

Universidade Federal Fluminense

CAIO DAMASCENO GONÇALVES

Análise numérica e simulação para uma  
equação hiperbólica-parabólica com fronteiras  
móveis e não linearidade do tipo  
Kirchhoff-Carrier

VOLTA REDONDA

2021

CAIO DAMASCENO GONÇALVES

Análise numérica e simulação para uma  
equação hiperbólica-parabólica com fronteiras  
móveis e não linearidade do tipo  
Kirchhoff-Carrier

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados à Engenharia e Ciência.

Orientador:

Prof. D.Sc. Jorge Ferreira

Coorientador:

Prof. D.Sc. Emerson Souza Freire

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

VOLTA REDONDA

2021

Ficha catalográfica automática - SDC/BEM  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

G635a Gonçalves, Caio Damasceno  
Análise numérica e simulação para uma equação  
hiperbólica-parabólica com fronteiras móveis e não  
linearidade do tipo Kirchhoff-Carrier / Caio Damasceno  
Gonçalves ; Jorge Ferreira, orientador ; Emerson Souza  
Freire, coorientador. Volta Redonda, 2021.  
128 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,  
Volta Redonda, 2021.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPG-MCCT.2021.m.10227713702>

1. Equação diferencial parcial não linear. 2. Análise  
numérica. 3. Método dos elementos finitos. 4. Método de  
Galerkin. 5. Produção intelectual. I. Ferreira, Jorge,  
orientador. II. Freire, Emerson Souza, coorientador. III.  
Universidade Federal Fluminense. Escola de Engenharia  
Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda. IV. Título.

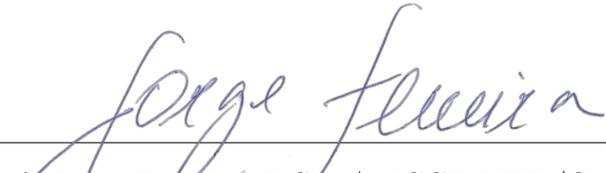
CDD -

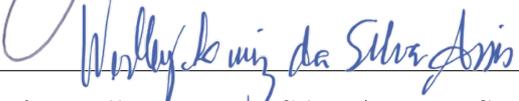
Análise numérica e simulação para uma equação hiperbólica-parabólica com fronteiras móveis e não linearidade do tipo Kirchhoff-Carrier

Caio Damasceno Gonçalves

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados à Engenharia e Ciência.

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Jorge Ferreira, D.Sc. / MCCT-UFF (Orientador)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Wesley Luiz da Silva Assis, D.Sc. / MCCT-UFF

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Andrey Dione Ferreira, D.Sc. / IFRJ-VR

Volta Redonda, 25 de novembro de 2021.

*“Dedico este trabalho à minha querida esposa Lívia Maria.”*

# Agradecimentos

Agradeço à minha esposa Lívia Maria Rodrigues Gonçalves por estar todos os dias do meu lado me ajudando de diversas formas sempre com paciência, amor, carinho e companheirismo. Houve grande dedicação sua para que eu pudesse estudar.

Agradeço à minha mãe Aparecida Damasceno por me ensinar os bons valores do diálogo, da compreensão, do trabalho sério, da dedicação e da persistência. Você e meu pai sempre me estimularam a seguir o caminho dos estudos e dos meus sonhos profissionais.

Agradeço aos professores Andrey Dione Ferreira e José Ricardo Ferreira de Almeida, os quais tive o prazer de conhecer como aluno e conviver como colega de profissão dentro do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro - campus Volta Redonda, que confiaram em mim e me agradeceram com suas cartas de recomendações.

Agradeço ao professor Jorge Ferreira, que conheci por intermédio do professor Andrey, mas desde o nosso primeiro contato foi extremamente bondoso, gentil e profissional. Seu acolhimento quanto a orientação e disponibilidade foram sempre impecáveis e, sem o mesmo, não teria as portas abertas para a realização desta dissertação.

Agradeço ao professor Emerson Souza Freire, sua coorientação com gentileza, clareza e acessibilidade foram primordiais para este trabalho.

Agradeço aos professores do MCCT com quem tive o prazer de estudar e conhecê-los, são esses: André Gusso, Cleyton Senior Stampa, Diomar César Lobão, Gustavo Benitez Alvarez, Tiago Araújo Neves.

Agradeço à secretaria do MCCT, em especial à Camila de Souza e Silva, que sempre demonstrou paciência e clareza em seus atendimentos prestados.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

# Resumo

Neste trabalho foram desenvolvidos os conceitos fundamentais para a análise numérica e simulação com fronteiras fixas dadas pela transformação do domínio de uma equação do tipo parabólico-hiperbólico com não linearidade de Kirchhoff-Carrier e fronteiras móveis

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} - \left[ 1 + M \left( t, \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad \forall (x, t) \in Q_t. \\ u(\alpha(t), t) = u(\beta(t), t) = 0, \quad \forall t \in [0, T[. \\ u(x, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1, \quad \forall x \in ]\alpha(0), \beta(0)[. \end{array} \right.$$

Portanto, elaborou-se uma fundamentação teórica sobre os elementos de grande importância que estão relacionados ao campo da Análise Funcional, chegando até os espaços de Sobolev que possibilitam a resolução de Equações Diferenciais Parciais. Em relação ao problema analítico, foram apresentados os estudos outrora consolidados, nos quais, através da aplicação do método de Faedo-Galerkin seguiram-se resultados sobre a existência e unicidade da solução global e local, assim como, sobre o seu comportamento assintótico. Posteriormente, como consequência do desenvolvimento da análise numérica do problema com domínio transformado para fronteiras fixas, foram implementados os códigos em linguagem MATLAB, através da utilização do método dos elementos finitos na variável espacial e do método  $\alpha$ -generalizado para a variável do tempo. Por fim, realizou-se três simulações computacionais e seus resultados divulgados, os quais corroboram com a eficiência prática da aplicação dos métodos supracitados sobre o referido problema.

# Abstract

This work developed the fundamental concepts for numerical analysis and simulation with fixed boundaries given by the domain transformation of a parabolic-hyperbolic equation with Kirchhoff-Carrier nonlinearity and moving boundaries

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} - \left[ 1 + M \left( t, \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad \forall (x, t) \in Q_t. \\ u(\alpha(t), t) = u(\beta(t), t) = 0, \quad \forall t \in [0, T[. \\ u(x, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1, \quad \forall x \in ]\alpha(0), \beta(0)[. \end{array} \right.$$

Therefore, a theoretical foundation was elaborated on the elements of great importance that are related to the field of Functional Analysis, coming up to the Sobolev spaces that make it possible to solve Partial Differential Equations. In relation to the analytic problem, the once consolidated studies were presented, in which, through the application of the Faedo-Galerkin method, results on the existence and uniqueness of the global and local solution were followed, as well as, on its asymptotic behavior. Later, as a consequence of the development of the numerical analysis of the problem with transformed domain for fixed boundaries, codes were implemented in MATLAB language, through the use of the finite element method for the spatial variable and the generalized- $\alpha$  method for the time variable. Finally, three computational simulations were performed and their results disclosed, which corroborate the practical efficiency of the application of the aforementioned methods on the mentioned problem.

# Palavras-chave

1. Equação diferencial parcial
2. Equação hiperbólica-parabólica
3. Não linearidade do tipo Kirchhoff-Carrier
4. Método de Galerkin
5. Método  $\alpha$ -generalizado

# Glossário

$\  \cdot \ _X$	:	Norma definida no espaço $X$
$(X, \  \cdot \ _X)$	:	Espaço normado
$X'$	:	Espaço dual de $X$
$X''$	:	Espaço bidual de $X$
$\mathbb{R}^n$	:	Espaço euclidiano real de dimensão $n$
$x$	:	É utilizado para representar $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , um ponto do $\mathbb{R}^n$
$q.t.p.$	:	Quase em todo ponto
$q.s.$	:	Quase sempre
$L^2(\Omega)$	:	Espaço de Lebesgue das funções quadrado integráveis
$L^p(\Omega)$	:	Espaço de Lebesgue das funções $p$ integráveis
$L^\infty(\Omega)$	:	Espaço de Lebesgue das funções essencialmente limitadas
$L^p_{loc}(\Omega)$	:	Espaço de Lebesgue das funções localmente integráveis
$C_0^\infty(\Omega)$	:	Espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contido em $\Omega$
$supp(\varphi)$	:	Conjunto de pontos do domínio de $\varphi$ , em que esta não se anula
$\mathcal{D}(\Omega)$	:	Espaço topológico formado $C_0^\infty(\Omega)$ munido de norma
$\mathcal{D}'(\Omega)$	:	Espaço das distribuições sobre $\Omega$
$W^{k,p}(\Omega)$	:	Espaços de Sobolev
$W_0^{k,p}(\Omega)$	:	Fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ no espaço $W^{k,p}(\Omega)$
$W^{-k,p'}(\Omega)$	:	Espaços dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2 Equações Diferenciais Parciais</b>	<b>17</b>
<b>3 Tópicos em Análise Funcional</b>	<b>23</b>
3.1 Espaços métricos e espaços topológicos . . . . .	23
3.1.1 Convergência, sequência de Cauchy, completude . . . . .	24
3.1.2 Espaço métrico completo . . . . .	25
3.2 Espaços vetoriais . . . . .	26
3.3 Espaços normados . . . . .	29
3.4 Compacidade e dimensão finita . . . . .	31
3.5 Operadores lineares . . . . .	32
3.5.1 Operadores lineares contínuos e limitados . . . . .	32
3.5.2 Funcionais lineares . . . . .	34
3.5.3 Espaço normado de operadores e espaço dual . . . . .	35
3.6 Produto interno e espaços de Hilbert . . . . .	37
3.7 Espaços reflexivos e espaços separáveis . . . . .	39
3.8 Convergência forte, fraca e fraca estrela . . . . .	41
3.9 Espaços de Sobolev . . . . .	44
3.9.1 Espaços relacionados com tempo . . . . .	51
3.10 Outros resultados importantes . . . . .	53

---

<b>4</b>	<b>Equação hiperbólica-parabólica com fronteiras móveis e não linearidade do tipo Kirchhoff-Carrier</b>	<b>55</b>
4.1	Transformando o problema para um domínio fixo . . . . .	56
4.2	Existência da solução local . . . . .	60
4.3	Existência da solução global . . . . .	70
4.3.1	Estimativas <i>a priori</i> . . . . .	70
4.4	Comportamento assintótico . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Análise numérica</b>	<b>80</b>
5.1	Formulação forte . . . . .	81
5.1.1	Formulação fraca . . . . .	82
5.1.2	Método de Galerkin . . . . .	83
5.1.2.1	Problema aproximado . . . . .	84
5.2	Função de interpolação e malha . . . . .	85
5.2.1	Aproximação linear . . . . .	86
5.2.2	Malha e elemento . . . . .	88
5.2.2.1	Matrizes e o vetor do problema . . . . .	90
5.2.2.2	Abordagem local e global das matrizes e do vetor . . . . .	92
5.3	Quadratura de Gauss . . . . .	97
5.3.1	Fórmula de Gauss-Legendre . . . . .	97
5.4	Sistema não linear . . . . .	99
5.4.1	Método $\alpha$ -generalizado . . . . .	100
5.5	Implementação . . . . .	102
5.6	Simulação computacional . . . . .	105
5.6.1	Simulação 1 . . . . .	107
5.6.2	Simulação 2 . . . . .	109
5.6.3	Simulação 3 . . . . .	111

---

<b>6 Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>113</b>
6.1 Conclusões . . . . .	113
6.2 Trabalhos Futuros . . . . .	114
<b>Referências</b>	<b>115</b>
<b>Apêndice A – Códigos computacionais</b>	<b>118</b>

# Lista de Figuras

4.1	Diagrama das relações $h$ e $h^{-1}$ . . . . .	57
4.2	Domínio móvel original e domínio fixo, respectivamente. . . . .	57
4.3	Diagrama das relações $u(x, t)$ e $v(y, t)$ . . . . .	57
4.4	Gráfico genérico com as projeções do domínio móvel. . . . .	59
5.1	Exemplo de um elemento finito (azul) associado à $v(y)$ . . . . .	87
5.2	Exemplo de malha e elementos. . . . .	88
5.3	Representação geométrica de $\varphi_i(y)$ . . . . .	89
5.4	Representação geométrica de $\varphi'_i(y)$ . . . . .	89
5.5	Exemplo de compartilhamento dos nós entre dois elementos. . . . .	92
5.6	Representação geométrica das funções de interpolação por elemento. . . . .	93
5.7	Soluções analíticas $u(x, t)$ e $v(y, t)$ , respectivamente. . . . .	106
5.8	Soluções $v_h(y, t)$ e $v(y, t)$ , para $N = 8$ e $\delta = 0.001$ . . . . .	107
5.9	Erro para $N = 8$ e $\delta = 0.001$ . . . . .	107
5.10	$t = 0.001$ . . . . .	108
5.11	$t = 0.21$ . . . . .	108
5.12	$t = 0.45$ . . . . .	108
5.13	$t = 0.55$ . . . . .	108
5.14	$t = 0.79$ . . . . .	108
5.15	$t = 0.999$ . . . . .	108
5.16	Soluções $v_h(y, t)$ e $v(y, t)$ , para $N = 16$ e $\delta = 0.0005$ . . . . .	109
5.17	Erro para $N = 16$ e $\delta = 0.0005$ . . . . .	109
5.18	$t = 0.0005$ . . . . .	110

---

5.19 $t = 0.325$ . . . . .	110
5.20 $t = 0.45$ . . . . .	110
5.21 $t = 0.55$ . . . . .	110
5.22 $t = 0.675$ . . . . .	110
5.23 $t = 0.9995$ . . . . .	110
5.24 Soluções $v_h(y, t)$ e $v(y, t)$ , para $N = 64$ e $\delta = 0.000125$ . . . . .	111
5.25 Erro para $N = 64$ e $\delta = 0.000125$ . . . . .	111
5.26 $t = 0.000125$ . . . . .	112
5.27 $t = 0.3125$ . . . . .	112
5.28 $t = 0.4375$ . . . . .	112
5.29 $t = 0.5625$ . . . . .	112
5.30 $t = 0.6875$ . . . . .	112
5.31 $t = 0.999875$ . . . . .	112

# Capítulo 1

## Introdução

O contexto do presente trabalho surgiu, originalmente, durante as décadas de 1970 e 1980, posteriormente, na década de 1990 e início dos anos 2000, foram desenvolvidas diversas pesquisas sobre problemas envolvendo equações do tipo parabólico-hiperbólico, destacando-se a princípio os trabalhos [13] e [14] de autoria de Ferreira.

No trabalho [13] foi estudada a existência de soluções fracas de equações não lineares em domínios não cilíndricos

$$\begin{cases} K_1(x)u'' + K_2(x)u' + A(t)u + H(u) = f & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{em } \Sigma, \\ u(0) = u_0, \quad K_1(x)u'(0) = \sqrt{K_1(x)}u_1(x). \end{cases}$$

Em [14], foram estudadas a existência e unicidade da solução fraca de equações semi-lineares em domínios cilíndricos

$$\begin{cases} (K_1(x, t)u')' + K_2(x, t)u' + A(t)u + F(u) = f & \text{em } Q, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u'(x, 0) = u_1(x) & \text{com } x \in \Omega. \end{cases}$$

Além dos citados anteriormente, Ferreira também desenvolveu trabalhos em parceria com diversos autores. Ferreira e Lar'kin em [15], desenvolveram estudos sobre a existência e unicidade da solução global para domínios não cilíndricos para a equação

$$\begin{cases} K_1(x, t)u_{tt} + K_2(x, t)u_t - \Delta u + f_1(t)|u|^\rho u = f(x, t) & \text{em } \widehat{Q}, \\ u = 0 & \text{em } \widehat{\Sigma}_t \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega_0. \end{cases}$$

No trabalho [2], Ferreira, Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Benabidallah desenvolveram estudos sobre existência, unicidade e comportamento assintótico para o problema do tipo misto com o modelo de não linearidade de Kirchhoff

$$(\rho_1 u_t)_t + \rho_2 u_t - M \left( t, \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u_x|^2 dx \right) u_{xx} = f \quad \text{em } \hat{Q}$$

onde  $\hat{Q}$  é um domínio não cilíndrico em  $\mathbb{R}^2$  com fronteiras móveis.

Não menos importantes também destacam-se os trabalhos Carrier [8], Lar'kin [23], Maciel [26], Menzala em [28] e [29], Bisognin [4], Attigui [1] que estruturam e/ou compõem a literatura específica, colaborando de forma direta ou indireta com o desenvolvimento deste trabalho.

As aplicações de equações com fronteiras móveis estão presentes em diversos problemas que envolvem fenômenos físicos de difusão, por exemplo, na transferência de calor onde ocorre uma transição de fase; no transporte de umidade, como grãos ou polímeros inchados; e em problemas de meios porosos deformáveis em que o deslocamento sólido é governado por difusão. Em relação às equações de Kirchhoff, estas podem ser usadas como modelos de vibração de cordas que levam em consideração o crescimento da tensão devido à extensão das cordas, como visto na literatura em [1], [33], [32] e [24].

Assim, chega-se que no presente trabalho foi estudado a equação do tipo parabólico-hiperbólico com não linearidade de Kirchhoff-Carrier e fronteiras móveis desenvolvido originalmente em [3] e dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} - \left[ 1 + M \left( t, \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & \forall (x, t) \in Q_t. \\ u(\alpha(t), t) = u(\beta(t), t) = 0, & \forall t \in [0, T]. \\ u(x, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1, & \forall x \in ]\alpha(0), \beta(0)[. \end{cases}$$

Através desses estudos, observou-se uma dificuldade de encontrar desenvolvimento da análise numérica aplicada ao problema e dado explicitamente em alguma linguagem de programação. Motivado por esta observação, estabeleceu-se o objetivo geral e os objetivos específicos, elencados a seguir.

Objetivo geral: simular o problema com fronteiras fixas utilizando o MATLAB através do método dos elementos finitos, discretizando o domínio espacial pelo método de Galerkin e o domínio temporal pelo método  $\alpha$ -generalizado.

Objetivos específicos:

1. Expor as notações matemáticas sobre EDP's e suas classificações.
2. Descrever os principais resultados relacionados ao campo da análise funcional que são fundamentais no estudo do problema, expondo brevemente os conceitos envolvidos com os espaços de Sobolev.
3. Apresentar o estudo analítico outrora consolidado sobre o problema.
4. Desenvolver e apresentar a análise numérica do problema com domínio transformado para fronteiras fixas.
5. Criar um código computacional em linguagem MATLAB para aplicar um exemplo do problema num domínio fixo.
6. Simular computacionalmente utilizando o software MATLAB o exemplo e divulgar os resultados.

Para alcançar todos os objetivos propostos a estruturação do trabalho foi organizada da seguinte maneira. No capítulo 2, apresentou-se a contextualização desenvolvida sobre as equações diferenciais parciais e suas classificações, utilizando como referência bibliográfica Evans [11], Farlow [12], Hillen [18].

No capítulo 3, percorreu-se os conceitos da análise funcional dados por Kreyszig [22], embora, observadas as equivalências de definições, também utilizou-se autores como Boldrini et al. [5], Oliveira [10] e Olver e Shakiban [31] com o objetivo de adotar uma notação clara e bem definida. Além disso, fundamentado por Brezis [6], Evans [11] e Lions e Magenes [21], são apresentados os conceitos sobre os espaços de Sobolev.

No capítulo 4, discorreu-se sobre o estudo analítico do problema consolidado originalmente por Benabidallah e Ferreira [3], onde estão presentes as demonstrações da existência e unicidade das soluções locais e globais, assim como, do comportamento assintótico.

No capítulo 5, apresentou-se o desenvolvimento da análise numérica sobre o problema com fronteiras fixas, apoiado na linha de raciocínio de autores como Zienkiewicz *et al.* [30], Hughes [19], Zhilin *et al.* [34] e Rincon e Liu [25].

Por fim, no capítulo 6 são desenvolvidas as considerações finais e algumas intenções sobre trabalhos futuros e, em seguida, as referências e os apêndices com os códigos computacionais em linguagem MATLAB.

# Capítulo 2

## Equações Diferenciais Parciais

Para fundamentar o presente capítulo sobre Equações Diferenciais Parciais, foram utilizadas os conceitos definidos pelos seguintes autores: Evans [11], Farlow [12], Hillen [18] e Iorio [20].

Inicialmente, de acordo com Evans [11], torna-se necessário introduzir suas notações para funções e derivadas.

Seja  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ , escreve-se

$$u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

onde  $x \in U$  e  $U \subset \mathbb{R}^n$ . As derivadas parciais da função  $u$  são apresentadas de acordo com as seguintes notações:

(i)  $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}$ , desde que esse limite exista.

(ii) Normalmente, escreve-se  $u_{x_i}$  para descrever  $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ .

(iii) Analogamente,  $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j}$ ,  $\frac{\partial^3 u(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = u_{x_i x_j x_k}$ , etc.

(iv) Notação multi-índices:

(a) Um vetor da forma  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , onde cada componente  $\alpha_i$  é um número inteiro não negativo, é chamado um multi-índice de ordem

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

(b) Dado um  $\alpha$  multi-índice, define-se

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} u \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$$

(c) Se  $k$  é um inteiro não negativo,

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) \mid |\alpha| = k\},$$

o conjunto de todas as derivadas parciais de ordem  $k$ . Atribuindo alguma ordenação às várias derivadas parciais, pode-se também considerar  $D^k u(x)$  como um ponto em  $\mathbb{R}^{n^k}$ .

$$(d) |D^k u| = \left( \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(e) *Casos especiais:* se  $k = 1$ , considera-se os elementos de  $Du$  dispostos como num vetor:

$$Du = (u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_n}) = \text{vetor gradiente.}$$

se  $k = 2$ , considere agora os elementos de  $D^2 u$  dispostos em uma matriz:

$$D^2 u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{n \times n} = \text{matriz Hessiano}$$

$$(v) \Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = \text{tr}(D^2 u) = \text{Laplaciano de } u.$$

Em um primeiro olhar a notação utilizada por Evans [11] pode ser julgada como complexa e pesada para o leitor. Entretanto, esta notação engloba de maneira sintetizada as componentes de uma Equação Diferencial Parcial.

**Definição 2.1.** Uma EDP é uma equação que envolve as derivadas parciais de uma função desconhecida  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 2$ . Logo, uma expressão da forma

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \cdots, Du(x), u(x), x) = 0 \quad (x \in U) \quad (2.1)$$

é chamada Equação Diferencial Parcial de  $k$ -ésima ordem, onde

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

é dada, e

$$u : U \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma função desconhecida.

É intuitivo notar que a solução para uma EDP é a função  $u(x)$ , onde  $x \in U$  e  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Porém, para buscar maior precisão quanto a definição de uma solução, no que diz respeito ao escopo do presente capítulo, assume-se o conceito de *solução clássica*. Mais precisamente, é dita *solução clássica* de uma EDP de ordem  $k$  em um domínio  $U \subset \mathbb{R}^n$ , uma função  $u \in C^k(U)$  que satisfaz a equação em todos os pontos de  $U$ .

As EDP's possuem classificações que possibilitam a visualização de suas variadas formas de apresentação. Estas classificações ajudam na identificação de singularidades de uma EDP, o que pode tornar mais claro o caminho para buscar uma resolução de um determinado problema. De acordo com a literatura específica, destacam-se três classificações que caracterizam EDP's de forma geral, estas são:

1. **Ordem da EDP.** A ordem de uma EDP é definida como a maior ordem entre as derivadas parciais. Note que, pela Definição 2.1, a ordem da EDP é dada pelo  $k$ .
2. **Número de variáveis.** O número de variáveis é determinado pela quantidade de variáveis independentes em uma EDP. Aqui, observa-se que  $n$  determina esse número, onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
3. **Linearidade.** As EDP's podem ser lineares ou não lineares. Nas lineares, a variável dependente  $u$  e todas as suas derivadas aparecem de uma forma linear, o que significa que estas não são multiplicadas entre si ou elevadas a expoentes maiores do que um.

Entretanto, Evans [11] define a linearidade ou não linearidade de uma EDP de maneira mais elaborada. Além da definição para uma EDP linear, subdivide-se a não linearidade em três categorias, como é mostrado na definição a seguir.

**Definição 2.2 (Linearidade).**

- (i) A EDP (2.1) é chamada *linear* se tiver a forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

para determinadas funções  $a_\alpha$  ( $|\alpha| \leq k$ ),  $f(x)$ . Uma EDP linear é dita *homogênea* se  $f \equiv 0$ .

(ii) A EDP (2.1) é chamada *semilinear* se tiver a forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0$$

(iii) A EDP (2.1) é chamada *quasilinear* se tiver a forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0$$

(iv) A EDP (2.1) é chamada *totalmente não linear* se depender, de forma não linear, das derivadas de ordem mais elevada.

Em outras palavras, uma EDP é *linear* se suas derivadas são multiplicadas por funções que dependem apenas das variáveis independentes. Em contrapartida, uma EDP *não linear*, pode ser: *semilinear*, *quasilinear* e *totalmente não linear*. Nestas destacam-se as seguintes características: na *semilinear* as funções que dependem das derivadas de menor ordem, das funções definidas nas variáveis independentes e das variáveis independentes (isto é, semelhantes à  $a_0(\cdot)$ ), não aparecem multiplicando as derivadas de maior ordem; na *quasilinear* as derivadas de maior grau são multiplicadas por funções semelhantes à  $a_0(\cdot)$ ; por fim, a *totalmente não linear* tem derivadas de maior ordem multiplicando-se entre si.

De acordo com Iorio [20] existe a classificação de uma EDP quanto ao seu tipo. Para tanto, limita-se as EDP's para que possuam duas variáveis independentes ( $n = 2$ ) e sejam de segunda ordem ( $k = 2$ ). Assim, escreve-se uma EDP *semilinear*, de maneira usual, da seguinte forma:

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (2.2)$$

onde  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$  e  $c(x, y)$  são funções reais.

Além disso, segundo Iorio [20], tem-se que o sinal do discriminante  $b^2 - 4ac$  é invariável sobre a mudança de variáveis locais. Sendo assim, supõe-se que  $u$  seja uma solução clássica para (2.2) em um domínio  $U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in U$ , e tome

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (2.3)$$

funções da classe  $C^2$  definidas na vizinhança de  $(x_0, y_0)$  de tal forma que seu Jacobiano

$$J(\varphi, \psi) = \varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x \quad (2.4)$$

é diferente de zero em  $(x_0, y_0)$ . Pela continuidade,  $J(\varphi, \psi)$  é diferente de zero em uma

vizinhança de  $(x_0, y_0)$  e assim, pelo Teorema da Função Inversa, o sistema (2.3) pode ser resolvido para  $x$  e  $y$  em uma vizinhança de  $(x_0, y_0)$ , isto é

$$x = \tilde{\varphi}(\xi, \eta), \quad y = \tilde{\psi}(\xi, \eta),$$

onde  $\tilde{\varphi}$  e  $\tilde{\psi}$  são da classe  $C^2$  em uma vizinhança de  $(\xi_0, \eta_0) = (\tilde{\varphi}(x_0, y_0), \tilde{\psi}(x_0, y_0))$ . Tomando  $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ , segue que  $v$  é da classe  $C^2$  em uma vizinhança  $V$  de  $(\xi_0, \eta_0)$  e, pela regra da cadeia,  $v$  satisfaz a EDP da forma

$$A(\xi, \eta) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2B(\xi, \eta) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + C(\xi, \eta) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = g \left( \xi, \eta, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \quad \text{em } V, \quad (2.5)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2, \\ B &= a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + c\varphi_y\psi_y, \\ C &= a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Observando-se que a equação (2.5) é uma EDP semilinear de segunda ordem como (2.2). Um cálculo direto mostra que

$$B^2 - AC = (b^2 - ac) J(\varphi, \psi)^2.$$

Desde que  $J(\varphi, \psi) \neq 0$  em uma vizinhança de  $(x_0, y_0)$ , tem-se que  $v$  satisfaz (2.5) localmente e que o discriminante de (2.5) tem o mesmo sinal que o discriminante de (2.2). Este fato leva a seguinte definição.

**Definição 2.3 (Classificação quanto ao tipo).** A equação (2.2) é

1. **elíptica** em  $(x_0, y_0)$  se  $b^2(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) < 0$ ,
2. **parabólica** em  $(x_0, y_0)$  se  $b^2(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) = 0$ ,
3. **hiperbólica** em  $(x_0, y_0)$  se  $b^2(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) > 0$ .

Portanto, a equação é dita *elíptica* em um subconjunto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  se é elíptica em todos os pontos pertencentes a  $U$ ; é dita *parabólica* em um subconjunto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  se é parabólica em todos os pontos pertencentes a  $U$ ; e, é dita *hiperbólica* em um subconjunto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  se é hiperbólica em todos os pontos pertencentes a  $U$ . Caso a equação sofra mudanças de tipo em  $U$ , diz-se que esta é do *tipo misto* em  $U$ .

Embora definido anteriormente o conceito de solução clássica, acrescenta-se um detalhe notável no que diz respeito à solução de uma Equação Diferencial Parcial. O conceito do problema *bem-posto* no sentido de Hadamard.

**Definição 2.4 (Problema bem-posto).** Diz-se que um determinado problema para uma EDP é *bem-posto* se

- (a) o problema de fato tem solução;
- (b) a solução é única;
- (c) a solução depende continuamente das informações dadas no problema.

São necessárias condições adicionais para garantir a existência e unicidade da solução. Essas condições são as informações que estão disponíveis sobre valores da função e suas derivadas em pontos de extremidade da região na qual a EDP está definida  $U \subset \mathbb{R}^n$ , que são chamadas *condições de contorno*. Denotando a fronteira de  $U \subset \mathbb{R}^n$  como  $\partial U$ .

Em geral, as soluções da EDP's não são obtidas através de fórmulas exatas e, além disso, ainda existem outros fatores dificultantes, como: a ordem da EDP, a não linearidade, a complexidade de seu domínio e até mesmo sua notação. Entretanto, através dos conceitos definidos neste capítulo, buscou-se a organização e classificação para o esclarecimento sobre diversas possibilidades de apresentação de uma equação diferencial. E, portanto, contemplando o primeiro objetivo desta dissertação.

# Capítulo 3

## Tópicos em Análise Funcional

O objetivo deste capítulo é apresentar uma contextualização de conceitos fundamentais para este trabalho que pertencem ao campo da Análise Funcional. Para tanto, foram utilizadas as seguintes referências bibliográficas Kreyszig: [22], Brezis [6], Oliveira [10], Boldrini et al. [5], Olver e Shakiban [31].

Portanto, limitou-se na apresentação de resultados como definições, teoremas, corolários, lemas e proposições. Embora, foram omitidas diversas de suas demonstrações, o que sobrecarregaria a leitura e, conseqüentemente, fugiria do escopo do presente trabalho. Sendo assim, para mais detalhes, aconselha-se uma análise nas referências supracitadas.

### 3.1 Espaços métricos e espaços topológicos

**Definição 3.1 (Espaços métricos).** Um espaço métrico é um par  $(X, d)$ , onde  $X$  é um conjunto e  $d$  é a métrica sobre  $X$  ou chamada de função distância sobre  $X$ , isto é, uma função definida<sup>1</sup> sobre  $X \times X$  tal que para todo  $x, y, z \in X$ , tem-se:

(M1)  $d$  é um valor real, finito e não negativo.

(M2)  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ .

(M3)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Simétrica).

(M4)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (Desigualdade triangular).

---

<sup>1</sup>O símbolo  $\times$  denota o produto cartesiano entre dois conjuntos  $A$  e  $B$ , sendo  $A \times B$  o conjunto de todos pares ordenados  $(a, b)$ , onde  $a \in A$  e  $b \in B$ .

As propriedades acima são conhecidas como axiomas do espaço métrico. Nesse contexto, são adotados usualmente termos relacionados aos espaços métricos, são eles: o  $X$  para descrever de forma implícita o conjunto  $(X, d)$ ; *pontos* para denominar os elementos de  $X$ ;  $d(x, y)$  o número não negativo chamado *distância* de  $x$  para  $y$  fixados.

**Definição 3.2 (Topologia para  $X$ ).** Uma topologia para o conjunto  $X$  é uma coleção de todos subconjuntos abertos de  $X$ , denotada por  $\mathcal{T}$ , que tem as seguintes propriedades:

(T1)  $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$ .

(T2) A união de quaisquer membros de  $\mathcal{T}$  é um membro de  $\mathcal{T}$ .

(T3) A interseção finita de vários membros de  $\mathcal{T}$  é um membro de  $\mathcal{T}$ .

Em conformidade com as propriedades acima, chega-se:

**Definição 3.3 (Espaço topológico).** É dito um *espaço topológico* o par  $(X, \mathcal{T})$ , onde  $X$  é um conjunto e  $\mathcal{T}$  é uma coleção de subconjuntos de  $X$ , tal que  $\mathcal{T}$  seja uma topologia para  $X$ .

A partir desta definição, tem-se: *um espaço métrico é um espaço topológico*. Outra característica dos conjuntos abertos é a conexão com mapeamentos contínuos, generalizando a continuidade conhecida do cálculo.

### 3.1.1 Convergência, sequência de Cauchy, completude

Visto que um espaço métrico  $X = (X, d)$  é um espaço topológico, nota-se que o mesmo possui características que possibilitam considerar sequências  $(x_n)$  de elementos de  $X$ . E, utilizando a métrica  $d$ , pode-se definir os conceitos de convergência de forma análoga a do cálculo.

**Definição 3.4 (Convergência de sequências, limites).** Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço métrico  $X = (X, d)$  é dita *convergente* se existir um  $x \in X$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon)$$

onde  $x$  é chamado *limite* de  $x_n$ , denotado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{ou, simplesmente,} \quad x_n \longrightarrow x.$$

Diz-se que  $(x_n)$  *converge* para  $x$  ou tem *limite*  $x$ . Caso  $(x_n)$  não seja convergente, é dita *divergente*.

**Definição 3.5 (Sequência de Cauchy, completude).** Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço métrico  $X = (X, d)$  é dita uma *sequência de Cauchy* se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  tal que para todo  $m, n > n_0$  implica  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ . Isto é,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid m > n_0 \text{ e } n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

O espaço métrico  $X$  é dito *completo* se toda sequência de Cauchy em  $X$  converge.

**Teorema 3.1 (Sequência convergente).** Toda sequência convergente em um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.

*Demonstração.* Se  $x_n \rightarrow x$ , então para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  tal que

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Então, pela desigualdade triangular, obtém-se para todo  $m, n > n_0$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por definição,  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy.

□

### 3.1.2 Espaço métrico completo

Neste momento, em relação aos conceitos que permitem ampliar um espaço métrico no sentido da busca por sua completude, tem-se a seguinte definição:

**Definição 3.6 (Mapeamento isométrico, espaço isométrico).** Sejam  $X = (X, d)$  e  $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{d})$  espaços métricos. Então:

- (a) Um mapeamento  $T$  de  $X$  para  $\tilde{X}$  é dita *isométrica* ou uma *isometria*, se  $T$  preserva distâncias, isto é, se para todo  $x, y \in X$ ,

$$\tilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y),$$

onde  $Tx$  e  $Ty$  são imagens de  $x$  e  $y$ , respectivamente.

- (b) O espaço  $X$  é dito *isométrico* com o espaço  $\tilde{X}$  se existe uma isometria bijetiva de  $X$  para  $\tilde{X}$ . Os espaços  $X$  e  $\tilde{X}$  são chamados *espaços isométricos*.

Logo, de acordo com Kreyszig [22], dois espaços isométricos podem ser diferenciados no máximo pela natureza de seus pontos, embora sejam indistinguíveis do ponto de vista da métrica. Com isso, em estudos em que a natureza dos pontos não é importante, pode-se considerar os dois espaços como idênticos, isto é, como duas cópias do mesmo espaço abstrato. E, com sua utilização, torna-se possível descrever e demonstrar o teorema que garante que qualquer espaço métrico pode ser completado.

**Teorema 3.2 (Completamento de espaços métricos).** Se  $X = (X, d)$  é um espaço métrico, então ele é isométrico a um subconjunto denso de um espaço métrico completo  $\widehat{X} = (\widehat{X}, \widehat{d})$ ; tal  $\widehat{X}$  é chamado *completamento* de  $X$ . Além disso, quaisquer dois completamentos de  $X$  são isométricos.

## 3.2 Espaços vetoriais

Nessa seção, faz-se um resumo sobre espaços vetoriais e suas propriedades, com objetivo de revisar esses conceitos que são utilizados no desenvolvimento do presente trabalho.

**Definição 3.7 (Espaço vetorial).** Um *espaço vetorial* ou *espaço linear* sobre um corpo  $\mathbb{K}$  é um conjunto não vazio  $X$  de elementos  $x, y, \dots$ , chamados *vetores*, junto com duas operações algébricas. Essas operações são chamadas *adição vetorial*  $X \times X \xrightarrow{+} X$  e *multiplicação de vetores por escalares*  $\mathbb{K} \times X \xrightarrow{*} X$ , isto é, elementos de  $\mathbb{K}$ .

Adição vetorial associa todo par ordenado  $(x, y)$  de vetores com um vetor  $x + y$ , chamada de *soma* de  $x$  e  $y$ , de maneira que as seguintes propriedades se mantêm. Adição vetorial é *comutativa* e *associativa*, isto é, para todo vetor, tem-se

$$(V1) \quad x + y = y + x \text{ (comutativa)}$$

$$(V2) \quad x + (y + z) = (x + y) + z \text{ (associativa).}$$

Além disso, existe um vetor  $0$ , chamado de *vetor zero*, e para todo vetor  $x$  existe um vetor  $-x$ , em outras palavras,

$$(V3) \quad \exists 0 \in X \text{ tal que } x + 0 = x. \text{ (0 é o vetor nulo)}$$

$$(V4) \quad \exists -x \in X \text{ tal que } x + (-x) = 0.$$

Multiplicação por escalares associa a cada vetor  $x$  e escalar  $\alpha$  um vetor  $\alpha x = x\alpha$ , chamado *produto* de  $\alpha$  e  $x$ , de tal forma que para todos os vetores  $x, y$  e escalares  $\alpha, \beta$  tem-se

$$(V5) \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$(V6) \quad 1x = x$$

e as leis da distributividade

$$(V7) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(V8) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

Satisfazendo (V1) até (V8), diz-se que  $X$  é um espaço vetorial. Em relação ao corpo  $\mathbb{K}$ , denota-se como *espaço vetorial real*, caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ; e, *espaço vetorial complexo*, caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Como  $X$  é um conjunto faz sentido levar em consideração seus subconjuntos, o que leva a definição a seguir.

**Definição 3.8 (Subespaço vetorial).** Dado um espaço vetorial  $X$ , um subconjunto  $Y$ , não vazio, é denotado *subespaço vetorial* de  $X$  se:

$$(S1) \quad \text{Para quaisquer } y_1, y_2 \in Y, \text{ tem-se } y_1 + y_2 \in Y.$$

$$(S2) \quad \text{Para quaisquer } \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } y_1 \in Y, \text{ tem-se } \alpha y_1 \in Y.$$

Algumas vezes é conveniente trabalhar combinando as duas condições acima. Portanto, para provar que  $Y \subset X$  é um subespaço vetorial, é suficiente que  $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$ , para todo  $y_1, y_2 \in Y$  e todo escalar  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Destacando que  $Y$  é ele próprio um espaço vetorial com suas duas operações induzidas a partir de  $X$ .

Existem casos especiais de subespaço de  $X$ . Um deles é o *subespaço impróprio*  $Y = X$ , sendo qualquer outro subespaço  $Y$  de  $X$ , com  $Y \neq \{0\}$ , chamado de *subespaço próprio*. Outro subespaço especial de  $X$  é  $Y = \{0\}$ , chamado de *subespaço trivial*.

Uma característica importante de um espaço vetorial é a construção de novos vetores a partir de vetores dados, que é definida a seguir.

**Definição 3.9 (Combinação linear).** Sejam  $X$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ . Então, o vetor

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

é um elemento de  $X$  denotado *combinação linear* de  $x_1, \dots, x_n$ .

Seja qualquer subconjunto não vazio  $M$  de um espaço vetorial  $X$ , considerando  $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ . O conjunto  $S$  de todos os vetores de  $X$  que são combinações lineares de  $M$  é um subespaço vetorial de  $X$ , trivialmente verificável. Representado em símbolos por

$$S = \{x \in X \mid x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}.$$

O subespaço  $S$  é dito *gerado* pelos vetores  $x_1, \dots, x_n$ , ou gerado pelo conjunto  $M$ , representado por

$$S = [x_1, \dots, x_n].$$

Os vetores  $x_1, \dots, x_n$  são chamados *geradores* do subespaço  $S$ , enquanto  $M$  é o *conjunto gerador* de  $S$ .

Visto que o conjunto de vetores geram subespaços vetoriais e que vetores podem ser obtidos como combinação linear de alguns vetores, torna-se necessário determinar se os elementos do conjunto gerador são de alguma forma combinações de seus próprios vetores. Para isso, tem-se o seguinte conceito.

**Definição 3.10 (Independência linear, dependência linear).** Sejam  $X$  um espaço vetorial e  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ . Diz-se que o conjunto  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é *linearmente independente* (LI), se a equação

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

implica que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ . No caso em que exista algum  $\alpha_i \neq 0$ , diz-se que  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é *linearmente dependente* (LD).

A definição acima estabelece o norte para determinar o conceito de dimensão de um espaço vetorial e, conseqüentemente, o conceito de base.

**Definição 3.11 (Dimensão finita, dimensão infinita).** Diz-se que espaço vetorial  $X$  é de *dimensão finita* se existe um inteiro positivo  $n$  tal que  $X$  contém um conjunto linearmente independente de  $n$  vetores, enquanto que qualquer conjunto de  $n + 1$  ou mais vetores de  $X$  é linearmente dependente. Escreve-se  $n = \dim X$ , onde  $n$  é dita a *dimensão*

de  $X$ . Por definição,  $X = \{0\}$  tem dimensão finita e  $\dim X = 0$ . Se  $X$  não tem dimensão finita, então é dito de *dimensão infinita*.

Sendo  $\dim X = n$ , existe uma  $n$ -upla de vetores linearmente independentes de  $X$  que é chamada *base* para  $X$ . Em geral, se  $X$  é um espaço vetorial, de dimensão finita ou infinita, e  $B$  é um subconjunto linearmente independente de  $X$  o qual gera  $X$ , então  $B$  é chamada de uma *base* para  $X$ . Portanto, se  $B$  é uma base para  $X$ , logo todo vetor  $x \in X$ , com  $x \neq 0$ , tem representação única como uma combinação linear de elementos de  $B$  com escalares diferentes de zero como coeficientes. Assim, diz-se que todo espaço vetorial  $X \neq \{0\}$  tem uma base.

### 3.3 Espaços normados

Para relacionar propriedades algébricas com propriedades geométricas em um espaço vetorial  $X$ , define-se métrica de uma maneira diferente, que é explicada em seguida. No primeiro momento, utiliza-se o seguinte conceito:

**Definição 3.12 (Norma).** Seja  $X$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Chama-se *norma* de  $X$  uma aplicação  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  que, para todo  $x, y \in X$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ , satisfaça:

$$\text{(N1)} \quad \|x\| \geq 0 \text{ e } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (comprimento positivo).}$$

$$\text{(N2)} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \text{ (dilatação).}$$

$$\text{(N3)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (desigualdade triangular).}$$

Observa-se que a norma utiliza as operações algébricas do espaço vetorial  $X$ . Logo, é construído o conceito descrito a seguir.

**Definição 3.13 (Espaço normado).** Sejam  $X$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e  $\|\cdot\|$  uma norma de  $X$ . O par  $(X, \|\cdot\|)$  é chamado *espaço normado*.

Sendo possível a definição da métrica através da utilização da norma, resultado que é garantido e demonstrado pela proposição a seguir.

**Proposição 3.1 (Todo espaço normado é um espaço métrico).** Seja  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço normado. Mostre que  $d(x, y) = \|x - y\|$  define uma métrica em  $X$ .

*Demonstração.* Sejam  $X$  um espaço vetorial,  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço normado com  $d(x, y) = \|x - y\|$ , e  $x, y, z \in X$ . Por (N1),  $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ , que mostra (M1). Tomando  $d(x, y) = \|x - y\| = 0$ , por (N1), tem-se que  $x - y = 0$  e, conseqüentemente,  $x = y$ . De maneira recíproca, tome  $x = y$ , logo  $x - y = 0$  e, novamente por (N1),  $d(x, y) = \|x - y\| = 0$ . Mostrando (M2). Seja  $d(x, y) = \|x - y\|$ , com isso chega-se a  $\|x - y\| = \|(-1) \cdot (y - x)\|$ . Por (N2), tem-se  $\|(-1) \cdot (y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\|$ . Ou seja,  $d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x)$ , o que mostra (M3). Por fim, tome  $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| = \|(x - z) + (z - y)\|$ , por (N3),  $\|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$ , isto é,  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , que mostra (M4). Portanto,  $X$  é um espaço métrico. □

**Observação 3.1.** A métrica definida pela norma é habitualmente denotada como *métrica induzida pela norma*.

**Definição 3.14 (Espaço de Banach).** Um espaço normado que é completo com a métrica induzida pela norma é chamado de *espaço de Banach*.

Visto que todo espaço normado é um espaço métrico, os conceitos relacionados à convergência de seqüências para espaços normados segue, imediatamente, das correspondentes definições (3.4) e (3.5) para espaços métricos, observando que  $d(x, y) = \|x - y\|$ , assim:

- (I) Uma seqüência  $(x_n)$  do espaço normado  $X$  é *convergente*, se existe  $x \in X$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

Então, escreve-se  $x_n \rightarrow x$  e  $x$  é dito *limite* de  $(x_n)$ .

- (II) Uma seqüência  $(x_n)$  do espaço normado  $X$  é dita de *Cauchy*, se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $n_0$  tal que

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon \quad \forall m, n > n_0.$$

Possuindo o conceito de seqüências em espaços métricos e espaços normados, mais a operação de adição definida em um espaço vetorial e herdada pelo espaço normado, pode-se definir o conceito de séries infinitas.

**Definição 3.15 (Séries infinitas, convergência, série absolutamente convergente, divergência).** Seja  $(x_k)$  uma seqüência de um espaço normado  $(X, \|\cdot\|)$ , associa-se a

sequência  $(x_k)$  com a sequência  $(s_n)$  de *somas parciais*

$$\left\{ s_n = \sum_{k=1}^n x_k \right\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{ou} \quad s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \text{onde } n = 1, 2, 3, \dots .$$

Definindo uma *série infinita*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k + \cdots . \quad (3.1)$$

A série infinita (3.1) é dita *convergente* em  $(X, \|\cdot\|)$ , se a sequência de somas parciais  $(s_n)$  converge para um elemento  $s \in X$ , isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k = s \quad \text{ou} \quad s_n \rightarrow s \quad \therefore \quad \|s_n - s\| \rightarrow 0.$$

Onde  $s$  é chamado de *soma* da série e denotado por

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s.$$

A série infinita (3.1) é dita *absolutamente convergente* em  $(X, \|\cdot\|)$ , se a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\| + \cdots + \|x_k\| + \cdots$$

converge. A série que não converge em  $(X, \|\cdot\|)$ , é dita *divergente*.

Assim, de forma análoga ao completamento de espaços métricos, tem-se o seguinte teorema.

**Teorema 3.3 (Completamento de espaços normados).** Seja  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço normado. Então existe um espaço de Banach  $\widehat{X}$  e uma isometria  $A$  de  $X$  para um subespaço  $W$  de  $\widehat{X}$  a qual é densa em  $\widehat{X}$ . O espaço  $\widehat{X}$  é único, exceto para isometrias.

## 3.4 Compacidade e dimensão finita

**Definição 3.16 (Compacidade sequencial).** Um espaço métrico  $X$  é dito *sequencialmente compacto* se toda sequência em  $X$  possui uma subsequência convergente. Um subconjunto  $M$  de  $X$  é dito *sequencialmente compacto* se  $M$  é considerado sequencialmente compacto como um subespaço de  $X$ , isto é, se toda sequência em  $M$  possui uma subsequência convergente cujo limite é um elemento de  $M$ .

**Lema 3.1 (Compacidade).** Um subconjunto compacto  $M$  de um espaço métrico  $X$  é fechado e limitado.

Entretanto, a recíproca do lema anterior não é verdadeira em geral, mas para o caso de um espaço normado de dimensão finita, tem-se o seguinte resultado.

**Teorema 3.4 (Compacidade para espaços normados de dimensão finita).** Em um espaço normado  $X$  de dimensão finita, qualquer subconjunto  $M \subset X$  é compacto se, e somente se,  $M$  é fechado e limitado.

## 3.5 Operadores lineares

**Definição 3.17 (Operador linear).** Um operador linear entre os espaços vetoriais  $X$  e  $Y$  é uma aplicação  $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ , em que seu domínio  $D(T)$  é um subespaço vetorial e

$$(i) \quad T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$(ii) \quad T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

para todos  $x, y \in D(T)$  e para todo escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Ou de forma equivalente,

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y).$$

Além disso, como  $T$  preserva as duas operações lineares de um espaço vetorial,  $T : D(T) \rightarrow Y$  é dito um homomorfismo.

É comum na literatura específica denotar o operador linear  $T(x)$ , de maneira simplificada, por  $Tx$ . Note também que  $T(0) = 0$  para todo operador linear  $T$ .

### 3.5.1 Operadores lineares contínuos e limitados

**Definição 3.18 (Operador linear limitado).** Sejam  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  espaços normados e  $T : D(T) \rightarrow Y$  um operador linear, onde  $D(T) \subset X$ . O operador  $T$  é dito limitado se existir um número real  $M$  tal que para todo  $x \in D(T)$ ,

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

É importante observar que o subscrito da norma do lado esquerdo da desigualdade anterior indica que a norma está sobre  $Y$  e, do lado direito, sobre  $X$ . Isto é, pode-se dizer que um operador linear limitado mapeia o conjunto limitado de  $D(T)$  em conjuntos limitados em  $Y$ . E, por conta disto, o mesmo é denominado operador limitado. Embora esta notação possa ser omitida desde que não haja ambiguidades.

Para introduzir o conceito de norma de um operador, considere a seguinte questão: qual é a menor constante  $M$  possível tal que

$$\|Tx\| \leq M\|x\| \quad (3.2)$$

ainda se mantenha para todo  $x \in D(T)$ ? (Deixa-se  $x = 0$  de fora, desde que  $T0 = 0$  para  $x = 0$ ). Pela divisão, obtém-se

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M, \quad \text{com } x \neq 0.$$

Ou seja,  $M$  deve ser pelo menos tão grande quanto a menor das cotas superiores da expressão à esquerda assumida  $D(T) - \{0\}$ . Daí, para responder essa questão, diz-se que o menor  $M$  possível em (3.2) é a menor daquelas cotas superiores, isto é, o supremo. E este é denotado por  $\|T\|$ ; portanto

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \quad (3.3)$$

Onde  $\|T\|$  é denominado norma do operador  $T$ . Se  $D(T) = \{0\}$ , define-se  $\|T\| = 0$ . Nesse caso,  $T = 0$  desde que  $T0 = 0$ . Observe que (3.2) com  $M = \|T\|$ , torna-se

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Agora, torna-se necessário justificar a utilização da denominação “norma” nesse contexto. Para tanto, tem-se o Lema a seguir.

**Lema 3.2 (Norma de um operador linear limitado).** Seja  $T$  um operador linear limitado, então:

(i) Uma forma alternativa para a norma de  $T$  é

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

(ii) A norma

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\| \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

satisfaz (N1),(N2) e (N3) da definição 3.12.

*Demonstração.* (i) Escrevendo  $\|x\| = a$  e definindo  $y = \left(\frac{1}{a}\right)x$ , onde  $x \neq 0$ . Então  $\|y\| = \frac{\|x\|}{a} = 1$ , e como  $T$  é linear,

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{1}{a} \|Tx\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \left\| T \left( \frac{1}{a} x \right) \right\| = \sup_{\substack{y \in D(T) \\ \|y\|=1}} \|Ty\|.$$

Colocando  $x$  como  $y$  no último membro à direita da igualdade acima, chega-se em

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

(ii)  $\|T\| \geq 0$  é óbvia e o mesmo acontece com  $\|0\| = 0$ . Reciprocamente, de  $\|T\| = 0$ , tem-se  $Tx = 0$  para todo  $x \in D(T)$ . tal que  $T = 0$ . Logo, (N1) é válida. Além disso, (N2) é obtida de

$$\sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \|Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

onde  $x \in D(T)$ . Por fim, (N3) segue de

$$\sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1x + T_2x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2x\|,$$

com  $x \in D(T)$ .

□

### 3.5.2 Funcionais lineares

Funcionais lineares são tipos especiais de operadores lineares, os quais possuem sua imagem sobre a reta real  $\mathbb{R}$  ou sobre plano complexo  $\mathbb{C}$ .

**Definição 3.19 (Funcional linear).** Um funcional linear  $f$  é um operador linear com o domínio em um espaço vetorial  $X$  e imagem em um corpo escalar  $\mathbb{K}$ . Portanto,

$$f : D(f) \longrightarrow \mathbb{K},$$

onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  se  $X$  é real e  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  se  $X$  é complexo.

Por tratar-se de um assunto recorrente dentro da Análise Funcional, um funcional linear possui notação especial própria. Sendo em geral denotado pelas letras minúsculas  $f, g, h, \dots$ . Seu domínio é denotado por  $D(f)$ , sua imagem por  $Im(f)$  e o valor de  $f$  em um ponto  $x \in D(f)$  por  $f(x)$ .

**Definição 3.20 (Funcional linear limitado).** Um funcional linear limitado  $f$  é um operador linear limitado com imagem sobre o corpo escalar de um espaço vetorial  $X$  no qual se encontra o domínio  $D(f)$ . Portanto, existe um número real  $C$  tal que para todo  $x \in D(f)$ ,

$$|f(x)| \leq c\|x\|.$$

Além disso, a norma de  $f$  é

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

ou

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|.$$

Analogamente ao que foi feito em operadores lineares limitados, pode-se obter a seguinte desigualdade

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\|,$$

onde  $C = \|f\|$ .

Por fim, tem-se o resultado a seguir.

**Teorema 3.5 (Continuidade e limitação de funcionais lineares).** Um funcional linear  $f$  com domínio  $D(f)$  em um espaço normado é contínuo se, e somente se,  $f$  é limitado.

### 3.5.3 Espaço normado de operadores e espaço dual

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados. Define-se  $B(X, Y)$  como o conjunto de todos os operadores lineares limitados de  $X$  em  $Y$ . Onde são definidos a soma e a multiplicação por escalar, respectivamente, como:

$$(i) \quad (T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$$

$$(ii) \quad (\alpha T)x = \alpha Tx$$

com  $T, T_1$  e  $T_2 \in B(X, Y)$  e  $\alpha$  um escalar. E, retomando o Lema 3.2, chega-se ao resultado apresentado no teorema a seguir.

**Teorema 3.6 (Espaço normado  $B(X, Y)$ ).** O espaço vetorial  $B(X, Y)$  de todos os operadores lineares limitados de um espaço normado  $X$  para o espaço normado  $Y$  é por si só um espaço normado, com sua norma definida por

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

Visto o resultado anterior, é possível refletir se  $B(X, Y)$  é um espaço de Banach. Levando diretamente ao resultado do teorema a seguir.

**Teorema 3.7 (Completamento de  $B(X, Y)$ ).** Se  $Y$  é um espaço de Banach, então  $B(X, Y)$  é um espaço de Banach.

É importante ressaltar, no que diz respeito ao resultado anterior, que  $B(X, Y)$  ser Banach não depende do completamento do conjunto  $X$ , isto é, não faz diferença  $X$  ser ou não ser completo. Além disso, o teorema anterior tem importante consequência. Para chegar a mesma, considere a seguinte definição

**Definição 3.21 (Espaço dual).** Seja  $X$  um espaço normado. Então o conjunto de todos funcionais lineares limitados em  $X$  constitui um espaço normado com norma definida por

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

que é denominado espaço dual de  $X$  e é denotado por  $X'$ .

Desde que um funcional linear em  $X$  mapeie  $X$  para  $\mathbb{K}$  (o corpo escalar de  $X$ ), e sendo  $\mathbb{K}$  completo, considerando a métrica usual (podendo ser a métrica de  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ), vê-se que  $X'$  é  $B(X, Y)$  com o espaço completo  $Y = \mathbb{R}$  ou  $Y = \mathbb{C}$ . Ou seja,  $X' = B(X, \mathbb{K})$ . Assim, aplicando o teorema do completamento de  $B(X, Y)$ , tem-se:

**Teorema 3.8 (Espaço dual).** O espaço dual  $X'$  de um espaço normado  $X$  é um espaço de Banach (sendo  $X$  completo ou não).

## 3.6 Produto interno e espaços de Hilbert

**Definição 3.22 (Produto interno).** Seja  $X$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . A aplicação  $\langle \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$  que para todo  $x, y, z \in X$  e todo escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  possui as seguintes propriedades:

$$(P1) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$(P2) \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$(P3) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(P4) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ e } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

é denominado produto interno sobre o espaço  $X$ .

**Observação 3.2.** Em (P3), a barra superior denota o conjugado complexo. Consequentemente, se o  $X$  é um espaço vetorial real (isto é, se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), tem-se simplesmente

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

**Observação 3.3.** Se  $X$  é um espaço vetorial que admite um produto interno  $\langle \cdot \rangle$ , então o par  $(X, \langle \cdot \rangle)$  é dito um espaço com produto interno.

Um conceito importante introduzido pelo produto interno é definido a seguir.

**Definição 3.23 (Ortogonalidade).** Um elemento  $x$  de um espaço com produto interno  $X$  é dito ortogonal a um elemento  $y \in X$  se

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Diz-se também que  $x$  e  $y$  são ortogonais e denota-se por  $x \perp y$ . De maneira semelhante, para subconjuntos  $A, B \subset X$  escreve-se  $x \perp A$ , se  $x \perp a$  para todo  $a \in A$ . E,  $A \perp B$  se  $a \perp b$  para todo  $a \in A$  e para todo  $b \in B$ .

Além disso, obtém-se o notável resultado para desigualdades.

**Proposição 3.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).** Seja  $X$  um espaço com produto interno. Então

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle},$$

para todo  $x, y \in X$ . Onde a igualdade é mantida se, e somente se,  $x$  for um múltiplo escalar de  $y$ . Isto é,  $\{x, y\}$  é um conjunto linearmente dependente.

De forma análoga ao que foi feito em espaços normados, pode-se garantir a possibilidade de indução de uma norma pelo produto interno, através do resultado a seguir.

**Proposição 3.3 (Norma induzida pelo produto interno).** Seja  $(X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  um espaço com produto interno. Definindo

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \end{aligned}$$

obtém-se uma norma para o espaço  $X$ . O espaço  $(X, \|\cdot\|)$  é um espaço normado, onde a norma é induzida pelo produto interno.

*Demonstração.* Suponha que  $x = 0$ . Então, por (P4),  $\|0\| = \sqrt{\langle 0, 0 \rangle} = 0$ . Reciprocamente, supondo que  $\|x\| = 0$ . Então  $\langle x, x \rangle = 0$ . Novamente por (P4),  $x = 0$ . Além disso,  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$ . Demonstrando (N1).

Agora, sendo  $x \in H$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Então

$$\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{1/2} = (\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle)^{1/2} = (|\lambda|^2 \langle x, x \rangle)^{1/2} = |\lambda| \langle x, x \rangle^{1/2} = |\lambda| \|x\|.$$

Que prova (N2).

Por fim, seja  $x, y \in X$ . Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2} + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Provando (N3). Portanto,  $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$  define uma norma.

□

**Observação 3.4.** Quando a norma é induzida pelo produto interno é garantida a validade da lei do paralelogramo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

No que diz respeito à completude do espaço vetorial com produto interno, chega-se à seguinte definição.

**Definição 3.24 (Espaço de Hilbert).** Diz-se que  $H$  é um espaço de Hilbert se  $H$  for um espaço vetorial com produto interno que é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.

**Observação 3.5.** Uma vez que  $(X, \|\cdot\|)$  seja um espaço de Hilbert. Então a desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser escrita como  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$  para todo  $x, y \in X$ .

**Observação 3.6.** Outra notável desigualdade é a chamada desigualdade triangular

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Finalmente, chega-se no teorema do completamento de um espaço vetorial com produto interno.

**Teorema 3.9 (Completamento de espaços com produto interno).** Para todo espaço com produto interno  $X$  existe um espaço Hilbert  $H$  e um isomorfismo  $A$  de  $X$  para um subespaço denso  $W \in H$ . O espaço  $H$  é único, exceto para isomorfismos.

## 3.7 Espaços reflexivos e espaços separáveis

Até o momento viu-se que se  $X$  é um espaço normado completo (Banach) então seu espaço dual  $X'$  também é Banach. Agora, considere

$$X'' = \{f : X' \rightarrow \mathbb{K}; f \text{ linear e limitado} \}$$

o chamado *espaço bidual* do espaço  $X$ . Além disso, como  $X'' = B(X', \mathbb{K})$  e  $\mathbb{K}$  um espaço de Banach, então  $X''$  é Banach.

Entretanto, o objetivo da presente seção é definir os conceitos referentes a espaços reflexivos. Para tanto, considere os resultados a seguir.

**Lema 3.3.** Para todo  $x$  fixado no espaço normado  $X$  a aplicação

$$\begin{aligned} g_x : X' &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto g_x(f) = f(x) \end{aligned}$$

é um funcional linear limitado. Além disso,  $\|g_x\| = \|x\|$ .

Nesse momento, considere que para todo  $x \in X$  existe um único funcional linear limitado  $g_x \in X''$ , dado pela aplicação  $g_x(f) = f(x)$ . Assim, define-se o mapeamento

$$\begin{aligned} C : X &\longrightarrow X'' \\ x &\longmapsto C(x) = g_x. \end{aligned}$$

$C$  é chamado de *mapeamento canônico* de  $X$  para  $X''$ .

**Lema 3.4 (Mapeamento canônico).** O mapeamento canônico  $C$  é um isomorfismo do espaço normado  $X$  sobre o espaço normado  $Im(C)$ .

*Demonstração.*  $C$  é linear. De fato, sendo  $x, y \in X$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , observa-se que

$$\begin{aligned} (C(\alpha x + \beta y))(f) &= g_{\alpha x + \beta y}(f) \\ &= f(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha g_x(f) + \beta g_y(f) \\ &= \alpha(Cx)(f) + \beta(Cy)(f) \end{aligned}$$

Em particular,  $g_x - g_y = g_{x-y}$ . Portanto, por  $\|g_x\| = \|x\|$ , obtém-se

$$\|g_x - g_y\| = \|g_{x-y}\| = \|x - y\|.$$

Mostrando que  $C$  é isométrico (preservando a norma) e a isometria implica injetividade. Também é possível ver isso diretamente de outra forma. De fato, se  $x \neq y$ , então  $g_x \neq g_y$  por (N1). Portanto,  $C$  é bijetiva, considerada como um mapeamento para sua imagem.  $\square$

**Definição 3.25 (Espaço reflexivo).** O espaço normado  $X$  é dito *reflexivo* se  $Im(C) = X''$ , onde  $C : X \longrightarrow X''$  é um mapeamento canônico.

**Observação 3.7.** Se  $X$  é reflexivo, ele é isometricamente isomorfo a  $X''$ .

**Teorema 3.10 (Completamento).** Se um espaço normado  $X$  é reflexivo, então  $X$  é completo (Banach).

*Demonstração.* Sabe-se que o espaço bidual  $X''$  é um espaço de Banach. Sendo  $X$  um espaço reflexivo tem-se que  $X'' = Im(C)$ . Pelo lema do mapeamento canônico, chega-se que a aplicação  $C : X \rightarrow Im(C)$  é um isomorfismo e, como  $X'' = Im(C)$  é completo, segue que  $X$  é completo.  $\square$

Por fim, tem-se os dois últimos resultados descritos nesta seção, dados a seguir.

**Corolário 3.1.** Todo espaço de Hilbert  $H$  é reflexivo.

**Teorema 3.11 (Separabilidade).** Se o espaço dual  $X'$  de um espaço normado  $X$  é completo, então o próprio  $X$  é separável.

### 3.8 Convergência forte, fraca e fraca estrela

Em seções anteriores foram definidos os conceitos referentes a convergência, porém com propósito de ressaltar as diferenças entre as convergências forte e fraca, reescreve-se a definição de convergência da seguinte forma:

**Definição 3.26 (Convergência forte).** Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço normado  $X$  é dita *fortemente convergente* se existe um  $x \in X$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Denotando por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{ou simplesmente} \quad x_n \longrightarrow x.$$

Onde  $x$  é denominado *limite forte* de  $(x_n)$  e diz-se que  $(x_n)$  *converge fortemente* para  $x$ .

Na definição anterior não há novidades a não ser o acréscimo da palavra forte na definição de convergência de sequências, em particular, em espaços normados. Agora, considere a próxima definição.

**Definição 3.27 (Convergência fraca).** Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço normado  $X$  é dita *fracamente convergente* se existe um  $x \in X$  tal que para todo  $f \in X'$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x).$$

Denotando por

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad \text{ou} \quad x_n \rightharpoonup x.$$

Onde  $x$  é denominado *limite fraco* de  $(x_n)$  e diz-se que  $(x_n)$  *converge fracamente* para  $x$ .

**Observação 3.8.** A convergência fraca significa convergência da sequência de números  $a_n = f(x_n)$  para todo  $f \in X'$ .

**Lema 3.5 (Convergência fraca).** Seja  $(x_n)$  uma sequência fracamente convergente em um espaço normado  $X$ , isto é,  $x_n \xrightarrow{w} x$ . Então

- (a) o limite  $x$  de  $(x_n)$  é único.
- (b) toda subsequência de  $(x_n)$  converge fracamente para  $x$ .
- (c) a sequência  $(\|x_n\|)$  é limitada.

Destacam-se também resultados que relacionam as convergências fraca e forte.

**Teorema 3.12 (Convergência forte e fraca).** Seja  $(x_n)$  uma sequência em um espaço normado  $X$ . Então

- (a) Convergência forte implica uma convergência fraca com o mesmo limite.
- (b) A recíproca do item (a) não é geralmente verdadeira.
- (c) Se  $\dim X < \infty$ , então convergência fraca implica em convergência forte.

**Lema 3.6 (Convergência fraca).** Se um espaço normado  $X$  possui  $x_n \xrightarrow{w} x$  se, e somente se,

- (I) A sequência  $(\|x_n\|)$  é limitada.
- (II) Todo elemento  $f$  de subconjunto total  $M \subset X'$  tem  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

Agora considere a convergência de operadores, sendo que estes conceitos de convergência forte e fraca vistos anteriormente possuem aplicações usuais.

**Definição 3.28 (Convergência de sequências de operadores).** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados. A sequência  $(T_n)$  de operadores  $T_n \in B(X, Y)$  é dito um:

- (i) *operador uniformemente convergente* se  $(T_n)$  converge na norma em  $B(X, Y)$ .
- (ii) *operador fortemente convergente* se  $(T_n x)$  converge fortemente em  $Y$  para todo  $x \in X$ .

- (iii) *operador fracamente convergente* se  $(T_n x)$  converge fracamente em  $Y$  para todo  $x \in X$ .

Em fórmulas, isto significa que existe um operador  $T : X \rightarrow Y$  tal que

(i)  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$

(ii)  $\|T_n x - Tx\| \rightarrow 0$  para todo  $x \in X$ .

(iii)  $\|f(T_n x) - f(Tx)\| \rightarrow 0$  para todo  $x \in X$  e todo  $f \in Y'$

respectivamente.  $T$  é chamado de limite *uniforme*, *forte* e *fraco* de  $(T_n)$ , respectivamente.

Assim, como funcionais lineares são por definição operadores lineares cuja imagem é um corpo  $\mathbb{K}$ , considere os conceitos definidos a seguir.

**Definição 3.29 (Convergência forte de sequências de funcionais).** Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções lineares limitadas em um espaço normado  $X$ . Então *convergência forte* de  $(f_n)$  significa que existe um  $f \in X'$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Denotando por

$$f_n \rightarrow f.$$

Sendo  $f$  denominado de *limite forte* de  $(f_n)$ .

**Definição 3.30 (Convergência fraca estrela de sequências de funcionais).** Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções lineares limitadas em um espaço normado  $X$ . Então *convergência fraca estrela* de  $(f_n)$  significa que existe um  $f \in X'$  tal que para todo  $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Denotando por

$$f_n \xrightarrow{w^*} f.$$

Sendo  $f$  denominado de *limite fraco estrela* de  $(f_n)$ .

**Lema 3.7 (Convergência forte do operador).** Seja  $T_n \in B(X, Y)$ , onde  $X$  é um espaço de Banach e  $Y$  é um espaço normado. Se  $(T_n)$  é um *operador fortemente convergente* com limite  $T$ , então  $T \in B(X, Y)$ .

**Teorema 3.13 (Convergência forte do operador).** A sequência  $(T_n)$  de operadores  $T_n \in B(X, Y)$ , onde  $X$  e  $Y$  são espaços de Banach, é um operador fortemente convergente se, e somente se,

- (a) a sequência  $(\|T_n\|)$  for limitada.
- (b) a sequência  $(T_n x)$  for de Cauchy em  $Y$  para todo  $x$  em um subconjunto total  $M$  de  $X$ .

**Corolário 3.2.** A sequência  $(f_n)$  de funcionais lineares limitados sobre um espaço de Banach  $X$  é *convergente fraco estrela*, sendo o limite um funcional linear limitado em  $X$  se, e somente se,

- (I) a sequência  $(\|f_n\|)$  é limitada.
- (II) a sequência  $(f_n x)$  é de Cauchy para todo  $x$  em um subconjunto total  $M$  de  $X$ .

## 3.9 Espaços de Sobolev

Para iniciar os conceitos sobre os espaços de Sobolev, fundamentado por Lions e Magenes [21], Evans [11] e Brezis [6], faz-se necessário algumas definições prévias em relação aos espaços de Lebesgue, derivada fraca, espaços de Hölder.

Em um primeiro momento, considere o espaços de Lebesgue. Sejam  $\Omega$  subconjunto aberto qualquer do  $\mathbb{R}^n$  e  $p \in \mathbb{R}$  com  $1 < p < \infty$ , os espaços de Lebesgue denotado por  $L^p(\Omega)$  são espaços vetoriais formados pelas classes de funções mensuráveis  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|u(x)|^p$  é Lebesgue integrável em  $\Omega$ . Ou seja,

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } |u|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Espaço que munindo com a norma  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

é de fato um espaço normado. Para  $p = \infty$ , o espaço vetorial  $L^\infty(\Omega)$  é constituído pelas classes de funções  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que são essencialmente limitadas. Isto é,

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ é mensurável e } \exists C \geq 0, \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Quando  $L^\infty(\Omega)$  é munido pela norma  $\| \cdot \|_{L^\infty(\Omega)} : L^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C \mid |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\},$$

de fato, é um espaço normado.

Em particular para  $p = 2$ , adequado a definições anteriores. Seja  $\Omega$  um aberto qualquer de  $\mathbb{R}^n$ .  $L^2(\Omega)$  denota o espaço das classes de funções  $u$  quadrado integráveis em  $\Omega$ , ou seja, mensurável e tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

onde  $x = \{x_1, \dots, x_n\} \in \Omega$  e  $dx = dx_1 \cdots dx_n$ . Adotando frequentemente a notação  $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ . E, assim,  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} \, dx$$

induzido pela norma  $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ .

Considere o relevante resultado ainda em relação aos espaços de Lebesgue, que pode ser visto detalhadamente em [6].

**Teorema 3.14.** Sejam  $\Omega$  subconjunto aberto qualquer do  $\mathbb{R}^n$ ,  $p \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq p \leq \infty$ , então

- (i)  $L^p(\Omega)$  é um espaço de Banach.
- (ii) Se  $1 < p < \infty$ , então  $L^p(\Omega)$  é uniformemente convexo e reflexivo.
- (iii) Se  $1 \leq p < \infty$ , então  $L^p(\Omega)$  é separável.

Em relação aos espaços de Hölder, suponha que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é aberto e  $0 < \gamma \leq 1$ . Uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *Hölder contínua de expoente  $\gamma$*  se existir uma constante  $C$  tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma$$

para  $x, y \in \Omega$ .

**Observação 3.9.** No caso de  $\gamma = 1$  da desigualdade anterior, a função  $u$  é dita uma *função Lipschitz contínua*.

**Definição 3.31.**

(i) Se  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e contínua, denota-se

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|.$$

(ii) A  $\gamma$ -ésima Hölder seminorma de  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\},$$

$\gamma$ -ésima Hölder norma é

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}.$$

**Definição 3.32 (Espaço de Hölder).** O espaço de Hölder

$$C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$$

consiste em toda função  $u \in C^k(\bar{\Omega})$  para à qual a norma

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}$$

é finita.

**Observação 3.10.** O espaço de funções  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  é um espaço de Banach.

Em relação à notação, tome  $C_c^\infty(\Omega)$  como a notação para o espaço das funções infinitamente diferenciáveis  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , com suporte compacto em  $\Omega$ . É comum na literatura que a função  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  seja chamada de função teste.

Como motivação, assuma uma dada função  $u \in C^1(\Omega)$ . Então se  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , vê-se pela integração por partes que

$$\int_{\Omega} u \varphi_{x_i} dx = - \int_{\Omega} u_{x_i} \varphi dx \quad (i = 1, \dots, n).$$

Não aparecendo os termos de fronteira, uma vez que  $\varphi$  tem suporte compacto em  $\Omega$  e, portanto, desaparece em  $\partial\Omega$ .

Em geral, se  $k$  é um inteiro positivo,  $u \in C^k(\Omega)$ , e  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  um multi-índice de ordem  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ , então

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \varphi dx.$$

Sendo a igualdade mantida desde que

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi$$

e pode-se aplicar a primeira igualdade  $|\alpha|$  vezes.

**Definição 3.33 (Derivada fraca).** Suponha  $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ , e  $\alpha$  um multi-índice. Diz-se que  $v$  é a  $\alpha$ -ésima derivada fraca parcial de  $u$ , denotando por

$$D^\alpha u = v,$$

desde que

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx$$

para toda função teste  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ .

Pode-se dizer que  $D^\alpha u = v$  no sentido da derivada fraca, uma vez dada  $u$  e se existe  $v$  verificando a igualdade anterior para toda  $\varphi$ .

**Lema 3.8 (Unicidade da derivada fraca).** Uma  $\alpha$ -ésima derivada fraca parcial de  $u$ , se existir, é definida unicamente para um conjunto de medida nula.

*Demonstração.* Assumindo que  $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$  satisfaz

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{v} \varphi dx$$

para todo  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Então

$$\int_{\Omega} (v - \tilde{v}) \varphi dx = 0$$

para todo  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Assim,  $v - \tilde{v} = 0$ .

□

De acordo com [21], define-se

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \mid \varphi \text{ é indefinidamente diferenciável em } \Omega, \text{ e com suporte compacto em } \Omega\},$$

e

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \text{dual de } \mathcal{D}(\Omega) = \text{espaço de distribuições em } \Omega,$$

munindo  $\mathcal{D}'(\Omega)$  da topologia forte do dual.

Observe que, se  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , o valor de  $T$  em  $\varphi$  é denotado por

$$\langle T, \varphi \rangle.$$

Além disso, sendo  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , sua derivada  $\frac{\partial T}{\partial x_j}$  é definida por

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

que permite uma aplicação  $T \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x_j}$  linear e contínua de  $\mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ .

Agora, pode-se definir, em particular,

$$H^m(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ para todo } \alpha, |\alpha| \leq m\},$$

observando que  $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ , identificando qualquer  $u \in L^2(\Omega)$  com a distribuição  $\varphi \rightarrow \langle u, \varphi \rangle$ . Então em  $H^m(\Omega)$  as derivadas  $D^\alpha u$  são tomadas no sentido das distribuições em  $\Omega$ . Munindo  $H^m(\Omega)$  com a norma

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

tem-se o resultado a seguir que pode ser visto em detalhes em [21].

**Teorema 3.15.** Para a norma  $\|u\|_{H^m(\Omega)}$  o espaço  $H^m(\Omega)$  é um espaço Hilbert, o produto escalar de dois elementos  $u, v \in H^m(\Omega)$  é dado pelo par

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

**Observação 3.11.** Notando a inclusões estritas  $H^{m_1}(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ , onde  $m_1 > m > 0$ .

Finalmente, chega-se à principal definição desta seção. Assim, fixando  $1 \leq p \leq \infty$  e  $k$  um inteiro positivo. Define-se a seguir o espaço de funções, cujo os elementos possuem derivada no sentido fraco e estes pertencem a espaço  $L^p$ , isto é, suas derivadas fracas são Lebesgue integráveis.

**Definição 3.34 (Espaço de Sobolev).** O espaço de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega)$$

consiste em todas funções localmente integráveis  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para cada multi-índice  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq k$ ,  $D^\alpha u$  existe no sentido fraco e pertence a  $L^p(\Omega)$ .

**Definição 3.35 (Norma do espaço de Sobolev).** Se  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ , define-se a norma para  $1 \leq p < \infty$  como

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|u\|_{k,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sendo  $p = \infty$ , define-se a norma como

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

**Definição 3.36 (Convergência em espaços de Sobolev).** Sejam  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  e  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ . Diz-se que  $u_n$  converge para  $u$  em  $W^{k,p}(\Omega)$  e denota-se

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad W^{k,p}(\Omega), \quad \text{desde que} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Além disso, escreve-se

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad W_{loc}^{k,p}(\Omega)$$

para denotar

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad W^{k,p}(X),$$

para cada  $X$  compactamente contido em  $\Omega$  ( $X \subset\subset \Omega$ ).

**Definição 3.37 (Fecho de espaços de Sobolev).** Denote por

$$W_0^{k,p}(\Omega)$$

o fecho de  $C_c^\infty(\Omega)$  em  $W^{k,p}(\Omega)$ . Portanto,  $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$  se, e somente se, existe funções  $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$  tais que  $u_n \rightarrow u \in W^{k,p}(\Omega)$ . Interpretando  $W_0^{k,p}(\Omega)$  como conjunto que contém as funções  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  tais que  $D^\alpha u = 0$  em  $\partial\Omega$  para todo  $|\alpha| \leq k-1$ .

**Observação 3.12.** Em particular, para  $p = 2$ , o espaço de Sobolev é denotado por

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \dots$$

Onde utiliza-se a letra  $H$  desde que  $H^k$  seja um espaço de Hilbert. Observe também que  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ .

**Observação 3.13.** Em relação à notação do fecho, denota-se  $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$ .

**Observação 3.14.** O dual do espaço  $W_0^{m,p}(\Omega)$  é representado por  $W^{-m,q}(\Omega)$ , sendo  $1 \leq p < \infty$  onde  $p$  e  $q$  são índices conjugados. Se  $m = 1$ ,  $H^{-1}(\Omega)$  denota o dual de  $H_0^1(\Omega)$ .

**Teorema 3.16 (Espaço Sobolev como espaço funcional).** Para cada  $k = 1, \dots$  e  $1 \leq p \leq \infty$ , o espaço de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach.

*Demonstração.* Primeiro verificando se  $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$  define uma norma. De fato,

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \iff u = 0.$$

Além disso, assumindo  $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ . Se  $1 \leq p < \infty$ , então, pela desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \left( \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Agora, em relação a  $W^{k,p}(\Omega)$  ser completo. Suponha  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência de Cauchy em  $W^{k,p}(\Omega)$ . Então para cada  $|\alpha| \leq k$ ,  $\{D^\alpha u_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência de Cauchy em  $L^p(\Omega)$ . Sendo  $L^p(\Omega)$  completo, existem funções  $u_\alpha \in L^p(\Omega)$  tal que

$$D^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha \quad \text{em} \quad L^p(\Omega)$$

para cada  $|\alpha| \leq k$ . Em particular,

$$u_n \rightarrow u_{(0,\dots,0)} = u \quad \text{em} \quad L^p(\Omega).$$

Neste momento, afirma-se que

$$u \in W^{k,p}(\Omega), \quad D^\alpha u = u_\alpha \quad (|\alpha| \leq k).$$

Para verificar a afirmação anterior, fixe  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Então

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n D^\alpha \varphi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u_n \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\alpha \varphi dx.$$

Portanto, a afirmação é verdadeira. Consequentemente  $D^\alpha u_n \rightarrow D^\alpha u$  em  $L^p(\Omega)$  para todo  $|\alpha| \leq k$ , vê-se que  $u_n \rightarrow u$  em  $W^{k,p}(\Omega)$ , como previsto.

□

### 3.9.1 Espaços relacionados com tempo

No estudo de EDP's do tipo parabólico-hiperbólico é comum a presença de funções que mapeiam intervalos de tempo para espaços de Banach. Para definir essa classe, considere  $X$  um espaço de Banach com norma  $\|\cdot\|$ .

**Definição 3.38 (Espaço de  $L^p$  no tempo).** O espaço

$$L^p(0, T; X)$$

consiste em todas as funções mensuráveis  $u : [0, T] \rightarrow X$  com norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

para  $1 \leq p < \infty$ , e para  $p = \infty$

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty.$$

**Definição 3.39 (Espaço das funções contínuas).** O espaço

$$C([0, T]; X)$$

contém todas as funções contínuas  $u : [0, T] \rightarrow X$  com

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty.$$

**Definição 3.40.** Seja  $u \in L^1(0, T; X)$ . Diz-se  $v \in L^1(0, T; X)$  é a derivada no sentido fraco de  $u$ , denotando por

$$u' = v,$$

desde que

$$\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt = - \int_0^T \varphi(t)v(t)dt$$

para toda função de teste escalar  $\varphi \in C_c^\infty(0, T)$ .

**Definição 3.41 (Espaço de Sobolev no tempo).** O espaço de Sobolev

$$W^{1,p}(0, T; X)$$

consiste em toda função  $u \in L^p(0, T; X)$  tal que  $u'$  existe no sentido da derivada fraca e

pertence a  $L^p(0, T; X)$ . Além disso, define-se a norma para  $1 \leq p < \infty$  como

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|^p + \|u'(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sendo  $p = \infty$ , define-se a norma como

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} (\|u(t)\| + \|u'(t)\|).$$

**Observação 3.15.** É comum utilizar  $H^1(0, T; X) = W^{1,2}(0, T; X)$ .

Por fim, destaca-se os seguintes resultados.

**Teorema 3.17.** Seja  $u \in W^{1,p}(0, T; X)$  para algum  $1 \leq p \leq \infty$ . Então

- (i)  $u \in C([0, T]; X)$ .
- (ii)  $u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau) d\tau$  para todo  $0 \leq s \leq t \leq T$ .
- (iii) Tem-se a estimativa

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| \leq C \|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$$

onde a constante  $C$  depende unicamente de  $T$ .

*Demonstração.* Ver em [11] p. 286. □

**Teorema 3.18.** Suponha que  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , com  $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Então

- (i)  $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$
- (ii) O mapeamento  $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$  é absolutamente contínuo, com

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2 \langle u'(t), u(t) \rangle$$

para todo  $0 \leq t \leq T$ .

- (iii) Tem-se a estimativa

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \right),$$

onde a constante  $C$  depende unicamente de  $T$ .

*Demonstração.* Ver em [11] p. 287. □

## 3.10 Outros resultados importantes

Para fechar o presente capítulo, nesta seção são enunciadas outras definições, lemas e teoremas que são importantes e fazem parte dos conceitos necessários para este trabalho.

**Definição 3.42 (Conjuntos e seqüências ortonormais).** Um *conjunto ortogonal*  $M$  em um espaço vetorial com produto interno  $X$  é um subconjunto  $M \subset X$  cujos elementos são ortogonais em pares. Um *conjunto ortonormal*  $M \subset X$  é um conjunto ortogonal definido em  $X$  cujos elementos têm a norma igual a 1, ou seja, para todos  $x, y \in M$ ,

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq y \\ 1 & \text{if } x = y. \end{cases}$$

Se um conjunto  $M$  ortogonal (ou ortonormal) for contável, pode-se organizá-lo em uma seqüência  $(x_n)$  e chamá-lo de seqüência ortogonal (ou seqüência ortonormal).

Mais geralmente, um conjunto indexado, ou família,  $(x_\alpha)$ ,  $\alpha \in I$ , é chamado ortogonal se  $x_\alpha \perp x_\beta$  para todo  $\alpha, \beta \in I$ ,  $\alpha \neq \beta$ . A família é chamada ortonormal se for ortogonal e todos os  $x_\alpha$  têm norma igual a 1, de modo que para todos  $\alpha, \beta \in I$  tem-se

$$\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{if } \alpha = \beta \end{cases}$$

Onde  $\delta_{\alpha\beta}$  é o delta de Kronecker.

**Teorema 3.19 (Desigualdade de Bessel).** Seja  $(e_k)$  uma seqüência ortonormal em um espaço vetorial com produto interno  $X$ . Então para todo  $x \in X$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Note que o produto interno  $\langle x, e_k \rangle$  acima é chamado de *coeficiente de Fourier* de  $x$  com respeito a seqüência ortonormal  $(e_k)$ .

**Definição 3.43 (Base Hilbertiana).** Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Denomina-se *base Hilbertiana de  $H$*  uma seqüência de elementos  $(\omega_n)$  de  $H$  tais que

- (a) Para todo  $n$   $|\omega_n| = 1$ , e para todo  $m, n$  onde  $m \neq n$  tem-se  $\langle \omega_n, \omega_m \rangle = 0$ ;
- (b) O espaço gerado por  $(\omega_n)$  é denso em  $H$ .

**Lema 3.9 (Lema de Gronwall).** Sejam  $\phi : [a, b] \leftarrow \mathbb{R}$  e  $\psi : [a, b] \leftarrow \mathbb{R}$  funções contínuas e não negativa. Sendo  $\phi(t) \leq C + \int_a^t \phi(s)\psi(s)ds$  com  $C \geq 0$ , então

$$\phi(t) \leq Ce^{\int_a^t \psi(s)ds},$$

para todo  $t \in [a, b]$ . Em particular, se  $\phi(t)$  é limitada e  $C = 0$ , então  $\phi \equiv 0$ .

**Lema 3.10.** Seja  $\phi(t)$  contínua e não negativa em  $[0, T]$ . Se

$$\phi(t) \leq C_1 + C_2 \int_a^t [\phi(s) + \phi^2(s)] ds,$$

com  $0 \leq t \leq T$  e  $C_1, C_2$  não negativos, então existem  $T_0$  e  $C > 0$  tais que  $\phi(t) \leq C$ , para todo  $t \in [0, T_0]$ .

**Teorema 3.20 (Teorema de Arzelà-Ascoli).** Se a sequência  $\{u_n\}_n^\infty$  é limitada e equicontínua, então existe uma subsequência de  $\{u_n\}_n^\infty$  que converge uniformemente.

**Lema 3.11 (Compacidade de Aubin-Lions).** Sejam  $B_0, B, B_1$  espaços de Banach,  $B_0$  e  $B_1$  reflexivos, a imersão de  $B_0$  em  $B$  é compacta,  $B$  imerso continuamente em  $B_1$ , e,  $W$  o espaço

$$W = \{u \in L^2(0, T; B_0) \mid u' \in L^2(0, T; B_1)\}$$

munido da norma  $\|u\|_W = \|u\|_{L^2(0, T; B_0)} + \|u'\|_{L^2(0, T; B_1)}$ . Então  $W$  é um espaço de Banach, e a imersão de  $W$  em  $L^2(0, T; B)$  é compacta.

**Observação 3.16.** Pela compacidade de Aubin-Lions, se  $(u_\nu)$  é uma sequência limitada em  $L^2(0, T; B_0)$  e  $(u'_\nu)$  uma sequência limitada em  $L^2(0, T; B_1)$ , então  $(u_\nu)$  é limitada em  $W$ . Logo, existe uma subsequência  $(u_{\nu_n})$  de  $(u_\nu)$  tal que  $u_{\nu_n} \rightarrow u$  forte em  $L^2(0, T; B)$ .

**Lema 3.12 (Lema de Lions).** Sejam  $\Omega$  um aberto limitado em do  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ ,  $g_\tau$  e  $g$  funções de  $L^p(\Omega)$  com  $1 < p < \infty$  tal que

$$\|g_\tau\|_{L^p(\Omega)} \leq C, \quad g_\tau \rightarrow g \quad \text{quase sempre em } \Omega.$$

Então  $g_\tau \rightarrow g$  na topologia fraca de  $L^p(\Omega)$ .

Portanto, visto toda a conceituação descrita no decorrer deste capítulo, considere-se finalizada a contextualização dos conceitos fundamentais relacionados ao campo da Análise Funcional para este trabalho e, assim, alcançando o objetivo do presente capítulo.

## Capítulo 4

# Equação hiperbólica-parabólica com fronteiras móveis e não linearidade do tipo Kirchhoff-Carrier

Neste capítulo apresenta-se os estudos acerca da existência, unicidade e comportamento assintótico da solução regular global do problema hiperbólico-parabólico do modelo não linear de Kirchhoff-Carrier, com  $u = u(x, t)$ , dado pela equação

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} - \left[ 1 + M \left( t, \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (4.1)$$

sobre um domínio não cilíndrico  $Q_t \subset \mathbb{R}^2$ , definido por

$$Q_t = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha(t) < x < \beta(t), \quad 0 < t < T \},$$

onde  $\alpha(\cdot)$  e  $\beta(\cdot)$  são duas funções, tais que  $\alpha(t) < \beta(t) \forall t \in [0, T[$ .

A fronteira lateral de  $Q_t$  é denotada por  $\Sigma_t$ , onde

$$\Sigma_t = \bigcup_{0 < t < T} (\alpha(t) \times \{t\}) \cup (\beta(t) \times \{t\}).$$

Além disso, a solução deve satisfazer as condições de contorno

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma_t \quad (4.2)$$

e condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1 \quad (4.3)$$

em  $] \alpha(0), \beta(0)[$ .

Na equação (4.1), assume-se que a função  $M(\cdot, \cdot)$  satisfaz as condições

$$\left\{ \begin{array}{l} M \in C^1([0, \infty[ \times [0, \infty[), \\ M(t, \lambda) \geq m_0 > 0 \quad \forall (t, \lambda) \in [0, T] \times [0, \infty[, \\ \frac{\partial}{\partial t} M(t, \lambda) \leq 0 \quad \forall (t, \lambda) \in [0, T] \times [0, \infty[, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

e as funções  $\rho_1(\cdot)$ ,  $\rho_2(\cdot)$  satisfazem

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \in W^{2,\infty}(0, T), \quad \rho_2 \in W^{1,\infty}(0, T), \\ \rho_1(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T], \\ \rho_2(t) - \frac{1}{2} |\rho_1'(t)| \geq \delta_0 > 0 \quad \forall t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (4.5)$$

onde  $m_0$  e  $\delta_0$  são dados números positivos.

## 4.1 Transformando o problema para um domínio fixo

Para iniciar o estudo sobre o problema dado pela equação (4.1), considera-se uma relação entre domínio não cilíndrico  $Q_t$  e o domínio cilíndrico  $Q = [0, 1] \times [0, T]$ . A relação estabelecida em questão trata-se de um difeomorfismo<sup>1</sup> definido por

$$\begin{aligned} h : \quad Q_t &\longrightarrow Q \\ (x, t) &\longmapsto h(x, t) = (y, t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

sendo  $y = \frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)}$  e  $\gamma(t)$  representando a função dilatação definida por  $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ , onde  $\gamma(t) \neq 0$ . E sua função inversa é definida por

$$\begin{aligned} h^{-1} : \quad Q &\longrightarrow Q_t \\ (y, t) &\longmapsto h^{-1}(y, t) = (x, t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

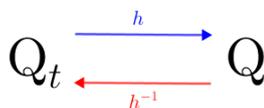
onde  $x = \alpha(t) + \gamma(t) \cdot y$ .

---

<sup>1</sup>Trata-se de um isomorfismo na categoria das variedades diferenciáveis. Sendo uma função inversível que leva uma variedade diferenciável em outra, de modo que a função e sua inversa são suaves.

A relação anterior permite a transição de elementos do domínio móvel  $Q_t$  para o domínio fixo  $Q$  e vice e versa. Como ilustrado na Figura 4.1.

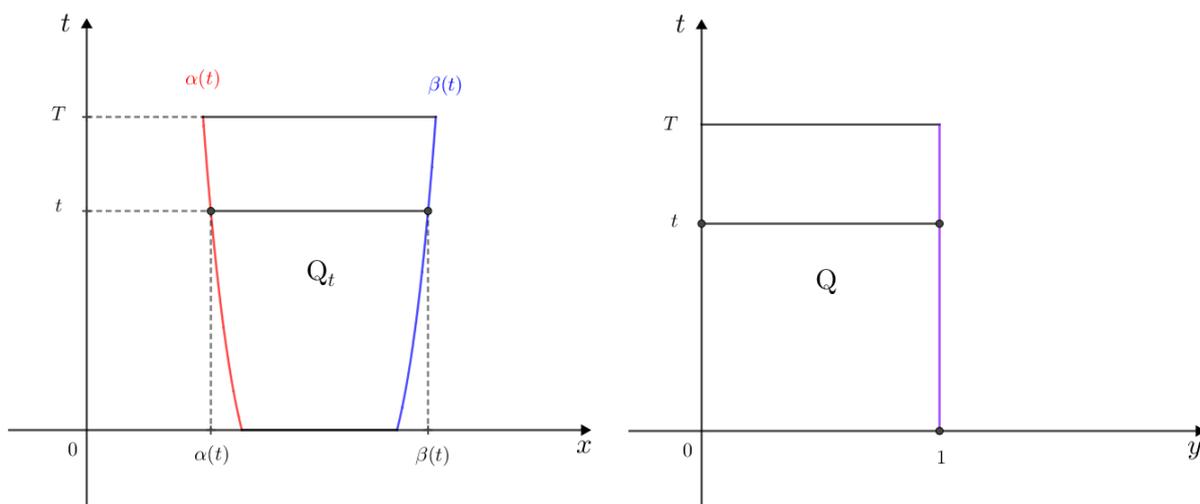
Figura 4.1: Diagrama das relações  $h$  e  $h^{-1}$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim a geometria do domínio com fronteiras móveis  $Q_t$  se transforma no domínio retangular  $Q$ , como no esboço apresentado pela Figura 4.2.

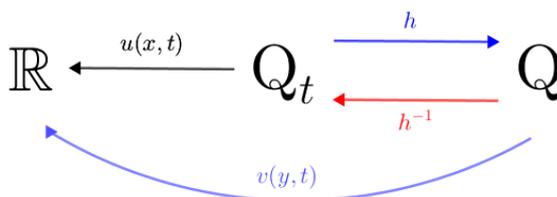
Figura 4.2: Domínio móvel original e domínio fixo, respectivamente.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se também que  $u(x, t)$  relaciona o domínio  $Q_t$  com  $\mathbb{R}$ . Logo, como o objetivo é relacionar o domínio  $Q$  com  $\mathbb{R}$ , como ilustrado na Figura 4.3,

Figura 4.3: Diagrama das relações  $u(x, t)$  e  $v(y, t)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

faz-se  $v$  como a função composta de  $u$  com  $h^{-1}$

$$v(y, t) = u \circ h^{-1}(y, t) = u(\alpha(t) + \gamma(t)y, t) \tag{4.8}$$

e supondo que as funções  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  satisfazem as condições

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(t), \beta(t) \in C^3([0, T]), \\ \alpha'(t) < 0, \beta'(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T], \\ (\alpha'(t) + \gamma'(t)y)^2 < \frac{m_0}{2} \quad \forall (t, y) \in [0, T] \times [0, 1], \end{array} \right. \quad (4.9)$$

então a equação (4.1) e suas condições de fronteira (4.2) e iniciais (4.3), tornam-se, respectivamente,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_1 \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \rho_2 \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\gamma^2} \left[ 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy \right) \right] \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{em } Q, \quad (4.10)$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left( a_1 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + a_3 \frac{\partial v}{\partial y} = g(y, t)$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0 \quad \text{em } ]0, T[, \quad (4.11)$$

$$v(y, 0) = v_0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(y, 0) = v_1 \quad \text{em } ]0, 1[, \quad (4.12)$$

onde

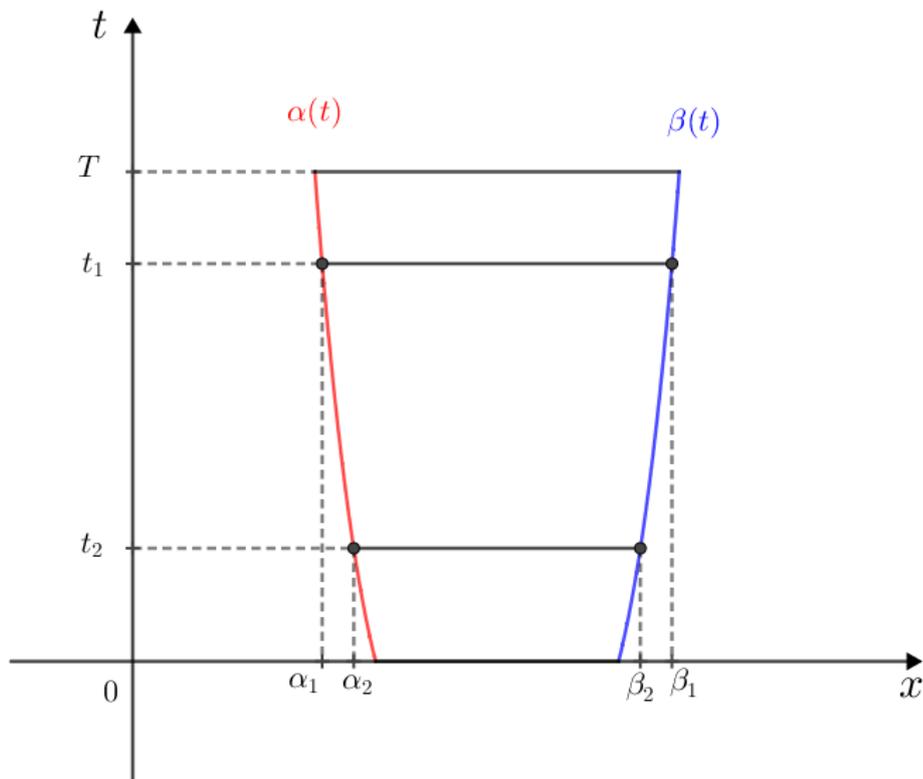
$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(y, t) = \frac{m_0}{2\gamma^2} - \left( \frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right)^2, \\ a_2(y, t) = -2\rho_1 \left( \frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right), \\ a_3(y, t) = - \left( \rho_1 \frac{\alpha'' + \gamma''y}{\gamma} + (\rho_1' + \rho_2) \frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right), \\ \tilde{M}(t, \lambda) = M(t, \lambda) - \frac{m_0}{2}. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

E fixando

$$\hat{M}(t, \lambda) = \int_0^\lambda \tilde{M}(t, \zeta) d\zeta. \quad (4.14)$$

Observa-se, pelas condições assumidas em (4.9), em particular,  $\alpha'(t) < 0$  e  $\beta'(t) > 0$ , que  $Q_t$  está crescendo. Ou seja, sendo  $t_1 > t_2$  então a projeção de  $[\alpha(t_1), \beta(t_1)]$  contém a projeção de  $[\alpha(t_2), \beta(t_2)]$ , quando projetadas sobre um mesmo subespaço (por exemplo, com  $t = 0$ ).

Figura 4.4: Gráfico genérico com as projeções do domínio móvel.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que a segunda condição de (4.4) e a terceira condição de (4.9), implicam

$$a_1(y, t) > 0 \quad \forall (y, t) \in Q, \quad (4.15)$$

$$\tilde{M} \geq \frac{m_0}{2} \quad \forall (t, \lambda) \in [0, T] \times [0, \infty[. \quad (4.16)$$

E também, sendo  $\alpha(t) < \beta(t)$  para todo  $t \in [0, T]$ , a terceira condição de (4.9) resulta

$$\frac{\partial a_2}{\partial y} = -\rho_1 \frac{\gamma'}{\gamma} < 0. \quad (4.17)$$

Além disso, coloca-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_i = \max_{0 \leq t \leq T} |\gamma^{(i)}(t)| \quad (i = 0, 1, 2, 3), \\ \gamma_i = \min_{0 \leq t \leq T} |\gamma^{(i)}(t)| \quad (i = 0, 1), \\ r_{1i} = \max_{0 \leq t \leq T} |\rho_1^{(i)}(t)| \quad (i = 0, 1, 2), \\ r_{2i} = \max_{0 \leq t \leq T} |\rho_2^{(i)}(t)| \quad (i = 0, 1), \\ \bar{\alpha}_i = \max_{0 \leq t \leq T} |\alpha^{(i)}(t)| \quad (i = 0, 1, 2, 3), \end{array} \right. \quad (4.18)$$

onde  $\phi^{(k)}(\cdot)$  é uma  $k$ -ésima derivada da função genérica  $\phi$ .

## 4.2 Existência da solução local

Objetivo da presente seção é demonstrar a existência e unicidade da solução local para o problema (4.1). Inicialmente, considere o seguinte teorema.

**Teorema 4.1.** Sejam  $I_0 = ]\alpha(0), \beta(0)[$  para  $t = 0$  e  $I_t = ]\alpha(t), \beta(t)[$  para  $0 < t < T$ . Supondo

$$u_0 \in H_0^2(I_0), \quad u_1 \in H_0^1(I_0), \quad f \in L^2(0, T; H_0^1(I_t)), \quad (4.19)$$

então existe  $T^* > 0$  tal que a equação (4.1) com condições (4.2) e (4.3) admite em  $[0, T^*]$  uma única solução  $u$  pertencente à classe

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^\infty(0, T^*; H_0^1(I_t) \cap H^2(I_t)), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T^*; H^1(I_t)), \\ \sqrt{\rho_1} \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T^*; H^1(I_t)), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \in L^2(0, T^*; L^2(I_t)) \end{array} \right. \quad (4.20)$$

e  $u$  satisfaz a equação (4.1) no sentido de  $L^2(0, T^*; L^2(I_t))$ .

Considerando a transformação do domínio apresentado na seção anterior, na prática, para demonstrar o Teorema 4.1, demonstra-se primeiro o teorema referente ao problema com domínio fixo dado por (4.10).

**Teorema 4.2.** Dadas as hipóteses

$$v_0 \in H_0^2(0, 1), \quad v_1 \in H_0^1(0, 1), \quad g \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)), \quad (4.21)$$

existe  $T^* > 0$  tal que a equação (4.10) com as condições (4.11) e (4.12) admite em  $[0, T^*]$  uma única solução  $v$  pertencente à classe

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in L^\infty(0, T^*; H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)), \\ \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T^*; H^1(0, 1)), \\ \sqrt{\rho_1} \frac{\partial v}{\partial t} \in L^\infty(0, T^*; H^1(0, 1)), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_1 \frac{\partial v}{\partial t} \right) \in L^2(0, T^*; L^2(0, 1)) \end{array} \right. \quad (4.22)$$

e  $v$  satisfaz a equação (4.10) no sentido de  $L^2(0, T^*; L^2(0, 1))$ .

**Observação 4.1.** O intervalo  $[0, T^*]$  mencionado no teorema (4.2) depende de  $v_0$  e  $v_1$ . Mas o argumento usado no teorema (4.2) permite determinar  $T^*$  como uma função do número  $K$  positivo, de modo que a solução permaneça em  $[0, T^*]$  para todos os dados iniciais  $v_0$  e  $v_1$  satisfazendo

$$\|v_1\|_{H^1} + \|v_0\|_{H^2} \leq K, \quad (4.23)$$

onde  $\|\cdot\|_{H^m}$  ( $m = 0, 1, 2$ ) denota a norma em  $H^m(0, 1)$  (para  $m = 0$ ,  $H^m(0, 1)$  indica o espaço  $L^2(0, 1)$ ).

*Demonstração do Teorema 4.2.* Pelo método Faedo-Galerkin constrói-se uma sequência de soluções aproximadas para as quais se estabelece uma estimativa *a priori* adequada, para então passar o limite.

Considerando  $\{w_j, \lambda_j\}_{j=1}^\infty$  as soluções do problema espectral associado ao problema de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 w_j}{dx^2} = \lambda_j w_j, \\ w_j(0) = w_j(1). \end{array} \right.$$

Denotando por  $V_m = [w_1, \dots, w_m]$  o subespaço de  $H_0^1(0, 1)$  gerado pelos primeiros  $m$  autovetores  $w_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) e assumindo  $\{w_j\}_{j=1}^\infty$  ortonormais em  $L^2(0, 1)$ .

Aproxima-se  $v : [0, T] \rightarrow H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$  por

$$v_{m\varepsilon}(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm\varepsilon}(t)w_j,$$

onde  $\{g_{jm\varepsilon}\}_{j=1}^m$  são as funções soluções desconhecidas do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_{1\varepsilon} \frac{\partial v_{m\varepsilon}}{\partial t} \right), w_j \right\rangle + \rho_2 \left\langle \frac{\partial v_{m\varepsilon}}{\partial t}, w_j \right\rangle \\ & + \frac{1}{\gamma^2} \left[ 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v_{m\varepsilon}}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) \right] \left\langle \frac{\partial v_{m\varepsilon}}{\partial y}, \frac{\partial w_j}{\partial y} \right\rangle + \left\langle a_1 \frac{\partial v_{m\varepsilon}}{\partial y}, \frac{\partial w_j}{\partial y} \right\rangle \\ & + \left\langle a_2 \frac{\partial^2 v_{m\varepsilon}}{\partial y \partial t}, w_j \right\rangle + \left\langle a_3 \frac{\partial v_{m\varepsilon}}{\partial y}, w_j \right\rangle = \langle g, w_j \rangle \quad (j = 1, \dots, m), \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde  $\rho_{1\varepsilon} = \rho_1 + \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \leq 1$ ) e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto escalar em  $L^2(0, 1)$ . Completando o sistema (4.24) com as condições iniciais

$$v_{m\varepsilon}(0) = v_{0m} = \sum_{j=1}^m (v_0, w_j) w_j \longrightarrow v_0 \quad \text{em } H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1), \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial v_{m\varepsilon}}{\partial t}(0) = v_{1m} = \sum_{j=1}^m (v_1, w_j) w_j \longrightarrow v_1 \quad \text{em } H_0^1(0, 1). \quad (4.26)$$

Agora, se estabelece uma estimativa *a priori* para as soluções aproximadas  $v_{m\varepsilon}(t)$ . Daqui em diante,  $c_i$  denota diferentes constantes que dependem apenas de  $m_0$ ,  $\delta_0$  e os números dados em (4.18). Para facilitar a notação dos cálculos, omite-se o índice  $\varepsilon$ .

Multiplicando a  $j$ -ésima equação (4.24) por  $\frac{\partial g_{jm}}{\partial t}(t)$  e somando em relação a  $j = 1, \dots, m$ ; obtém-se

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \rho_1 \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 + \int_0^1 a_1 \left( \frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{1}{\gamma^2} \widehat{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) + \frac{1}{\gamma^2} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right] \\
& + \left( \rho_2 - \frac{\rho'_1}{2} \right) \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma'}{2\gamma^3} \widetilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \\
& + \frac{\gamma'}{2\gamma^3} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2\gamma} \int_0^1 \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial t}(t, \eta) d\eta \\
& + \frac{\gamma'}{2\gamma^2} \widehat{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{\partial a_2}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_m}{\partial t} \right)^2 dy = I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned} \tag{4.27}$$

com

$$I_1 = - \int_0^1 a_3 \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial t} dy, \quad I_2 = - \int_0^1 \frac{\partial a_1}{\partial t} \left( \frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 dy, \quad I_3 = - \int_0^1 g \frac{\partial v_m}{\partial t} dy.$$

Com base nas hipóteses (4.5), (4.17) e na última condição de (4.4), observa-se que os últimos quatro termos do lado esquerdo da equação (4.27) são positivos.

Além disso, pelas condições (4.18), vê-se que

$$\left| \sum_{i=1}^3 I_i \right| \leq \frac{\delta_0}{2} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 + c_1 \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\delta_0} \|g\|_{L^2}^2.$$

Juntando esta estimativa com a equação (4.27), levando em consideração a última condição de (4.5), tem-se a desigualdade

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \rho_1 \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 + \int_0^1 a_1 \left( \frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{1}{\gamma^2} \widehat{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) + \frac{1}{\gamma^2} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right] \\
& + \frac{\delta_0}{2} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 \leq c_1 \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\delta_0} \|g\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Integrando a desigualdade (4.28) em relação a  $t$ , através do Lema de Gronwall, tem-se a desigualdade

$$\rho_1 \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 \leq \Lambda, \quad (4.29)$$

onde

$$\Lambda = \Lambda(T) = c_2 \left( \|v_1\|_{L^2}^2 + \|v_0\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 \right) e^{c_1 T}. \quad (4.30)$$

Definindo

$$S_0 = \max_{(t,\lambda) \in R} \left| \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \lambda}(t, \lambda) \right|, \quad S_1 = \max_{(t,\lambda) \in R} |\tilde{M}(t, \lambda)|, \quad (4.31)$$

onde  $R = [0, T] \times [0, \Lambda]$  e  $\Lambda$  é dado por (4.30).

Neste momento, substituindo  $w_j$  por  $-\lambda_j^{-1} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2}$  na equação (4.24), multiplicando a  $j$ -ésima equação de (4.24) por  $\frac{\partial g_{jm}}{\partial t}(t)$  e somando com respeito a  $j$ , tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \rho_1 \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left( 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) \right) \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 \right. \\ & \left. + 2 \int_0^1 \left( \frac{\partial a_1}{\partial y} + a_2 + a_3 \right) \left( \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) dy + \int_0^1 a_1 \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right)^2 dy \right] \\ & + \left( \rho_2 - \frac{\rho_1'}{2} \right) \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2 + \frac{\beta'}{2\gamma} \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t}(t, 1) \right)^2 - \frac{\alpha'}{2\gamma} \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t}(t, 0) \right)^2 \\ & - \frac{1}{2\gamma^2} \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 \frac{\partial \tilde{M}}{\partial t} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) + \frac{\gamma'}{\gamma^3} \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{\gamma'}{2\gamma^3} \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^7 I_i \end{aligned} \quad (4.32)$$

sendo

$$I_1 = \frac{1}{2\gamma^3} \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \lambda} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2,$$

$$I_2 = -\frac{\gamma'}{2\gamma^4} \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \lambda} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2,$$

$$I_3 = -\int_0^1 \left( \frac{\partial a_3}{\partial t} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial y \partial t} \right) \left( \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) dy,$$

$$I_4 = -\int_0^1 \left( a_3 + \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) dy,$$

$$I_5 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{\partial a_1}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right)^2 dy,$$

$$I_6 = \int_0^1 \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t} \right) dy,$$

$$I_7 = -\int_0^1 \left( \frac{\partial a_2}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t} \right)^2 dy.$$

Em virtude da desigualdade (4.29) e da definição (4.31), tem-se

$$|I_1 + I_2| \leq \frac{\delta_0}{4} \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2 + c_3 \Lambda^2 S_0^2 \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^4 + S_0 \Lambda c_3 \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2.$$

Além disso, vê-se que

$$|I_3 + I_4 + I_5| \leq c_3 \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 + \frac{\delta_0}{4} \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2.$$

Por fim, obtém-se

$$|I_6 + I_7| \leq c_3 \rho_1 \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2 + \frac{\delta_0}{4} \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\delta} \left\| \frac{\partial g}{\partial y} \right\|_{L^2}^2.$$

Juntando estas estimativas, utilizando o fato que os últimos quatro termos do lado esquerdo da equação (4.32) são positivos e a última condição de (4.5), da equação (4.32), obtém-se a desigualdade

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \rho_1 \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left( 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) \right) \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 \right. \\
& \left. + 2 \int_0^1 \left( \frac{\partial a_1}{\partial y} + a_2 + a_3 \right) \left( \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) dy + \int_0^1 a_1 \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right)^2 dy \right] \\
& + \frac{\delta_0}{4} \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2 \leq c_3 (1 + S_0 \Lambda) \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 + c_3 \rho_1 \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2 \\
& + c_3 \Lambda^2 S_0^2 \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^4 + \frac{1}{\delta_0} \left\| \frac{\partial g}{\partial y} \right\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Agora, tomando

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1m}(t) &= \rho_1 \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 + \int_0^1 a_1 \left( \frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{1}{\gamma^2} \widehat{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) \\
& + \frac{1}{\gamma^2} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2m}(t) &= \rho_1 \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left( 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) \right) \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 \\
& + 2 \int_0^1 \left( \frac{\partial a_1}{\partial y} + a_2 + a_3 \right) \left( \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) dy + \int_0^1 a_1 \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right)^2 dy.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Observando-se que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma^2} \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^1 \left( \frac{\partial a_1}{\partial y} + a_2 + a_3 \right) \left( \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) dy + \frac{k}{\gamma^2} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \\ & \geq \left( \frac{k}{2\Gamma_0^2} - 2\Gamma_0^2 m_1 \right) \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\Gamma_0^2} \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

com

$$m_1 = \max_{(t,y) \in Q} \left( \left| \frac{\partial a_1}{\partial y} \right|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 \right),$$

enquanto  $\Gamma_0$  é dado em (4.18), e escolhendo

$$k > \Gamma_0^4 m_1, \quad (4.36)$$

obtem-se das expressões (4.34) e (4.35) (ver também as condições (4.4) e (4.14))

$$k\mathcal{L}_{1m}(t) + \mathcal{L}_{2m}(t) \geq c_4 \left( \rho_1 \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|_{H^1}^2 + \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{H^1}^2 \right). \quad (4.37)$$

Além disso, levando em conta as condições (4.18) e (4.29)-(4.31), é fácil ver que

$$k\mathcal{L}_{1m}(t) + \mathcal{L}_{2m}(t) \leq c_4 (1 + S_1) \left( \rho_1 \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|_{H^1}^2 + \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{H^1}^2 \right). \quad (4.38)$$

Fixando

$$\mathcal{L}_m(t) = k\mathcal{L}_{1m}(t) + \mathcal{L}_{2m}(t). \quad (4.39)$$

Multiplicando a desigualdade (4.28) por  $k$  dado em (4.36), adicionado a equação (4.33), usando (4.34), (4.35) e (4.39), chega-se a desigualdade

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_m(t) + \frac{\delta_0}{4} \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t} \right\|_{H^1}^2 \leq c_5 (\mathcal{L}_m(t) + \mathcal{L}_m^2(t)) + \frac{2}{\delta_0} \|g\|_{H^1}^2. \quad (4.40)$$

Da desigualdade (4.40), obtém-se a existência de  $T^* > 0$  tal que

$$\mathcal{L}_m(t) \leq c_6 \quad \forall t \in [0, T^*]$$

por consequência, segundo a equação (4.37) (ver também equação (4.39)), implica

$$\rho_1 \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|_{H^1}^2 + \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{H^1}^2 \leq c_7, \quad \int_0^t \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|_{H^1}^2 ds \leq c_7 \quad \forall t \in [0, T^*]. \quad (4.41)$$

Finalmente, multiplicando a  $j$ -ésima equação de (4.24) por  $\rho_1 \frac{\partial^2 v_{jm}}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \frac{\partial v_{jm}}{\partial t}$  e somando com respeito a  $j$ , chega-se, usando (4.29) e (4.41), a estimativa

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_1 \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) \right\|_{L^2}^2 ds \leq c_8 \quad \forall t \in [0, T^*]. \quad (4.42)$$

As estimativas (4.29), (4.41) e (4.42) estão estabelecidas. Tornando, nesse momento, possível passar o limite na equação (4.24). Assim, a argumentação utilizada para os termos lineares é a clássica, porém é necessário justificar o limite para o termo não linear.

Das estimativas (4.29) e (4.41), segue que  $\frac{\partial v_m}{\partial y}$  é limitada em  $C^0(0, T; L^2(0, 1))$ . Além disso, desde que

$$\left| \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y}(t) \right\|_{L^2}^2 - \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y}(\tau) \right\|_{L^2}^2 \right| \leq 2|t - \tau|^{1/2} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{C^0(0, T^*; L^2(0, 1))} \left\| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y \partial t}(t) \right\|_{L^2(0, T^*; L^2)},$$

deduzindo do teorema de Ascoli-Arzelà e de (4.41) que se pode extrair uma subsequência  $\{v_\nu\}$  tal que  $\left\{ \left\| \frac{\partial v_\nu}{\partial y}(t) \right\|_{L^2}^2 \right\}$  converge uniformemente em  $[0, T^*]$  para  $\left\| \frac{\partial v}{\partial y}(t) \right\|_{L^2}^2$ .

Uma vez que a função  $\tilde{M}(\cdot, \cdot)$  pertence a classe  $C^1([0, T^*] \times [0, \infty[)$  e  $\frac{\partial v_\nu}{\partial y}$  é limitada em  $L^2(0, T^*; H^1(0, 1))$  (pode estar passando para a nova subsequência), tem-se para  $\nu > j$

$$\tilde{M} \left( t, \left\| \frac{\partial v_\nu}{\partial y}(t) \right\|_{L^2}^2 \right) \left\langle \frac{\partial^2 v_\nu}{\partial y^2}, w_j \right\rangle \rightarrow \tilde{M} \left( t, \left\| \frac{\partial v}{\partial y}(t) \right\|_{L^2}^2 \right) \left\langle \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, w_j \right\rangle. \quad (4.43)$$

Substituindo na equação (4.24)  $\nu$  no lugar de  $m$  e passando o limite para  $\nu \rightarrow \infty$ , obtém-se, levando em conta a equação (4.43) e os argumentos clássicos para a passagem do limite nos termos lineares,

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_{1\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} \right), w_j \right\rangle + \rho_2 \left\langle \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}, w_j \right\rangle \\ & + \frac{1}{\gamma^2} \left[ 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) \right] \left\langle \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, \frac{\partial w_j}{\partial y} \right\rangle + \left\langle a_1 \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, \frac{\partial w_j}{\partial y} \right\rangle \\ & + \left\langle a_2 \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial y \partial t}, w_j \right\rangle + \left\langle a_3 \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, w_j \right\rangle = \langle g, w_j \rangle \quad \text{em } L^2(0, T^*). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Observando que as estimativas (4.29), (4.41) e (4.42) obtidas anteriormente também são independentes de  $\varepsilon$ . Portanto, pelos mesmos argumentos, pode-se passar o limite na equação (4.44) quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Assim, a função  $v$  satisfaz a equação (4.10) no sentido de  $L^2(0, T^*; L^2(0, 1))$ .

A unicidade da solução é pode ser obtida pelo argumento clássico. Portanto, a prova do teorema (4.2) está completa. □

*Demonstração do Teorema 4.1.* Seja  $v$  a solução obtida do problema Teorema 4.2 e  $u$  definido por (4.8), então  $u$  pertence a classe (4.20). Além disso, se  $u \in L^2(0, T^*; H_0^1(I_t))$  e tomando

$$v(y, t) = (v \circ h)(x, t) = u(x, t),$$

então, da equação (4.10), vê-se que  $u$  satisfaz a equação (4.1) no sentido de  $L^2(0, T^*; L^2(I_t))$ .

Em relação a unicidade, sejam  $u_1$  e  $u_2$  duas soluções para a equação (4.1), e  $v_1, v_2$  duas funções obtidas pelo difeomorfismo  $h$  dado por (4.6). Assim,  $v_1$  e  $v_2$  são soluções da equação (4.10). Pelo resultado da unicidade do Teorema 4.2, tem-se  $v_1 = v_2$ , então  $u_1 = u_2$ . Portanto, a prova do Teorema 4.1 está completa. □

### 4.3 Existência da solução global

Para esta seção, além das hipóteses (4.4) e (4.9), assume-se também que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\left| \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \lambda} \right| (t, \lambda) \leq \tilde{S} \quad \forall t > 0, \quad \forall \lambda \in [0, \Lambda], \quad (4.45)$$

$$|\alpha^{(i)}(t)| \leq \varepsilon_0, \quad |\beta^{(i)}(t)| \leq \varepsilon_0 \quad \forall t > 0 \quad (i = 1, 2), \quad (4.46)$$

onde  $\tilde{S}$  é uma constante independente de  $t$ ,  $\Lambda$  é dado em (4.47), enquanto  $\varepsilon_0$  é um número positivo adequado definido em (4.64). Assume-se também

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^\infty(0, \infty; L^2)} \leq \Lambda \quad (4.47)$$

onde  $\Lambda$  é um dado número positivo.

A seguir,  $c_i = (i = 1, \dots, 6)$  denota a constante que depende apenas de  $m_0$ ,  $\delta_0$  e dos números  $\gamma_0$ ,  $r_{1i}$  ( $i = 0, 1, 2$ ) e  $r_{2i}$  ( $i = 0, 1$ ) definidos em (4.18).

#### 4.3.1 Estimativas *a priori*

Considerando o produto escalar em  $L^2(0, 1)$  da equação (4.10) com  $\frac{\partial v}{\partial t}$ . Obtém-se a igualdade (4.27), substituindo  $v$  no lugar de  $v_m$ .

Relembrando as expressões dos termos  $I_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) do lado direito da igualdade na equação (4.27), chega-se, considerando a hipótese (4.46) (veja também as condições (4.13))

$$\left| \sum_{i=1}^3 I_i \right| \leq \frac{\delta_0}{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 + c_1 \varepsilon_0 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\delta_0} \|g\|_{L^2}^2,$$

onde se utilizou também a desigualdade  $\left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2} \leq \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L^2}$ .

Tomando

$$\mathcal{L}_1(t) = \rho_1 \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 + \int_0^1 a_1 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{1}{\gamma} \widehat{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) + \frac{1}{\gamma^2} \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2, \quad (4.48)$$

decorre da equação (4.48) e do mesmo argumento da desigualdade (4.28), a desigualdade

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_1(t) + \frac{\delta_0}{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\Gamma_0^2} \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \leq c_1 \varepsilon_0 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\delta_0} \|g\|_{L^2}^2. \quad (4.49)$$

Em outras palavras, o produto escalar em  $L^2(0, 1)$  da equação (4.10) com  $-\frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t}$ , resulta a igualdade (4.32), onde se substituiu a função  $v_m$  por  $v$ .

Levando em conta as expressões dos termos  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) (veja a equação (4.32)), chega-se, pelas hipóteses (4.45) e (4.47)

$$|I_1 + I_2| \leq \frac{\tilde{S}\Lambda}{2\gamma_0^3} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 + \frac{\tilde{S}\Gamma_1}{2\gamma_0^4} \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2.$$

Além disso, utilizando (4.46)(veja também (4.13)), segue

$$\left| \sum_{i=3}^6 I_i \right| \leq c_2 \varepsilon_0 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 + \frac{\delta_0}{2} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\delta_0} \left\| \frac{\partial g}{\partial y} \right\|_{L^2}^2.$$

Finalmente, utilizando (4.47) e (4.17)

$$|I_7| \leq c_3 \varepsilon_0 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2.$$

Relembrando da expressão da igualdade (4.32), para a qual acrescenta-se as estimativas do termos  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) feitas anteriormente, chega-se pelo mesmo argumento de (4.33) na desigualdade

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_2(t) + \left( \frac{\delta_0}{2} - c_3 \varepsilon_0 \right) \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2 &\leq c_2 \varepsilon_0 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\delta_0} \left\| \frac{\partial g}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \\ &+ \frac{\tilde{S}\Lambda}{2\gamma_0^3} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 + \frac{\tilde{S}\Gamma_1}{2\gamma_0^4} \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(t) &= \rho_1 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left[ 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) \right] \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 \\ &+ 2 \int_0^1 \left( \frac{\partial a_1}{\partial y} + a_2 + a_3 \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dy + \int_0^1 a_1 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 dy. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Considere agora o produto escalar em  $L^2(0, 1)$  da equação (4.10) com  $-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^1 \rho_1 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy + \frac{1}{2} \rho_2 \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right] + \frac{1}{\gamma^2} \left[ 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2} \right) \right] \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 \\ + \int_0^1 a_1 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 dy = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned} \quad (4.52)$$

com

$$I_1 = \rho_2' \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 + \rho_1 \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left( a_3 - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dy,$$

$$I_3 = - \int_0^1 \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy,$$

$$I_4 = \int_0^1 a_2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dy.$$

Dada a hipótese (4.46) e as expressões das funções  $a_2$  e  $a_3$  em (4.13), vê-se que

$$|I_1 + I_2 + I_3| \leq \frac{1}{4\Gamma_0^2} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 + c_4 \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial g}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 + \|\rho_1\|_{L^\infty} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2,$$

$$|I_4| \leq \frac{1}{4\Gamma_0^2} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 + c_5 \varepsilon_0 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2.$$

Estas estimativas, juntamente com a equação (4.52), resultam em

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_3(t) + \frac{1}{2\Gamma_0^2} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 \leq c_5 \varepsilon_0 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2 + c_4 \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial g}{\partial y} \right\|_{L^2}^2, \quad (4.53)$$

com

$$\mathcal{L}_3(t) = \int_0^1 \rho_1 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy + \frac{1}{2} \rho_2 \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2. \quad (4.54)$$

Neste momento, pode-se afirmar o resultado deste trabalho sobre a existência e a unicidade da solução global. De acordo com o teorema a seguir.

**Teorema 4.3.** Sejam  $u_0 \in H_0^2(I_0)$ ,  $u_1 \in H_0^1(I_0)$  e  $f \in L^2(0, \infty; H^1(I_t))$ . Assumindo que as condições (4.45) até (4.47) são satisfeitas e as normas  $\|u_0\|_{H^2(I_0)}$ ,  $\|u_1\|_{H^1(I_0)}$  e  $\int_0^\infty \|f\|_{H^1(I_t)}^2 dt$  são suficientemente pequenas. Então a equação (4.1) com condições (4.2) e (4.3) admite uma, e somente uma, solução  $u$  da classe

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(I_t) \cap H^2(I_t)) \cap L^2(0, \infty; H^2(I_t)), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, \infty; H^1(I_t)), \\ \rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, \infty; H^1(I_t)), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \in L^2(0, \infty; L^2(I_t)) \end{array} \right. \quad (4.55)$$

e satisfaz a equação (4.1) no sentido de  $L^2(0, \infty; L^2(I_t))$ .

Análoga à demonstração do teorema da existência e unicidade da solução local, transforma-se o domínio móvel para o domínio fixo. Considerando o teorema a seguir referente ao domínio fixo.

**Teorema 4.4.** Sejam  $v_0 \in H_0^2(0, 1)$ ,  $v_1 \in H_0^1(0, 1)$  e  $g \in L^2(0, \infty; H^1(0, 1))$ . Assumindo que as condições (4.45) até (4.47) são satisfeitas e as normas  $\|v_0\|_{H^2}$ ,  $\|v_1\|_{H^1}$  e  $\int_0^\infty \|g\|_{H^1}^2 dt$  são suficientemente pequenas. Então a equação (4.10) com condições (4.11) e (4.12) admite uma, e somente uma, solução  $v$  da classe

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)) \cap L^2(0, \infty; H^2(0, 1)), \\ \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, \infty; H^1(0, 1)), \\ \rho_1 \frac{\partial v}{\partial t} \in L^\infty(0, \infty; H^1(0, 1)), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_1 \frac{\partial v}{\partial t} \right) \in L^2(0, \infty; L^2(0, 1)) \end{array} \right. \quad (4.56)$$

e satisfaz a equação (4.10) no sentido de  $L^2(0, \infty; L^2(0, 1))$ .

*Demonstração do Teorema 4.4.* O Teorema 4.4 segue do Teorema 4.2, se for provado a estimativa *a priori*, demonstra-se que a norma

$$\rho_1 \left\| \frac{\partial v}{\partial t}(t) \right\|_{H^1} + \left\| \frac{\partial v}{\partial y}(t) \right\|_{H^1}$$

é uniformemente limitada para todo  $t \in [0, \infty[$ . De fato, se a norma é limitada para todo  $t$  pela mesma constante, então o Teorema 4.2 implica que a solução  $v$  pode ser prolongada no intervalo  $[t, t + T']$  e, repetindo este argumento, pode-se estender  $v$  para todo o intervalo  $[0, \infty[$ .

Para isto, introduz-se as funções  $\mathcal{L}(t)$ ,  $\mathcal{E}(t)$  e  $\mathcal{D}(t)$ , colocando

$$\mathcal{L}(t) = k_1 \mathcal{L}_1(t) + \mathcal{L}_2(t) + k_2 \mathcal{L}_3(t), \quad (4.57)$$

$$\mathcal{E}(t) = \rho_1(t) \left\| \frac{\partial v}{\partial t}(t) \right\|_{H^1}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial y}(t) \right\|_{H^1}^2, \quad (4.58)$$

$$\mathcal{D}(t) = \left\| \frac{\partial v}{\partial t}(t) \right\|_{H^1}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial y}(t) \right\|_{H^1}^2 \quad (4.59)$$

(veja (4.48), (4.51) e (4.54) para as expressões  $\mathcal{L}_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ )), onde  $k_1$  e  $k_2$  são constantes que são definidas a seguir. De fato, deseja-se escolher  $k_1$  e  $k_2$  tais que

$$c\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c'\mathcal{E}(t), \quad (4.60)$$

$$\mathcal{L}(t) + \bar{c} \int_0^t \mathcal{D}(s) ds \leq \mathcal{L}(0) + \underline{c} \int_0^t \mathcal{D}(s) \left( \mathcal{L}(s) + \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}(s) \right) ds, \quad (4.61)$$

onde  $c$ ,  $c'$ ,  $\bar{c}$  e  $\underline{c}$  são constantes positivas que dependem somente de  $m_0$ ,  $\delta_0$ ,  $\Lambda$  e os números dados em (4.18).

Determina-se as constantes  $k_1$ ,  $k_2$  e o número positivo  $\varepsilon_0$  na desigualdade (4.48), (4.51) e (4.54) pelas seguintes relações:

$$k_2 = \frac{\delta_0}{4 \|\rho_1\|_{L^\infty}}, \quad (4.62)$$

$$k_1 = \Gamma_0^2 \left( 1 + \max \left( (c_6 + k_2^2 c_7), 2c_4 k_2 \right) \right), \quad (4.63)$$

$$\varepsilon_0 = \min \left( \dots, \frac{k_2}{2\Gamma_0^2 (C_2 + G)} \right). \quad (4.64)$$

Também observa-se

$$2 \left| \int_0^1 \left( \frac{\partial a_1}{\partial y} + a_2 + a_3 \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dy \right| \leq \frac{1}{2\Gamma_0^2} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 + c_6 \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2,$$

$$k_2 \left| \int_0^1 \rho_1 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \right| \leq \frac{1}{2} \rho_1 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right\|_{L^2}^2 + k_2^2 c_7 \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2.$$

Relembrando a definição de  $\mathcal{L}(\cdot)$  (veja (4.57) e também (4.48), (4.51), (4.54)), vê-se que as desigualdades acima implicam na desigualdade (4.60) com duas constantes  $c$  e  $c'$ .

Em outras palavras, para desigualdade (4.61), lembra-se das desigualdades (4.49), (4.50) e (4.53). Neste momento, somando as desigualdades (4.49)  $\times k_1$ , (4.50) e (4.53)  $\times k_2$ , onde  $k_1$  e  $k_2$  são dados em (4.62) e (4.63), e substituindo nestas a expressão (4.64) de  $\varepsilon_0$ , obtém-se imediatamente (4.61) com duas constantes  $\bar{c}$  e  $\underline{c}$ .

Agora, suponha

$$\mathcal{L}(0) < \min \left( \frac{\bar{c}}{\underline{c}} + \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{\bar{c}}{\underline{c}}} \right), c\Lambda \right). \quad (4.65)$$

Então, desde que se tenha

$$\underline{c}(r + \sqrt{r})\bar{c}, \quad \forall r \in \left[ 0, \frac{\bar{c}}{\underline{c}} + \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{\bar{c}}{\underline{c}}} \right) \right],$$

deduz-se da desigualdade (4.61)

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0), \quad \forall t > 0. \quad (4.66)$$

Da mesma forma, segue

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^\infty(0, \infty; L^2)} \leq \Lambda$$

significando que a hipótese (4.47) é verdadeira.

Portanto, pode-se dizer que a desigualdade (4.65) implica na desigualdade (4.66) sem a hipótese (4.47). Então, em virtude de (4.60) e (4.58), com (4.66) obtém-se a estimativa *a priori*

$$\rho_1 \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{H^1}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{H^1}^2 \leq \frac{1}{c} \mathcal{L}(0),$$

para todo  $t \in [0, \infty[$ , e assim, com base no Teorema 4.2 (veja também a observação 4.1), é possível continuar a solução  $v$  em todo o intervalo  $[0, \infty[$ .

Finalmente, desde que

$$\bar{c} - \underline{c} \left( \mathcal{L}(t) + \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}(t) \right) \geq v > 0$$

(veja as desigualdades (4.65) e (4.66)), deduz-se de (4.61) (veja a igualdade (4.59))

$$\mathcal{D}(\cdot) \in L^1(0, \infty).$$

Relembrando a expressão de  $\mathcal{D}(\cdot)$ , vê-se que  $v$  pertence à classe dada no Teorema 4.4.

A unicidade da solução decorre do Teorema 4.2, dado isso, completa-se a prova de Teorema 4.4.

□

*Demonstração do Teorema 4.3.* Seja  $v$  a solução obtida no Teorema 4.4 e  $u$  definido em (4.8), então  $u$  pertence à classe (4.20). Além disso, se  $u \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(I_t) \cap H^2(I_t))$  e se for tomado

$$v(y, t) = (v \circ h)(x, t) = u(x, t) \quad (4.67)$$

(veja (4.6) para  $h$ ), então vê-se por (4.2) que  $u$  satisfaz o problema (4.1).

Sejam  $u_1, u_2$  duas soluções para o problema (4.1), e  $v_1, v_2$  duas funções obtidas através do difeomorfismo  $h$  dado em (4.6). Então  $v_1, v_2$  são soluções para o problema transformado (4.10). Pelo resultado da unicidade do Teorema 4.2, tem-se  $v_1 = v_2$ , logo  $u_1 = u_2$ . Portanto, a demonstração do Teorema 4.3 está completa.

□

## 4.4 Comportamento assintótico

Nesta seção, assume-se que as seguintes hipóteses estão garantidas:

$$M(t, \lambda)\lambda \geq \widehat{M}(t, \lambda) = \int_0^\lambda M(t, \sigma) d\sigma \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \lambda > 0, \quad (4.68)$$

$$\begin{cases} 0 \leq \sqrt{\rho_1(t)}\beta'(t) \leq (1 + m_0)^{\frac{1}{2}}, \\ -(1 + m_0)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\rho_1(t)}\alpha'(t) \leq 0 \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (4.69)$$

Então, é enunciado o resultado a seguir.

**Teorema 4.5.** Sejam  $u_0 \in H_0^1(I_0)$  e  $u_1 \in L^2(I_0)$ . Assume-se que as hipóteses (4.68) e (4.69) são satisfeitas. Então a solução do problema (4.1) com  $f = 0$  satisfaz, para todo  $t > 0$ , a desigualdade

$$\rho_1(t) \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(I_t)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t) \right\|_{L^2(I_t)}^2 + \widehat{M} \left( t, \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t) \right\|_{L^2(I_t)}^2 \right) \leq C e^{-\alpha t} \quad (4.70)$$

para as constantes positivas adequadas  $C$  e  $\alpha$ .

*Demonstração.* Sejam  $s \in ]t, t + 1[$  e  $I_s = ]\alpha(s), \beta(s)[$ . Considerando o produto escalar em  $L^2(I_t)$  da equação do problema (4.1) com  $\frac{\partial u}{\partial s}$ , chega-se em

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[ \rho_1(s) \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 + \widehat{M} \left( s, \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 \right) \right] ds \\ & + \left( \rho_2(s) + \frac{1}{2} \rho_1'(s) \right) \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 - \frac{1}{2} \int_0^s \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial s}(s, \sigma) d\sigma \\ & + \frac{1}{2\beta'} \left| \frac{\partial u}{\partial s}(s, \beta(s)) \right|^2 \left[ \rho_1(s) \beta'^2(s) - \left( 1 + \widetilde{M} \left( s, \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 \right) \right) \right] \\ & + \frac{1}{2\alpha'} \left| \frac{\partial u}{\partial s}(s, \alpha(s)) \right|^2 \left[ \rho_1(s) \alpha'^2(s) - \left( 1 + \widetilde{M} \left( s, \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 \right) \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.71)$$

onde foi utilizada a relação

$$\frac{\partial u}{\partial x} u(s, x) \beta'(s) + \frac{\partial u}{\partial s}(s, x) \Big|_{\partial I_s} = 0$$

que é uma consequência da condição  $u(s, x)|_{\partial I_s} = 0$  para todo  $s \in [t, t + 1]$ .

Levando em conta as condições (4.68) e (4.69) e lembrando a última condição de (4.4), da igualdade (4.71) integrada de  $t$  para  $\tau$ , deduz-se que

$$E(\tau) - E(t) + \delta_0 \int_t^\tau \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 ds \leq 0 \quad (4.72)$$

com

$$E(s) = \rho_1(s) \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 + \widetilde{M} \left( s, \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 \right). \quad (4.73)$$

Da desigualdade (4.72), segue que  $E(\cdot)$  é decrescente e tem-se

$$\int_t^{t+1} \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 ds \leq \delta_0^{-1} J^2(t), \quad J^2(t) = E(t) - E(t+1) > 0. \quad (4.74)$$

Além disso, deduz-se de (4.74) e o teorema do valor médio, a existência de  $t_1, t_2 \in [t, t+1]$ , com  $t_1 < t_2$  tal que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial s}(t_1) \right\|_{L^2(I_{t_1})}^2 \leq \delta_0^{-1} J^2(t), \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(t_2) \right\|_{L^2(I_{t_2})}^2 \leq \delta_0^{-1} J^2(t). \quad (4.75)$$

Agora, multiplica-se a equação do problema (4.1) por  $u$  e integra-se com respeito a  $(s, x) \in ]t_1, t_2[ \times I_s$ , então

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[ 1 + \tilde{M} \left( s, \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 \right) \right] \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 ds \\ &= \int_{I_s} \rho_1(t_2) \left( \frac{\partial u}{\partial s}(t_2, x) \right) u(t_2, x) dx - \int_{I_s} \rho_1(t_1) \left( \frac{\partial u}{\partial s}(t_1, x) \right) u(t_1, x) dx \\ & \quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_{I_s} \rho_1(s) \left( \frac{\partial u}{\partial s}(s, x) \right)^2 dx ds - \int_{t_1}^{t_2} \int_{I_s} \rho_2(s) \left( \frac{\partial u}{\partial s}(s, x) \right) u(s, x) dx \\ &= \sum_{i=1}^4 L_i. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Observa-se que

$$|L_1 + L_2| \leq \left( \max_{0 \leq t < \infty} \left| \sqrt{\rho_1(t)} \right| \right) |\beta(t_2) - \alpha(t_1)| \delta_0^{-1} J(t) \sqrt{E(t)},$$

$$|L_3| \leq \left( \max_{0 \leq t < \infty} \left| \sqrt{\rho_1(t)} \right| \right) \delta_0^{-1} J^2(t).$$

Para o termo  $|L_4|$ , tem-se

$$|L_4| \leq \int_t^{t+1} \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 ds + \left( \max_{0 \leq t < \infty} \left| \sqrt{\rho_1(t)} \right| \right)^2 |\beta(t_2) - \alpha(t_1)| \delta_0^{-1} J^2(t).$$

Acrescentando estas estimativas a equação (4.76), chega-se, levando em consideração (4.69), a desigualdade

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 + \tilde{M} \left( s, \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\|_{L^2(I_s)}^2 \right) \right) ds \leq c_1 J(t) \sqrt{E(t)} + c_2 J^2(t), \quad (4.77)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são duas constantes positivas independentes de  $t$ .

Relembrando a expressão (4.73) de  $E$  e levando em conta as relações (4.74) e (4.77), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt &\leq c_1 J(t) \sqrt{E(t)} + \left( c_2 + \delta_0^{-1} \left( \max_{0 \leq t \leq \infty} |\rho_1(t)| \right) \right) J^2(t) \\ &\leq c_1 J(t) \sqrt{E(t)} + c_3 J^2(t). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Pelo teorema do valor médio, segue de (4.78) a existência de  $t^* \in [t_1, t_2] \subset [t, t+1]$  tal que

$$E(t^*) \leq c_1 J(t) \sqrt{E(t)} + c_3 J^2(t). \quad (4.79)$$

Sendo a função  $E(\cdot)$  decrescente, deduz-se de (4.79)

$$E(t+1) - \frac{1}{2}E(t) \leq c_4(E(t) - E(t+1)) \quad (4.80)$$

com a constante  $c_4$  independente de  $t$ , isto implica

$$E(t+1) \leq (1-d)E(t)$$

com  $d = \frac{1}{2}(1+c_4)$ . Uma vez que para cada  $t \geq 0$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \leq t < n+1$ , pela desigualdade anterior e pelo fato que  $E(t)$  é decrescente em  $t$ , segue

$$E(t) \leq (1-d)^n E(0).$$

Além disso, tem-se  $(1-d)^{n+1} \leq (1-d)^t$  e

$$E(t) \leq (1-d)^t \frac{E(0)}{1-d}.$$

Neste momento, tomando  $C = \frac{1}{(1-d)} > 0$  e  $\alpha = -\log(1-d) > 0$ , deduz-se pela desigualdade acima que

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\alpha t} \quad \forall t > 0.$$

Portanto, a demonstração do Teorema 4.5 está completa.

□

# Capítulo 5

## Análise numérica

O objetivo deste capítulo é apresentar o desenvolvimento da análise numérica do problema, no qual foram aplicados o método do elementos finitos de Galerkin para a discretização espacial e o método  $\alpha$ -generalizado para resolução do sistema temporal. Para contemplar este objetivo, estabeleceu-se uma linha de raciocínio fundamentada por autores como Zienkiewicz *et al.* [30], Hughes [19], Zhilin *et al.* [34] e Rincon e Liu [25].

Assim, verificou-se que um caminho adequado para o desenvolvimento parte da apresentação da formulação forte encaminhando para formulação fraca, naturalmente considerando toda a fundamentação dos conceitos apresentados no capítulo anterior.

Em seguida, aplicando o método de Galerkin, obtém-se o problema aproximado. Através do mesmo, feita a escolha do tipo de aproximação e definindo a malha do problema, chega-se no problema discretizado, do qual surgem as abordagens matriciais.

As matrizes da análise numérica do problema ocupam posição de destaque e dependem da utilização de um método de integração numérica para serem estabelecidas. Uma vez escolhido o método, as matrizes são construídas, preparando-as para sua utilização no sistema não linear de evolução temporal.

Por meio do sistema não linear e utilizando o método  $\alpha$ -generalizado são obtidas as soluções a cada instante de tempo e, conseqüentemente, as soluções para o problema numérico de forma geral.

Portanto, durante o presente capítulo, serão detalhados cada processo os quais foram resumidos nos parágrafos anteriores. Encaminhando para a implementação do problema numérico e, posteriormente, aplicando esta implementação na linguagem MATLAB, apresentar os resultados obtidos através da simulação computacional.

## 5.1 Formulação forte

Seja o problema a seguir sob uma única dimensão em um sistema de coordenadas cartesianas com componente  $y$ . Sua equação, dada em (4.10), é deduzida através de  $v$  em função da coordenada  $y$  e do tempo. Assume-se que o problema é definido sobre o domínio  $Q$  em um intervalo  $0 < y < 1$  no tempo  $t \geq 0$ . Enfim, chega-se em sua equação

$$(\rho_1 v_t)_t + \rho_2 v_t - \frac{1}{\gamma^2} \left[ 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \int_0^1 (v_y)^2 dy \right) \right] v_{yy} - (a v_y)_y + b v_{yt} + c v_y = g(y, t). \quad (5.1)$$

Completando o problema, são fornecidas as condições de contorno de Dirichlet

$$v(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad v(1, t) = 0, \quad (5.2)$$

e condições iniciais

$$v(y, 0) = v_0 \quad \text{e} \quad v_t(y, 0) = v_1. \quad (5.3)$$

As funções  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $\tilde{M}$  que surgem na equação (5.1) são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} a(y, t) &= \frac{m_0}{2\gamma^2} - \left( \frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right)^2, & b(y, t) &= -2\rho_1 \left( \frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right), \\ c(y, t) &= - \left( \rho_1 \frac{\alpha'' + \gamma''y}{\gamma} + (\rho'_1 + \rho_2) \frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right) & \text{e} \quad \tilde{M}(t, \lambda) &= M(t, \lambda) - \frac{m_0}{2}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Assim, o problema formado pela equação (5.1), condições de contorno (5.2) e condições iniciais (5.3); compõem o que a partir de agora passa a ser chamado de *formulação forte* ou *forma forte*. Além disso, pelo teorema da existência e unicidade 4.2, se

$$v_0 \in H_0^2(0, 1), \quad v_1 \in H_0^1(0, 1), \quad g \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)),$$

então existe  $T^* > 0$  tal que a formulação forte possui solução única  $v$  em  $[0, T^*]$  de classe

$$v \in L^\infty(0, T^*; H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)), \quad v_t \in L^2(0, T^*; H^1(0, 1)),$$

$$\sqrt{\rho_1} v_t \in L^\infty(0, T^*; H^1(0, 1)), \quad (\rho_1 v_t)_t \in L^2(0, T^*; L^2(0, 1)),$$

onde  $v$  satisfaz a formulação forte no sentido de  $L^2(0, T^*; L^2(0, 1))$ .

### 5.1.1 Formulação fraca

Multiplicando a equação da formulação forte (5.1) pela função arbitrária  $w(y) \in H_0^1(0, 1)$  com  $t \in (0, T^*)$  e integrando sobre o domínio espacial  $(0, 1)$ , tem-se

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\rho_1 v_t)_t w \, dy + \int_0^1 \rho_2 v_t w \, dy - \frac{1}{\gamma^2} \left[ 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \int_0^1 (v_y)^2 \, dy \right) \right] \int_0^1 v_{yy} w \, dy \\ & - \int_0^1 (av_y)_y w \, dy + \int_0^1 bv_{yt} w \, dy + \int_0^1 cv_y w \, dy = \int_0^1 gw \, dy. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Além disso, como  $w(0) = w(1) = 0$ , note que a ordem da derivada parcial espacial  $y$  pode ser reduzida pela integração por partes, uma vez que

$$\int_0^1 v_{yy} w \, dy = [v_y w]_0^1 - \int_0^1 v_y w_y \, dy \quad \text{e} \quad (5.6)$$

$$\int_0^1 (av_y)_y w \, dy = [av_y w]_0^1 - \int_0^1 av_y w_y \, dy. \quad (5.7)$$

Substituindo as integrais (5.6) e (5.7) na equação (5.5), e fazendo as devidas simplificações, chega-se na chamada *formulação fraca* ou *forma fraca*

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_0^1 v_{tt} w \, dy + (\rho_2 + \rho_1') \int_0^1 v_t w \, dy + \frac{1}{\gamma^2} \left[ 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \int_0^1 (v_y)^2 \, dy \right) \right] \int_0^1 v_y w_y \, dy \\ & + \int_0^1 av_y w_y \, dy + \int_0^1 bv_{yt} w \, dy + \int_0^1 cv_y w \, dy = \int_0^1 gw \, dy, \end{aligned} \quad (5.8)$$

com as condições de contorno para todo  $t \in (0, T)$

$$v(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad v(1, t) = 0, \quad (5.9)$$

e condições iniciais para todo  $y \in (0, 1)$

$$v(y, 0) = v_0 \quad \text{e} \quad v_t(y, 0) = v_1. \quad (5.10)$$

Assim, se  $v$  satisfaz a equação (5.8), e

$$v \in L^\infty(0, T^*, H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)), \quad v_t \in L^2(0, T^*, H_0^1(0, 1)), \quad v_{tt} \in L^2(0, T^*, L^2(0, 1)),$$

$v$  é dita uma solução fraca.

### 5.1.2 Método de Galerkin

O método de Galerkin consiste na aproximação do espaço das soluções através de um subespaço de dimensão finita. Denotando este subespaço por  $V_N$ , e escolhendo-o de forma que seja gerado por um conjunto linearmente independente de  $N$  elementos do espaço de Hilbert  $H_0^1(\Omega)$ , isto é,  $V_N = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$ , onde  $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$  é uma base hilbertiana de  $H_0^1(\Omega)$ . E, portanto, possibilitando a busca de uma solução aproximada  $v^h$  em  $V_N$ .

Porém, no contexto deste trabalho, o chamado método de Galerkin se refere especificamente à aplicação do método de Faedo-Galerkin em problemas de evolução. Para exemplificar sua aplicação, considere o problema de evolução

$$A[v] = f, \quad (5.11)$$

onde  $v : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função que depende de  $y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  e também do tempo  $t \geq 0$ . Uma vez que a função  $v(y, t)$  está sujeita às condições iniciais

$$D_t^k v(y, 0) = v_0^k(y) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (5.12)$$

sendo  $v_0^k(y)$  funções conhecidas e  $m \geq 1$  a ordem da equação de evolução. A função  $v(y, t)$  também satisfaz as condições de contorno

$$v|_\Sigma = 0, \quad (5.13)$$

onde  $\Sigma$  é a fronteira lateral do cilindro  $\Omega \times (0, T)$ .

Se  $\{\varphi_j(y)\}$  é um sistema completo de funções ortonormalizadas definidas em  $\Omega$  que satisfazem as condições de contorno. As soluções aproximadas para o problema de evolução são da forma

$$v^h(y, t) = \sum_{j=1}^N c_j(t) \varphi_j(y), \quad (5.14)$$

com as funções  $c_j(t)$  são as soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\int_{\Omega} \{A[v^h] - f\} \varphi_i \, dy = 0, \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.15)$$

Completando o sistema, tem-se as condições iniciais

$$D^k g_i(0) = \int_{\Omega} v_0^k \varphi_i \, dy \quad \text{onde } k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (5.16)$$

Uma vez que o sistema (5.15) possui solução, considera-se  $c_j(t)$  bem definidas localmente e obtém-se a solução  $v(y, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} v^h(y, t)$ .

### 5.1.2.1 Problema aproximado

Sejam  $V_N = [\varphi_1, \dots, \varphi_N] \subset V$  o subespaço vetorial gerado pelos  $N$  primeiros elementos da base de Hilbert  $V$  e  $T > 0$ . Introdz-se uma função de aproximação para  $v(y, t)$  no subespaço  $V_N$  onde  $N$  é o número de nós. Assim, toda função  $v^h \in V_N$  tem a forma

$$v^h(y, t) = \sum_{j=1}^N c_j(t) \varphi_j(y). \quad (5.17)$$

Note que os coeficientes  $c_j$  são dependentes do tempo, logo, suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem em relação a  $t$  são denotadas, respectivamente, por

$$v_t^h(y, t) = \sum_{j=1}^N \dot{c}_j(t) \varphi_j(y) \quad \text{e} \quad v_{tt}^h(y, t) = \sum_{j=1}^N \ddot{c}_j(t) \varphi_j(y). \quad (5.18)$$

Aplicando o método de Galerkin, escolhe-se as funções arbitrárias  $w(y)$  como sendo as próprias funções de base  $\varphi_i$  com  $i = 1, \dots, N$ . Levando (5.17) e (5.18) na formulação fraca (5.8), e rearranjando os termos, obtém-se

$$\begin{aligned} & \rho_1 \sum_{j=1}^N \ddot{c}_j \int_0^1 \varphi_j \varphi_i \, dy + \sum_{j=1}^N \dot{c}_j \left[ (\rho_2 + \rho'_1) \int_0^1 \varphi_j \varphi_i \, dy + \int_0^1 b \varphi'_j \varphi_i \, dy \right] \\ & + \sum_{j=1}^N c_j \left\{ \frac{1}{\gamma^2} \left[ 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^N c_k \varphi'_k \right)^2 \, dy \right) \right] \int_0^1 \varphi'_j \varphi'_i \, dy \right. \\ & \left. + \int_0^1 a \varphi'_j \varphi'_i \, dy + \int_0^1 c \varphi'_j \varphi_i \, dy \right\} = \int_0^1 g \varphi_i \, dy, \end{aligned} \quad (5.19)$$

com  $i = 1, \dots, N$ . Expandindo estes somatórios e também  $i = 1, \dots, N$ , chega-se no sistema de  $N$  incógnitas e  $N$  equações. Por intermédio deste sistema, obtém-se sua forma matricial de onde surgem as matrizes  $N \times N$  tais que

$$(M)_{ij} = \int_0^1 \varphi_j \varphi_i \, dy, \quad (D_\omega)_{ij} = \int_0^1 \omega \varphi'_j \varphi_i \, dy, \quad (A_\omega)_{ij} = \int_0^1 \omega \varphi'_j \varphi'_i \, dy, \quad (5.20)$$

onde  $\omega$  é uma função genérica que representa  $a$ ,  $b$  ou  $c$ . Seu termo não linear, também de ordem  $N$ , é dado por

$$A(V(t))_{ij} = \frac{1}{\gamma^2(t)} \left[ 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma(t)} \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^N c_k \varphi'_k \right)^2 \, dy \right) \right] \int_0^1 \varphi'_j \varphi'_i \, dy \quad (5.21)$$

e o vetor de  $N$  linhas

$$F_i = \int_0^1 g \varphi_i \, dy. \quad (5.22)$$

Através destas matrizes, chega-se no sistema não linear de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem descrito por

$$\rho_1 M \ddot{V}(t) + C \dot{V}(t) + K(V(t))V(t) = F(t), \quad (5.23)$$

onde  $V(t) = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T$  é um vetor e

$$C = (\rho_2 + \rho_1')M + D_b \quad \text{e} \quad K(V(t)) = A(V(t)) + A_a + D_c. \quad (5.24)$$

Com suas condições iniciais são dadas por

$$V(0) = v_0^h \quad \text{e} \quad \dot{V}(0) = v_1^h. \quad (5.25)$$

Analisando cada uma das matrizes observa-se que as funções  $\varphi(y)$  e  $\varphi'(y)$ , até este momento não estabelecidas, são indispensáveis para calcular cada integral definida e, conseqüentemente, obter os termos que formam as matrizes. Assim, para de fato prosseguir com a resolução do sistema não linear (5.23), torna-se necessário a prévia definição dessas funções, o que será devidamente desenvolvido na próxima seção.

## 5.2 Função de interpolação e malha

A função de interpolação e a malha cumprem o papel de conectar o problema aproximado com a forma matricial. Naturalmente, as escolhas sobre as mesmas interferem diretamente no tipo de matriz do problema e como as mesmas serão construídas. Além disso, sob o ponto de vista computacional, essas escolhas também têm influência sobre aspectos como o armazenamento dos dados, desempenho do método, erros oriundos das aproximações e na qualidade das aproximações.

Dentre as possibilidades de funções de interpolação, as mais comuns encontradas na literatura são as lineares, as quadráticas e os splines cúbicos. As quais, de acordo com o grau do polinômio interpolador, podem gerar melhores soluções numéricas. Em relação à malha, no contexto deste trabalho, considerou-se apenas duas possibilidades, as malhas não regulares e as regulares.

Portanto, escolhendo a função de interpolação do tipo linear e tomando uma malha regular, serão apresentadas detalhadamente suas definições e implicações dessas escolhas nas matrizes problema. De forma a encaminhar a construção dessas matrizes sob o ponto de vista matemático e, posteriormente, interligá-las com a montagem computacional.

### 5.2.1 Aproximação linear

Para o caso unidimensional o elemento finito linear (ou simplesmente elemento) é um segmento de reta com dois nós  $y_i$  e  $y_{i+1}$ , um em cada extremidade, dispostos em um mesmo eixo orientado onde seu comprimento é dado por  $L = y_{i+1} - y_i$  com  $y_i < y_{i+1}$ .

Neste momento, considerando  $v(y)$  o parâmetro que varia linearmente entre os nós  $y_i$  e  $y_{i+1}$ , então sua equação é dada por

$$v(y) = a_1 + a_2y. \quad (5.26)$$

Se  $v(y_i) = v_i$  e  $v(y_{i+1}) = v_{i+1}$  os valores de  $v(y)$  nos respectivos nós, os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  podem ser determinados, observando que

$$\begin{cases} v_i = a_1 + a_2y_i \\ v_{i+1} = a_1 + a_2y_{i+1} \end{cases} \quad (5.27)$$

trata-se de um sistema linear de duas incógnitas e duas equações. Resolvendo o sistema linear (5.27) para  $a_1$  e  $a_2$ , obtém-se

$$a_1 = \frac{v_i y_{i+1} - v_{i+1} y_i}{y_{i+1} - y_i} = \frac{v_i y_{i+1} - v_{i+1} y_i}{L}, \quad (5.28)$$

$$a_2 = \frac{v_{i+1} - v_i}{y_{i+1} - y_i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{L}. \quad (5.29)$$

Levando (5.28) e (5.29) na equação (5.26), e rearranjando os termos, chega-se em

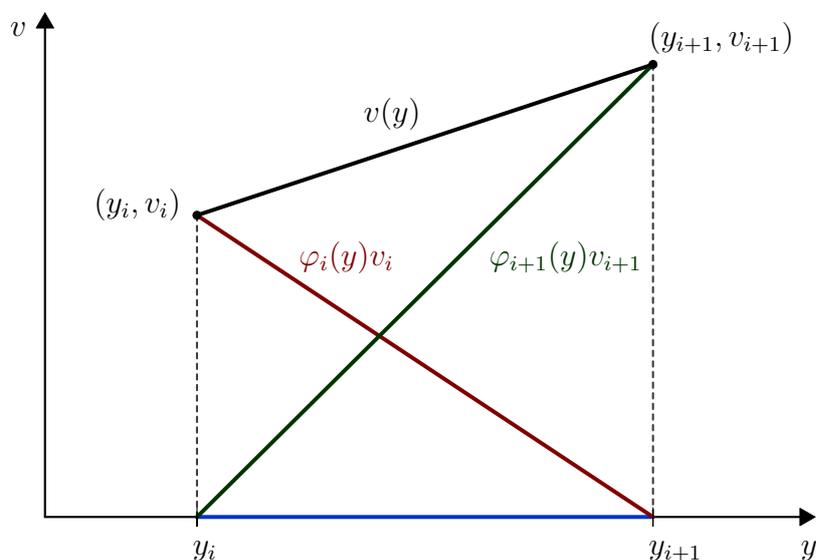
$$v(y) = \left( \frac{y_{i+1} - y}{L} \right) v_i + \left( \frac{y - y_i}{L} \right) v_{i+1}. \quad (5.30)$$

A equação (5.30) é conhecida na literatura como a forma padrão do elemento finito, onde os valores nodais  $v_i$  e  $v_{i+1}$  são multiplicados por funções lineares de  $y$ , as quais são denominadas *funções de forma* ou *de interpolação*. É comum denotar essas funções pela letra  $N_k$  ou  $\varphi_k$  onde o subscrito  $k$  indica o nó ao qual a função de forma está associada. Assim, a equação (5.30) pode ser reescrita por

$$v(y) = \varphi_i v_i + \varphi_{i+1} v_{i+1}, \quad (5.31)$$

onde as funções  $\varphi_i$  e  $\varphi_{i+1}$  são dadas por

$$\varphi_i(y) = \left( \frac{y_{i+1} - y}{L} \right) \quad \text{e} \quad \varphi_{i+1}(y) = \left( \frac{y - y_i}{L} \right).$$

Figura 5.1: Exemplo de um elemento finito (azul) associado à  $v(y)$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Um fato importante observado sobre a função interpoladora  $\varphi_i(y)$  é que

$$\varphi_i(y_i) = \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{y_{i+1} - y_i} \right) = 1 \quad \text{e} \quad \varphi_i(y_{i+1}) = \left( \frac{y_{i+1} - y_{i+1}}{y_{i+1} - y_i} \right) = 0.$$

E, para função  $\varphi_{i+1}(y)$ , tem-se

$$\varphi_{i+1}(y_i) = \left( \frac{y_i - y_i}{y_{i+1} - y_i} \right) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi_{i+1}(y_{i+1}) = \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{y_{i+1} - y_i} \right) = 1.$$

Isto é, o valor da função no próprio nó é igual a um, e no outro nó é igual a zero. Assim, se  $j = i + 1$ , as funções interpoladoras satisfazem a condição

$$\varphi_i(y_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (5.32)$$

onde  $y_j$  é chamado de nó ou ponto nodal. Ficando explícita sua relação com o delta de Kronecker e mostrando a principal vantagem de representar  $v(y)$  pela equação (5.30), ou seja, como combinação linear das funções de forma.

Como será visto a seguir, essas funções são definidas em cada subintervalo do domínio do problema e, conectando-as de maneira ordenada, estabelece-se através da malha do problema o espaço de aproximação de funções.

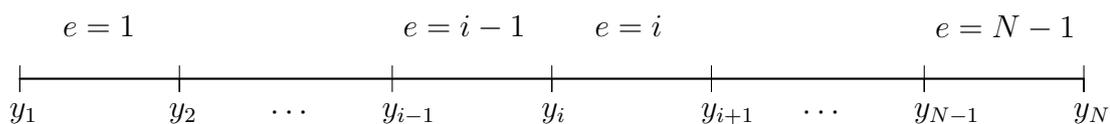
### 5.2.2 Malha e elemento

Dada uma região unidimensional entre  $a$  e  $b$ , que denotam as fronteiras laterais do domínio espacial do problema, distribuí-se ordenadamente  $N$  nós  $y_i$  com  $i = 1, \dots, N$  tais que  $y_1 = a$  e  $y_N = b$ . Dessa forma, chega-se em

$$a = y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_{N-1} < y_N = b. \quad (5.33)$$

Cada par  $y_i$  e  $y_{i+1}$  delimita um subintervalo com comprimento dado por  $h_i = y_{i+1} - y_i$ , totalizando  $N - 1$  subintervalos. Assim, pode-se identificar cada subintervalo como um elemento  $e = 1, \dots, N - 1$  onde  $[y_e, y_{e+1}]$ . Essa divisão em elementos ou simplesmente partição descreve o que passa a ser chamado de *malha do problema*.

Figura 5.2: Exemplo de malha e elementos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que uma função  $v$  quando construída sobre a malha do problema é dita linear por partes se for linear em cada elemento ou subintervalo  $[y_i, y_{i+1}]$ . Além disso, essa função  $v$  é contínua e linear por partes se for linear por partes e contínua em seu domínio.

Assim, com a intenção de contemplar o domínio espacial do problema, constrói-se uma nova função  $v$ . A qual surge como uma extensão natural da função (5.31) para toda a malha do problema.

Através da associação da aproximação linear com uma malha regular<sup>1</sup> (não necessariamente no caso geral), define-se o espaço  $V_N$  de funções aproximativas contínuas e lineares por partes, isto é,

$$V_N = \{v, v(a) = v(b) = 0, v \text{ é contínua e linear por partes}\}. \quad (5.34)$$

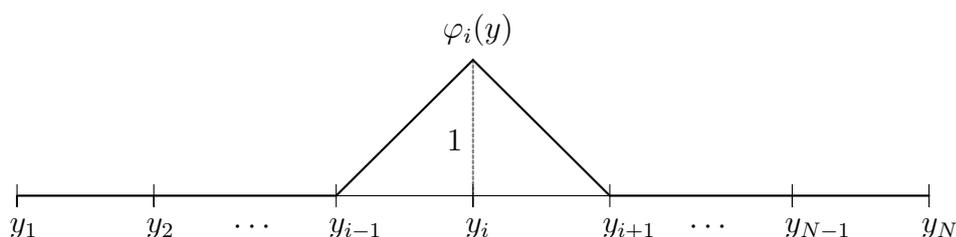
Notando que  $V_N$  é determinado unicamente pelos valores nodais, reciprocamente, chega-se que para qualquer valores nodais existe uma única função  $v \in V_N$ . Portanto, torna-se necessário definir a base nodal, como dado a seguir.

<sup>1</sup>partição em que os elementos têm o mesmo comprimento  $h$ .

Em cada nó  $y_i$ , define-se as funções de base, que satisfazem a condição (5.32), onde cada uma é linear por partes e dada por

$$\varphi_i(y) = \begin{cases} \frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{y - y_{i-1}}{h_{i-1}}, & \text{se } y \in [y_{i-1}, y_i]; \\ \frac{y - y_{i+1}}{y_i - y_{i+1}} = \frac{y_{i+1} - y}{h_i}, & \text{se } y \in [y_i, y_{i+1}]; \\ 0, & \text{se } y \notin [y_{i-1}, y_{i+1}]. \end{cases} \quad (5.35)$$

Figura 5.3: Representação geométrica de  $\varphi_i(y)$ .

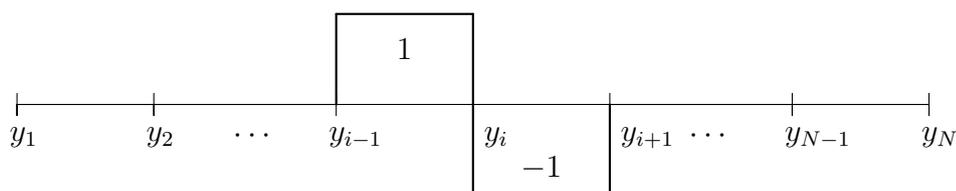


Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa função é conhecida como *função triangular* ou *chapéu*. Uma vez que  $\varphi_i(y)$  é contínua por partes, determina-se sua primeira derivada por

$$\varphi_i'(y) = \begin{cases} \frac{1}{y_i - y_{i-1}} = \frac{1}{h_{i-1}}, & \text{se } y \in [y_{i-1}, y_i]; \\ \frac{-1}{y_{i+1} - y_i} = \frac{-1}{h_i}, & \text{se } y \in [y_i, y_{i+1}]; \\ 0, & \text{se } y \notin [y_{i-1}, y_{i+1}]. \end{cases} \quad (5.36)$$

Figura 5.4: Representação geométrica de  $\varphi_i'(y)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 5.2.2.1 Matrizes e o vetor do problema

Escolhidas as funções de interpolação como as funções definidas anteriormente, são determinados os termos que formam as matrizes  $M$ ,  $C$ ,  $K$  e  $F$  (que é, em particular, um vetor). Para exemplificar considere a matriz  $M$  definida em (5.20) sem perda de generalidade, pois resultados semelhantes são obtidos para as demais matrizes.

Num primeiro momento, assuma por hipótese que a desigualdade  $|i - j| \geq 2$  seja satisfeita para  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ . Como consequência

$$M_{ij} = \int_0^1 \varphi_j \varphi_i \, dy = 0. \quad (5.37)$$

De acordo com (5.35), vê-se que a função  $\varphi_i(y)$  está definida em todo o domínio do problema, embora só possui valores diferentes de zero em  $[y_{i-1}, y_{i+1}]$ . E, analogamente, para função  $\varphi_j(y)$ , tem-se o intervalo  $[y_{j-1}, y_{j+1}]$ .

Observando que a interseção entre esses dois intervalos não formam outro intervalo, então  $\varphi_i(y)$  é nula onde  $\varphi_j(y)$  possui valores não nulos e vice-versa. Assim,

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & M_{32} & M_{33} & M_{34} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_{N-2,N-3} & M_{N-2,N-2} & M_{N-2,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & M_{N-1,N-2} & M_{N-1,N-1} & M_{N-1,N} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & M_{N,N-1} & M_{N,N} \end{bmatrix}$$

Outra característica notável está em cada um dos elementos da diagonal principal ( $i = j$ ) em que  $i = 2, \dots, N - 1$ . Sabe-se por (5.35), que ambas as funções possuem valores não nulos no mesmo intervalo  $[y_{i-1}, y_{i+1}]$ , então

$$M_{ii} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_i \, dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+1}} \varphi_i^2 \, dy = \int_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi_i^2 \, dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_i^2 \, dy. \quad (5.38)$$

Ou seja,  $M_{ii}$  possui duas contribuições, uma do intervalo  $[y_{i-1}, y_i]$  e a outra de  $[y_i, y_{i+1}]$ . Em especial para  $i = 1$  e  $i = N$ , que possuem um de seus nós sobre a fronteira do problema,

por (5.35), tem-se

$$M_{11} = \int_0^1 \varphi_1 \varphi_1 \, dy = \int_{y_1}^{y_2} \varphi_1^2 \, dy \quad \text{e} \quad M_{N,N} = \int_0^1 \varphi_N \varphi_N \, dy = \int_{y_{N-1}}^{y_N} \varphi_N^2 \, dy. \quad (5.39)$$

Agora em relação às diagonais onde  $|i - j| = 1$ , tomando  $j = i + 1$ , chega-se

$$M_{i,i+1} = \int_0^1 \varphi_{i+1} \varphi_i \, dy = \int_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi_{i+1} \varphi_i \, dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_{i+1} \varphi_i \, dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_{i+1} \varphi_i \, dy. \quad (5.40)$$

Porém, como  $\varphi_{i+1}$  é nula no intervalo  $[y_{i-1}, y_i]$  e  $\varphi_i$  é nula em  $[y_{i+1}, y_{i+2}]$ , chega-se que

$$M_{i,i+1} = \int_0^1 \varphi_{i+1} \varphi_i \, dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+2}} \varphi_{i+1} \varphi_i \, dy = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_{i+1} \varphi_i \, dy. \quad (5.41)$$

Obtém-se um resultado análogo para outra diagonal tomando  $i = j + 1$ .

No sistema não linear (5.23), também há a presença do vetor  $F$ . Considerando  $i = 2, \dots, N - 1$ , tem-se

$$F_i = \int_0^1 g \varphi_i \, dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+1}} g \varphi_i \, dy = \int_{y_{i-1}}^{y_i} g \varphi_i \, dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} g \varphi_i \, dy. \quad (5.42)$$

Ou seja, observa-se que esta integral também pode ser dividida em duas contribuições. Em particular, para  $i = 1$  e  $i = N$ , tem-se

$$F_1 = \int_0^1 g \varphi_1 \, dy = \int_{y_1}^{y_2} g \varphi_1 \, dy \quad \text{e} \quad F_N = \int_0^1 g \varphi_N \, dy = \int_{y_{N-1}}^{y_N} g \varphi_N \, dy. \quad (5.43)$$

Assim, o vetor  $F$  é dado por

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-1} \\ F_N \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Em específico a matriz  $M$  é simétrica, porém não necessariamente ocorre o mesmo para as demais matrizes do sistema. Além disso, vê-se que as matrizes são tridiagonais.

Um dos principais resultados desta seção está em notar a vantagem que a escolha da função de interpolação linear traz para o sistema matricial. Isto é, as matrizes serão necessariamente esparsas. Tal fato pode contribuir de forma favorável no armazenamento computacional dessas matrizes. Além disso, ressalta-se novamente que resultados semelhantes são obtidos para todas as matrizes do sistema, exceto em relação à simetria.

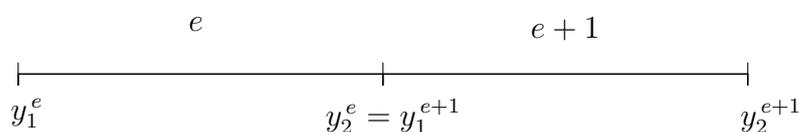
### 5.2.2.2 Abordagem local e global das matrizes e do vetor

Em paralelo à seção anterior, surge a abordagem local das matrizes e do vetor do problema, que possibilita o desenvolvimento de modelos mais práticos de construção das chamadas *matrizes globais*. Em outras palavras, trata-se de uma forma diferente de construir as matrizes do problema, partindo da construção de matrizes menores denominadas de *matrizes locais*. Para isso, muda-se a maneira de visualizar a malha do problema, saindo de uma abordagem nodal para uma abordagem com foco nos elementos.

Como visto anteriormente a malha do problema com  $N$  nós possui  $N - 1$  elementos, assumindo que  $m = N - 1$ , representa-se por  $e = 1, \dots, m$  cada um dos elementos dessa malha. Observando que para todo elemento  $e$  são necessários apenas dois nós para sua delimitação, então considera-se que cada intervalo  $[y_e, y_{e+1}]$  é equivalente ao intervalo  $[y_1^e, y_2^e]$ , que dessa forma passa a ser identificado pelo índice  $e$  do elemento em questão.

Conseqüentemente, é fácil notar que dois elementos sequenciais arbitrários “ $e$ ” e “ $e+1$ ” são adjacentes e compartilham um nó. Como pode ser visto na Figura 5.5.

Figura 5.5: Exemplo de compartilhamento dos nós entre dois elementos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa maneira, torna-se necessário organizar a relação entre os nós locais por elementos com os nós globais, portanto, tem-se a tabela a seguir.

Tabela 5.1: Relação de nós locais e nós globais.

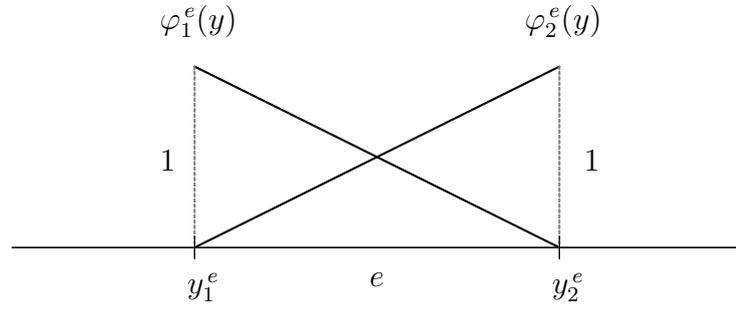
Elemento $e$	$y_1^e$	$y_2^e$
1	1	2
2	2	3
3	3	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m$	$N - 1$	$N$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para partir da abordagem local e chegar na abordagem global do problema, é importante observar que existe um vínculo de equivalência com as matrizes definidas na seção anterior. Sendo que esse vínculo é estabelecido naturalmente através das definições da malha do problema e da função de interpolação.

Em relação à função de interpolação, nota-se que em cada elemento, necessariamente, são definidas duas funções de forma. De fato, dada a definição de  $\varphi_i(y)$  em (5.35).

Figura 5.6: Representação geométrica das funções de interpolação por elemento.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Então, a função de interpolação local  $\varphi_k^e(y)$  para cada elemento  $e$  delimitado pelo intervalo local  $[y_1^e, y_2^e]$ , é definida por

$$\varphi_k^e(y) = \begin{cases} \varphi_1^e(y) = \frac{y_2^e - y}{y_2^e - y_1^e} = \frac{y_2^e - y}{h_e}, & \text{se } y \in [y_1^e, y_2^e]; \\ \varphi_2^e(y) = \frac{y - y_1^e}{y_2^e - y_1^e} = \frac{y - y_1^e}{h_e}, & \text{se } y \in [y_1^e, y_2^e]; \\ 0, & \text{se } y \notin [y_1^e, y_2^e]. \end{cases} \quad (5.45)$$

Onde  $h_e = y_2^e - y_1^e$  é o comprimento do elemento  $e$ .

Considerando o problema aproximado através da aplicação do método de Galerkin, chega-se que a aproximação local da solução é dada por

$$v_e^h(y, t) = \sum_{k=1}^2 c_k^e(t) \varphi_k^e(y) \quad \text{para } y \in [y_1^e, y_2^e]. \quad (5.46)$$

Sendo a malha do problema uma união entre os  $m$  subintervalos  $[y_1^e, y_2^e]$ , a solução aproximada do problema  $v^h(y, t)$  é determinada por

$$v^h(y, t) = \bigcup_{e=1}^m v_e^h(y, t). \quad (5.47)$$

Substituindo a solução aproximada (5.46) e suas derivadas temporais de primeira e segunda ordem, como desenvolvido em (5.19), obtém-se

$$\begin{aligned} & \rho_1 \sum_{\nu=1}^2 \ddot{c}_\nu^e \int_{y_1^e}^{y_2^e} \varphi_\nu^e \varphi_l^e dy + \sum_{\nu=1}^2 \dot{c}_\nu^e \left[ (\rho_2 + \rho_1') \int_{y_1^e}^{y_2^e} \varphi_\nu^e \varphi_l^e dy + \int_{y_1^e}^{y_2^e} b \varphi_\nu^e \varphi_l^e dy \right] \\ & + \sum_{\nu=1}^2 c_\nu^e \left\{ \frac{1}{\gamma^2} \left[ 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma} \int_{y_1^e}^{y_2^e} \left( \sum_{k=1}^2 c_k^e \varphi_k^e \right)^2 dy \right) \right] \int_{y_1^e}^{y_2^e} \varphi_\nu^e \varphi_l^e dy \right. \\ & \left. + \int_{y_1^e}^{y_2^e} a \varphi_\nu^e \varphi_l^e dy + \int_{y_1^e}^{y_2^e} c \varphi_\nu^e \varphi_l^e dy \right\} = \int_{y_1^e}^{y_2^e} g \varphi_l^e dy, \end{aligned} \quad (5.48)$$

com  $l = 1, 2$  e  $e = 1, \dots, m$ .

Como pode ser visto no sistema (5.48), as integrações e também suas funções de interpolação são consideradas localmente. Assim, restringindo a análise ao elemento  $e$ , chega-se nas matrizes locais

$$(M)_{l\nu}^e = \int_{y_1^e}^{y_2^e} \varphi_\nu^e \varphi_l^e dy, \quad (D_\omega)_{l\nu}^e = \int_{y_1^e}^{y_2^e} \omega \varphi_\nu^e \varphi_l^e dy, \quad (A_\omega)_{l\nu}^e = \int_{y_1^e}^{y_2^e} \omega \varphi_\nu^e \varphi_l^e dy, \quad (5.49)$$

com termo não linear local dado por

$$A(V(t))_{l\nu}^e = \frac{1}{\gamma^2(t)} \left[ 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma(t)} \int_{y_1^e}^{y_2^e} \left( \sum_{k=1}^2 c_k^e \varphi_k^e \right)^2 dy \right) \right] \int_{y_1^e}^{y_2^e} \varphi_\nu^e \varphi_l^e dy \quad (5.50)$$

e o vetor local

$$F_l^e = \int_{y_1^e}^{y_2^e} g \varphi_l^e dy. \quad (5.51)$$

Como  $1 \leq l \leq 2$  e  $1 \leq \nu \leq 2$ , observa-se que as matrizes locais têm dimensão  $2 \times 2$  e o vetor local tem dimensão  $2 \times 1$ . Porém, sob o ponto de vista computacional, essa restrição é dada intencionalmente para melhorar o armazenamento das matrizes locais e do vetor local, utilizando o fato que produto  $\varphi_\nu(y) \varphi_l(y) = 0$  se  $|l - \nu| \geq 2$ .



Por exemplo, através da matriz local  $M^e$ , constrói-se

$$M = \begin{bmatrix} M_{11}^1 & M_{12}^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ M_{21}^1 & (M_{22}^1 + M_{11}^2) & M_{12}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & M_{21}^2 & (M_{22}^2 + M_{11}^3) & M_{12}^3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & M_{21}^{m-1} & (M_{22}^{m-1} + M_{11}^m) & M_{12}^m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & M_{21}^m & M_{22}^m \end{bmatrix}$$

Analogamente para o vetor global  $F$ , obtém-se

$$F = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 + F_1^2 \\ F_2^2 + F_1^3 \\ \vdots \\ F_2^{m-1} + F_1^m \\ F_2^m \end{bmatrix}$$

Essa sobreposição de termos vai de encontro à análise desenvolvida em (5.38) e (5.42), onde observou-se as contribuições vindas de dois intervalos adjacentes para matriz  $M$  e o vetor  $F$ . Ressaltando que, embora utilizado a matriz  $M$  para exemplificação ao longo do texto, processos semelhantes geram as demais matrizes globais.

Por fim, definindo um sistema de coordenadas local para cada elemento por  $y' = y - y_1^e$  e o comprimento do elemento dado por  $h_e = y_2^e - y_1^e$ , as funções de forma são dadas por

$$\varphi_1(y') = 1 - \frac{y'}{h_e} \quad \text{e} \quad \varphi_2(y') = \frac{y'}{h_e}$$

sendo as mesmas para cada elemento. E assim, suas respectivas derivadas são dadas por

$$\varphi_1'(y') = -\frac{1}{h_e} \quad \text{e} \quad \varphi_2'(y') = \frac{1}{h_e}.$$

Portanto, as matrizes do problema são construídas de acordo com essa abordagem para serem utilizadas durante o desenvolvimento dos cálculos referentes ao sistema não linear. Entretanto, é necessário, anteriormente, definir o método de integração para cada termo dessas matrizes, devidamente explicado na próxima seção.

## 5.3 Quadratura de Gauss

Os termos das matrizes globais do problema são determinados analiticamente através de integrais definidas, porém, sob o ponto de vista computacional, torna-se necessário escolher um método de integração numérico. Isto é, um método de integração que não exija a determinação da primitiva da função integrada.

Para tanto, considera-se a chamada *Quadratura de Gauss*, que consiste basicamente em fórmulas para calcular a integral definida dada por

$$\int_a^b \omega(y) f(y) dy, \quad (5.55)$$

onde  $\omega(y) \geq 0$  é contínua no intervalo  $[a, b]$  e denominada *função de peso*. Aproximações para esta integral podem ser obtidas respeitando uma série de propriedades detalhadamente descritas em Franco [16]. Assim, o valor aproximado é calculado por

$$\int_a^b \omega(y) f(y) dy \approx \sum_{k=1}^n A_k f(y_k) \quad \text{com} \quad A_k = \int_a^b \omega(y) \ell_k(y) dy, \quad (5.56)$$

onde  $\ell_k(y)$  são polinômios dados pela fórmula de Lagrange.

Para calcular uma integral usando a Quadratura de Gauss, segue-se um procedimento onde, num primeiro momento, é determinado o polinômio ortogonal de acordo com um produto escalar conveniente dada a função peso e um intervalo. Em seguida, calculando as raízes desse polinômio ortogonal, utiliza-se as mesmas para estabelecer os polinômios de Lagrange. Por fim, calculando cada  $A_k$  e os valores de  $f(y)$  aplicados nas raízes, pode-se obter a aproximação para integral em questão.

Destaca-se que escolhas específicas de intervalo e de função peso definem os polinômios utilizados. Dentre as possibilidades, surgem os polinômios de Legendre, Tchebyshev, Laguerre e Hermite, como pode ser visto em Franco [16] e Hildebrand [17].

### 5.3.1 Fórmula de Gauss-Legendre

Considerando a Quadratura de Gauss com função peso  $\omega(y) = 1$  no intervalo  $[-1, 1]$ , chega-se então a chamada *Quadratura de Gauss-Legendre*. Através dos polinômios de Legendre o procedimento descrito na seção anterior pode ser consideravelmente simplificado, uma vez conhecida a *fórmula de Rodrigues*, onde  $n$ -ésimo polinômio de Legendre  $P_n(y)$

pode ser obtido por

$$P_n(y) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dy^n} (y^2 - 1)^n. \quad (5.57)$$

E a fórmula para os coeficientes  $A_k$  (também chamados pesos), é dada por

$$A_k = \frac{2}{(1 - y_k^2) [P'_n(y_k)]^2} \quad \text{com } k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.58)$$

Então, em posse desses respectivos valores e ainda as raízes do polinômio  $P_n(y)$ , obtém-se a aproximação

$$\int_{-1}^1 f(y) dy \approx \sum_{k=1}^n A_k f(y_k). \quad (5.59)$$

Além disso, de acordo com Burden e Faires [7], supondo que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sejam as raízes do  $n$ -ésimo polinômio de Legendre  $P_n(y)$  e para todo  $k = 1, \dots, n$  os números  $A_k$  sejam definidos por

$$A_k = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{y - y_j}{y_k - y_j} dy. \quad (5.60)$$

Sendo  $f(y)$  um polinômio qualquer de grau menor que  $2n$ , então

$$\int_{-1}^1 f(y) dy = \sum_{k=1}^n A_k f(y_k). \quad (5.61)$$

Ou seja, se a função integrada for um polinômio com grau menor do que  $2n$  essa aproximação é exata exceto para erros de arredondamento. Destaca-se também a forma diferente com que os pesos são calculados, porém chegando nos mesmo resultados.

Naturalmente torna-se oportuno que a Quadratura de Gauss-Legendre possa aproximar integrais definidas para quaisquer intervalos e não somente para o intervalo  $[-1, 1]$ . Portanto, através de uma mudança de variáveis, transforma-se qualquer intervalo  $[a, b]$  no intervalo  $[-1, 1]$ . Essa transformação é dada por

$$t = \frac{2y - a - b}{b - a} \iff y = \frac{(b - a)t + a + b}{2}. \quad (5.62)$$

E, por fim, chega-se na igualdade

$$\int_a^b f(y) dy = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b - a)t + a + b}{2}\right) \frac{(b - a)}{2} dt. \quad (5.63)$$

Na literatura também é comum encontrar extensivas tabelas que contenham os pesos  $A_k$  e as raízes dos polinômios de Legendre previamente calculados de acordo com  $n$ , um pequeno exemplo de uma dessas tabelas pode ser vista na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Exemplo de lista com pesos e raízes dos polinômios de Legendre.

$n$	Raízes $y_{n,k}$	Pesos $A_{n,k}$
2	0,5773502692	1,0000000000
	-0,5773502692	1,0000000000
3	0,7745966692	0,5555555556
	0,0000000000	0,8888888889
	-0,7745966692	0,5555555556
4	0,8611363116	0,3478548451
	0,3399810436	0,6521451549
	-0,3399810436	0,6521451549
	-0,8611363116	0,3478548451

Fonte: Adaptada de Burden e Faires [7].

## 5.4 Sistema não linear

Dadas as matrizes relacionadas à discretização espacial que foram construídas nas seções anteriores, torna-se possível estabelecer o próximo passo. Destacando que algumas dessas matrizes são construídas especificamente para um respectivo instante de tempo.

Relembra-se que sistema em questão é não linear de segunda ordem de equações diferenciais ordinárias, descrito por

$$\rho_1 M \ddot{V}(t) + C \dot{V}(t) + K(V(t))V(t) = F(t), \quad (5.64)$$

onde  $V(t) = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T$  é o vetor solução e

$$C = (\rho_2 + \rho_1')M + D_b \quad \text{e} \quad K(V(t)) = A(V(t)) + A_a + D_c. \quad (5.65)$$

Sujeito às condições iniciais

$$V(0) = v_0^h \quad \text{e} \quad \dot{V}(0) = v_1^h. \quad (5.66)$$

Para tanto, escolheu-se o método  $\alpha$ -generalizado de acordo com Chung e Hulbert [9], e com as adaptações dadas por Mbehou [27].

### 5.4.1 Método $\alpha$ -generalizado

Como visto nas seções anteriores as matrizes  $M$ ,  $C$  e  $K$  possuem dimensões de ordem  $(m + 1)$ , e o vetor  $F$  possui  $(m + 1)$  linhas. Entretanto, considerando as condições de contorno dadas em (5.2), faz-se a imposição das mesmas sobre as matrizes do sistema.

Na prática essa imposição é feita excluindo de cada matriz a primeira linha e a última linha, e também a primeira e a última coluna. Portanto, as matrizes que são utilizadas no método  $\alpha$ -generalizado possuem ordem  $(m - 1)$  e, com raciocínio análogo para o vetor, chega-se que o mesmo possui  $(m - 1)$  linhas.

Prosseguindo, considere o número inteiro  $N_t > 0$  e o número real  $T > 0$ , tem-se o passo de tempo  $\delta = T/N_t$ . Tomando  $n$  tal que  $0 \leq n \leq N_t$ , determina-se uma partição uniforme para o intervalo  $[0, T]$  por  $\{t_n \mid t_n = n\delta \text{ e } 0 \leq n \leq N_t\}$ .

Denotando  $\ddot{V}(t_n)$ ,  $\dot{V}(t_n)$  e  $V(t_n)$ , respectivamente, por  $\ddot{v}_n$ ,  $\dot{v}_n$  e  $v_n$ . Chega-se em sua forma aproximada dada por

$$\rho_1 M \ddot{v}_{n+1-\alpha_m} + C \dot{v}_{n+1-\alpha_f} + K(v_n) v_{n+1-\alpha_f} = F(t_{n+1-\alpha_f}), \quad (5.67)$$

$$\dot{v}_{n+1} = \dot{v}_n + \delta [(1 - \eta) \ddot{v}_n + \eta \ddot{v}_{n+1}], \quad (5.68)$$

$$v_{n+1} = v_n + \delta \dot{v}_n + \delta^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \mu \right) \ddot{v}_n + \mu \ddot{v}_{n+1} \right], \quad (5.69)$$

onde  $v_{n+1-\alpha_f}$ ,  $\dot{v}_{n+1-\alpha_f}$ ,  $\ddot{v}_{n+1-\alpha_m}$  e  $t_{n+1-\alpha_f}$ , que surgem na equação (5.67), são dados por

$$v_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) v_{n+1} + \alpha_f v_n, \quad (5.70)$$

$$\dot{v}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) \dot{v}_{n+1} + \alpha_f \dot{v}_n, \quad (5.71)$$

$$\ddot{v}_{n+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m) \ddot{v}_{n+1} + \alpha_m \ddot{v}_n, \quad (5.72)$$

$$t_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) t_{n+1} + \alpha_f t_n. \quad (5.73)$$

Naturalmente suas condições iniciais vêm de (5.66), assim

$$v_0 = v_0^h, \quad (5.74)$$

$$\dot{v}_0 = v_1^h. \quad (5.75)$$

E, através de (5.74) e (5.75), obtém-se aproximação inicial  $\ddot{v}_0$  da seguinte maneira

$$\ddot{v}_0 = [\rho_1 M + \delta \eta C + \delta^2 \mu K(v_0)]^{-1} [F(0) - C \dot{v}_0 - K(v_0) v_0]. \quad (5.76)$$

Posteriormente as aproximações de  $\ddot{v}_{n+1}$ ,  $\dot{v}_{n+1}$  e  $v_{n+1}$  devem ser calculadas para cada instante de tempo  $t_n$ , de acordo que as matrizes e o vetor são atualizados. Observe que  $\dot{v}_{n+1}$  e  $v_{n+1}$  são obtidas diretamente de (5.68) e (5.69), porém os mesmos dependem diretamente do valor previamente calculado de  $\ddot{v}_n$ .

Em relação à aproximação de  $\ddot{v}_{n+1}$ , por sua vez pode ser obtida em função de  $\ddot{v}_n$ ,  $\dot{v}_n$  e  $v_n$ . Levando as igualdades (5.70), (5.71) e (5.72) na equação (5.67), obtém-se

$$\begin{aligned} \rho_1 M ((1 - \alpha_m)\ddot{v}_{n+1} + \alpha_m \ddot{v}_n) + C ((1 - \alpha_f)\dot{v}_{n+1} + \alpha_f \dot{v}_n) \\ + K(v_n) ((1 - \alpha_f)v_{n+1} + \alpha_f v_n) = F(t_{n+1-\alpha_f}). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Agora, substituí-se (5.68) e (5.69) na equação (5.77). Em seguida, isolando o termo  $\ddot{v}_{n+1}$  e rearranjando os demais termos, chega-se em

$$\begin{aligned} \ddot{v}_{n+1} = \{(1 - \alpha_m)\rho_1 M + (1 - \alpha_f)\eta\delta C + (1 - \alpha_f)\mu\delta^2 K\}^{-1} \cdot \{F(t_{n+1-\alpha_f}) - \alpha_m \rho_1 M \ddot{v}_n \\ - C [\dot{v}_n + (1 - \alpha_f)(1 - \eta)\delta \dot{v}_n] - K [v_n + (1 - \alpha_f)\delta v_n + (1 - \alpha_f) (\frac{1}{2} - \mu) \delta^2 \ddot{v}_n]\}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Portanto, utilizando (5.68), (5.69) e (5.78), e repetindo esse processo para cada instante de tempo  $t_n$  onde  $0 \leq n \leq N_t$ , obtém-se a solução aproximada  $v_{n+1}$ .

Vale destacar que nas equações anteriores  $\alpha_f$ ,  $\alpha_m$ ,  $\mu$  e  $\eta$  são parâmetros estabelecidos previamente para o método  $\alpha$ -generalizado. Os quais segundo [9], determinam que o método é preciso em segunda ordem desde que

$$\eta = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f, \quad (5.79)$$

e incondicionalmente estável por

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \mu \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_f - \alpha_m). \quad (5.80)$$

Ressaltando também que se  $\alpha_m = 0$  e  $\alpha_f = 0$  tem-se o esquema da família de Newmark.

## 5.5 Implementação

Levando em conta toda a conceituação descrita nas seções anteriores, chega-se no momento de interligá-las na forma de algoritmos para sistematizar o cálculo da solução do problema aproximado.

Num primeiro momento, deve-se estabelecer a malha do problema fornecendo a quantidade desejada de nós espaciais e o total de passos de tempo. Além disso, informa-se também as condições iniciais e condições de contorno que serão utilizadas para calcular a aproximação inicial  $\dot{v}_0$ .

Posteriormente, através da estrutura de repetição, serão calculadas as aproximações  $v_n$  para cada  $n$ . Com isto, chega-se no Algoritmo 1 descrito a seguir.

---

### Algoritmo 1: EDP do tipo misto com fronteiras fixas

---

**Entrada:** Quantidade de nós  $N$ , passos de tempo  $N_t$ , condições iniciais  $v_0^h$  e  $v_1^h$ .

**Saída:**  $v_{n+1}$ .

**início**

Estabelecer as coordenadas dos nós  $y_1, y_2, \dots, y_N$

$$\delta \leftarrow \frac{1}{N_t}, \quad v_0 \leftarrow v_0^h, \quad \dot{v}_0 \leftarrow v_1^h$$

Construir as matrizes  $M$ ,  $C$ ,  $K$  e  $F$  para  $t = 0$  (Algoritmo 2)

Calcule  $\dot{v}_0$  utilizando as condições iniciais  $v_0$  e  $\dot{v}_0$  (Algoritmo 4)

**para**  $n = 0, \dots, N_t$  **faça**

$$t_n \leftarrow n\delta$$

$$t_{n+1-\alpha_f} \leftarrow (1 - \alpha_f)t_{n+1} + \alpha_f t_n$$

Construir as matrizes  $M$ ,  $C$ ,  $K$  e  $F$  para  $t_n$  (Algoritmo 2)

Calcule o sistema para encontrar  $v_{n+1}$  (Algoritmo 4)

---

Naturalmente, observa-se passos no Algoritmo 1 que envolvem a construção das matrizes globais e do vetor, e também a aproximação da solução pelo método  $\alpha$ -generalizado em cada instante de tempo. Destacando que esta hierarquia dos passos não surge de maneira leviana, uma vez que para obter a aproximação da solução depende-se diretamente das matrizes e do vetor. Sendo assim, considere a seguir o Algoritmo 2, responsável pela montagem dos mesmos.

**Algoritmo 2:** matrizes

**Entrada:** Quantidade de nós  $N$  em  $y$ ; coordenadas de cada nó  $y_1, y_2, \dots, y_N$ ; funções  $a(y, t)$ ,  $b(y, t)$ ,  $c(y, t)$ ,  $g(y, t)$  e  $\gamma(t)$ ; instantes de tempo  $t_n$  e  $t_{n+1-\alpha_f}$ ; distância entre os nós  $h$ ; aproximação  $v_n$ .

**Saída:** Matrizes globais  $M$ ,  $C$ ,  $K$  e vetor global  $F$ .

**início**

$elem \leftarrow N - 1$

**para**  $e = 1, \dots, elem$  **faça**

$$\varphi_1^e \leftarrow \frac{y_{e+1} - y}{y_{e+1} - y_e} \quad \text{e} \quad \varphi_2^e \leftarrow \frac{y - y_e}{y_{e+1} - y_e}$$

$$\varphi_1'^e \leftarrow \frac{-1}{y_{e+1} - y_e} \quad \text{e} \quad \varphi_2'^e \leftarrow \frac{1}{y_{e+1} - y_e}$$

**para**  $I = 1, 2$  **faça**

$$F_I^e \leftarrow \int_{y_e}^{y_{e+1}} g(y, t_{n+1-\alpha_f}) \varphi_I^e dy$$

**para**  $J = 1, 2$  **faça**

$$M_{I,J}^e \leftarrow \int_{y_e}^{y_{e+1}} \varphi_J^e \varphi_I^e dy$$

$$(A_\omega)_{I,J}^e \leftarrow \int_{y_e}^{y_{e+1}} \omega \varphi_J'^e \varphi_I'^e dy \quad \text{para } \omega = a(y, t_n)$$

$$(D_\omega)_{I,J}^e \leftarrow \int_{y_e}^{y_{e+1}} \omega \varphi_J'^e \varphi_I^e dy \quad \text{para } \omega = b(y, t_n), c(y, t_n)$$

$$A_{I,J}^e \leftarrow \frac{1}{\gamma^2(t_n)} \left[ 1 + \tilde{M} \left( t, \frac{1}{\gamma(t_n)} \int_{y_e}^{y_{e+1}} \left( \sum_{k=1}^2 c_k^e \varphi_k'^e \right)^2 dy \right) \right] \int_{y_e}^{y_{e+1}} \varphi_J'^e \varphi_I^e dy$$

**para**  $I = 1, 2$  **faça**

$$F_{I+e-1} = F_{I+e-1} + F_I^e$$

**para**  $J = 1, 2$  **faça**

$$M_{I+e-1, J+e-1} \leftarrow M_{I+e-1, J+e-1} + M_{I,J}^e$$

$$(A_\omega)_{I+e-1, J+e-1} \leftarrow (A_\omega)_{I+e-1, J+e-1} + (A_\omega)_{I,J}^e \quad \text{para } \omega = a(y, t_n)$$

$$(D_\omega)_{I+e-1, J+e-1} \leftarrow (D_\omega)_{I+e-1, J+e-1} + (D_\omega)_{I,J}^e \quad \text{para } \omega = b(y, t_n), c(y, t_n)$$

$$A_{I+e-1, J+e-1} \leftarrow A_{I+e-1, J+e-1} + A_{I,J}^e$$

$C \leftarrow M + D_b$  e  $K \leftarrow A + A_a + D_c$

Visto que as integrais presentes no Algoritmo 2 podem ser aproximadas através da Quadratura de Gauss-Legendre, de acordo com o Algoritmo 3 a seguir.

---

**Algoritmo 3:** quadratura de Gauss-Legendre
 

---

**Entrada:** Função  $f(y)$ ; limites de integração  $a$  e  $b$ ; quantidade de pontos da quadratura  $n$ ; pesos  $A_{n,k}$  e raízes  $y_{n,k}$ .

**Saída:** Aproximação da integral  $I$ .

**início**

$$I \leftarrow \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_{n,k} f\left(\frac{(b-a)y_{n,k} + a + b}{2}\right)$$


---

Em relação ao sistema não linear de equações diferenciais ordinárias, chega-se no Algoritmo 4, que utilizando as matrizes e o vetor oriundos da discretização, estabelece a aproximação da solução para cada instante de tempo.

---

**Algoritmo 4:** método  $\alpha$ -generalizado
 

---

**Entrada:** Parâmetros  $\eta$ ,  $\mu$ ,  $\alpha_m$  e  $\alpha_f$ ; aproximações  $v_n$ ,  $\dot{v}_n$ ,  $\ddot{v}_n$ ; passo de tempo  $\delta$ ; e as matrizes globais  $M$ ,  $C$ ,  $K$  e  $F$ ; função  $\rho_1(t)$ .

**Saída:** Aproximações  $v_{n+1}$ ,  $\dot{v}_{n+1}$ ,  $\ddot{v}_{n+1}$  e  $\ddot{v}_0$ .

**início**

$$\begin{aligned} \ddot{v}_0 &\leftarrow [\rho_1 M + \delta \eta C + \delta^2 \mu K (v_0)]^{-1} [F(0) - C \dot{v}_0 - K (v_0) v_0] \\ \ddot{v}_{n+1} &\leftarrow \{(1 - \alpha_m) \rho_1 M + (1 - \alpha_f) \eta \delta C + (1 - \alpha_f) \mu \delta^2 K\}^{-1} \cdot \{F(t_{n+1-\alpha_f}) - \alpha_m \rho_1 M \ddot{v}_n \\ &\quad - C [\dot{v}_n + (1 - \alpha_f)(1 - \eta) \delta \dot{v}_n] - K [v_n + (1 - \alpha_f) \delta v_n + (1 - \alpha_f) (\frac{1}{2} - \mu) \delta^2 \ddot{v}_n]\} \\ \dot{v}_{n+1} &\leftarrow \dot{v}_n + \delta [(1 - \eta) \dot{v}_n + \eta \ddot{v}_{n+1}] \\ v_{n+1} &\leftarrow v_n + \delta \dot{v}_n + \delta^2 [(\frac{1}{2} - \mu) \ddot{v}_n + \mu \ddot{v}_{n+1}] \end{aligned}$$


---

Portanto considera-se cumprido o objetivo principal desta seção, estabelecendo os algoritmos que compõem o problema numérico como um todo e possibilitando sua aplicação em alguma linguagem de programação para obtenção da solução aproximada.

## 5.6 Simulação computacional

Para realizar a simulação computacional dos algoritmos dados da seção anterior, foi escolhido o *software* MATLAB, onde “MAT” e “LAB” surgem das palavras da língua inglesa *matrix* e *laboratory*, respectivamente. O MATLAB é um *software* de alto desempenho que possibilita a integração de cálculos numéricos com matrizes, além de possuir recursos gráficos para desenhar gráficos em duas ou três dimensões. Sendo utilizada a versão MATLAB R2016b.

Assim, foram feitas as implementações dos algoritmos na linguagem MATLAB, onde o Algoritmo 1 está associado à *main.m*, o Algoritmo 2 à *matrizes.m*, o Algoritmo 3 à *quadGL.m* e o Algoritmo 4 à *alphaGeneralizado.m*. Além dos anteriores surge *myfun.m*, que não está associado a nenhum algoritmo porém está encarregado de fornecer as funções do problema. Todos os códigos podem ser encontrados no Apêndice A deste trabalho.

O computador utilizado nas simulações possui sistema operacional Windows 10 Pro de 64 bits versão 20H2, com processador Intel(R) Core(TM) i3-10100F CPU 3.60GHz, 8.0GB de memória RAM DDR4 e 512GB de armazenamento SD. Além disso, o mesmo conta com uma placa de vídeo AMD Radeon R5 220 com 2GB de memória DDR3.

Destaca-se que para todas as simulações sobre o método  $\alpha$ -generalizado foram tomados os parâmetros  $\alpha_m = \frac{1}{2}$  e  $\alpha_f = \frac{1}{2}$ , onde

$$\eta = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f = \frac{1}{2}.$$

e assim, incondicionalmente estável pois

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{4} = \mu \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_f - \alpha_m).$$

Em relação à aplicação na equação (5.1) com domínio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , considerou-se como solução analítica para auxiliar nas simulações a função dada por

$$v(y, t) = \frac{1}{\pi^2} \text{sen}(\pi y) \cos(\pi t), \quad (5.81)$$

que satisfaz as respectivas condições de contorno e condições iniciais dadas na forma forte.

Observando que (5.81) diz respeito ao problema com equação em domínio fixo, sendo a mesma dada pela transformação de domínio (4.8). Uma vez que as funções  $\rho_1 = 1$  e

$\rho_2 = 1$ , o domínio  $\Omega_t = (\alpha(t), \beta(t)) \times (0, 1)$  com

$$\alpha(t) = -\frac{t}{t+1} \quad \text{e} \quad \beta(t) = \frac{2t+1}{t+1}, \quad (5.82)$$

a função que carrega a não linearidade

$$M(t, s) = 5 \left( \gamma(t) + 1 + \frac{1}{2}s \right) \quad \text{com} \quad s = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (5.83)$$

junto com  $u_0, u_1, f$ ; foram assim tomados em [27] para que

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi^2} \text{sen} \left( \pi \frac{(t+1)x + t}{3t+1} \right) \cos(\pi t) \quad (5.84)$$

seja uma solução analítica do problema com fronteiras móveis (4.1).

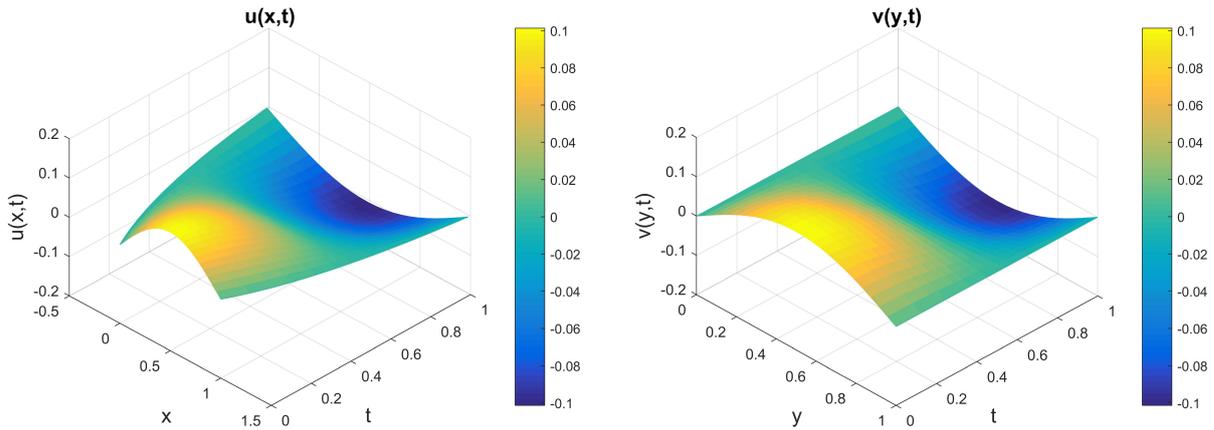


Figura 5.7: Soluções analíticas  $u(x, t)$  e  $v(y, t)$ , respectivamente.

Na Figura 5.7, à esquerda, nota-se a dilatação do domínio espacial  $x$  da função  $u(x, t)$  dado por  $(\alpha(t), \beta(t))$  com a evolução do tempo  $t$ , isto é, no domínio  $\Omega_t = (\alpha(t), \beta(t)) \times (0, 1)$ . E, à direita, uma vez aplicada a transformação no domínio  $\Omega_t$  e chegando no domínio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  com fronteiras fixas, observa-se a evolução da solução analítica sobre domínio  $\Omega$  sem dilatação em  $y$  para a função  $v(y, t)$  ao longo do tempo.

Respeitando todas as disposições gerais dadas anteriormente, a seguir serão apresentadas três simulações, onde cada uma foi realizada de acordo com uma quantidade própria de nós  $N$  e passo de tempo  $\delta$  dado por  $N_t$ . Estes valores foram escolhidos com a intenção de comparar suas implicações nos gráficos de acordo com o crescimento do número de nós, além disso, considera-se todas as grandezas de forma adimensional.

### 5.6.1 Simulação 1

Para a simulação 1, foram tomados  $N = 8$  nós espaciais e o passo de tempo  $\delta = 0.001$ , dado por  $N_t = 1000$ . O tempo médio de processamento do método foi de aproximadamente 7.82 segundos. Na Figura 5.8, podem ser comparados os gráficos da solução aproximada e a solução analítica.

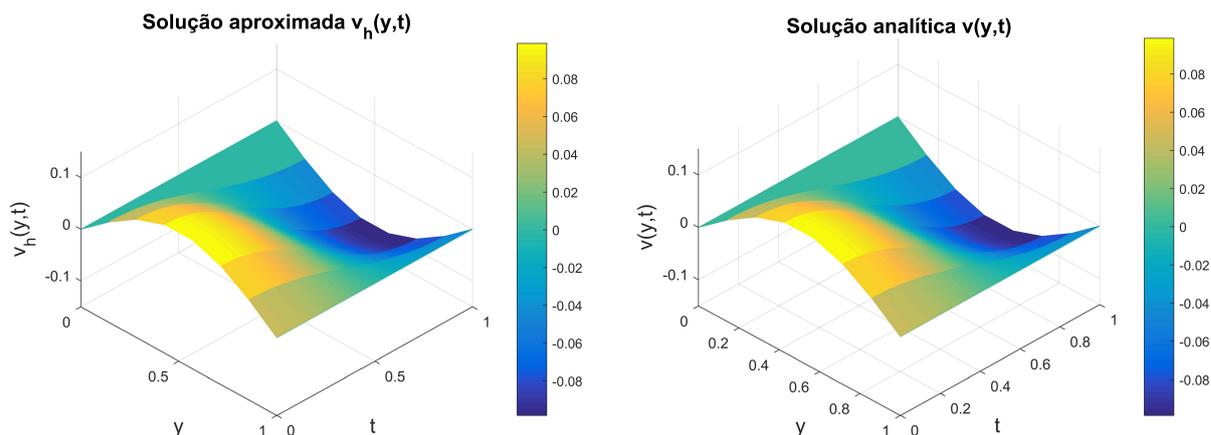


Figura 5.8: Soluções  $v_h(y, t)$  e  $v(y, t)$ , para  $N = 8$  e  $\delta = 0.001$ .

O erro resultante para simulação 1 está na ordem de  $10^{-4}$ , como pode ser visto na Figura 5.9, onde seu valor máximo registrado foi de 0.00096996.

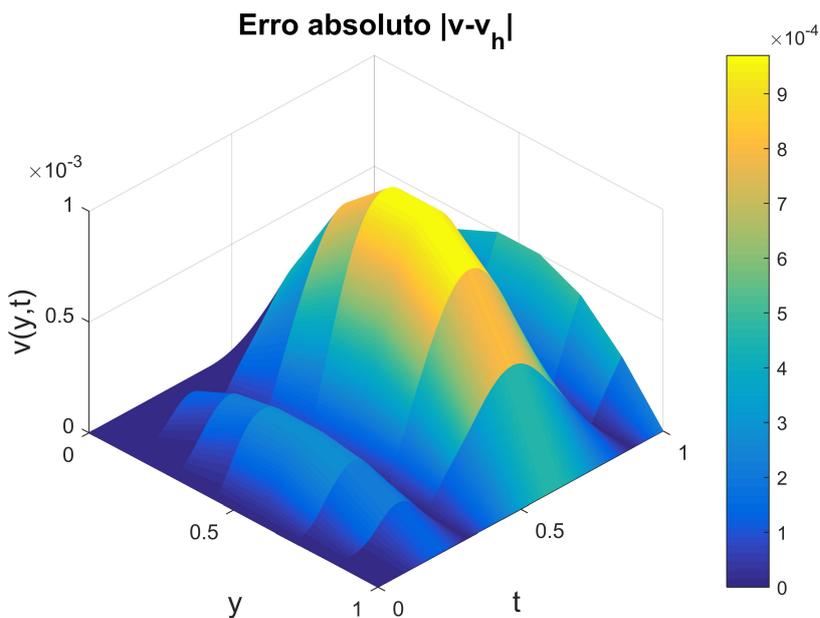
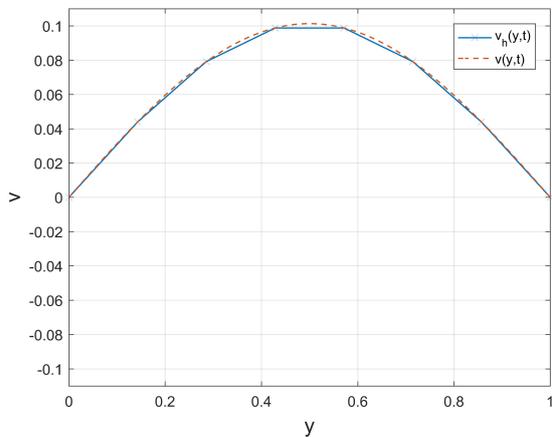
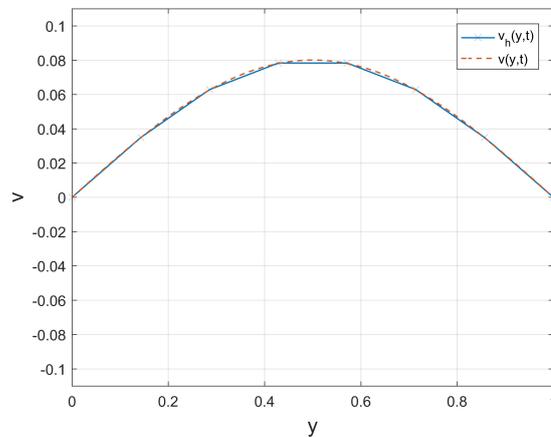
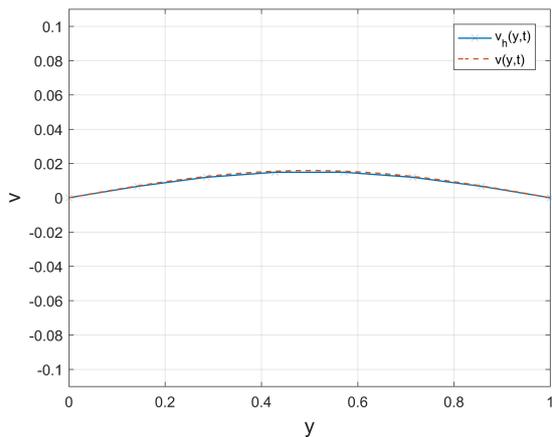
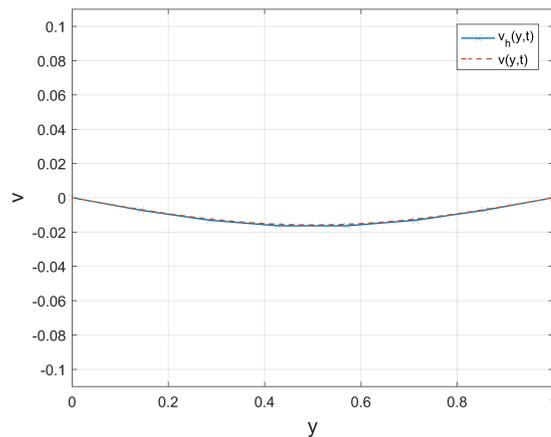
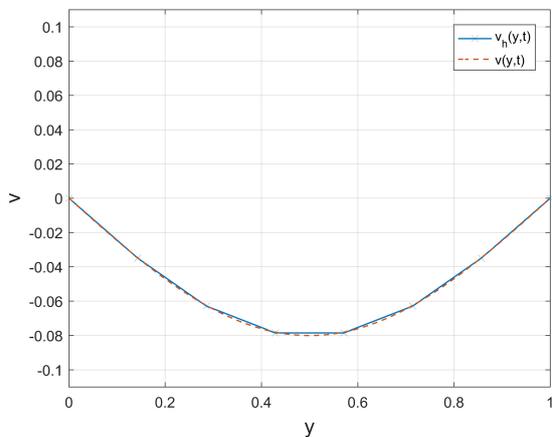
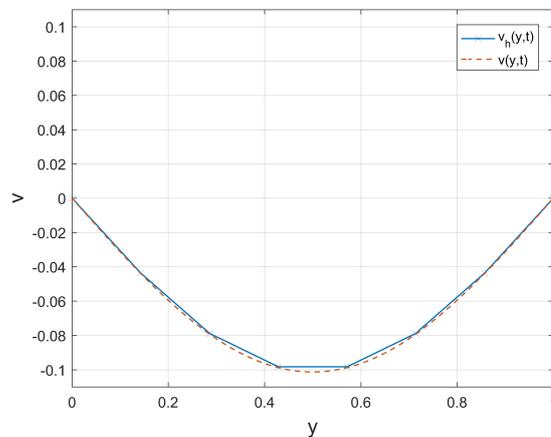


Figura 5.9: Erro para  $N = 8$  e  $\delta = 0.001$ .

Nas figuras a seguir, são apresentadas os gráficos de  $v(y, t)$  e  $v_h(y, t)$  dada sua vista frontal ao plano  $y \perp v$  ao longo da evolução temporal para  $N = 8$  e  $\delta = 0.001$ .

Figura 5.10:  $t = 0.001$ Figura 5.11:  $t = 0.21$ Figura 5.12:  $t = 0.45$ Figura 5.13:  $t = 0.55$ Figura 5.14:  $t = 0.79$ Figura 5.15:  $t = 0.999$

### 5.6.2 Simulação 2

Para a simulação 2, foram tomados  $N = 16$  nós espaciais e o passo de tempo  $\delta = 0.0005$ , dado por  $N_t = 2000$ . O tempo médio de processamento do método foi de aproximadamente 26.21 segundos. Na Figura 5.16, podem ser comparados os gráficos da solução aproximada e a solução analítica.

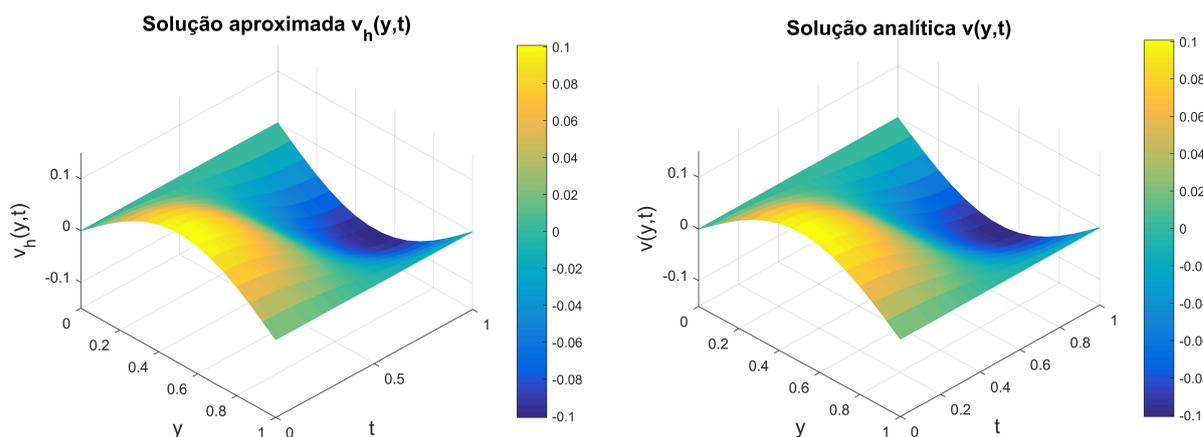


Figura 5.16: Soluções  $v_h(y,t)$  e  $v(y,t)$ , para  $N = 16$  e  $\delta = 0.0005$ .

O erro resultante para simulação 2 está na ordem de  $10^{-4}$ , como pode ser visto na Figura 5.17, onde seu valor máximo registrado foi de 0.00089822.

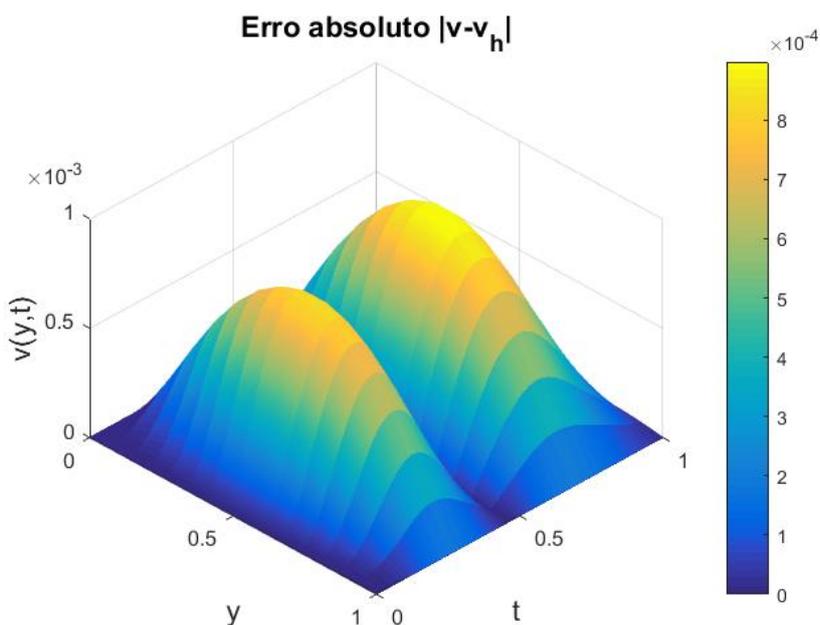
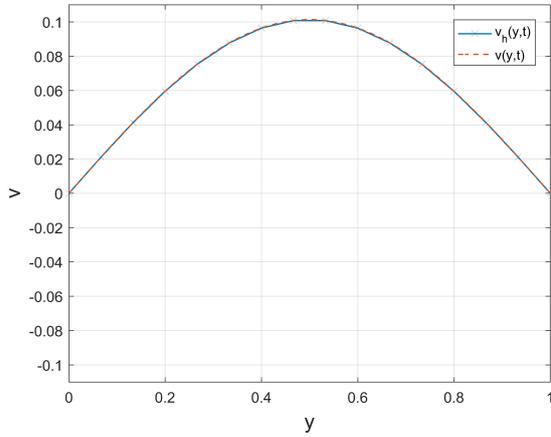
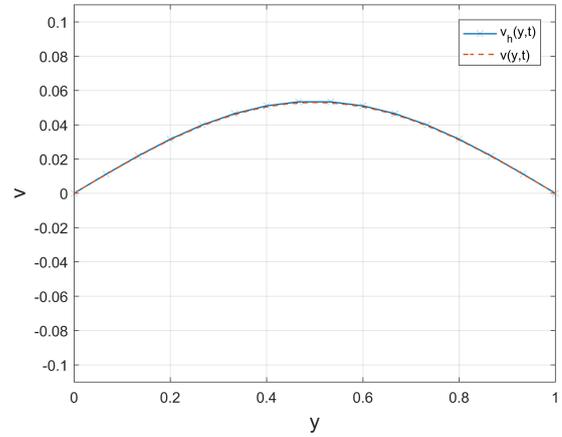
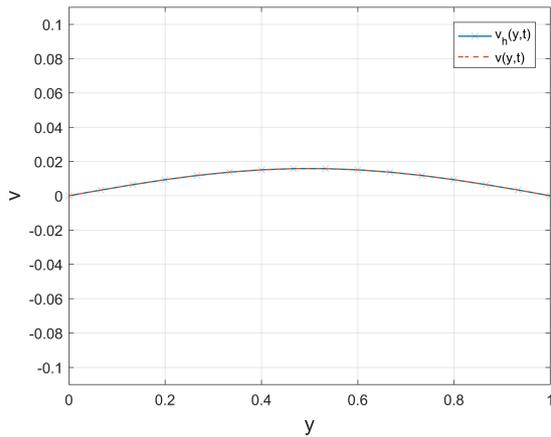
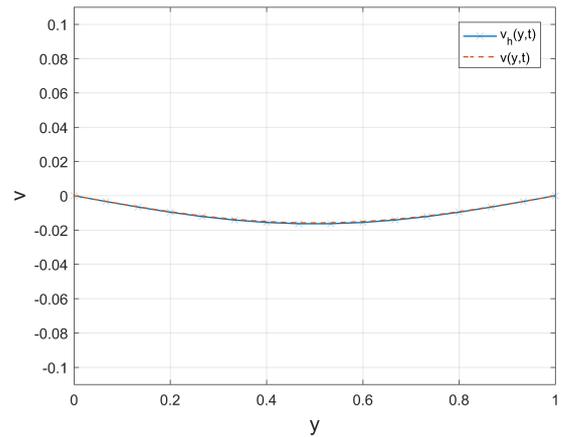
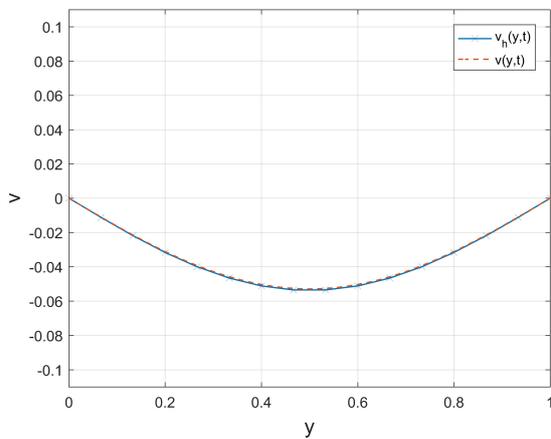
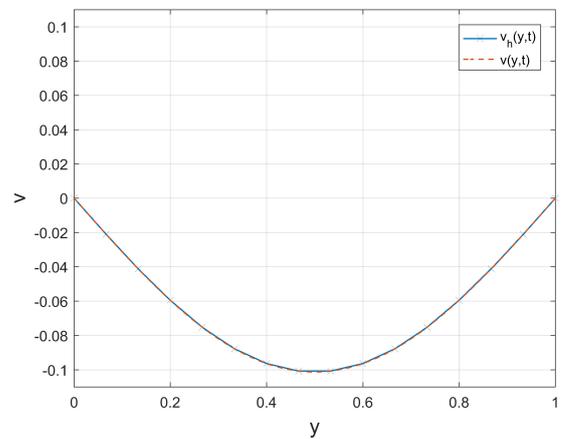


Figura 5.17: Erro para  $N = 16$  e  $\delta = 0.0005$ .

Nas figuras a seguir, são apresentadas os gráficos de  $v(y, t)$  e  $v_h(y, t)$  dada sua vista frontal para  $N = 16$  e  $\delta = 0.0005$ .

Figura 5.18:  $t = 0.0005$ Figura 5.19:  $t = 0.325$ Figura 5.20:  $t = 0.45$ Figura 5.21:  $t = 0.55$ Figura 5.22:  $t = 0.675$ Figura 5.23:  $t = 0.9995$

### 5.6.3 Simulação 3

Na simulação 3, foram tomados  $N = 64$  nós espaciais e o passo de tempo  $\delta = 0.000125$ , dado por  $N_t = 8000$ . O tempo médio de processamento do método foi de aproximadamente 406.23 segundos ou 6.77 minutos. Na Figura 5.24, podem ser comparados os gráficos da solução aproximada e a solução analítica.

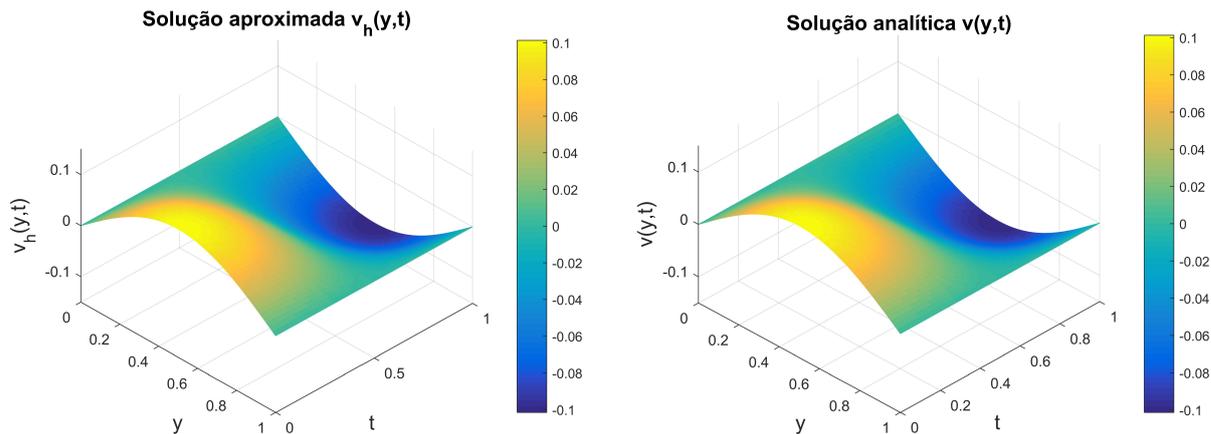


Figura 5.24: Soluções  $v_h(y,t)$  e  $v(y,t)$ , para  $N = 64$  e  $\delta = 0.000125$ .

O erro resultante para simulação 3 está na ordem de  $10^{-3}$ , como pode ser visto na Figura 5.25, onde seu valor máximo registrado foi de 0.00112536.

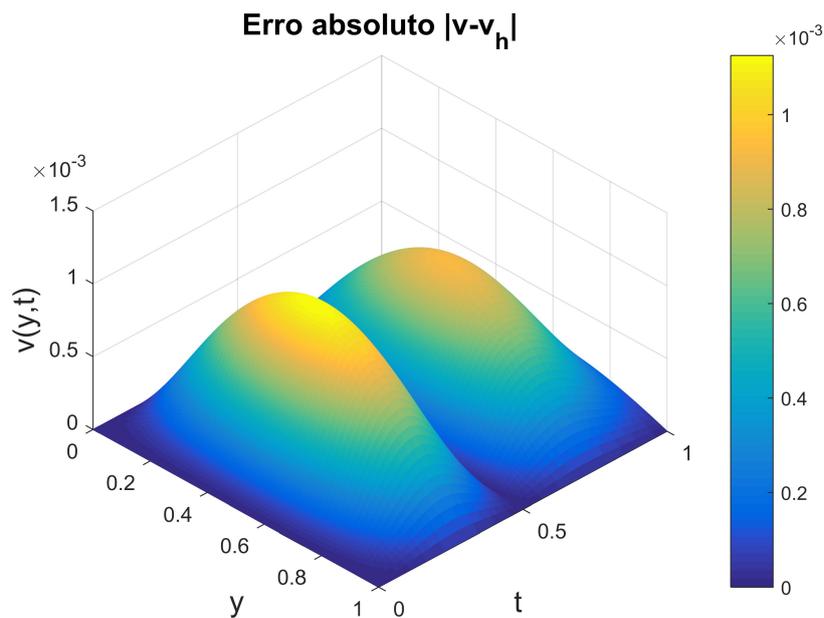
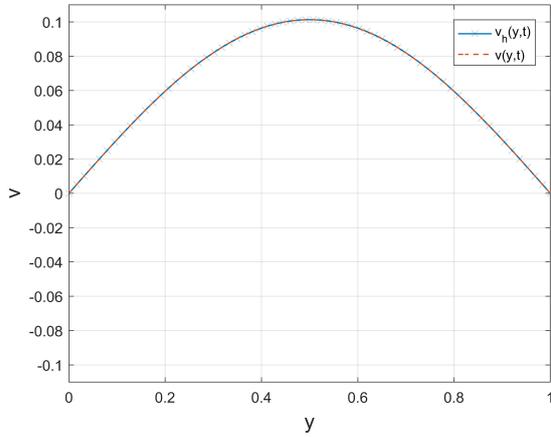
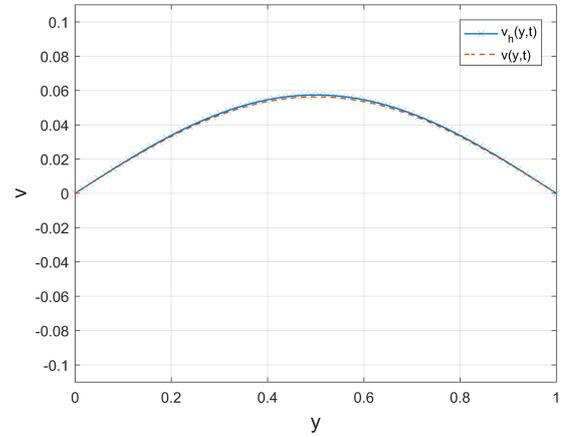
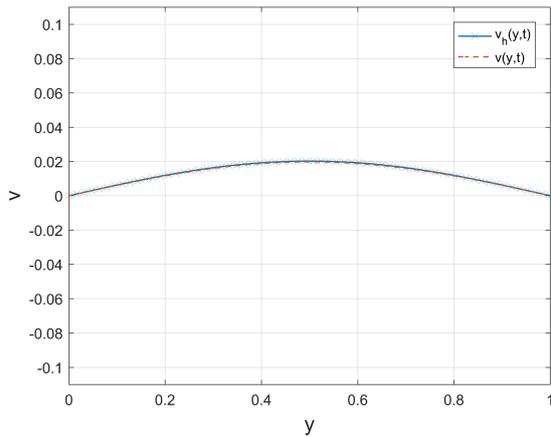
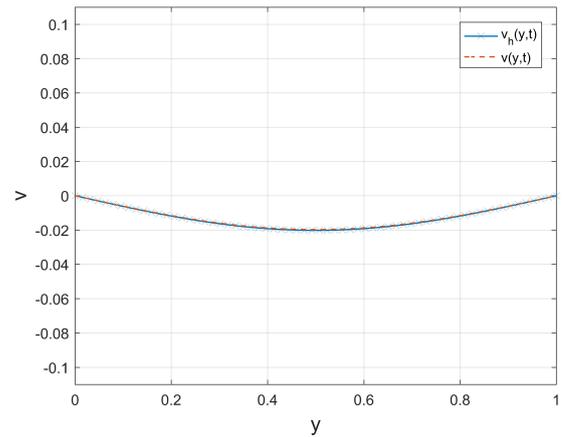
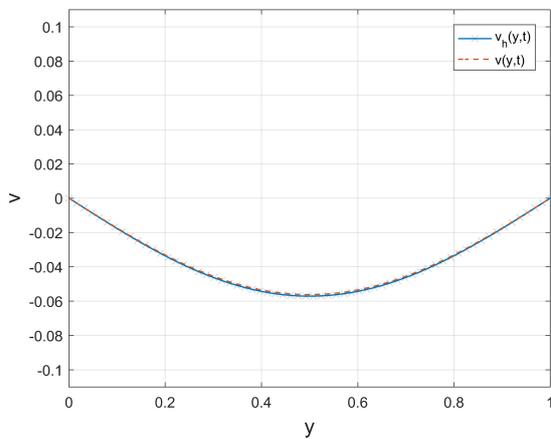
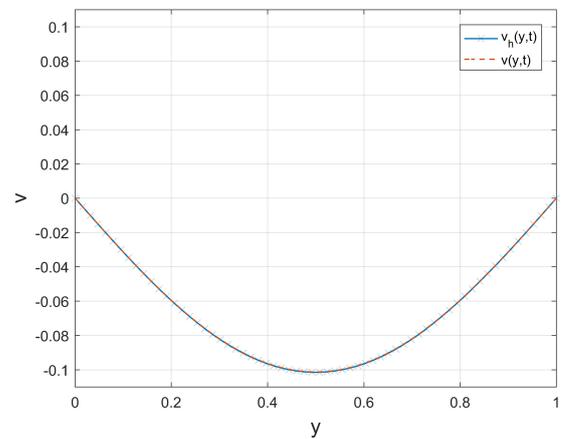


Figura 5.25: Erro para  $N = 64$  e  $\delta = 0.000125$ .

Nas figuras a seguir, são apresentadas os gráficos de  $v(y, t)$  e  $v_h(y, t)$  dada sua vista frontal para  $N = 64$  e  $\delta = 0.000125$ .

Figura 5.26:  $t = 0.000125$ Figura 5.27:  $t = 0.3125$ Figura 5.28:  $t = 0.4375$ Figura 5.29:  $t = 0.5625$ Figura 5.30:  $t = 0.6875$ Figura 5.31:  $t = 0.999875$

# Capítulo 6

## Conclusões e Trabalhos Futuros

### 6.1 Conclusões

No presente trabalho, consideram-se alcançados todos os objetivos traçados, tendo como resultado a análise numérica e simulação para uma equação hiperbólica-parabólica com fronteiras móveis e não linearidade do tipo Kirchhoff-Carrier, através da transformação do domínio móvel para o fixo. A análise numérica tornou-se possível com a utilização do método dos elementos finitos, onde foi aplicado o método de Galerkin e o método  $\alpha$ -generalizado para resolver o sistema temporal.

O método dos elementos finitos com aproximações lineares possibilita uma abordagem matricial do problema, na qual observou-se a geração de matrizes esparsas que possuem potencial positivo quanto sua alocação computacional. Em relação ao método  $\alpha$ -generalizado, constatou-se que o mesmo surge com recursos valiosos, podendo ser utilizado em sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares ou não.

As simulações computacionais foram desenvolvidas através do *software* MATLAB, o qual forneceu um conjunto de ferramentas adequadas para aplicação de problemas que envolvem matrizes e possibilitando uma visão gráfica de desenvolvimento do problema.

Em geral, notou-se que a equação hiperbólica-parabólica com fronteiras móveis e não linearidade do tipo Kirchhoff-Carrier possui, de outrora, resultados analíticos consolidados. Embora, muito provavelmente pela grande quantidade de pré-requisitos conceituais, não se encontram à disposição na literatura materiais que desenvolvam e apresentem sua análise numérica aplicada em algum método numérico específico. Portanto, através da presente dissertação, considera-se estabelecido um material que pode contribuir com pesquisas futuras e na ampliação dos estudos sobre o tema.

## 6.2 Trabalhos Futuros

Sobre os programas desenvolvidos, observa-se a possibilidade de utilizar os recursos disponíveis no próprio MATLAB para explorar a esparsidade das matrizes e culminar na otimização do código computacional.

Em relação às fronteiras do problema, destaca-se a intenção de desenvolver as simulações computacionais no domínio original, isto é, no domínio com fronteiras móveis. Para isto, torna-se indispensável a ampliação dos estudos sobre a malha do problema.

Por fim, diretamente sobre a equação do problema, viabilizou-se a possibilidade de expandir sua generalidade, através da inclusão do laplaciano ao quadrado e, posteriormente, realizar sua análise numérica e simulações em domínio limitado com fronteiras móveis.

# Referências

- [1] ATTIGUI, F. Contrôle et stabilisation de câbles non linéaires. *Repport de stage scientifique, Laboratoire des Materiaux et des Structures du Genie Civil, Université Paris XIII, France* (1999), 158.
- [2] BENABIDALLAH, R., CAVALCANTI, M., CAVALCANTI, V. D., FERREIRA, J. On global solvability and asymptotic behaviour of a mixed problem for a nonlinear degenerate Kirchhoff model in moving domains. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin* 10, 2 (2003), 179–196.
- [3] BENABIDALLAH, R., FERREIRA, J. On hyperbolic–parabolic equations with nonlinearity of Kirchhoff–Carrier type in domains with moving boundary. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 37, 3 (1999), 269–287.
- [4] BISOGNIN, E. Hyperbolic Parabolic Equations with Nonlinearity of Kirchhoff Carrier type. 401.
- [5] BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I. R., FIGUEIREDO, V. L., WETZLER, H. G. *Álgebra Linear, 3ª edição*. Harbra-Harper & Row do Brasil, São Paulo, 1984.
- [6] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [7] BURDEN, R. L., FAIRES, J. D. *Análise Numérica*. Cengage Learning, 2015.
- [8] CARRIER, G. On the non-linear vibration problem of the elastic string. *Quarterly of Applied Mathematics* 3, 2 (1945), 157–165.
- [9] CHUNG, J., HULBERT, G. M. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- $\alpha$  Method.
- [10] DE OLIVEIRA, C. R. *Introdução à análise funcional*. Impa, 2001.
- [11] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*, vol. 19. American Mathematical Society, 2010.
- [12] FARLOW, S. J. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Courier Corporation, 1993.
- [13] FERREIRA, J. Nonlinear hyperbolic-parabolic partial differential equation in noncylindrical domain. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 44, 1 (1995), 135–146.
- [14] FERREIRA, J. On weak solutions of semilinear hyperbolic-parabolic equations. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 19 (01 1996).

- [15] FERREIRA, J., LAR'KIN, N. A. Global solvability of a mixed problem for a nonlinear hyperbolic-parabolic equation in noncylindrical domains. *Portugaliae mathematica* 53, 4 (1996), 381–396.
- [16] FRANCO, N. B. *Cálculo Numérico*, 1 ed. Person Prentice Hall, 2006.
- [17] HILDEBRAND, F. B. *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed ed. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, 1987.
- [18] HILLEN, T., LEONARD, I. E., VAN ROESSEL, H. *Partial Differential Equations: Theory and Completely Solved Problems*. John Wiley and Sons, Inc., 2012.
- [19] HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, 2000.
- [20] IORIO, R. J., IORIO, V. D. M. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, vol. 70. Cambridge University Press, 2001.
- [21] J. L. LIONS, E. M. *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, vol. Volume 1 em *Travaux et Recherches Mathématiques*. Dunod, 1968.
- [22] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, vol. 1. John Wiley and Sons. Inc., 1978.
- [23] LAR'KIN, N. Global solvability of boundary-value problems for a class of quasilinear hyperbolic equations. *Siberian Mathematical Journal* 22, 1 (1981), 82–88.
- [24] LIU, I.-S., RINCON, M. Effect of moving boundaries on the vibrating elastic string. *Applied Numerical Mathematics* 47, 2 (2003), 159–172.
- [25] LIU, I.-S., RINCON, M. Introdução ao Método de Elementos Finitos. *Editora IM-UFRJ, Rio de Janeiro* (2020).
- [26] MACIEL, A. On hyperbolic-parabolic equation with a continuous nonlinearity. *Non-linear Analysis: Theory, Methods & Applications* 20, 6 (1993), 745–754.
- [27] MBEHOU, M. Finite element method for nonlocal hyperbolic-parabolic problems of Kirchhoff-Carrier type in domains with moving boundary. *Under review*.
- [28] MENZALA, G. P. On classical solutions of a quasilinear hyperbolic equation. *Non-linear Analysis: Theory, Methods & Applications* 3, 5 (1979), 613–627.
- [29] MENZALA, G. P. On global classical solutions of a nonlinear wave equation. *Applicable Analysis* 10, 3 (1980), 179–195.
- [30] O. C. ZIENKIEWICZ, R. L. T., (AUTH.), J. Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, 7 ed. Butterworth-Heinemann, 2013.
- [31] OLVER, P. J., SHAKIBAN, C., SHAKIBAN, C. *Applied Linear Algebra*. Springer International Publishing AG, 2018.

- 
- [32] ONO, K. On global solutions and blow-up solutions of nonlinear Kirchhoff strings with nonlinear dissipation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 216, 1 (1997), 321–342.
- [33] PERADZE, J. A numerical algorithm for the nonlinear Kirchhoff string equation. *Numerische Mathematik* 102, 2 (2005), 311–342.
- [34] ZHILIN LI, ZHONGHUA QIAO, T. T. *Numerical Solution of Differential Equations: Introduction to Finite Difference and Finite Element Methods*, 1 ed. Cambridge University Press, 2018.

## APÊNDICE A – Códigos computacionais

Código em MATLAB *main.m* referente ao Algoritmo 1.

```

1 %% EDP do tipo misto com fronteiras fixas - main.m
2 %=====
3 % Precisam estar no mesmo diretorio as funcoes:
4 %
5 %         matrizes.m --> constroi as matrizes e o vetor
6 %         myfun.m --> contem as funcoes do problema
7 %         quadGL.m --> quadratura de Gauss-Legendre
8 %         alphaGeneralizado.m --> resolve o sistema de EDO
9 %
10 % Neste programa pode-se alterar o nnumero de nos (N) e a quantidade de
11 % passos de tempo (Nt).
12 %=====
13 % Limpeza de variaveis, janelas e janela de comando.
14 close all; clear all; clc;
15 tic; % inicio do contador de tempo
16 %-----
17 % Discretizacao espacial
18 N = 16;                % quantidade de nos
19 elem = N-1;           % quantidade de elementos
20 h = 1/elem;          % variacao entre os nos
21 x = 0:h:1;           % vetor com as coordenadas dos nos
22 X = linspace(0,1,200); % auxiliar para solucao exata
23 %-----
24 % Discretizacao temporal
25 Nt = 2000;           % quantidade de divisoes do tempo
26 dt = 1/Nt;          % variacao de tempo (delta)
27 % Instante t = 0
28 t = 0.0;             % t=0
29 t2 = dt;             % auxiliar
30 t_n = (1-0.5)*t2+0.5*t; % auxiliar 2
31 %-----

```

```

32 % Solucao exata
33 v = @(t,y)1.0./pi.^2.*cos(t.*pi).*sin(y.*pi);
34 %
35 % Matrizes auxiliares para graficos
36 xx = zeros(Nt+1,N);
37 xx(1,:)=x;
38 tt = zeros(1,Nt+1);
39 tt(1,1)=t;
40 %
41 %% Condicoes iniciais
42 % Funcoes
43 v0 = @(t,y)1.0./pi.^2.*cos(t.*pi).*sin(y.*pi); %v
44 v1 = @(t,y)-(sin(t.*pi).*sin(y.*pi))./pi; %vt
45 %
46 % Discretizacao das condicoes iniciais
47 d0 = v0(t,x)';
48 v0 = v1(t,x)';
49 %
50 % Condicoes de contorno
51 d0(1,:) = 0.0;
52 d0(N,:) = 0.0;
53 %
54 %% Gerando a aproximacao de a00 inicial, no caso t=0
55 %
56 [M,C,K,F] = matrizes(x,t,t,h,N,d0); % aqui tn = t = 0
57 %
58 [dn,vn,an,a00] = alphaGeneralizado(d0(2:end-1,:),v0(2:end-1,:), ...
59     0,dt,M,C,K,F);
60 %
61 a0 = a00;
62 %
63 dM(1,:) = d0;
64 %
65 %% Loop de tempo
66 erroMax = zeros(Nt+1,1);
67 for ii = 1:Nt
68 %
69 t = ii*dt; % passo de tempo atual
70 t2 = (ii+1)*dt; % passo de tempo adiantado
71 t_n = (1-0.5)*t2+0.5*t; % passo de tempo auxiliar ao metodo
72 tt(ii+1)=t; % vetor com os tempos
73 xx(ii+1,:) = x(1,:); % vetor com os nos espaciais
74 %

```

```
75 %% Geracao das matrizes M, C, K e vetor F por tempo
76 %
77 [M,C,K,F] = matrizes(x,t,t_n,h,N,d0);
78 %
79 %% Resolucao do metodo alfa generalizado
80 %
81 [dn,vn,an] = alphaGeneralizado(d0(2:end-1,:),v0(2:end-1,:), ...
82     a0,dt,M,C,K,F);
83 %
84 % Atualizando os vetores para o proximo passo de tempo
85 d0(2:end-1,:)=dn;
86 v0(2:end-1,:)=vn;
87 a0 = an;
88 dM(ii+1,:) = d0;
89 %
90 %% Grafico frontal da evolucao temporal
91 %
92 figure(1);
93 plot(x,d0,'x-',X,v(t,X),'--','linewidth',1.1);
94 grid on;
95 xlabel('y','fontsize',14);
96 xlim([0 1]);
97 ylabel('v','fontsize',14);
98 ylim([-0.11 0.11]);
99 title('Evolucao no tempo de v(y,t) e v_h(y,t)','fontsize',14);
100 legend('v_h(y,t)','v(y,t)');
101 drawnow;
102 %
103 erroMax(ii)=max(abs(v(t,x)-d0'));
104 end
105 time = toc;
106 %
107 %% Gerando graficos
108 %
109 figure(2);
110 surf(xx,tt,dM,'EdgeColor','flat')
111 colorbar;
112 xlabel('y','fontsize',14);
113 ylabel('t','fontsize',14);
114 zlabel('v_h(y,t)','fontsize',14);
115 zlim([-0.15 0.15]);
116 title('Solucao aproximada v_h(y,t)','fontsize',14);
117 %
```

```
118 figure(3);
119 [X2,T2] = meshgrid(x,tt);
120 surf(X2,T2,v(T2,X2),'EdgeColor','flat');
121 colorbar;
122 xlabel('y','fontsize',14);
123 ylabel('t','fontsize',14);
124 zlabel('v(y,t)','fontsize',14);
125 zlim([-0.15 0.15]);
126 title('Solucao exata v(y,t)','fontsize',14);
127 %
128 figure(4);
129 surf(X2,T2,abs(v(T2,X2)-dM),'EdgeColor','flat');
130 colorbar;
131 xlabel('y','fontsize',14);
132 ylabel('t','fontsize',14);
133 zlabel('v(y,t)','fontsize',14);
134 title('Erro absoluto |v-v_h|','fontsize',14);
135 %
136 %% Impressao
137 fprintf('-----\n');
138 fprintf('Quantidade de nos: %i \n',N);
139 fprintf('Distancia entre os nos: %f \n',h);
140 fprintf('Variacao de tempo: %f \n',dt);
141 fprintf('Duracao: %f \n',time);
142 fprintf('Erro maximo: %1.20f \n',max(erroMax));
143 fprintf('-----\n');
144 %
```

Código em MATLAB *matrizes.m* referente ao Algoritmo 2.

```

1 function [M,C,K,F] = matrizes(x,t,t_n,h,Nx,d0)
2 %=====
3 % Funcao para criacao das matrizes M(t), C(t), K(t) e o vetor F(t) ou
4 % F(tn), logo, suas saidas sao:
5 %
6 %             M(t), C(t), K(t), e F(t) (ou F(tn))
7 %
8 % Para este fim, sao necessarias as entradas dos dados:
9 %
10 %     - vetor com os nos (x)
11 %     - constante de tempo (t)
12 %     - constante de tempo auxiliar (tn) (quando necessario)
13 %     - variacao entre os nos em x (h)
14 %     - quantidade de nos em x (Nx)
15 %     - vetor aproximacao de V(t) (d0)
16 %
17 %-----
18 % Observacao: considerar as matrizes com a imposicao das condicoes de
19 % contorno.
20 %===== Funcoes do problema =====
21 [a,b,c,g,gamma] = myfun(x,t);
22 %=====
23 % Inicializando vetor e matrizes globais
24 elem = Nx-1;
25 intervalo = zeros(elem,100);
26 M = zeros(Nx,Nx);
27 A = zeros(Nx,Nx);
28 Aa = zeros(Nx,Nx);
29 Db = zeros(Nx,Nx);
30 Dc = zeros(Nx,Nx);
31 F = zeros(Nx,1);
32 %-----
33 for e = 1:elem
34 % Inicializado as matrizes locais
35 M_loc = zeros(2,2); % massa
36 A_loc = zeros(2,2); % rigidez para nao linear
37 Aa_loc = zeros(2,2); % rigidez para a
38 Db_loc = zeros(2,2); % Dphi*phi para b
39 Dc_loc = zeros(2,2); % Dphi*phi para c
40 F_loc = zeros(2,1); % vetor
41 % Intervalo por elemento

```

```

42 intervalo(e,:) = linspace(x(e),x(e+1));
43 % Funcoes de base e sua derivada, para cada elemento
44 N={@(X)(x(e+1)-X)/(x(e+1)-x(e));@(X)(X - x(e))/(x(e+1)-x(e))}; %phi
45 dN={@(x)-1/h;@(x)1/h}; %Dphi
46 % Parte nao linear;
47 int= quadGL(@(X)((d0(e)*dN{1}(X)+d0(e+1)*dN{2}(X))^2),x(e),x(e+1));
48 s = (1/gamma(t))*int;
49 M_fun = 5*(gamma(t)+1+1/2*s)-10; % m0 atual 20
50 AUX_fun = (1/gamma(t)^2)*(1+M_fun);
51 for I=1:2
52 F_loc(I)= quadGL(@(X)(g(X,t_n).*N{I}(X)),x(e),x(e+1));
53 for J=1:2
54 M_loc(I,J)= quadGL(@(X)(N{J}(X).*N{I}(X)),x(e),x(e+1));
55 A_loc(I,J)= quadGL(@(X)(dN{J}(X).*dN{I}(X)),x(e),x(e+1));
56 Aa_loc(I,J)= quadGL(@(X)(a(X,t).*dN{J}(X).*dN{I}(X)),x(e),x(e+1));
57 Db_loc(I,J)= quadGL(@(X)(b(X,t).*dN{J}(X).*N{I}(X)),x(e),x(e+1));
58 Dc_loc(I,J)= quadGL(@(X)(c(X,t).*dN{J}(X).*N{I}(X)),x(e),x(e+1));
59 end % J
60 end % I
61 % Preenchimento das matrizes globais
62 auxA = AUX_fun*A_loc; % matriz auxiliar
63 %
64 for I=1:2
65 F(I+e-1,1) = F(I+e-1,1) + F_loc(I,1);
66 for J=1:2
67 M(I+e-1,J+e-1) = M(I+e-1,J+e-1)+ M_loc(I,J);
68 A(I+e-1,J+e-1) = A(I+e-1,J+e-1)+ auxA(I,J);
69 Aa(I+e-1,J+e-1) = Aa(I+e-1,J+e-1)+ Aa_loc(I,J);
70 Db(I+e-1,J+e-1) = Db(I+e-1,J+e-1)+ Db_loc(I,J);
71 Dc(I+e-1,J+e-1) = Dc(I+e-1,J+e-1)+ Dc_loc(I,J);
72 end % J
73 end % I
74 end % e1
75 % Matrizes auxiliares
76 C = (M+Db);
77 K = (A + Aa + Dc);
78 % Saidas
79 M = M(2:end-1,2:end-1);
80 C = C(2:end-1,2:end-1);
81 K = K(2:end-1,2:end-1);
82 F = F(2:end-1,1);
83 return;
84 end % function

```

Código em MATLAB *quadGL.m* referente ao Algoritmo 3.

```

1 function [I] = quadGL(p,a,b)
2 %=====
3 % Quadratura de Gauss-Legendre com 10 pontos.
4 % Saida: aproximacao da integral I no intervalo [a,b].
5 % Entrada: funcao p e limites de integracao a e b.
6 %=====
7 X = [0.973906528517172  0.865063366688985  0.679409568299024 ...
8       0.433395394129247  0.148874338981631  -0.148874338981631 ...
9       -0.433395394129247 -0.679409568299024  -0.865063366688985 ...
10      -0.973906528517172];
11 W = [0.066671344308688  0.149451349150581  0.219086362515982 ...
12       0.269266719309996  0.295524224714753  0.295524224714753 ...
13       0.269266719309996  0.219086362515982  0.149451349150581 ...
14       0.066671344308688];
15 I=(b-a)/2*sum(W.*p((b-a)/2*X+(a+b)/2));
16 return;
17 end

```

Código em MATLAB *alphaGeneralizado.m* referente ao Algoritmo 4.

```

1 function [dn,vn,an,a00] = alphaGeneralizado(d0,v0,a0,dt,M,C,K,F)
2 %=====
3 % Funcao para resolver o sistema de EDO's nao linear:
4 %
5 %           rho1*M(t)*V'(t) + C(t)*V'(t) * K(V(t))*V(t) = F(t)
6 %
7 % Denote as saidas por:
8 %
9 %           an = V'(t);
10 %           a00 = aproximacao de V'(0);
11 %           vn = V'(t);
12 %           dn = V(t);
13 %           F = vetor F(t).
14 %
15 % Para isto, sao necessarias as entradas:
16 %
17 %           d0;
18 %           v0;
19 %           a0;
20 %           dt e a variacao do tempo;

```

```

21 %           as matrizes M, C, K e o vetor F.
22 %
23 % Onde M(t), C(t), K(V(t)) e F(t) sao as matrizes que surgem da discre-
24 % tizacao espacial.
25 %=====
26 % Parametros do metodo alpha generalizado
27 eta = 0.5; % eta = 1/2
28 mu = 0.25; % mu = 1/4
29 am = 0.5; % alfa_m = 1/2
30 af = 0.5; % alfa_f = 1/2
31 %=====
32 rho_1 = 1.0;
33 % para a00
34 aux0 = rho_1*M + dt*eta*C + (dt^2.0)*mu*K;
35 aux0Inv = aux0\eye(size(aux0,1));
36 a00 = aux0Inv*(F - C*v0 - K*d0);
37 % para an
38 aux = (1-am)*rho_1*M+(1-af)*eta*dt*C+(1-af)*mu*(dt^2)*K;
39 %
40 an = (aux\eye(size(aux)))*(F-am*rho_1*M*a0-C*(v0+(1-af)*(1-eta) ...
41      *dt*a0)-K*(d0+(1-af)*dt*v0+(1-af)*(1/2-mu)*(dt^2)*a0));
42 %
43 vn = v0 + dt*((1-eta)*a0 + eta*an);
44 %
45 dn = d0 + dt*v0 + ((dt)^2)*((1/2 - mu)*a0 + mu*an);
46 %
47 return;
48 end

```

Código em MATLAB *myfun.m* encarregado de fornecer as funções do problema.

```

1 function [a,b,c,g,gamma] = myfun(y,t)
2 %=====
3 % Funcoes a, b, c, g e gamma do problema hiperbolico-parabolico
4 %
5 %  $v_{tt} + v_t - 1/\gamma(1+M)v_{yy} - (a*v_y)_y + b*v_{yt} + c*v_y = g(y,t)$ 
6 %
7 %=====
8 %
9 % m_0 atual = 20
10 a = @(y,t) -1.0./(t./(t+1.0)+(t.*2.0+1.0)./(t+1.0)).^2.*(-t.*1.0./...
11      (t+1.0).^2+1.0./(t+1.0)+y.*(t.*1.0./(t+1.0).^2-3.0./(t+1.0)+...

```

```

12     (t.*2.0+1.0).*1.0./(t+1.0).^2).^2+1.0./(t./(t+1.0)+(t.*2.0+...
13     1.0)/(t+1.0)).^2.*1.0e1;
14 %
15 b = @(y,t)(t.*1.0./(t+1.0).^2.*-2.0+2.0./(t+1.0)+y.*(t.*1.0./(t+...
16     1.0).^2-3.0./(t+1.0)+(t.*2.0+1.0).*1.0./(t+1.0).^2).*2.0./...
17     (t./(t+1.0)+(t.*2.0+1.0)/(t+1.0));
18 %
19 c = @(y,t)(-t.*1.0./(t+1.0).^2+1.0./(t+1.0)+y.*(t.*1.0./(t+1.0)...
20     .^2-3.0./(t+1.0)+(t.*2.0+1.0).*1.0./(t+1.0).^2))./(t./(t+1.0)+...
21     (t.*2.0+1.0)/(t+1.0))-(t.*1.0./(t+1.0).^3.*-2.0+1.0./(t+1.0)...
22     .^2.*2.0+y.*(t.*1.0./(t+1.0).^3.*2.0-1.0./(t+1.0).^2.*6.0+...
23     (t.*2.0+1.0).*1.0./(t+1.0).^3.*2.0))./(t./(t+1.0)+(t.*2.0+1.0)...
24     ./t+1.0));
25 %
26 g = @(y,t)-cos(t.*pi).*sin(y.*pi)-(sin(t.*pi).*sin(y.*pi))./pi-...
27     cos(t.*pi).*sin(y.*pi).*(1.0./(t./(t+1.0)+(t.*2.0+1.0)./...
28     (t+1.0)).^2.*(-t.*1.0./(t+1.0).^2+1.0./(t+1.0)+y.*(t.*1.0./...
29     (t+1.0).^2-3.0./(t+1.0)+(t.*2.0+1.0).*1.0./(t+1.0).^2)).^2-...
30     1.0./(t./(t+1.0)+(t.*2.0+1.0)/(t+1.0)).^2.*1.0e1)+(cos(t.*pi)...
31     .*cos(y.*pi).*((-t.*1.0./(t+1.0).^2+1.0./(t+1.0)+y.*(t.*1.0./...
32     (t+1.0).^2-3.0./(t+1.0)+(t.*2.0+1.0).*1.0./(t+1.0).^2))./(t./...
33     (t+1.0)+(t.*2.0+1.0)/(t+1.0))-(t.*1.0./(t+1.0).^3.*-2.0+1.0./...
34     (t+1.0).^2.*2.0+y.*(t.*1.0./(t+1.0).^3.*2.0-1.0./(t+1.0).^2.*...
35     6.0+(t.*2.0+1.0).*1.0./(t+1.0).^3.*2.0))./(t./(t+1.0)+(t.*2.0+...
36     1.0)/(t+1.0)))./pi-(cos(y.*pi).*sin(t.*pi).*(-t.*1.0./(t+1.0)...
37     .^2+1.0./(t+1.0)+y.*(t.*1.0./(t+1.0).^2-3.0./(t+1.0)+(t.*2.0+...
38     1.0).*1.0./(t+1.0).^2)).*2.0)/(t./(t+1.0)+(t.*2.0+1.0)./...
39     (t+1.0))+cos(t.*pi).*sin(y.*pi).*1.0./(t./(t+1.0)+(t.*2.0+...
40     1.0)/(t+1.0)).^2.*((t.*5.0)/(t+1.0)+(t.*1.0e1+5.0)/(t+1.0)+...
41     (1.0./pi).^2.*cos(t.*pi).^2.*(5.0./4.0))./(t./(t+1.0)+(t.*2.0+...
42     1.0)/(t+1.0))-4.0)+(cos(t.*pi).*cos(y.*pi).*1.0./(t./(t+1.0)+...
43     (t.*2.0+1.0)/(t+1.0)).^2.*(-t.*1.0./(t+1.0).^2+1.0./(t+1.0)+...
44     y.*(t.*1.0./(t+1.0).^2-3.0./(t+1.0)+(t.*2.0+1.0).*1.0./(t+1.0)...
45     .^2)).*(t.*1.0./(t+1.0).^2-3.0./(t+1.0)+(t.*2.0+1.0).*1.0./...
46     (t+1.0).^2).*2.0)/pi;
47 %
48 gamma = @(t)t./(t+1.0)+(t.*2.0+1.0)/(t+1.0);
49 %
50 return;
51 end

```