.
- [69] ISHIZAKA, A., LUSTI, M. How to derive priorities in ahp: a comparative study. *Central European Journal of Operations Research* 14, 4 (2006), 387–400.
- [70] JANSEN, L. K. C., SHIMIZU, T., JANSEN, J. U. Uma análise de investimentos considerando fatores intangíveis. *Revista Produção Online* 4, 4 (2004).
- [71] JOHNSON, C. R., BEINE, W. B., WANG, T. J. Right-left asymmetry in an eigenvector ranking procedure. *Journal of Mathematical Psychology* 19, 1 (1979), 61–64.
- [72] KIM, S. C. Statistical issues in combining expert opinions for analytic hierarchy process.
- [73] KINOSHITA, E., NAKANISHI, M. Proposal of new ahp model in light of dominant relationship among alternatives. *Journal of the Operations Research Society of Japan* 42, 2 (1999), 180–197.

- [74] KLUTHO, S. Mathematical decision making an overview of the analytic hierarchy process. *Washington: Whitman College* (2013).
- [75] KOCZKODAJ, W. W. A new definition of consistency of pairwise comparisons. *Mathematical and computer modelling* 18, 7 (1993), 79–84.
- [76] KOKSAL, C. D., OZMUTAF, N. M. Using analytic hierarchy process for selecting the appropriate host country to study english language abroad. *International journal of social sciences and humanity studies* 1, 1 (2009), 37–46.
- [77] KREJČÍ, J., STOKLASA, J. Aggregation in the analytic hierarchy process: Why weighted geometric mean should be used instead of weighted arithmetic mean. *Expert Systems with Applications* 114 (2018), 97–106.
- [78] KURTH, M. H., LARKIN, S., KEISLER, J. M., LINKOV, I. Trends and applications of multi-criteria decision analysis: use in government agencies. *Environment Systems and Decisions* 37, 2 (2017), 134–143.
- [79] KWOK, Y., LIM, H. Using analytic hierarchy process with operations analysis in project evaluation: ‘unique f-15sg is perfect for singapore’s fighter project’. *Flight Daily* 21 (2006), 136–142.
- [80] LAWSON, C. L., HANSON, R. J. *Solving least squares problems*, vol. 15. Siam, 1995.
- [81] LEON, S. J. *Álgebra Linear com Aplicações*. Grupo Gen-LTC, 2000.
- [82] LI, S. *Rank reversal properties of multicriteria decision making models*. PhD thesis, University of Birmingham, 2010.
- [83] LIMA, E. L. Algebra linear, 2a. edição. *IMPA, Rio de Janeiro* (1996), 22.
- [84] LØKEN, E. Use of multicriteria decision analysis methods for energy planning problems. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 11, 7 (2007), 1584–1595.
- [85] LOOTSMA, F. A. Scale sensitivity in the multiplicative ahp and smart. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 2, 2 (1993), 87–110.
- [86] LÓPEZ-BONILLA, J., LÓPEZ-VÁZQUEZ, R., VIDAL-BELTRÁN, S. Moore-penrose’s inverse and solutions of linear systems. *World Scientific News* 101 (2018), 246–252.
- [87] LUCENA, A. F. E., MORI, L. M. D. Uso do analytic hierarchy process (ahp) para hierarquização de métodos de mensuração do grau de aplicação da construção enxuta. *Revista Gestão Industrial* 14, 4 (2018), 48–69.
- [88] MA, D., ZHENG, X. 9/9-9/1 scale method of ahp. Em *Proceedings of the Second International Symposium on the AHP* (1991), vol. 1, University of Pittsburgh Pittsburgh, PA, p. 197–202.
- [89] MACHADO, T. P. S. D. O., ENSSLIN, L., ENSSLIN, S. R. Desenvolvimento de produtos usando a abordagem mcda-c. *Production* 25, 3 (2015), 542–559.

- [90] MALEKI, H., ZAHIR, S. A comprehensive literature review of the rank reversal phenomenon in the analytic hierarchy process. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 20, 3-4 (2013), 141–155.
- [91] MASUDA, T. Hierarchical sensitivity analysis of priority used in analytic hierarchy process. *International Journal of Systems Science* 21, 2 (1990), 415–427.
- [92] MAZUREK, J. On inconsistency indices and inconsistency axioms in pairwise comparisons. *arXiv preprint arXiv:1703.05204* (2017).
- [93] MEI, X., ROSSO, R., HUANG, G., NIE, G. Application of analytical hierarchy process to water resources policy and management in beijing, china. *International Association of Hydrological Sciences (IAHS) 180* (1989).
- [94] MEIRELLES, C. L. D. A., GOMES, L. F. A. M. O apoio multicritério à decisão como instrumento de gestão do conhecimento: uma aplicação à indústria de refino de petróleo. *Pesquisa Operacional* 29, 2 (2009), 451–470.
- [95] MENDES, F. D. S., BASTOS, M. H. R., DE REZENDE SOUZA, T. C., HERNANDEZ, C. T. Utilização da metodologia analytic hierarchy process (ahp) na mensuração da importância das características empreendedoras-um estudo em um curso de engenharias de volta redonda. *XI Simpósio de Excelência em Gestão e Tecnologia* (2014).
- [96] MILLET, I., HARKER, P. T. Globally effective questioning in the analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research* 48, 1 (1990), 88–97.
- [97] MIRHEDAYATIAN, S., FARZIPOOR SAEN, R. A new approach for weight derivation using data envelopment analysis in the analytic hierarchy process. *Journal of the Operational Research Society* 62, 8 (2011), 1585–1595.
- [98] MOUSSEAU, V., SLOWINSKI, R. Inferring an electre tri model from assignment examples. *Journal of global optimization* 12, 2 (1998), 157–174.
- [99] MUKHAMETZHYANOV, I., PAMUCAR, D. A sensitivity analysis in mcdm problems: A statistical approach. *Decision making: applications in management and engineering* 1, 2 (2018), 51–80.
- [100] NGUYEN, G. H. The analytic hierarchy process: A mathematical model for decision making problems.
- [101] OLIVEIRA, A. A. M. *Método AHP como otimização na seleção de fornecedores numa empresa de materiais de construção*. PhD thesis, Instituto Politécnico do Porto. Instituto Superior de Engenharia do Porto, 2013.
- [102] ORRIN, C., GUOQING, L. Linking disjoint supermatrices and criteria clusters. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 23, 3-4 (2016), 139–159.
- [103] PANKRATOVA, N., NEDASHKOVSKAYA, N. Sensitivity analysis of a decision-making problem using the analytic hierarchy process. *International Journal «Information Theories and Applications»* 23, 3 (2016), 232–251.

- [104] PARDALOS, P. M., SISKOS, Y., ZOPOUNIDIS, C. *Advances in multicriteria analysis*, vol. 5. Springer Science & Business Media, 2013.
- [105] PARKAN, C., WU, M.-L. Comparison of three modern multicriteria decision-making tools. *International Journal of Systems Science* 31, 4 (2000), 497–517.
- [106] PARREIRAS, R. O. Algoritmos evolucionários e técnicas de tomada de decisão em análise multicritério. Dissertação de Mestrado, UFMG, Belo Horizonte, Minas Gerais, 2006.
- [107] PELÁEZ, J. I., LAMATA, M. T. A new measure of consistency for positive reciprocal matrices. *Computers & Mathematics with Applications* 46, 12 (2003), 1839–1845.
- [108] PEREIRA, J. D. S. Priorização de projetos de investimento utilizando o método ahp de apoio multicritério à decisão. Dissertação de mestrado em modelagem computacional em ciência e tecnologia, Universidade Federal Fluminense, Niterói-RJ, 2016.
- [109] QUARTERONI, A., SALERI, F. E. *Cálculo Científico com MATLAB e Octave*. Springer, Milano, 2007.
- [110] RAMANATHAN, R. Data envelopment analysis for weight derivation and aggregation in the analytic hierarchy process. *Computers & Operations Research* 33, 5 (2006), 1289–1307.
- [111] RAMÍK, J., KORVINY, P. Inconsistency of pair-wise comparison matrix with fuzzy elements based on geometric mean. *Fuzzy Sets and Systems* 161, 11 (2010), 1604–1613.
- [112] RANGEL, L. A. D., GOMES, L. O apoio multicritério à decisão na avaliação de candidatos. *Produção online* 20, 1 (2010), 92–101.
- [113] RAUPP, F. M., BEUREN, I. M. Metodologia da pesquisa aplicável às ciências. *Como elaborar trabalhos monográficos em contabilidade: teoria e prática*. São Paulo: Atlas (2006).
- [114] RAZENTE, H. B., BELINELLI, M., DE SOUZA, G. F. M., RODRIGUES, M., MATSUZAKI, M., SAVOLDI, A. Application of the ahp multi criteria analysis method for the decision-making in industrial maintenance activities: Case study in a food company. *ICVRAM ISUMA Uncertainties* (2018).
- [115] RIVAS, R. E. G. Uso do método multicritério para tomada de decisão operacional tendo em conta riscos operacionais, à segurança, ambientais e à qualidade. *Universidade Federal da Bahia - Dissertação de Mestrado*. Salvador, Bahia (2016).
- [116] ROY, B. *Multicriteria Methodology Goes Decision Aiding*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [117] SAATY, T. L. A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of mathematical psychology* 15, 3 (1977), 234–281.
- [118] SAATY, T. L. Absolute and relative measurement with the ahp. the most livable cities in the united states. *Socio-Economic Planning Sciences* 20, 6 (1986), 327–331.

- 
- [119] SAATY, T. L. Axiomatic foundation of the analytic hierarchy process. *Management science* 32, 7 (1986), 841–855.
- [120] SAATY, T. L. *Decision making for leaders: the Analytic Hierarchy Process for decisions in a complex world*. RWS publications, 1990.
- [121] SAATY, T. L. How to make a decision: the analytic hierarchy process. *European journal of operational research* 48, 1 (1990), 9–26.
- [122] SAATY, T. L. Método de análise hierárquica. *São Paulo: Makron* (1991).
- [123] SAATY, T. L. Some mathematical concepts of the analytic hierarchy process. *Behaviormetrika* 18, 29 (1991), 1–9.
- [124] SAATY, T. L. *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the AHP*. RWS Publications: Pittsburgh,PA, 1994.
- [125] SAATY, T. L. Transport planning with multiple criteria: the analytic hierarchy process applications and progress review. *Journal of advanced transportation* 29, 1 (1995), 81–126.
- [126] SAATY, T. L. Rank from comparisons and from ratings in the analytic hierarchy/network processes. *European Journal of Operational Research* 168, 2 (2006), 557–570.
- [127] SAATY, T. L. Relative measurement and its generalization in decision making why pairwise comparisons are central in mathematics for the measurement of intangible factors the analytic hierarchy/network process. *RACSAM-Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* 102, 2 (2008), 251–318.
- [128] SAATY, T. L., KEARNS, K. P. *Analytical planning: The organization of system*, vol. 7. Elsevier, 2014.
- [129] SAATY, T. L., OZDEMIR, M. S. Why the magic number seven plus or minus two. *Mathematical and computer modelling* 38, 3-4 (2003), 233–244.
- [130] SAATY, T. L., SAGIR, M. An essay on rank preservation and reversal. *Mathematical and Computer Modelling* 49, 5-6 (2009), 1230–1243.
- [131] SAATY, T. L., VARGAS, L. G. Estimating technological coefficients by the analytic hierarchy process. *Socio-Economic Planning Sciences* 13, 6 (1979), 333–336.
- [132] SAATY, T. L., VARGAS, L. G., WHITAKER, R. Addressing with brevity criticism of the analytic hierarchy process. *International Journal of the Analytic Hierarchy Process* 1, 2 (2009), 121–134.
- [133] SALO, A. A., HÄMÄLÄINEN, R. P. On the measurement of preferences in the analytic hierarchy process. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 6, 6 (1997), 309–319.
- [134] SBEITY, I., DBOUK, M., KOBEISSI, H. Combining the analytical hierarchy process and the genetic algorithm to solve the timetable problem. *arXiv preprint arXiv:1409.2650* (2014).

- [135] SCHENKERMAN, S. Avoiding rank reversal in ahp decision-support models. *European Journal of Operational Research* 74, 3 (1994), 407–419.
- [136] SCHMIDT, A. M. A. Processo de apoio à tomada de decisão abordagens: Ahp e macbeth. Dissertação de mestrado em engenharia com especialidade em engenharia de produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1995.
- [137] SCHONER, B., CHOO, E. U., WEDLEY, W. C. A comment on ‘rank disagreement: a comparison of multi-criteria methodologies’. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 6, 4 (1997), 197–200.
- [138] SCHONER, B., WEDLEY, W. C. Ambiguous criteria weights in ahp: consequences and solutions. *Decision Sciences* 20, 3 (1989), 462–475.
- [139] SCHONER, B., WEDLEY, W. C., CHOO, E. U. A unified approach to ahp with linking pins. *European Journal of Operational Research* 64, 3 (1993), 384–392.
- [140] SEKITANI, K., YAMAKI, N. A logical interpretation for the eigenvalue method in ahp. *Journal of the Operations Research Society of Japan* 42, 2 (1999), 219–232.
- [141] SELESNICK, I. Least squares with examples in signal processing. *Connexions* 4 (2013).
- [142] SHAHROODI, K., AMIN, K., SHABNAM, A., ELNAZ, S., NAJIBZADEH, M. Application of analytical hierarchy process (ahp) technique to evaluate and selecting suppliers in an effective supply chain. *Kuwait Chapter of Arabian Journal of Business and Management Review* 33, 835 (2012), 1–14.
- [143] SHARMA, S., AGRAWAL, N. Selection of a pull production control policy under different demand situations for a manufacturing system by ahp-algorithm. *Computers & Operations Research* 36, 5 (2009), 1622–1632.
- [144] SHIMIZU, T. *Decisão nas organizações: com novos capítulos sobre: decisão com múltiplos critérios e múltiplos estágios, decisão baseada em knowledge, acquisition e data mining; decisão por grupos e negociação, exercícios resolvidos e estudo de caso*. Atlas, 2006.
- [145] SHIRAISHI, S., OBATA, T., DAIGO, M. Properties of a positive reciprocal matrix and their application to ahp. *Journal of the Operations Research Society of Japan* 41, 3 (1998), 404–414.
- [146] SILVA, C. A. D. Localização de base logística de brigada: Abordagem multicritério de apoio à decisão utilizando todim-fse. Dissertação de mestrado em modelagem computacional em ciência e tecnologia, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda-RJ, 2014.
- [147] SILVA, R. M. D., BELDERRAIN, M. C. N. Considerações sobre métodos de decisão multicritério. *XI Encontro de Iniciação Científica e Pos-Graduação do ITA, São José dos Campos. Anais do XI ENCITA 1* (2005), 1–7.
- [148] SIPAHI, S., TIMOR, M. The analytic hierarchy process and analytic network process: an overview of applications. *Management Decision* 48, 5 (2010), 775–808.



- [149] STEIN, W. E., MIZZI, P. J. The harmonic consistency index for the analytic hierarchy process. *European journal of operational research* 177, 1 (2007), 488–497.
- [150] STEUER, R. E., GARDINER, L. R. Interactive multiple objective programming: concepts, current status, and future directions. In *Readings in multiple criteria decision aid*. Springer, 1990, p. 413–444.
- [151] STEUER, R. E., NA, P. Multiple criteria decision making combined with finance: A categorized bibliographic study. *European Journal of operational research* 150, 3 (2003), 496–515.
- [152] STRANG, G. *Linear Algebra and Its Application*, 3rd. 1988.
- [153] STRANG, G. The fundamental theorem of linear algebra. *The American Mathematical Monthly* 100, 9 (1993), 848–855.
- [154] SU, S. W., XIONG, W., REN, Q. L., LI, B., SUN, W. J. The application of analytic hierarchy process (ahp) in the power grid planning. Em *Advanced Materials Research* (2014), vol. 860, Trans Tech Publ, p. 2540–2543.
- [155] TARIGAN, A., RAHMAD, D., SEMBIRING, R., ISKANDAR, R. An application of the ahp in water resources management: a case study on urban drainage rehabilitation in medan city. Em *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (2018), vol. 309, IOP Publishing, p. 012096.
- [156] THOKALA, P., DUENAS, A. Multiple criteria decision analysis for health technology assessment. *Value in Health* 15, 8 (2012), 1172–1181.
- [157] TREVIZANO, W. A., FREITAS, A. L. P. Emprego do método da análise hierárquica (ahp) na seleção de processadores. *XXV Encontro Nac. de Engenharia de Produção-Porto Alegre* (2005).
- [158] TRIANTAPHYLLOU, E. Two new cases of rank reversals when the ahp and some of its additive variants are used that do not occur with the multiplicative ahp. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 10, 1 (2001), 11–25.
- [159] TRIANTAPHYLLOU, E., SÁNCHEZ, A. A sensitivity analysis approach for some deterministic multi-criteria decision-making methods. *Decision sciences* 28, 1 (1997), 151–194.
- [160] VAIDYA, O. S., KUMAR, S. Analytic hierarchy process: An overview of applications. *European Journal of operational research* 169, 1 (2006), 1–29.
- [161] VAN UDEN, E., KWIESIELEWICZ, M. Evaluating attribute significance in ahp using shannon entropy. *Proceedings of ISAHP. ISAHP* (2003).
- [162] VARGAS, L. G. Comments on barzilai and lootsma: Why the multiplicative ahp is invalid: A practical counterexample. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 6, 3 (1997), 169–170.
- [163] VARGAS, R. V., IPMA-B, P. Using the analytic hierarchy process (ahp) to select and prioritize projects in a portfolio. Em *PMI global congress* (2010), p. 1–22.

- [164] VINCKE, P. *Multicriteria decision-aid*. John Wiley & Sons, 1992.
- [165] WALLENIS, J., DYER, J. S., FISHBURN, P. C., STEUER, R. E., ZIONTS, S., DEB, K. Multiple criteria decision making, multiattribute utility theory: Recent accomplishments and what lies ahead. *Management science* 54, 7 (2008), 1336–1349.
- [166] WANG, J. Recurrent neural networks for computing pseudoinverses of rank-deficient matrices. *SIAM Journal on Scientific Computing* 18, 5 (1997), 1479–1493.
- [167] WANG, Y.-M., CHIN, K.-S. A new data envelopment analysis method for priority determination and group decision making in the analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research* 195, 1 (2009), 239–250.
- [168] WANG, Y.-M., PARKAN, C., LUO, Y. Priority estimation in the ahp through maximization of correlation coefficient. *Applied Mathematical Modelling* 31, 12 (2007), 2711–2718.
- [169] WATKINS, D. S. *Fundamentals of matrix computations*, vol. 64. John Wiley & Sons, 2004.
- [170] WEDLEY, W. Benchmark measurement: Between relative and absolute. Em *Proc. of International Symposium on Analytic Hierarchy-Process, 1996* (1996).
- [171] WEDLEY, W. C. Ahp answers to problems with known composite values. *ISAHP, Berne, Switzerland* (2001), 551–560.
- [172] WEISS, E. N., RAO, V. R. Ahp design issues for large-scale systems. *Decision Sciences* 18, 1 (1987), 43–61.
- [173] WIECEK, M. M., EHRGOTT, M., FADEL, G., FIGUEIRA, J. R. Multiple criteria decision making for engineering. *Omega: The International Journal of Management Science* 36, 3 (2008), 337–339.
- [174] WIND, Y., SAATY, T. L. Marketing applications of the analytic hierarchy process. *Management science* 26, 7 (1980), 641–658.
- [175] WOLLMANN, D., STEINER, M. T. A., VIEIRA, G. E., STEINER, P. A. Avaliação de operadoras de saúde por usuários pelo método analytic hierarchy process. *Revista de Saúde Pública* 46 (2012), 777–783.

## APÊNDICE A

```
function [X0, X1, X2, X3] = solutions(G, b)
X0 = G * b;
C = G';
D = C * G * b;
X1 = C\D;
[m,n]=size(C);
if m >= n
    X2 = (C'*C) \ (C' * C * G * b);
elseif m == n
    X2 = (C') \ ( C * G * b);
else
    Y2 = (C*C') \ (C * G * b);
    X2 = C' * Y2;
end
X3 = pinv(C) * D;
return;
```

## APÊNDICE B

```
function R = ranking(vetor)
L = length(vetor);
vetor_aux = sort(vetor, 'descend');
for i=1:L
    for j=1:L
        if vetor(i)==vetor_aux(j)
            R(i)=j;
        end
    end
end
end
return;
```

```
function [eps_trad, i, eps_eqv, j, left, right] = perturb(G, b, delta)
[m,n] = size(G);
R_ORG = ranking( G * b );
R_TRAD = R_ORG;
eps_trad = 0;
while isequal(R_ORG, R_TRAD)==1
    eps_trad = eps_trad + delta;
    for i=1:n
        b_aux = b;
        b_aux(i) = b_aux(i) * (1 + eps_trad);
        b_aux = b_aux./sum(b_aux);
        X1 = G * b_aux;
        R_TRAD = ranking( X1 );
        if isequal(R_ORG, R_TRAD)~=1;
            break
        end
    end
end
```

```
        end
    end
end
R_EQV = R_ORG;
eps_eqv = 0;
while isequal(R_ORG, R_EQV)==1
eps_eqv = eps_eqv + delta;
    for j=1:n
        b_aux = b;
        b_aux(j) = b_aux(j) * (1 + eps_eqv);
        b_aux = b_aux./sum(b_aux);
        D = G' * G * b_aux;
        if n > m
            k = cond(G * G');
            X2 = (G * G') \ (G * D);
        elseif m == n
            k = cond(G');
            X2 = G' \ D;
        else
            k = cond(G' * G);
            Y2 = (G' * G) \ D;
            X2 = G * Y2;
        end
        R_EQV = ranking( X2 );
        if isequal(R_ORG, R_EQV)~=1;
            delta_X = X2 - G * b;
            delta_D = D - G' * G * b;
            left = norm(delta_X)/norm( G * b );
            right = ( norm(delta_D)/norm( G' * G * b ) ) * k;
            break
        end
    end
end
return;
```

## APÊNDICE C

```

function [min_val_1,col_1,col_2,min_val_2,lin_1,lin_2] = angulo_min(matriz)
[m,n]=size(matriz);
for i=1:n
    for j=1:n
        if j~=i
            u = matriz(:,i);
            v = matriz(:,j);
            CosTheta = dot(u,v)/(norm(u)*norm(v));
            ThetaInDegrees = acosd(CosTheta);
            M(i,j) = ThetaInDegrees;
        else
            M(i,j) = 360;
        end
    end
end
[lin_1,idx]=min(M(:));
[col_1,col_2]=ind2sub(size(M),idx);
for i=1:m
    for j=1:m
        if j~=i
            u = matriz(i,:);
            v = matriz(j,:);
            CosTheta = dot(u,v)/(norm(u)*norm(v));
            ThetaInDegrees = acosd(CosTheta);
            N(i,j) = ThetaInDegrees;
        else
            N(i,j) = 360;
        end
    end
end

```

```
        end
    end
end
[min_val_2,idx]=min(N(:));
[lin_1,lin_2]=ind2sub(size(N),idx);
return;
```