

Universidade Federal Fluminense

MARCIO LOPES GEVEGY

Método Simplex Canalizado para Produção de
Ração: Um Estudo de Caso

VOLTA REDONDA

2022

MARCIO LOPES GEVEGY

Método Simplex Canalizado para Produção de Ração: Um Estudo de Caso

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Orientador:

Professor D.Sc. Ricardo Silveira Sousa

Coorientador:

Professor D.Sc. Wagner Rambaldi Telles

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

VOLTA REDONDA

2022

Ficha catalográfica automática - SDC/BINF
Gerada com informações fornecidas pelo autor

G396m Geveg, Marcio Lopes
Método Simplex Canalizado para Produção de Ração : Um
Estudo de Caso / Marcio Lopes Geveg. - 2022.
138 f.: il.

Orientador: Ricardo Silveira Sousa.
Coorientador: Wagner Rambaldi Telles.
Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Instituto do Noroeste Fluminense de Educação Superior, Volta
Redonda, 2022.

1. Programação Linear. 2. Método Primal Simplex
Canalizado. 3. Problema da Produção de Ração de Aves e
Suínos. 4. Produção intelectual. I. Sousa, Ricardo
Silveira, orientador. II. Telles, Wagner Rambaldi,
coorientador. III. Universidade Federal Fluminense. Instituto
do Noroeste Fluminense de Educação Superior. IV. Título.

CDD - XXX

Método Simplex Canalizado para Produção de Ração: Um Estudo de Caso

Marcio Lopes Geveg

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada por:



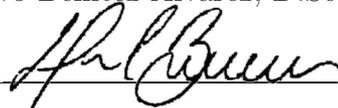
Prof. Ricardo Silveira Sousa, D.Sc. /
MCCT-UFF(Presidente)



Profa. Rosilene Abreu Portella Corrêa, D.Sc. / MCCT-UFF



Prof. Gustavo Benitez Alvarez, D.Sc. / MCCT-UFF



Prof. Nelson Machado Barbosa, D.Sc. / LCMAT-UENF

Volta Redonda, 29 de Setembro de 2022.

Dedico este trabalho a minha esposa, a meus pais e família.

Agradecimentos

Para Deus, pela saúde e pela ajuda que mais ninguém pode dar.

A minha esposa Elizângela, por está sempre ao meu lado, me apoiando e incentivando.

A meus pais, meus irmãos, meus sogros, meus cunhados e cunhadas, por sempre acreditarem em meu potencial.

Ao professor Leandro por me auxiliar nos códigos para leitura dos arquivos e demais orientações e contribuições.

Ao professor Ricardo por contribuir em minha formação, pelas orientações para o desenvolvimento desta pesquisa.

Ao professor Wagner por seu apoio, orientações para esta pesquisa.

Ao professor Gustavo, por acreditar em meu potencial e sempre me incentivar a ir além.

Ao professor Daniel que contribuiu com minha formação e sempre estar disposto para orientar e instruir em minha caminhada.

Aos integrantes do TECGrupo por estarem sempre presentes e pelas oportunidades geradas durante minha vida acadêmica.

Aos professores e funcionários da UFF que contribuíram direta ou indiretamente para a viabilidade desta pesquisa.

Ao técnico Raphael Pires Bolzan responsável da fábrica do IFES/Alegre por ter fornecido as informações necessárias referentes à produção da ração no instituto.

A todos os colegas do mestrado, pela parceria, companherismo e trocas de informações.

A todos os demais que contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

O Problema de Otimização Linear, em especial o problema da produção da ração de aves e suínos, é de grande relevância no setor pecuário do país já que os maiores custos de produção animal estão na alimentação. Logo, o presente trabalho consiste em estudar e implementar o método Primal Simplex com variáveis Canalizadas (PSC) para solucionar problemas da produção de ração. Neste sentido, o método PSC é utilizado para minimizar os custos da produção de ração balanceada. Realizou-se o estudo e a formulação matemática de problemas de rações de aves e suínos. Neste trabalho foi tratada também a regra de Dantzig Normalizada, pois, conforme visto na literatura, o uso desta regra, em alguns casos, pode reduzir a quantidade de iterações do método Simplex. Além disso, foi criada uma interface para facilitar o gerenciamento da formulação de ração, onde, o sistema produz relatórios que fornecem todas as informações com relação à produção da ração. A partir de estudos preliminares e de uma visita técnica, foi realizado um estudo de caso no Instituto Federal do Espírito Santo (IFES) em Alegre, ES. Com base nas informações coletadas, diversos problemas foram modelados e resolvidos pelo método PSC. Na prática é necessário realizar ajustes no modelo para que o método encontre uma solução que atenda as exigências nutricionais e que seja viável de implementá-la ao problema real e que ainda esteja de acordo com a literatura. O desempenho do PSC e a qualidade das soluções obtidas foram comparados com o *software* CPLEX, para validar a precisão, verificar o desempenho e avaliar a robustez do método. Os resultados se mostraram promissores. Assim, de acordo com resultados obtidos evidencia-se o ótimo desempenho do PSC e a necessidade de estudar, modelar, resolver e validar problemas reais da produção de ração de aves e suínos.

Abstract

The Linear Optimization Problem, especially the problem of poultry and swine feed production, is of great relevance in the livestock sector in the country since the highest costs of animal production are in food. Therefore, the present work consists of studying and implementing the Primal Simplex method with Channeled variables (PSC) to solve feed production problems. In this sense, the PSC method is used to minimize the production costs of balanced feed. The study and mathematical formulation of poultry and swine feed problems were carried out. In this work, the Normalized Danzig rule was also treated, because, as seen in the literature, the use of this rule, in some cases, can reduce the number of iterations of the Simplex method. In addition, an interface was created to facilitate the management of feed formulation, where the system produces reports that provide all information regarding feed production. Based on preliminary studies and a technical visit, a case study was carried out at the Instituto Federal do Espírito Santo (IFES) in Alegre, ES. Based on the information collected, several problems were modeled and solved by the PSC method. In practice, it is necessary to make adjustments to the model so that the method finds a solution that meets the nutritional requirements and that it is feasible to implement it to the real problem and that is still in accordance with the literature. The performance of the PSC and the quality of the obtained solutions were compared with the CPLEX software, to validate the precision, verify the performance and evaluate the robustness of the method. The results proved to be promising. Thus, according to the results obtained, it is evident the excellent performance of the PSC and the need to study, model, solve and validate real problems in the production of poultry and swine feed.

Palavras-chave

1. Programação Linear
2. Método Primal Simplex Canalizado
3. Problema da Produção de Ração de Aves e Suínos

Glossário

CPLEX	:	<i>Software</i> para otimização de alto desempenho mantido pela IBM
EMBRAPA	:	Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária
FO	:	Função Objetivo
FR	:	Forma Revisada
IFES	:	Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
MSC	:	Método Simplex Canalizado
PL	:	Programação Linear
PO	:	Pesquisa Operacional
PPL	:	Problema de Programação Linear
PSC	:	Primal Simplex Canalizado
ORS	:	<i>Operations Research Society</i>
ORSA	:	<i>Operations Reseach Society of America</i>
RAND	:	<i>Research And Development</i>
SBF	:	Solução Básica Factível
SINDRAÇÕES	:	Sindicato Nacional da Indústria de Alimentos Animais
VNB	:	Variáveis Não Básicas

Sumário

1	Introdução	12
1.1	Considerações Gerais	12
1.2	Objetivos	14
1.3	Justificativa	14
1.4	Organização do Trabalho	16
2	Embasamento Teórico	17
2.1	O Problema da Mistura	17
2.2	O Problema da Produção de Ração	20
2.3	Um Modelo Matemático para o Problema da Ração	25
2.4	Exemplo de um problema real da Produção de Ração	26
2.5	Programação Linear	29
3	Método Simplex Canalizado e Outras Técnicas	36
3.1	Método Primal Simplex Canalizado	36
3.1.1	Cálculo dos Custos Reduzidos	40
3.1.2	Cálculo da Direção Simplex	41
3.1.3	Cálculo do Tamanho do Passo	42
3.1.4	Atualização da Nova Inversa da Base	48
3.1.4.1	Forma Revisada	48
3.1.4.2	Complexidade do Cálculo da Inversa da Base	49

3.2	Estabilidade Numérica do Tamanho do Passo	50
3.3	Considerações da Implementação do Método PSC	53
3.4	Exemplo com o método PSC	55
3.5	Regra de Dantzig Normalizada	66
4	Interface Gráfica	69
4.1	Telas de Cadastro - PSC	69
4.2	Telas de Gestão - PSC	73
4.3	Telas de Solução do Problema da Ração - PSC	75
4.3.1	Relatórios do Sistema	77
5	Estudo de Caso: Fábrica de Ração	80
5.1	Instituto Federal do Espírito Santo - IFES	80
5.2	Fábrica de Ração	82
5.3	Composição da Ração de Aves e Suínos	92
5.4	Instância de um Problema Real	94
6	Resultados Computacionais	99
6.1	Introdução	99
6.2	Instâncias Utilizadas nos Experimentos Computacionais	101
6.3	Variações do Problema da Ração	102
6.4	Problemas da Fábrica de Ração do IFES Desempenho PSC e CPLEX	107
6.5	Problemas da Fábrica de Ração do IFES - Análise de Resultados	112
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	130
7.1	Conclusões	130
7.2	Trabalhos Futuros	131

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo é apresentado um panorama geral sobre o trabalho realizado, descrevendo a organização estrutural utilizada na dissertação, bem como as etapas de desenvolvimento de cada capítulo. Desse modo, são informados os objetivos do trabalho e as justificativas da pesquisa nesta área.

1.1 Considerações Gerais

Diversas áreas do conhecimento buscam, de maneira mais eficiente possível organizar os diferentes tipos de recursos disponíveis. Dentre eles, pode-se destacar o tempo, a matéria prima, as máquinas, os operários, etc [13]. Durante a Segunda Guerra Mundial, a pesquisa era utilizada na tática de guerra para determinar quais estratégias funcionavam. Neste período, deu início a Pesquisa Operacional (PO) por meio das forças armadas dos Estados Unidos e Grã Bretanha [10].

As pesquisas eram especificadas por operações militares, onde o que importava era a eficiência do método utilizado, dado a necessidade de alcançar respostas em um tempo hábil. Esta abordagem foi usada pela primeira vez no Exército e na Marinha por Blackett, que foi considerado o pai da PO em 1941 e atuou como Conselheiro Científico e Diretor Naval [10].

A princípio, o desenvolvimento de estudos envolvendo problemas de otimização com restrições, segundo Barbosa, se deu em 1826, quando Fourier pesquisava sobre sistemas de inequações lineares [4]. A partir de 1939, foi dado uma maior importância a este assunto, quando começou a se desenvolver os primeiros Problemas de Programação Linear durante a Segunda Guerra Mundial.

Segundo Zachi, a partir de 1939, foi dada uma maior importância a este assunto, devida o trabalho do russo Leonid Kantorovich que desenvolveu os primeiros Problemas de Programação Linear para posteriormente ser usado durante Segunda Guerra Mundial, neste período percebeu-se a importância prática desse problema. Kantorovich planejava gastos e retornos, com a finalidade de causar mais estragos (prejuízos) ao inimigo e reduzir os gastos das forças armadas. Em meados da década de quarenta, George Dantzig por meio de pesquisas desenvolveu o método Simplex e diversos outros métodos surgiram a partir de então [48].

Além da formulação do Problema de Programação Linear (PPL), em 1947, Dantzig desenvolveu o método Simplex para solucionar problemas lineares. Além disso, esse método é muito bem empregado em problemas reais, em especial no caso do problema da produção de rações que por sua vez é um caso particular do Problema da Mistura [48].

O problema da mistura é um dos tipos mais antigos de programação linear. Cada ingrediente possui um custo e deve compor o produto final em certa quantidade. Este problema consiste em determinar a quantidade ideal de mistura a ser usada de cada componente de forma a alcançar o custo mínimo com a produção [46].

Na indústria de alimentos para animais é fundamental a formulação correta de ração balanceada. O termo que designa alimento diário do animal é conhecido como ração, sendo a sua formulação feita com a mistura de ingredientes de forma a fornecer o quantitativo de nutrientes necessários para o animal em diferentes estágios de vida. Para cada tipo de animal, há um quantitativo diferente de nutrientes a ser empregado. A ração deve ser fornecida de forma a suprir as exigências nutricionais [45].

Neste contexto, pode-se abordar, em particular, o problema de formulação de rações para aves e suínos, o qual consiste na combinação de alimentos em proporções que atendam às demandas nutricionais de animais a um custo mínimo. Para isso, se faz necessário uma formulação que considere vários aspectos, sejam eles da disponibilidade de insumo, preços destes, exigências nutricionais, etc.

Em muitos casos, uma forma de se obter uma ração é através da escolha dos ingredientes a serem misturados, orientada por um profissional experiente com um auxílio de tabelas e planilhas [9]. Assim, na prática, pode-se produzir uma ração de qualidade, porém, sem ter o menor custo possível [45]. Por isso, têm-se a necessidade de usar ferramentas de gestão mais refinadas, por exemplo, o uso da Pesquisa Operacional por intermédio da Programação Linear [9].

Neste trabalho, para a formulação do problema da produção de ração, foram obtidos dados da fábrica de ração do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, em Alegre-RS (IFES – *Campus Alegre*).

1.2 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo geral estudar e implementar o método Primal Simplex Canalizado (PSC) para solucionar problemas reais, no caso, problemas de produção de rações. Em especial, foi utilizado os dados da fábrica de ração do IFES para aves e suínos. Assim, tem-se como metas a serem alcançadas neste trabalho:

1. Realizar uma breve revisão da literatura;
2. Formulação dos modelos matemáticos para os problemas da ração.
3. Implementar o método Primal Simplex com duas fases para variáveis Canalizadas.
4. Incorporar a regra de Dantzig Normalizada no método PSC.
5. Verificar o desempenho do método proposto em problemas de produção de ração e outros.
6. Estudar, modelar, resolver pelo PSC e analisar os resultados para os problemas que surgem na fábrica de ração do IFES - Alegre.

1.3 Justificativa

O Brasil é um dos grandes produtores e exportadores de proteína animal do mundo. O país está em terceiro lugar no ranking dos dez principais países produtores de ração no mundo, com uma produção equivalente a 80,094 milhões de toneladas métricas (mmt) em 2021 [16].

Ressalta-se que a maior parte dos custos de produção animal está na alimentação, onde é largamente utilizada na criação e produção, em especial de aves e suínos. De 2009 a 2021 ocorreu um crescimento expressivo nestes segmentos, como, por exemplo, no setor de aves, com cerca de 55,9% da produção de ração total anual em milhões de toneladas. Entretanto, em 2020 este percentual representava 53%, isto é, mantendo um alto índice de produção.

Para o pecuarista, a alimentação pode chegar a 70% dos gastos da produção, como por exemplo, na ração usada no setor de avicultura e suinocultura. O aumento pode ser decorrente de alimentos protéicos que possuem custos mais elevados [31]. Com isso, é necessário ter ferramentas que auxiliem na tomada de decisão e que forneçam informações para ser obter ração a um custo mínimo.

Em uma granja as aves são abatidas com idade de 39 a 42 dias de vida, pesando aproximadamente 2,800kg a 3,200kg, com média de 3kg. Esses animais consomem o dobro do seu peso ao longo da vida. O consumo de ração por 40 dias é de aproximadamente 6kg por animal.

Como exemplo, considerando uma granja com cerca de 35.000 animais e uma diferença de 0,03 centavos por kg da ração na otimização (em 100kg) significa muito. Em um galpão de 150m × 16m com uma área de 2.400m² podem acomodar 14 frangos por metro quadrado. Se multiplicar a quantidade de frango pelo seu consumo, ou seja, 35.000 × 6 obtém-se um total de 210.00kg. Tomando o valor em kg e multiplicando pela diferença (210.00 × 0,03) obtém-se R\$ 6.300,00 reais em 40 dias. Anualmente esse valor chega a 57.487,50 de custo, percebe-se que essa diferença é muito significativa ao longo do tempo, isso para um galpão. Para os grandes produtores, essa diferença causa enormes perdas financeiras.

Assim, para o problema da produção de ração, que é o resultado da mistura de vários alimentos e insumos, surge-se a necessidade de ter um produto que atenda às exigências nutricionais a cada etapa da vida do animal com um custo de produção que seja o menor possível.

A alimentação animal deve ser regrada de nutrientes e suprimentos imprescindíveis para seu crescimento, saúde e reprodução, juntamente com suporte de técnicos e de economistas buscando minimizar custos com a fabricação da ração. Para mais, é fundamental a formulação de uma alimentação balanceada, isto é, que atenda as exigências nutricionais, com os ingredientes corretos e na quantidade certa, mantendo a qualidade a um menor custo [45].

Para se atingir o resultado esperado, são necessário boas escolhas, como por exemplo, a alimentação. Optar pelo tipo adequado de ração impacta no desempenho do animal. No mercado há diversos tipos de exigências nutricionais que precisam ser atendidas para cada espécie. O rendimento do animal está atrelado ao investimento empregado na sua alimentação, que conseqüentemente influi na sua saúde [41].

De acordo com os dados do SINDRAÇÕES, em 2021, foram produzidas 81,2 milhões de toneladas de ração animal, isto representa um aumento de 4,5% da produção do ano anterior [41].

Para resolver os problemas da ração, buscaram-se na literatura os principais autores que trabalham com o método Simplex para problema da mistura. Ao realizar uma busca no Google Acadêmico pelo assunto "método Simplex", obteve-se como resultado 32.900 registros. Já, quando pesquisado sobre o "método Primal Simplex para variáveis Canalizadas" a pesquisa retornou 334 resultados. Agora realizando uma pesquisa avançada na própria ferramenta, incluindo com frase exata "método Primal Simplex" e escolhendo a opção de em qualquer lugar do artigo, a pesquisa retornou 22 artigos relacionados. Uma boa parte desses 22 resultados foi utilizada como embasamento teórico deste trabalho.

O método Primal Simplex Canalizado (PSC) é um dos mais utilizados em Programação Linear. Para problemas reais, geralmente tem-se o modelo matemático com variáveis canalizadas. Logo estes casos, geralmente utiliza-se o PSC. Cabe destacar que atualmente é possível solucionar problemas envolvendo milhares de restrições e com diversas variáveis através do método Simplex com o uso de computadores [39].

Na próxima seção é apresentada a estrutura de organização do trabalho com mais detalhes.

1.4 Organização do Trabalho

Os próximos passos dessa dissertação estão organizados da seguinte maneira: No Capítulo 2 é feito um breve embasamento teórico versando sobre o problema da mistura, o Problema da Produção de Rações e, por último, são abordados os principais conceitos relacionados a Programação Linear. Em seguida, no Capítulo 3 é desenvolvido um modelo matemático para o problema da ração, é feita uma descrição detalhada do método Simplex e é apresentado um exemplo do desenvolvimento de um problema com variáveis canalizadas. No Capítulo 4 é apresentada uma interface que usa o método PSC com o objetivo de facilitar o manuseio e auxiliar na tomada de decisão durante a formulação de uma ração. Posteriormente, no Capítulo 5 é apresentado um estudo de caso relacionado à produção de ração no IFES, *Campus* Alegre. Já no Capítulo 6 são expostas as soluções obtidas na produção da fábrica de ração, bem como uma análise dos resultados. Por fim, no Capítulo 7 encontram-se as conclusões da pesquisa e algumas propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Embasamento Teórico

Nesta capítulo é apresentado um breve referencial teórico sobre o problema da mistura, mais especificamente, o problema da produção de ração. Além disso, é apresentado um breve histórico sobre Programação Linear e como é feita a formulação deste tipo de problema.

2.1 O Problema da Mistura

A Pesquisa Operacional (PO) busca encontrar e criar modelos matemáticos que representem o funcionamento de um fenômeno, de forma a otimizar o processo. Na maioria dos casos este modelo representa a utilização de recursos escassos. Diversas áreas modelam problemas do mundo real utilizando esta técnica. Dentre as áreas pode-se destacar: economia, gestão, comunicação, pesquisa de mercado, logística, prevenção de acidentes, eficiência na produtividade, planejamento e controle de produção [46].

Uma aplicação de PO pode ser encontrada no problema de mistura, como, por exemplo, ao realizar um processamento de alimentos ou de materiais para a geração de um novo produto com características apropriadas. Há diversas áreas que fazem uso deste tipo de manipulação, as principais delas são: formulação de rações, fabricação de adubos, minérios ou petróleo, na produção de ligas metálicas, produção de suco [33]. Outro exemplo se encontra na produção de suco de laranja, os insumos são oriundos de diversos pomares que conseqüentemente possuem diferentes níveis de acidez, sólidos e coloração [34]. Diversos produtos são fabricados a partir desta composição. Além disso, o mercado, a indústria e o comércio executam este processo de mistura para gerar novos produtos com composições específicas.

Sem dúvidas, na Pesquisa Operacional são estudados diversos problemas de minimização de custo ou de maximização de lucros, o qual é encontrado no cotidiano. Outra pesquisa abordada nesta área é o "Problema da Dieta", que tem como desafio reduzir custos, sem deixar de suprir necessidades nutricionais [8].

Cardoso et al. [8] desenvolveram uma pesquisa no Instituto Federal do Centro Oeste de Minas Gerais objetivando minimizar o custo da produção da ração de crescimento para suínos sem deixar de atender requisitos nutricionais. Ademais, foram analisados os ingredientes correspondentes a um quilo do produto, no qual é composto por milho a granel, farelo de soja e suplemento vitamínico mineral. Para otimizar a quantidade de ingredientes já utilizada pelos funcionários, formulou-se um modelo matemático. Esta técnica é bem complexa para ser resolvida manualmente, necessitando a utilização de ferramentas computacionais para resolver o problema da produção da fabricação de ração [8].

Na construção do modelo pretende-se fixar a quantidade exata de cada item necessário para a produção da ração suína de crescimento, com o intuito de minimizar os custos do instituto. Para o desenvolvimento da pesquisa foi feito o levantamento do quantitativo dos suplementos vitamínicos, do farelo de soja e do milho a granel, ingredientes necessários para a confecção. Após este levantamento, foi possível calcular a porcentagem de cada um dos itens da ração e, em seguida, calcula-se o custo para se produzir um quilo do produto [8].

No geral, esta mistura é feita com os ingredientes disponíveis em estoque e que na maioria dos casos são escassos.

Supõe-se que para esta mistura são necessários m componentes essenciais para a geração da nova composição. Como exemplo, para se produzir uma dada ração, são imprescindíveis as proteínas, as vitaminas, os sais minerais e etc.. Já na produção de uma liga metálica, estes componentes podem ser o quantitativo de carbono, do manganês, ferro, por exemplo. Além disso, para esta produção há n produtos disponíveis para a mistura. Na fabricação de ração este produto pode ser o milho, a soja farelo, o sal comum e outros [34].

Assim, as equações a seguir representam as exigências nutricionais:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}\tag{2.1}$$

Observe que as linhas da equação representam os componentes, já as colunas representam os ingredientes usados para a produção. O problema da mistura consiste em estipular a quantidade ideal dos ingredientes de forma a produzir uma unidade de medida da mistura. Os dados do problema podem ser representados da seguinte forma:

- O elemento da matriz a_{ij} corresponde à quantidade do nutriente i presente em uma unidade do alimento j (exigência nutricional), por exemplo, em $1kg$.
- b_i corresponde à quantidade exigida do nutriente i na composição da ração.
- x_j representa à quantidade do alimento j a ser utilizada em uma unidade da mistura do problema.

Na formulação do problema, conforme equação (2.1) são definidas novas restrições que são dadas por:

- Restrição de não negatividade, $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.
- Restrição da unidade de mistura, isto é, a soma dos elementos deve ser igual a uma unidade da mistura, por exemplo, $1kg$, sendo representado por $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.
- O custo de cada ingrediente j é representado por c_j , logo o custo total da mistura pode ser representado por $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$.

Esta é uma formulação simples de um problema da mistura que é citado de forma mais detalhada no decorrer do texto.

2.2 O Problema da Produção de Ração

A definição de ração animal segundo Gomide [19], pode ser uma mistura que atenda as necessidades nutricionais de manutenção, do desenvolvimento e da produtividade dos animais. Para a sua fabricação exige-se um conhecimento dos ingredientes usados, do seu preço de mercado e da técnica para a produção. Com o avanço de pesquisas relacionadas a exigências nutricionais, métodos são utilizados para formular a ração, de modo a conseguir uma mistura que contemple todos os nutrientes em uma quantidade adequada com menor custo possível.

Os alimentos devem ser selecionados e misturados de forma a equilibrar os nutrientes presentes na ração. Para os cálculos do custo mínimo é imprescindível obter as seguintes informações: preço dos alimentos, quantidade de alimentos disponíveis, exigências nutricionais dos tipos de animais. Além disso, faz-se necessário classificar os animais de acordo com o peso e idade, definir as exigências nutricionais de acordo com a tabela nutricional, realizar a seleção dos alimentos e, por último, usar um método para solucionar o modelo matemático que retrate o problema real [37].

De acordo com Tonin [45], o desenvolvimento do animal esta relacionado com sua alimentação, os requisitos nutricionais são determinados pelo seu padrão de crescimento. A formulação da ração deve ser determinada corretamente e de modo eficaz e que não comprometa as funções do animal. Sendo assim, esta composição deve levar em consideração o total a ser produzido e com os valores nutricionais dos ingredientes.

Igualmente, a criação de animais, na maioria dos casos, é realizada com o intuito de alcançar lucros. A indústria pecuária explora o mercado de compra e venda da produção necessária para este setor. Conforme descrito por Andriguetto [2] esta produção foca em três principais aspectos: genética; higiene e manejo, seguido da alimentação.

A genética está relacionada ao potencial intrínseco do animal, que pode ser altamente especializadas usando cruzamento entre as raças. Já o manejo possibilita condições básicas como prevenção de doenças e a saúde necessária para a criação. Por meio da alimentação, o pecuarista também previne a doença nos animais e mantém seus objetivos econômicos. Já, a alimentação fornece aos animais as melhores condições de rendimento e mantém a vida [2].

Contudo, diversos estados brasileiros buscam tornar a produção mais competitiva ao se comparado com outros sistemas no país, para isso, são aplicadas tecnologias buscando sua intensificação. Esta abordagem tem como principal objetivo maximizar os lucros e minimizar os custos relativos à alimentação dos animais. Conforme informado pela EMBRAPA [38], os custos com a alimentação podem variar de 40% a 60% do custo total gasto na pecuária. Ademais, este planejamento depende do conhecimento relacionado ao potencial nutricional alimentar presente na alimentação do animal, seguida das exigências nutricionais levando em conta o tipo de animal e, por último, ter conhecimentos prévios sobre a formulação de ração.

Tanto a genética quanto o ambiente são fatores fundamentais quando se busca a eficiência na produção de alimentos como leite, ovos, carne. Com relação ao ambiente, podem-se destacar situações como o clima, a sanidade, o manejo. A utilização de rações balanceadas juntamente com o manejo alimentar, propicia que o animal realize a conversão dos nutrientes alimentares de forma eficiente na produção, de acordo com a idade e a finalidade. Além disso, há a necessidade dos animais apresentarem um potencial genético [14].

Anualmente, o Sindicato Nacional da Indústria de Alimentos Animais (SINDIRAÇÕES), traz informativos da produção de ração em milhões de toneladas. Fundado em 1953 quando houve um crescimento expressivo na indústria alimentícia animal. Além do mais, o SINDIRAÇÕES reuniu 140 associados que são responsáveis por 90% da produção de ração do país. Hoje o sindicato é considerado o porta-voz e fórum de discussão de um setor responsável por uma produção de cerca de 75 milhões de toneladas em 2020. Como relata o vice-presidente executivo, os principais objetivos do sindicato são a promoção e o desenvolvimento do setor, a representação dos sócios em meio a órgãos governamentais ou outras associações nacionais e internacionais [41].

A Tabela 2.1 traz um levantamento dos últimos 13 anos da produção, estimativa e previsão de ração.

Tabela 2.1: Estimativa na produção de ração (milhões de tons).

SEG.	AVES	SUÍNOS	BOVI.	CÃES e GATOS	EQUI.	AQUA.	TOTAL RAÇÕES
2009	32,64	15,33	6,78	1,93	0,56	0,38	57,62
2010	35,1	15,3	7,2	2,1	0,57	0,43	60,70
2011*	37,1	15,4	7,7	2,1	0,58	0,514	63,39
2012	36,3	15,1	7,4	2,26	0,56	0,65	62,27
2013*	35,8	14,9	7,5	2,38	0,58	0,74	61,90
2014*	37	15,2	8,2	2,492	0,6	0,854	64,35
2015**	37,9	15,7	7,98	2,437	0,58	0,94	65,54
2016*	37,8	16,4	8,2	2,5	0,581	0,93	66,41
2017*	38,5	16,5	8,5	2,58	0,579	1,18	67,84
2018*	38,2	16,7	8,5	2,65	0,585	1,23	67,87
2019*	39,7	17,7	11,4	2,81	0,594	1,3	73,50
2020*	41,4	18,8	11,9	3,09	0,62	1,38	77,19
2021*	42,6	19,7	12,2	3,48	0,63	1,45	80,00

Fonte: O Autor (2022) (adaptado SINDIRAÇÕES |*Estimativa |**Previsão).

A produção está estimada em milhões de toneladas e são representadas por: aves (frangos de corte e poedeiras), suínos, bovinos (leite e de corte), cães e gatos, equinos, aquacultura (peixes e camarões). De 2009 a 2021 é possível observar um crescimento expressivo na produção destes setores. Em 2009, o seguimento de aves representava cerca de 55,9% do total de rações produzidos no ano.

Muitos técnicos e criadores de animais, de diferentes espécies, têm utilizado a formulação de ração como ferramenta essencial para se atingir as exigências nutricionais de seu rebanho. No entanto, o desempenho está ligado diretamente à disponibilidade técnica e econômica da produção animal. Para se produzir a ração são necessários três etapas para processar a formulação da ração. Primeiramente é feito o levantamento das exigências nutricionais, posteriormente, são realizados os cálculos dos nutrientes presentes nos alimentos e, por último, modela-se o problema. A modelagem combina os alimentos de forma a aprimorar o desempenho animal ao menor custo [32].

Destaca-se que o valor gasto com a alimentação é bem significativo, chegando a atingir de 50% a 75% do custo total de uma propriedade. Quando há uma boa formulação da ração, esta impacta nos lucros dos produtores [24].

Em decorrência da Pandemia do Covid-19, em 2020 o setor de rações teve um crescimento de 5%. Entretanto, de acordo com o CEO do SINDIRAÇÕES, em 2021 ocorreu um crescimento tímido, ficando em torno de 2,3%. Devido ao corte no Auxílio Emergencial ou a redução deste benefício, juntamente com o desemprego, acarretaram na diminuição do consumo de carne no país. Os insumos para a fabricação da ração tiveram seus preços elevados, podendo citar, por exemplo, o milho e o farelo de soja e demais aditivos para sua produção. Neste cenário, se faz necessário produzir uma ração de custo mínimo para que as empresas possam ter preços competitivos, dado à alta nos preços no mercado [41].

A Tabela 2.2 apresenta os países top 10 produtores de rações em 2021.

Tabela 2.2: Os 10 principais países produtores de ração em 2021.

Nº	País	Quantidade
1	China	261,424 mmt
2	EUA	231,538 mmt
3	Brasil	80,094 mmt
4	Índia	44,059 mmt
5	México	38,857 mmt
6	Espanha	35,580 mmt
7	Rússia	33.000 mmt
8	Turquia	25.300 mmt
9	Japão	24,797 mmt
10	Alemanha	24,506 mmt

Fonte: All About Feed (2022).

A 11^a pesquisa realizada em 2022 pela *Alltech*, onde foram analisadas 28.000 fábricas de rações de 140 países, traz uma visão da produção mundial de ração. A análise mostra que houve um aumento de 2,3%, o equivale a mais de 1,2 bilhão de toneladas métricas na produção do setor de alimentos para animais em 2021. A China lidera com o maior aumento na produção de ração, cerca de 8,9% sendo equivalente a 261,420 milhões de toneladas métricas (mmt) em comparação com 2021 [16].

Juntos, estes países são responsáveis por produzirem 65% da produção mundial. Estes produtores presenciaram um aumento de 4,4% de toneladas, quando comparado com o crescimento mundial de 2,3%. O sucesso do setor se deve a contínua consolidação e do aprimoramento dos produtores de rações nestes países. Dos países analisados mundialmente, metade informaram que suas expectativas locais foram atendidas, ao contrário de cerca de 25% dos países [16].

Conforme pode ser visto na Tabela 2.2, o Brasil conquistou o terceiro lugar dos principais países produtores de ração, ficando atrás somente da China e dos Estados Unidos da América (EUA).

Segundo Santos e Quintal [14], o Brasil está no ranking de terceiro maior rebanho mundial de suínos com mais de 32 milhões de suínos, sendo somente ultrapassado pelos Estados Unidos e China, que apresentam 60 milhões e 460 milhões de suínos, respectivamente. Embora o rebanho brasileiro tenha permanecido constante, houve um decréscimo no número de matrizes suínas na última década, por outro lado, ocorreu um crescimento significativo na produção de leitões que, em 1993, era de 22,4 milhões, passando, em 2002, para quase 30 milhões.

Sendo assim, ao considerar os custos com a criação desses animais, são gastos em média, 65% com alimentação. Tendo conhecimento desse percentual, os produtores buscam meios de aumentar seus lucros, para isso, há a necessidade de criar um planejamento que adequa as exigências nutricionais dos suínos [14].

Na atualidade, empresas que trabalham com a produção de ração, buscam encontrar maneiras para reduzir o custo de sua produção. Além das restrições, o problema deve atender a quantidade mínima e máxima de um determinado nutriente. Um exemplo deste caso é encontrado em Arenales [3], quando é descrito o problema clássico de custo mínimo.

A partir do modelo matemático, segundo Gomide, a Programação Linear tem sido utilizada por profissionais para alcançar a formulação de uma ração com custo mínimo na produção de alimentos para diversos animais. Esta ferramenta é essencial para escolher o percentual da quantidade de cada nutriente que compõe a produção de rações, de acordo com as exigências nutricionais e levando em conta o valor de custo de cada componente [19].

Para realizar a construção de modelos matemáticos, primeiramente é necessário ter um conhecimento da área estudada e realizar reuniões com os envolvidos para relatar de fato o problema real. Segundo Rangel, este processo pode ser dividido em três fases, sendo elas a modelagem, a validação e a implementação. Este tipo de problema é encontrado na formulação de ração, que no geral possui como características ser linear e canalizado tanto nas variáveis quanto nas restrições. Após a formulação é utilizado o método Primal Simplex para variáveis Canalizadas para solucionar o problema. De posse da solução do modelo é feita a análise, revisão e a validação da implementação a ser colocada em prática [34].

2.3 Um Modelo Matemático para o Problema da Ração

Geralmente, para resolver um problema real são necessárias três etapas: a modelagem do problema, a resolução e, posteriormente, a validação. Na modelagem são identificadas as variáveis de decisão, é construída a função objetivo e as restrições. De posse do modelo matemático devem ser verificadas as características do modelo para em seguida definir o método de resolução. Uma vez encontrada a solução, deve-se analisar a viabilidade de implementá-la para o problema real. As fases devem ser executadas até que a solução seja viável de aplicá-la para o problema real.

A Figura 2.1 apresenta a sequência para a solução do problema real.

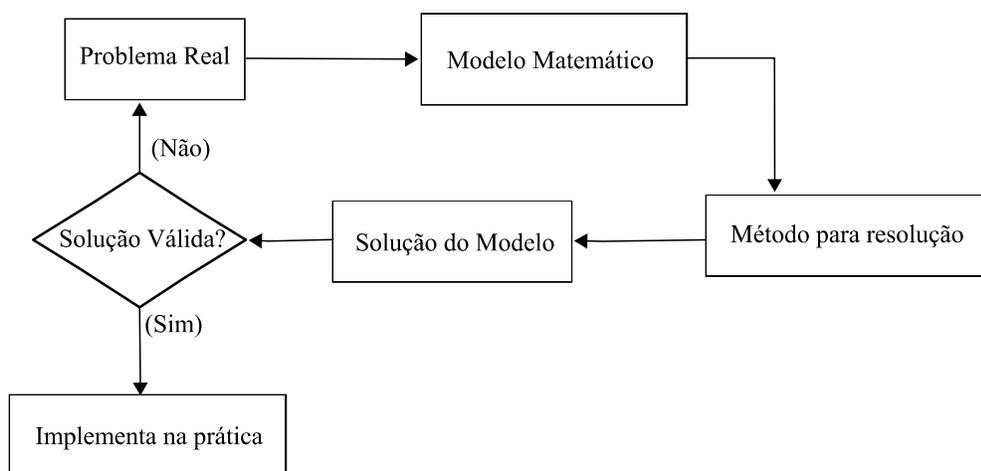


Figura 2.1: Esquema para a construção do Modelo Matemático.
Fonte: O Autor (2022).

Tanto na fase onde é estudado o problema real quanto na solução do modelo matemático, é necessário à presença do zootecnista ou veterinário para conhecer o problema e verificar a viabilidade da solução ser implementada na prática.

2.4 Exemplo de um problema real da Produção de Ração

O problema da produção de ração consiste em misturar ingredientes (alimentos) de forma a gerar uma ração com características específicas de acordo com a fase de vida do animal. Para a produção são utilizados diversos alimentos na mistura, como: milho, farelo de soja, sal, entre outros. O problema consiste em descobrir a quantidade ideal de ingredientes disponíveis a ser utilizado na composição da ração. Entretanto, é necessário que seja atendida as exigências nutricionais, buscando obter o menor custo possível.

Para produzir este tipo de ração, é necessário obter informações referentes a restrições nutricionais. A principal fonte do país que fornece informações com relação a estas exigências é a Tabela Brasileira para Aves e Suínos. Este material apresenta um conjunto de dados sobre a composição de alimentos e exigências nutricionais [35].

Tomando-se como base o exemplo apresentado no trabalho de Cardoso et al. [8], deseja-se formular uma ração para suíno de crescimento respeitando as exigências nutricionais de forma a garantir os níveis de quantidade de cada ingrediente. De acordo com Cardoso, uma solução utilizada para este problema era 70,7% de milho, 25,3% de farelo de soja, e 4% suplemento vitamínico mineral.

A Tabela 2.3 apresenta as exigências nutricionais do problema.

Tabela 2.3: Exigências Nutricionais para Suíno Crescimento, em 1 *kg* de ração.

Nutrientes	Quantidade Mínima
Energia Digestiva	3230
Proteína	0,1825
Cálcio	0,00631
Potássio	0,00448

Fonte: O Autor (2022).

O custo total é o somatório da quantidade a ser utilizada destes alimentos pelos respectivos custos unitários. Além disso, usa-se o 999999,9999 quando não tem limitante superior definido. Neste caso, não tem limitante máximo definido. Para fins de modelagem matemática é necessário a definição de um valor grande. A solução para este problema deve atender as demandas de quantidades mínimas e máximas de cada um dos nutrientes apresentados. Há, ainda a restrição da quantidade total de ração a ser produzida que é de 1 *kg*.

A Tabela 2.4 apresenta a composição química e os custos dos alimentos.

Tabela 2.4: Composição Química e Custos dos Alimentos

	Energia <i>kcal/Kg</i>	Proteína %	Cálcio %	Potássio %	Custo Unitário (1kg)
Milho	3460	8,26	0,03	0,28	0,53
Soja	3425	45,32	0,24	1,83	0,93
Suplemento	-	-	24	-	1,81
Exigências	3230	18,25	0,631	0,448	

Fonte: Adaptado de Cardoso et al., (2015).

Os valores das exigências nutricionais foram extraídos de acordo com Rostagno et al. [36], no caso, as exigências para suíno de crescimento. Sendo assim, seguindo as recomendações técnicas da EMBRAPA elaboradas por Barbosa, Lima e Soares [5] e considerando que não havia necessidade de alguns nutrientes no modelo, pois, fixando 3% de suplemento vitamínico mineral atenderia aos níveis de garantia e exigências abordados na Tabela 2.4.

Considera-se, que para este problema, a variável de decisão x_1 representa a quantidade de milho a ser utilizada na composição da ração, x_2 é a variável de decisão que representa a quantidade de soja a ser utilizada e por último, tem-se a variável x_3 representando o quantitativo de suplementos vitamínicos minerais.

De posse das informações nas Tabelas 2.3 e 2.4, incluindo as restrições com relação à quantidade a ser produzida, desenvolveu-se o modelo matemático de custo mínimo que é dado por:

O problema é formulado de acordo com o modelo matemático a seguir:

$$\text{Minimizar } f(x) = 0,5x_1 + 0,93x_2 + 1,81x_3$$

Sujeito as seguintes restrições nutricionais dadas por:

Restrição com relação a Energia Digestiva:

$$3230 \leq 3460x_1 + 3425x_2 \leq 999999,9999$$

Restrição com relação a Proteína:

$$0,1825 \leq 0,0826x_1 + 0,0024x_2 \leq 999999,9999$$

Restrição com relação ao Cálcio:

$$0,00631 \leq 0,0003x_1 + 0,4532x_2 + 0,24x_3 \leq 999999,9999$$

Restrição com relação ao Potássio:

$$0,00448 \leq 0,0028x_1 + 0,0183x_2 \leq 999999,9999$$

Quantidade de ração a ser produzida:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Condição de não negatividade:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

Entretanto, ocorre a mudança de escala nos valores do modelo matemático, pois considera-se o total da ração sendo $1kg$. As informações das restrições nutricionais de acordo com Rostano [35] são dadas em porcentagem, porém, foi feita a conversão de porcentagem para a escala em quilogramas. Esta converção facilita o entendimento dos resultados quando se trabalha com problemas reais.

A partir do modelo formulado baseado no trabalho de Cardoso [8], foi obtida a composição dos ingredientes da ração utilizando a resolução pelo método Simplex. Como solução foram obtidas as seguintes composições: milho com 69,37%, farelo de soja com 27,62% e, por último, conforme fixado, 3% de suplemento vitamínico mineral. Além disso, para este modelo, foi obtido o custo de R\$ 0,67 centavos por quilo de ração. Para a formulação desta ração houve uma redução de 1,33% para o milho, 2,32% para a soja e 1% para o suplemento. Portanto, houve uma diminuição de 0,01% no custo com a produção desta ração conforme apresentado por Cardoso [8]. Embora pareça um percentual muito pequeno, em aplicações reais, a redução no custo de produção é bem significativa conforme apresentado Capítulo 1.

Cabe destacar que este problema da produção de ração retrata uma situação real, mas sem levar em consideração outros alimentos e exigências nutricionais para esta fase da vida animal de um suíno.

O modelo apresentado basicamente se encontra no formato exposto na seção 2.5 no PPL (2.7).

Na próxima seção é apresentado um breve histórico sobre a Programação Linear e o Problema de Programação Linear.

2.5 Programação Linear

A Pesquisa Operacional começou a dar seus primeiros passos durante a Segunda Guerra Mundial, devido à necessidade de tomada de decisões referentes à utilização de recursos de guerra. Posteriormente, é possível encontrar diversas aplicações nos seguintes segmentos industriais e comerciais: estratégia, operações e logística, marketing, recursos humanos, transporte [48].

Além disso, de acordo com Santos, a PO tem suas origens a partir do surgimento do radar e na busca de novas aplicações para este instrumento, por exemplo, interceptar aeronaves inimigas. Este termo, de início, estava atrelado à criação de centros e seções da força aérea britânica responsável pela aplicação de técnicas para a resolução de problemas operacionais de guerra, por exemplo, o quantitativo da frota, manutenção de aviões, logística e tomada de decisão [13].

No decorrer deste conflito mundial, a pesquisa estava atrelada a duas linhas de interesses particulares. A primeira ligado à Marinha, o *Operations Evaluation Group*, que está relacionada com a Teoria dos Jogos e a aplicações militares. Já na segunda, o *Statistical Research Group*, voltada para a *Applied Mathematics Panel* e as Forças Aéreas. Observa-se que em decorrência destes acontecimentos surgiu o projeto *Research And Development* (RAND), cujos objetivos estão na atuação de jogos e operações militares na época [47].

De acordo com Alban [1], a pesquisa PO pode ser definida como uma aplicação que envolve grupos interdisciplinares de método científico para problemas como controle ou sistema de uma organização, com a finalidade de gerar melhores soluções para os objetivos das organizações envolvidas. Para isso, o método de PO segue um roteiro organizado por fases.

Primeiramente, é feita a formulação e definição do problema, isto é, a descrição dos objetivos do problema, o que se deseja aperfeiçoar, identificação dos elementos envolvidos a serem controláveis ou não. Em seguida, é feita a formulação deste modelo. Posteriormente, encontra-se uma solução para o modelo e a validação do mesmo. Por último, é feita a implementação, a interpretação dos resultados e qual conclusão se teve com os resultados alcançados. Por exemplo, se a solução pode ser aplicada para outros problemas, se há a necessidade de uma revisão ou atualização para outras aplicações.

Segundo Mansilha, Farrat e Kullmann [26] a Programação Linear (PL) ou Otimização Linear é um dos problemas talvez mais relevantes e bem estudados neste segmento. Problemas reais podem ser formulados utilizando a abordagem por Programação Linear. Na prática, a Otimização Linear pode ser empregada no controle e no planejamento da produção, no planejamento dos recursos hídricos, no roteamento de veículos, no tráfego de mensagens em telecomunicações, em cálculo estrutural, na gerência de finanças [40].

A Programação Linear utiliza a Matemática, a Economia, a Estatística e a Computação para preparação das informações, realizar a análise e, posteriormente, tomar decisões [18].

Um problema muito usado na literatura para exemplificar um modelo matemático de PL é o problema da dieta. O problema consiste em escolher o quantitativo de alimentos para atender a uma quantidade específica de nutrientes de acordo com critérios adotados. Dantzig usou o problema apresentado por George Stigler (1945) [44] que abordava um problema no qual um homem de 70 *kg*, tinha 77 alimentos diferentes a ser ingeridos diariamente, este problema foi usado posteriormente por Dantzig para validar o método Simplex. Nesta época, Stigler resolveu o problema com um conjunto de 9×11 inequações, em que obteve um custo de 39,93 dólares ao ano. De forma manual, foram analisadas 510 diferentes possibilidades de combinação de alimento.

Com o fim da Segunda Guerra Mundial, tanto os Estados Unidos quanto à Inglaterra tiveram uma evolução significativa nas pesquisas sobre PO. Diversos projetos governamentais e sociais de pesquisas foram criados, dentre eles pode-se destacar: *Operations Research Society of America* (ORSA) (EUA) e *Operations Research Society* (ORS) (Inglaterra). Estes avanços são decorrentes da utilização de PO em áreas como a indústria, economia, agricultura, transporte [13].

Já em 1947, George Bernard Dantzig, matemático norte americano, trabalhava em um projeto das forças aéreas americanas para auxiliar as operações militares. Dantzig neste período trabalhava com problemas de planejamento de programação usando calculadores de mesa. Com o intuito de otimizar a forma de como realizar estes cálculos, Dantzig foi desafiado pelos colegas a solucionar este problema. Como resposta, ele criou, sintetizou e testou o método que denominou de Simplex, usado amplamente em problemas de PL [13].

De acordo com Zachy [48], os problemas de programação linear tentam modelar problemas reais através de modelos matemáticos. Neles são utilizadas variáveis e parâmetros numéricos, onde no primeiro os valores são determinados no processo, já no segundo os valores são conhecidos e fixados como dado. As variáveis são utilizadas como decisão, enquanto os parâmetros não. O termo empregado como programação, expressa otimização, isto é, faz referência ao termo "programar", usado por militares do norte da América ao se referir à agenda de horários de treinar e de realizar ações de logísticas, não remetendo ao ato de programar computadores [48].

Souza [42] enfatiza que pequenas empresas podem usufruir desta ferramenta sem grandes investimentos. Devido à possibilidade de planejar e gerir de forma ótima os sistemas, a PL se tornou um dos tópicos mais propagados e utilizados em pesquisa operacional. Esta técnica traz inovação, aumenta a produtividade e aprimora a produção utilizando a tecnologia [42].

Um modelo de PL pode ser dado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{S.a.} \quad & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Este modelo se encontra formulado na notação matricial, no caso a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sendo m as restrições (representada por um conjunto de variáveis) e n representando as variáveis. O vetor c representa o vetor de custo dos alimentos e o vetor x as variáveis de decisão, ambos os vetores $\in \mathbb{R}^n$, já o vetor $b \in \mathbb{R}^m$. O $f(x)$ representa a função objetivo que é obtida a partir do produto dos custos pelas variáveis de decisão. As restrições do problema são dadas por $Ax = b$. O $x \geq 0$ é chamado de condição de não negatividade do modelo [13].

De acordo com Bazaraa um conjunto de valores de x_1, x_2, \dots, x_n que satisfaça as exigências do problema é denominado de solução factível, já o conjunto de todos estes pontos é considerado como uma região viável. O Problema de Programação Linear (PPL) consiste em encontrar uma solução que minimize ou maximize a função do problema [6].

Um PPL tem como finalidade minimizar ou maximizar a função objetivo que é composta por variáveis de decisão. Este problema é composto por um conjunto de restrições que forma um sistema linear, onde é empregado igualdades e desigualdades. Sua representação segue o seguinte modelo de PPL [48]:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } f(x) &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
 \text{S.a.} \\
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 &\vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

A variável $f(x)$ representa a função objetivo do problema, além disso, as restrições podem conter sinais de \leq ou $=$. Esta variável também é representada por uma função linear composta pelas variáveis de decisão, onde objetiva-se minimizar ou maximizar um problema, a equação a seguir descreve esta expressão [15]:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \tag{2.4}$$

Neste modelo, x_j representa as variáveis de decisão, tal que, $x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$.

Como constante ou coeficiente, a_{ij} é a i -ésima restrição da j -ésima variável, sendo $i = 1, 2, \dots, m$, e $j = 1, 2, \dots, n$.

Já o termo independente ou a quantidade de recursos é representado por b_i , sendo a i -ésima restrição, tal que $i = 1, 2, \dots, m$.

Por último, c_j o coeficiente da j -ésima variável que compoe a função objetivo, em que $j = 1, 2, \dots, n$.

Além disso, são necessárias as limitações representadas pelos valores das variáveis de decisão ($x_j, j = 1, \dots, n$). Além dessas condições, o problema deve atender as restrições de não negatividade, isto é, $x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$.

A Programação Linear (PL) faz uso de modelos que retratam a realidade de forma simplificada, tomando como base um problema de produção de ração, é possível representá-lo usando um modelo de PL. Esta representação define e descreve o problema propriamente dito. Na construção é necessário identificar a função objetivo, quais são as exigências a serem atendidas.

Um modelo geral de programação linear pode ser definido para minimizar ou maximizar uma função objetivo. Ele pode ser composto por restrições dos tipos $\geq, \leq, =$. Já algumas variáveis podem receber qualquer tipo de valores. Dentre estes valores, podem variar entre $-\infty$ e $+\infty$.

Os Problemas de Programação Linear na maioria dos casos adotam a seguinte hipótese: a de não negatividade, isto é, todas as variáveis de decisão são maiores ou iguais a zero ($x \geq 0$).

Em um problema de minimização para transformar uma desigualdade do tipo $\leq, (\geq)$ para outra do tipo $\geq, (\leq)$, basta multiplicar por -1 . Um problema que possui uma igualdade pode ser transformado em duas outras restrições do tipo \leq, \geq .

Para converter uma restrição \leq para outra de $=$, é necessário inserir uma variável de folga não negativa de forma a equilibrar a desigualdade em ambos os lados da equação [15]. Já para converter uma restrição \geq para outra de $=$, é necessário inserir uma variável de excesso com o coeficiente negativo de forma a equilibrar a desigualdade em ambos os lados da equação [15].

Um problema é considerado em sua forma padrão se os termos independentes são não negativos, se as restrições estão representadas por equações lineares. Além disso, deve estar na forma de igualdade, bem como, suas variáveis de decisão devem ser não nulas. O problema na forma padrão apresenta matematicamente seus elementos distribuídos da forma como apresentadas na equação (2.2). Outro formato de nomenclatura encontrada pode ter este formato conforme visto em Zachi [48].

Para um problema real da produção de ração, o modelo pode ser dado por:

$$\begin{aligned}
 &Min \quad f(x) = c^T x \\
 &S.a. \\
 &\quad d \leq Ax \leq e \\
 &\quad x \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Para calcular a solução usa-se a abordagem apresentada por Gomide [19] que o transforma em outro equivalente. De acordo com Gomide [19], o problema (2.5) é equivalente ao problema de programação linear com variáveis canalizadas a seguir:

$$\begin{aligned}
 &Min \quad f(x) = c^T x \\
 &S.a. \\
 &\quad Ax + x^1 = e \\
 &\quad 0 \leq x \\
 &\quad 0 \leq x^1 \leq e - d
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Onde A é a matriz com dimensões $m \times n$; x e c são representados pelo vetores $(n \times 1)$ e e e d são vetores $(m \times 1)$. O x^1 representa a matriz com as variáveis de folga ou excesso, podendo ser a matriz identidade.

Considerando agora um modelo geral com restrições e variáveis canalizadas no formato geral:

$$\begin{aligned}
 &Min \quad f(x) = c^T x \\
 &S.a. \\
 &\quad d \leq Ax \leq e \\
 &\quad \alpha \leq x \leq \beta
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Para transformá-lo em um problema equivalente P' de acordo com Arenales [19], o mesmo deve ter a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \text{Min } & f(x) = c^T x \\ \text{S.a. } & \\ & Ax + x^1 = e \\ & \alpha \leq x \leq \beta \\ & 0 \leq x^1 \leq e - d \end{aligned} \tag{2.8}$$

Perceba que as restrições estão na forma de igualdade. Já as variáveis de decisão estão no formato canalizado. O mesmo ocorre para a partição das variáveis básicas ($0 \leq x^1 \leq e - d$).

Na equação (2.8) a função objetivo é calculada pelo produto do custo pelo vetor solução ($c^T x$). Sujeito as seguintes restrições dadas pela matriz A , pelo vetor x , seguida do acréscimo das variáveis de folga ou excesso (x^1). Por último, as canalizações nas variáveis do problema (x), sendo α representando o limitante inferior e β o limitante superior, de forma análoga, são feitos com as variáveis de folga ou excesso. O vetor e representa o lado direito do sistema, já o d representa o lado esquerdo correspondendo ao valor mínimo que a variável do problema pode ser atribuída.

Os problemas usados neste trabalho abordam a forma geral representado pelo problema (2.7). O método Primal Simplex Canalizado é um dos principais programas usados para resolução de problemas reais envolvendo a produção de ração.

No próximo capítulo é abordado o método Simplex com mais detalhes.

Capítulo 3

Método Simplex Canalizado e Outras Técnicas

Neste capítulo é apresentado o desenvolvimento e a implementação do método Primal Simplex para variáveis Canalizadas com a regra de Dantzig Normalizada.

3.1 Método Primal Simplex Canalizado

O método Simplex é muito usado para resolver problemas envolvendo Programação Linear. Ele é bem eficiente e consegue solucionar problemas grandes e complexos computacionalmente [29]. Atualmente, é possível encontrar diversas variações deste método, seja para alcançar soluções melhores em um menor tempo de execução ou para realizar análise de sensibilidade e de pós-otimalidade no modelo. Sua estrutura é composta por procedimentos algébricos, e utiliza conceitos geométricos.

Segundo Dornellas [12], o método Simplex foi pioneiro em resolução de problemas de programação linear. Para se ter uma implementação eficiente e estável é imprescindível o uso de técnicas disponíveis na literatura, principalmente as voltadas para a estabilidade numérica como: uso de tolerâncias, representação da matriz básica, Forma Revisada [29].

De acordo com Munari [29], os principais *softwares* que trabalham com problemas de otimização linear utilizam o método Simplex. Dado a melhorias realizadas neste método, é possível solucionar problemas de grande porte e que envolvem centenas de milhares de variáveis em fração de segundos. Devido ao avanço da tecnologia e o aprimoramento dos algoritmos e estruturas de dados, problemas ainda maiores estão sendo solucionados a cada ano.

O método Simplex foi formalizado e implementado pelo matemático George B. Dantzig em 1947, a partir de então, diversos métodos com abordagens diferentes foram implementados para resolver Problema de Programação Linear (PPL). Conforme pode ser visto em Namen e Bornstein [30], o problema da dieta foi um dos primeiros problemas usado por J. Laderman para validar o método Simplex. No caso, o sistema era composto de 9 restrições de igualdade e 27 variáveis de decisão (não negativas) no *National Bureau of Standards*. Na ocasião, foi utilizada calculadora de mesa para solucionar o problema, o tempo estimado para a resolução foi de 12 homens/dia. Neste período, os recursos computacionais eram precários e as implementações estavam em uma fase mais básica.

O desenvolvimento do método Simplex era realizado da mesma forma que em teoria, isto é, a inversa da base era calculada de forma explícita e era atualizada em cada iteração. Este tipo de abordagem se torna inviável computacionalmente para o cálculo de problemas de grande porte. A primeira aparição significativa relacionada à eficiência do método se deu em 1954, com a utilização da denominada Forma Produto da Inversa (FPI). Pode-se perceber que, a partir desta época, diversos trabalhos foram publicados utilizando diversas estratégias buscando a eficiência deste algoritmo [29].

Embora existam diversas versões de métodos e vários outros novos algoritmos concorrentes como o caso de métodos Pontos Interiores, o método Simplex ainda permanece sendo um recurso popular e viável para a resolução de problema linear [6].

É importante destacar que o método PSC é baseado no método Simplex tradicional para problemas no formato padrão $Min f(x)$ sujeito a $Ax = b$, sendo $x \geq 0$. Para mais detalhes consulte Bazaraa [6].

Para o desenvolvimento do método Primal Simplex para variáveis Canalizadas considere o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} Min \quad & f(x) = c^T x \\ S.a. \quad & \\ & Ax = b \\ & L \leq x \leq U \end{aligned} \tag{3.1}$$

Considere que A é uma matriz cujo posto é igual a m , c^T e x pertence ao conjunto \mathbb{R}^n , os vetores L , U pertencem ao conjunto \mathbb{R}^n e b pertence ao conjunto \mathbb{R}^m .

Assim, é possível fazer um particionamento nas colunas de A da seguinte forma:

$$A = [B, N1, N2] \quad (3.2)$$

A matriz B representa a partição associada às variáveis básica, já as matrizes $N1$ e $N2$ representam as matrizes não básicas, sendo que a primeira representa a partição associada as variáveis no limitante inferior ($x_j = L_j$), e a segunda o seu limite superior ($x_j = U_j$). Da mesma forma, o vetor x pode ser particionado em:

$$x = [x_B, x_{N1}, x_{N2}] \quad (3.3)$$

Na equação (3.3) x_{N1} representa as variáveis no limitante inferior, já x_{N2} representa as variáveis no limitante superior.

Do mesmo modo, o vetor c é dado por:

$$c = [c_B, c_{N1}, c_{N2}] \quad (3.4)$$

Com estas considerações, o modelo pode ser escrito no formato:

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) &= c_B x_B + c_{N1} x_{N1} + c_{N2} x_{N2} \\ \text{S.a.} \\ Bx_B + N1x_{N1} + N2x_{N2} &= b \\ L_B \leq x_B &\leq U_B \\ x_{N1} &= L_{N1} \\ x_{N2} &= U_{N2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para x_B , tem-se:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N1x_{N1} - B^{-1}N2x_{N2} \quad (3.6)$$

A partir desta atribuição, se $L_B \leq x_B \leq U_B$, se tem uma solução básica factível, caso contrário, se tem uma solução infactível. Os valores de x_B representam as variáveis básicas do problema. Representando as variáveis não básicas x_{N1} e x_{N2} sendo a primeira em seu limitante inferior e a segunda no seu limitante superior respectivamente.

Substituindo x_B no sistema, fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } f(x) &= c_B x_B + c_{N1} x_{N1} + c_{N2} x_{N2} \\
 \text{S.a.} \\
 x_B &= B^{-1}b - B^{-1}N1x_{N1} - B^{-1}N2x_{N2} \\
 L_B &\leq x_B \leq U_B \\
 x_{N1} &= L_{N1} \\
 x_{N2} &= U_{N2}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Considere agora as seguintes definições:

- I_B é o conjunto de índice das variáveis básicas.
- I_{N1} é o conjunto de índices das variáveis não básicas em seu limite inferior com $n1$ elementos.
- I_{N2} é o conjunto de índices das variáveis não básicas em seu limite superior com $n2$ elementos.
- $N1$ é a partição (matriz) não básica associada às variáveis não básicas que estão em seu limite inferior, isto é, $N1 = \{a_{.i} | i \in IN1\}$.
- $N2$ é a partição (matriz) não básica associada às variáveis não básicas que estão em seu limite superior, isto é, $N2 = \{a_{.i} | i \in IN2\}$.

Assim, basicamente de acordo com o método Simplex são necessários os seguintes cálculos envolvendo as matrizes e os vetores aqui descritos:

1. Cálculo da solução básica:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N1x_{N1} - B^{-1}N2x_{N2}.$$

2. Cálculo do vetor multiplicador Simplex:

$$\pi = c_B^T B^{-1}.$$

3. Cálculo dos custos reduzidos:

$$\hat{c}_j = c_j - \pi^T a_j, \forall j \in I_{N1} \cup I_{N2} \text{ (critério para escolha do índice que entra na base, } q).$$

4. Direção Simplex:

$$d_B = B^{-1}a_q, q \in I_{N1} \text{ ou } I_{N2} \text{ (índice não básico que entra na base).}$$

5. Escolha do δ (tamanho do passo) de tal forma que a nova solução seja factível, ou seja:

$$L_{B_i} \leq x_{B_i} \pm \delta d_{B_i} \leq U_{B_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

6. Atualização da inversa da base:

$(\bar{B}^{-1}) = EB^{-1}$, em que B^{-1} representa a inversa da base, (\bar{B}^{-1}) é a nova inversa da matriz base e E a matriz de transformação linear, veja Bazaraa [6].

Logo, o problema 3.7 pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x) = c_B B^{-1} b - \sum_{j \in N_1} \hat{c}_j L_j - \sum_{j \in N_2} \hat{c}_j U_j \\ \text{S.a.} \quad & \\ & x_i = b - \sum_{j \in N_1} x_{N_1} L_j - \sum_{j \in N_2} x_{N_2} U_j, \quad \forall i \in I_B \\ & L_i \leq x_i \leq U_i, \quad \forall i \in I_B \\ & x_{N_1} = L_{N_1} \\ & x_{N_2} = U_{N_2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

A partir das considerações, são feitos os seguintes passos para a resolução do problema 3.8. Na inicialização as variáveis de decisão no seu limitante inferior ou em seu limitante superior $x_i = L_i$ sendo i variando de $1, \dots, n_1$ e $x_j = U_j$ sendo j variando de $1, \dots, n_2$ [6].

Nas próximas subseções detalham-se os principais cálculos do PSC.

3.1.1 Cálculo dos Custos Reduzidos

O cálculo dos custos reduzidos, é também chamado de custo relativo. Neste processo podem ocorrer duas situações realizadas nas variáveis não básicas conforme é detalhado a seguir.

Considere o seguinte critério de otimalidade:

- calcula-se os custos relativos $c_j - \pi^T a_j, \forall j \in I_{N_1} \cup I_{N_2}$.

- Se $c_j - \pi^T a_j \geq 0, \forall j \in I_{N1}$ e Se $c_j - \pi^T a_j \leq 0, \forall j \in I_{N2}$, então pare a execução do método pois foi encontrado a solução ótima. Neste caso, os cálculos dos custos relativos no limitante inferior foram todos positivos e no limitante superior obtiveram-se valores negativos, nestas condições se alcança a solução ótima para o problema.
- Senão, caso $\exists q \in I_{N1}$ tal que $c_j - \pi^T a_j \geq 0$ ou caso $\exists q \in I_{N2}$ tal que $c_j - \pi^T a_j \leq 0$ toma-se o maior valor em módulo.
- Caso a solução ótima não for encontrada continue o processo iterativo.

Ao utilizar a regra de Dantzig usual, toma-se o maior valor em módulo do custo relativo. O índice da variável candidata a entrar na base q é escolhido neste procedimento.

O algoritmo 1 a seguir apresenta os passos para a implementação do cálculo dos custos reduzidos.

Algoritmo 1 Cálculo dos Custos Relativos

- 1: $c_j - \pi^T a_j, \forall j \in I_{N1} \cup I_{N2}$ (Cálculo dos Custos Relativos)
 - 2: **se** $(c_j - \pi^T a_j \geq 0 \ \forall j \in I_{N1})$ e $(c_j - \pi^T c_j \leq 0 \ \forall j \in I_{N2})$ **então**
 - 3: Solução Ótima, PARE!
 - 4: **fim se**
 - 5: **se** $(\exists q \in I_{N1}$ tal que $(c_j - \pi^T a_j \geq 0))$ ou $(\exists q \in I_{N2}$ tal que $(c_j - \pi^T c_j \leq 0))$ **então**
 - 6: Toma-se o maior valor em módulo! A variável q recebe o índice do custo relativo deste valor em módulo, esta variável é a candidata a entrar na base.
 - 7: **fim se**
-

A próxima seção aborda a implementação da direção Simplex. Nesta seção é apresentado o método com mais detalhes.

3.1.2 Cálculo da Direção Simplex

Após o cálculo dos custos relativos e a escolha da variável que entra na base é feito o cálculo da direção primal Simplex. O índice q pode pertencer ao conjunto I_{N1} ou I_{N2} . A direção é calculada da seguinte forma:

$$d_B = B^{-1}a_q, \text{ sendo } q \in I_{N1} \text{ ou } I_{N2} \text{ (índice não básico que entra na base)} \quad (3.9)$$

De posse do vetor direção o próximo passo é realizar o cálculo do Tamanho do passo, isto é, o quanto se deve andar na direção da solução. A próxima seção apresenta com mais detalhes este procedimento.

3.1.3 Cálculo do Tamanho do Passo

O tamanho do passo determina a distância máxima permitida para se caminhar na direção Simplex para obter uma nova solução factível e melhor. Primeiramente verifica-se a variável que entra na base q pertence ao conjunto de índice não básicos I_{N1} ou ao conjunto I_{N2} . Em seguida verifica se o valor de d_{B_i} é maior que uma tolerância.

Para os casos em que q pertence ao conjunto de índices I_{N1} , são realizados os cálculos das variáveis $S1, S2$ e $S3$. Na primeira variável calcula-se $\min\{\frac{x_{B_i}-L_i}{d_{B_i}} : d_{B_i} > 0\}$, na segunda, $\min\{\frac{U_i-x_{B_i}}{-d_{B_i}} : d_{B_i} < 0\}$ e por último, $S3 = U_q - L_q$. Após estes cálculos define-se δ como o menor valor entre $S1, S2$ e $S3$.

- Caso $\delta = S3$, não ocorre à mudança da base, porém há uma troca de limitantes. O índice do limitante inferior na posição q vai para o limitante superior.
- Caso $\delta = S1$, há a mudança de base, o valor de x_q assume seu limitante inferior, isto é $x_q = L_q$. Neste ponto, a posição do valor que o δ recebeu é a posição da variável que sai da base p . Neste caso é feito a atualização dos índices, o valor do I_{N1} na posição q entra no índice básico na posição p , com esta troca, I_{N1} recebe o valor que estava no índice básico na posição p . Em seguida é feito o cálculo da nova inversa da base como é apresentado na próxima seção.
- Caso $\delta = S2$, há a mudança de base, o valor de x_p assume seu limitante superior, isto é $x_p = L_p$. Neste ponto, a posição do valor que o δ recebeu é a posição da variável que sai da base p . Neste caso é feito a atualização dos índices, o valor do I_{N1} na posição q entra no índice básico na posição p , com esta troca, I_{N2} recebe o valor que estava no índice básico na posição p . Em seguida é feito o cálculo da nova inversa da base como é apresentado na seção 3.1.4.

De forma análoga verifica-se caso q pertence ao conjunto de índices I_{N2} , são realizados os cálculos das variáveis $S1, S2$ e $S3$. Na primeira variável calcula-se $\min\{\frac{x_{B_i}-L_i}{-d_{B_i}} : d_{B_i} < 0\}$, na segunda, $\min\{\frac{U_i-x_{B_i}}{d_{B_i}} : d_{B_i} > 0\}$ e por último, $S3 = U_q - L_q$. Após estes cálculos define-se $\delta = \min\{S1, S2, U_q - L_q\}$.

- Caso $\delta = S3$, não ocorre à mudança da base, porém há uma troca de limitantes. O índice do limitante superior na posição q vai para o limitante inferior.
- Caso $\delta = S1$, há a mudança de base, o valor de x_q assume seu limitante inferior, isto é $x_q = L_q$. Neste ponto, a posição do valor que o δ recebeu é a posição da variável que sai da base p . Neste caso é feita a atualização dos índices, o valor do I_{N2} na posição q entra no índice básico na posição p , com esta troca, I_{N1} recebe o valor que estava no índice básico na posição p . Em seguida é feito o cálculo da nova inversa da base como é apresentado na próxima seção.
- Caso $\delta = S2$, há a mudança de base, o valor de x_q assume seu limitante superior, isto é $x_q = U_q$. Neste ponto, a posição do valor que o δ recebeu é a posição da variável que sai da base p . Neste caso é feita a atualização dos índices, o valor do I_{N2} na posição q entra no índice básico na posição p , com esta troca, I_{N2} recebe o valor que estava no índice básico na posição p . Em seguida é feito o cálculo da nova inversa da base como é apresentado na próxima seção.

Dado que uma variável não básica vai entrar na base em que pode sofrer um decremento ou um incremento a q -ésima componente da solução básica sofre alteração. Assim, temos os seguintes casos:

Caso A: variável não básica pode estar no limitante inferior $x_q = L_q$, onde o custo relativo é positivo ($\hat{c}_j > 0$). Ao aumentar o valor de x_q pode ocorrer que:

- Uma variável básica pode atingir seu limitante inferior.
- Uma variável básica pode atingir seu limitante superior.
- x_q pode atingir o seu limitante superior, neste caso, se $\delta = U_q - L_q$, não ocorre à mudança da base.

Seja δ o máximo incremento possível para x_q então, $x_q = L_q + \delta$, sendo $\delta \geq 0$.

Como $x_B = B^{-1}b - B^{-1}N1x_{N1} - B^{-1}N2x_{N2}$ então:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N1 \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_q + \delta \\ \vdots \\ L_{N1} \end{bmatrix} - B^{-1}N2x_{N2} \quad (3.10)$$

Realizando as devidas manipulações algébricas obtem-se:

$$x_B = \underbrace{B^{-1}b - B^{-1}N1x_{N1} - B^{-1}N2x_{N2}}_{\bar{b}} - \underbrace{B^{-1}a_q\delta}_{d_B}$$

Neste caso, $x_B = \bar{b} - \delta d_B$ e $f(x) = \overline{f(x)} - \hat{c}_q\delta$, para $\hat{c}_q > 0$.

Considerando, $x_{B_i} = \bar{b}_i - \delta d_{B_i}$, se $d_{B_i} > 0$ a variável x_{B_i} atinge seu limitante inferior. Entretanto, se $d_{B_i} < 0$ então a variável x_{B_i} atinge seu limitante superior.

Seja o decremento na variável não básica no seu limitante superior ($x_q = U_q$) com o custo relativo negativo ($\hat{c}_q < 0$).

Caso B: Ao diminuir o valor de x_q pode ocorrer que:

- Uma variável básica pode atingir seu limitante superior.
- Uma variável básica pode atingir seu limitante inferior.
- x_q pode atingir o seu limitante inferior L_q , neste caso, se $\delta = U_q - L_q$, não ocorre à mudança da base.

Seja δ a máxima redução possível para x_q então, $x_q = u_q - \delta$, sendo $\delta \geq 0$.

De forma análoga ao caso anterior, tem-se:

$$x_B = \bar{b} - \delta d_B \text{ e } f(x) = \overline{f(x)} + \hat{c}_q\delta, \text{ para } \hat{c}_q < 0.$$

Considerando, $x_{B_i} = \bar{b}_i + \delta d_{B_i}$, se $d_{B_i} > 0$ então a variável x_{B_i} atinge seu limitante superior. Entretanto, se $d_{B_i} < 0$ então a variável x_{B_i} atinge seu limitante inferior.

Portanto, a nova solução básica factível é calculada conforme os seguintes casos:

Caso A: $\bar{x}_{B_i} = x_{B_i} - \delta d_{B_i}$ (nova solução básica factível).

A Figura 3.1 apresenta o caso A.

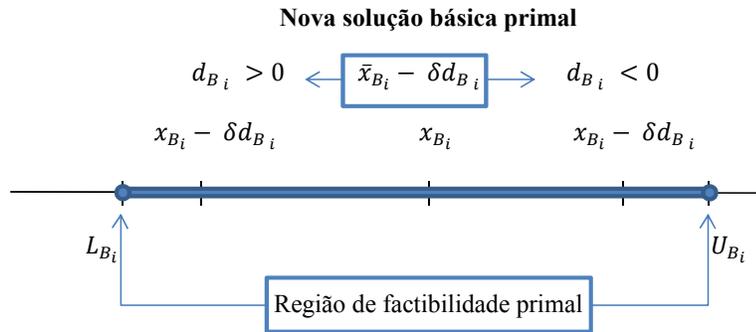


Figura 3.1: Região de factibilidade - Caso A.

Fonte: O Autor (2022).

- Se $d_{B_i} > 0$ então $x_{B_i} - \delta d_{B_i} \geq L_{B_i}$, tem-se $\delta \leq \frac{x_{B_i} - L_{B_i}}{d_{B_i}}$, $i = 1, \dots, m$.
- Se $d_{B_i} < 0$ então $x_{B_i} - \delta d_{B_i} \leq U_{B_i}$, tem-se $\delta \leq \frac{U_{B_i} - x_{B_i}}{-d_{B_i}}$, $i = 1, \dots, m$.

Caso B: $\bar{x}_{B_i} = x_{B_i} + \delta d_{B_i}$ (nova solução básica factível).

A Figura 3.2 apresenta o caso B.

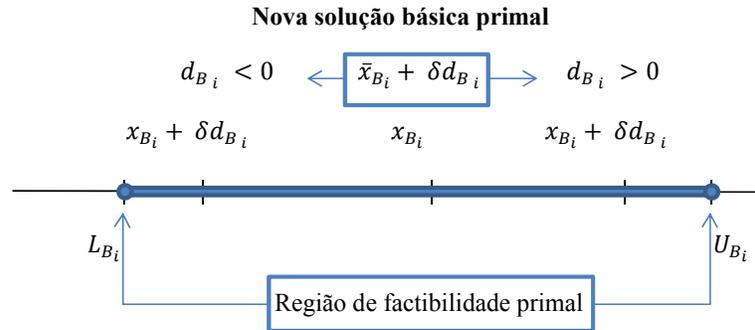


Figura 3.2: Região de factibilidade - Caso B.

Fonte: O Autor (2022).

- Se $d_{B_i} > 0$ então $x_{B_i} + \delta d_{B_i} \leq U_{B_i}$, tem-se $\delta \leq \frac{U_{B_i} - x_{B_i}}{d_{B_i}}$, $i = 1, \dots, m$.
- Se $d_{B_i} < 0$ então $x_{B_i} + \delta d_{B_i} \geq L_{B_i}$, tem-se $\delta \leq \frac{x_{B_i} - L_{B_i}}{-d_{B_i}}$, $i = 1, \dots, m$.

O Algoritmo 2 apresenta de forma resumida a sequência de passos para a execução deste procedimento.

Algoritmo 2 Tamanho do Passo

- 1: **se** ($q \in I_{N1}$) **então**
 - 2: $S1 = \min\{\frac{x_{B_i} - L_i}{d_{B_i}} : d_{B_i} > 0\}$ $S2 = \min\{\frac{U_i - x_{B_i}}{-d_{B_i}} : d_{B_i} < 0\}$
 - 3: $\delta = \min\{S1, S2, U_q - L_q\}$
 - 4: **se** $\delta = U_q - L_q$ **então**
 - 5: $x_q = U_q$ (não muda a Base, variável vai para o limitante superior)
 - 6: **fim se**
 - 7: **se** $\delta = S1$ **então**
 - 8: $x_{p1} = L_{p1}$ (x_{p1} sai da Base)
 - 9: **fim se**
 - 10: **se** $\delta = S2$ **então**
 - 11: $x_{p2} = U_{p2}$ (x_{p2} sai da Base)
 - 12: **fim se**
 - 13: **fim se**
 - 14: **se** ($q \in I_{N2}$) **então**
 - 15: $S1 = \min\{\frac{x_{B_i} - L_i}{-d_{B_i}} : d_{B_i} < 0\}$ $S2 = \min\{\frac{U_i - x_{B_i}}{d_{B_i}} : d_{B_i} > 0\}$
 - 16: $\delta = \min\{S1, S2, U_q - L_q\}$
 - 17: **se** $\delta = U_q - L_q$ **então**
 - 18: $x_q = L_q$ (não muda a Base, variável vai para o limitante inferior)
 - 19: **fim se**
 - 20: **se** $\delta = S1$ **então**
 - 21: $x_{p1} = L_{p1}$ (x_{p1} sai da Base)
 - 22: **fim se**
 - 23: **se** $\delta = S2$ **então**
 - 24: $x_{p2} = U_{p2}$ (x_{p2} sai da Base)
 - 25: **fim se**
 - 26: **fim se**
 - 27: Atualização da nova base, incrementa a iteração
-

Na próxima seção é apresentada com mais detalhes a forma como é feita a atualização da nova inversa da base.

3.1.4 Atualização da Nova Inversa da Base

Na literatura há diversas formas de realizar a atualização da nova inversa da base, como Forma Revisada, forma Produto da Inversa e fatoração LU [13]. Neste trabalho optou-se por usar a primeira forma, conforme é abordada na próxima subsecção .

3.1.4.1 Forma Revisada

Considere a matriz B^{-1} , com dimensão m . Na primeira iteração B^{-1} é a matriz identidade. Nos casos onde não é possível encontrar esta matriz (solução básica inicial factível), usa-se o método Simplex fase I para obtê-la. Esta matriz pode ser representada da seguinte forma:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

O cálculo da atualização da inversa da base é expresso por: $(\bar{B}^{-1}) = EB^{-1}$. A nova inversa é representada por (\bar{B}^{-1}) , já a matriz inversa corrente é dada por B^{-1} e E é a matriz de transformação dada pela equação a seguir.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -\frac{d_{Bi}}{d_{Bq}} & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{d_{Bq}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{d_{Bi}}{d_{Bq}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

A coluna q da matriz E corresponde ao vetor da direção Primal Simplex. Cabe destacar que esta matriz pode ser representada por um vetor, isto é, para armazenar computacionalmente utiliza-se apenas a coluna q desta matriz, juntamente com os valores atribuídos [13].

Seja $(b_i.)$ a i -ésima linha de B^{-1} . Logo a inversa da nova base é dada por:

$$(\bar{B})^{-1} = EB^{-1} = \begin{bmatrix} (b_{1.}) & -\frac{d_{B_i}}{d_{B_q}}(b_q) & & \\ & \vdots & & \\ & -\frac{1}{d_{B_q}}(b_q) & & \\ & \vdots & & \\ (b_{1.}) & -\frac{d_{B_m}}{d_{B_q}}(b_q) & & \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{linha } 1 \\ \vdots \\ \leftarrow \text{linha } q \\ \vdots \\ \leftarrow \text{linha } m \end{array} \quad (3.13)$$

O efeito de multiplicar a matriz E por B^{-1} corresponde as seguintes situações:

- A i -ésima linha de $(\bar{B})^{-1}$ $i \neq q$ é obtida pela adição da i -ésima linha de B^{-1} multiplicada por $-\frac{d_{B_i}}{d_{B_q}}$.
- Para $i \neq q$ multiplica a linha q por $-\frac{d_{B_i}}{d_{B_q}}$ e adiciona a linha.
- Para $i = q$ multiplica a linha i ($i = q$) por $-\frac{1}{d_{B_q}}$.

Observe que o cálculo da nova Inversa da Base consiste em atualizar cada linha da matriz anterior, fazendo as devidas manipulações algébricas conforme citado acima.

Na próxima seção é apresentado a complexidade do cálculo da Inversa da Base.

3.1.4.2 Complexidade do Cálculo da Inversa da Base

Para cada linha i ($i \neq 0$) com $d_{B_i} \neq 0$, conforme visto em Santos [13], tem-se:

- Uma divisão $-\frac{d_{B_i}}{d_{B_q}}$.
- m multiplicações $\frac{d_{B_i}}{d_{B_q}}(b_q.)$, onde $b_q. = b_{q1}b_{q2} \cdots b_{qm}$.
- m subtrações $((b_{i1} - \frac{d_{B_i}}{d_{B_q}}(b_{q1}))(b_{i2} - \frac{d_{B_i}}{d_{B_q}}(b_{q2})) \cdots (b_{im} - \frac{d_{B_i}}{d_{B_q}}(b_{qm}))$.

O total de operações realizadas é de $2m + 1$.

Portanto, a complexidade de $T(m) = (m - 1)(2m + 1) + 1 + m$, que equivale a $T(m) = 2m^2$.

O algoritmo 3 traz a representação de como é feito o cálculo da nova inversa da base usando a Forma Revisada.

Algoritmo 3 Inversa da Nova Base

- 1: **para** $i = 1$ até $m(i \neq q)$ **faça**
 - 2: **se** $d_{B_i} \neq 0$ **então**
 - 3: $b_{i.} = (b_{1.}) - \frac{d_{B_i}}{d_{B_q}}(b_q)$
 - 4: **fim se**
 - 5: **fim para**
 - 6: $b_{q.} = -\frac{1}{d_{B_q}}(b_q)$
-

Para melhorar a estabilidade do método foi utilizado algumas tolerâncias na implementação do método PSC. Na próxima seção são apresentado algumas considerações sobre a estabilidade numérica do tamanho do passo do método PSC.

3.2 Estabilidade Numérica do Tamanho do Passo

Para a implementação do Método PSC foram adotadas alguns valores para a tolerância a serem consideradas. A cada execução do método são realizadas comparações e operações aritméticas que utilizam valores de ponto flutuante. Com isso, erros podem ser inseridos decorrentes de arredondamento ou truncamento devido à precisão limitada dos computadores, este fato pode ocasionar instabilidades numéricas [13].

Na implementação do método PSC foram utilizadas algumas perturbações, sendo estas representadas por tolerâncias. Tomando como base o método PSC, a nova solução básica $x_{B_i} \pm \delta d_{B_i}$ pode ocorrer uma pequena perturbação em decorrência de eventual erro gerado por arredondamento.

$$L_{B_i} \leq x_{B_i} \pm \delta d_{B_i} \leq U_{B_i} \quad (3.14)$$

Assim, deve-se utilizar tolerância Ef para testar a factibilidade da nova solução dada por:

$$L_{B_i} - Ef \leq x_{B_i} \pm \delta d_{B_i} \leq U_{B_i} + Ef \quad (3.15)$$

De acordo com a seção 3.1.3 (tamanho do passo) temos dois casos a considerar:

Caso A: a variável de índice q entra na base ($\hat{c}_q \geq 0$) então $\bar{x}_{B_i} = x_{B_i} - \delta d_{B_i}$ (nova solução básica) sendo q pertencente ao conjunto I_{N1} . Se $d_{B_i} > 0$ então $x_{B_i} - \delta d_{B_i}$ pode ultrapassar o valor de L_{B_i} . Caso $d_{B_i} < 0$ então $x_{B_i} - \delta d_{B_i}$ pode ultrapassar o valor de U_{B_i} .

Caso B: a variável de índice q entra na base ($\hat{c}_q \leq 0$) então $\bar{x}_{B_i} = x_{B_i} + \delta d_{B_i}$ (nova solução básica) sendo q pertencente ao conjunto I_{N2} . Se $d_{B_i} > 0$ então $x_{B_i} - \delta d_{B_i}$ pode ultrapassar o valor de U_{B_i} . Caso $d_{B_i} < 0$ então $x_{B_i} + \delta d_{B_i}$ pode ultrapassar o valor de L_{B_i} .

A nova solução básica factível é calculada conforme os seguintes casos:

Caso A: $\bar{x}_{B_i} = x_{B_i} - \delta d_{B_i}$ (nova solução básica factível).

- Se $d_{B_i} > 0$ então $x_{B_i} - \delta d_{B_i} \geq L_{B_i} - Ef$, tem-se $\delta \leq \frac{x_{B_i} - L_{B_i} + Ef}{d_{B_i}}$.
- Se $d_{B_i} < 0$ então $x_{B_i} - \delta d_{B_i} \leq U_{B_i} + Ef$, tem-se $\delta \leq \frac{U_{B_i} + Ef - x_{B_i}}{-d_{B_i}}$.

Caso B: $\bar{x}_{B_i} = x_{B_i} + \delta d_{B_i}$ (nova solução básica factível).

- Se $d_{B_i} > 0$ então $x_{B_i} + \delta d_{B_i} \leq U_{B_i} + Ef$, tem-se $\delta \leq \frac{U_{B_i} + Ef - x_{B_i}}{d_{B_i}}$.
- Se $d_{B_i} < 0$ então $x_{B_i} + \delta d_{B_i} \geq L_{B_i} - Ef$, tem-se $\delta \leq \frac{x_{B_i} - L_{B_i} + Ef}{-d_{B_i}}$.

A expressão $L_{B_i} - Ef \leq x_{B_i} \pm \delta d_{B_i} \leq U_{B_i} + Ef$, sendo $x_{B_i} \pm \delta$ a nova solução básica primal.

A Figura 3.3 apresenta o caso A e o caso B.

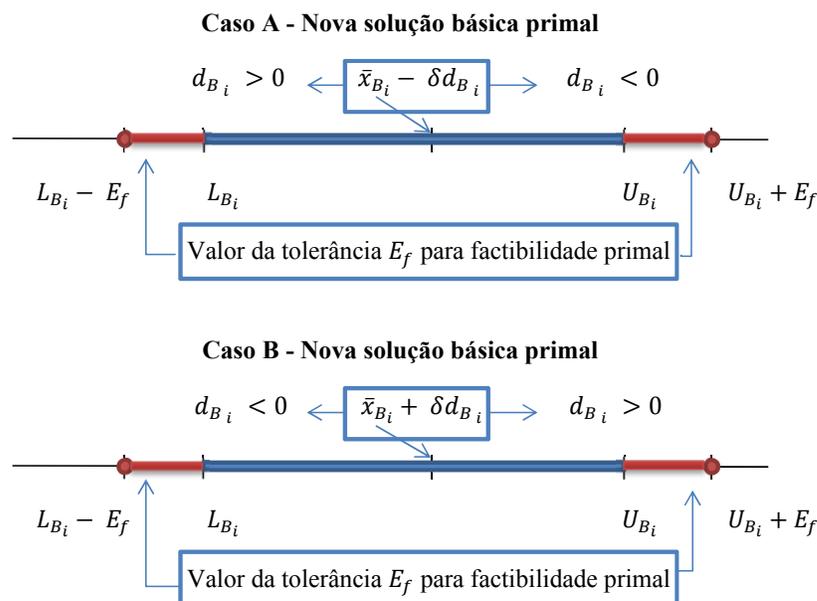


Figura 3.3: Região de factibilidade - Caso A e Caso B.
Fonte: O Autor (2022).

Pode ser representada por:

- Caso A: $d_{B_i} > 0 \leftarrow x_{B_i} - \delta d_{B_i} \rightarrow d_{B_i} < 0$. O valor pode ser decrementado no limitante inferior ou pode ser acrescido por E_f para a factibilidade primal.
- Caso B: $d_{B_i} < 0 \leftarrow x_{B_i} + \delta d_{B_i} \rightarrow d_{B_i} > 0$. O valor pode ser decrementado no limitante inferior ou pode ser acrescido por E_f para a factibilidade primal.
- Ambos os casos delimitam a região de factibilidade primal, isto é, o quanto pode ser acrescido ou decrementado.

Ressalta-se que este trabalho utilizou um conjunto de tolerâncias de acordo com a literatura para tornar a implementação mais robusta e ter uma boa precisão numérica.

As tolerâncias foram definidas baseadas nos trabalhos de Munari [29] e Koberstein [23]. Ao todo foram utilizadas na implementação do método cinco tolerâncias. A primeira usada no cálculo da direção Simplex, seguida do cálculo do custo reduzido (escolha do índice não básico que entra na base). A terceira é usada na solução básica, já a quarta na atualização da nova inversa da base. Por último, a tolerância usada no cálculo da factibilidade primal.

A Tabela 3.1 apresenta as principais tolerâncias utilizadas na implementação do método PSC.

Tabela 3.1: Tolerâncias utilizadas.

Sigla	Valor	Tolerância
Tol	$1e^{-10}$	Direção Simplex
Tol2	$1e^{-10}$	Custo Reduzido
Tol3	$1e^{-10}$	Solução Básica
Tol4	$1e^{-10}$	Cálculo da Inversa
Ef	$1e^{-7}$	Factibilidade Primal

Fonte: O Autor (2022).

Na próxima seção é apresentado as considerações da implementação do método PSC.

3.3 Considerações da Implementação do Método PSC

Considere a matriz identidade com sendo a matriz básica inicial factível para a inicialização do método Simplex. Os problemas que foram tratados nesta pesquisa não tinham disponível uma base inicial factível como a matriz identidade. Para obter esta base inicial foi necessário a implementação da fase I do método Simplex. Cabe destacar que esta funcionalidade é outra implementação do método proposto para solucionar os problemas.

Os passos executados pelo método Simplex são representados de forma resumida pelo Algoritmo 4.

Algoritmo 4 *Primal Simplex* para variáveis Canalizadas - PSC

-
- 1: Entrada: Matriz A , vetores b , L e U ; Solução Básica Factível I .
 - 2: Saída: Solução ótima x ou Problema ilimitado
 - 3: P0: Inicialização ($B = I = B^{-1}$)
 - 4: Defina os Índices Básicos (I_B) e os Não Básicos (I_{N1}, I_{N2})
 - 5: Determine ($B, N1, N2$)
 - 6: $x_i = L_i, x_j = U_j$
 - 7: **enquanto** não pare **faça**
 - 8: $x_B = B^{-1}b$ (Cálculo da solução básica corrente)
 - 9: $\pi^T = c_B^T B^{-1}$ (Verificação da otimalidade)
 - 10: $c_j - \pi^T a_j, \forall j \in I_{N1} \cup I_{N2}$ (Cálculo dos custos relativos)
 - 11: **se** ($c_j - \pi^T a_j \geq 0 \quad \forall j \in I_{N1}$) e ($c_j - \pi^T c_j \leq 0 \quad \forall j \in I_{N2}$) **então**
 - 12: Solução Ótima, PARE!
 - 13: **fim se**
 - 14: **se** ($\exists q \in I_{N1}$ tal que ($c_j - \pi^T a_j \geq 0$)) ou ($\exists q \in I_{N2}$ tal que ($c_j - \pi^T a_j \leq 0$)) **então**
 - 15: Toma-se o maior valore em módulo
 - 16: **fim se**
 - 17: Direção Simplex $d_B = B^{-1}a_q \quad q \in I_{N1}$ ou I_{N2}
 - 18: Determina o tamanho do Passo
 - 19: **se** ($q \in I_{N1}$) **então**
 - 20: $S1 = \min\{\frac{x_{B_i} - L_i}{d_{B_i}} : d_{B_i} > 0\}$ $S2 = \min\{\frac{U_i - x_{B_i}}{-d_{B_i}} : d_{B_i} < 0\}$
 - 21: $\delta = \min\{S1, S2, U_q - L_q\}$
 - 22: **se** $\delta = U_q - L_q$ **então**
 - 23: $x_q = U_q$ (não muda a base)
 - 24: **fim se**
 - 25: **se** $\delta = S1$ **então**
 - 26: $x_{p1} = L_{p1}$ (x_{p1} sai da base)
 - 27: **fim se**
 - 28: **se** $\delta = S2$ **então**
 - 29: $x_{p2} = U_{p2}$ (x_{p2} sai da base)
 - 30: **fim se**
 - 31: **fim se**
 - 32: **se** ($q \in I_{N2}$) **então**
 - 33: $S1 = \min\{\frac{x_{B_i} - L_i}{-d_{B_i}} : d_{B_i} < 0\}$ $S2 = \min\{\frac{U_i - x_{B_i}}{d_{B_i}} : d_{B_i} > 0\}$
 - 34: $\delta = \min\{S1, S2, U_q - L_q\}$
 - 35: **se** $\delta = U_q - L_q$ **então**
 - 36: $x_q = L_q$ (não muda a base)
 - 37: **fim se**
 - 38: **se** $\delta = S1$ **então**
 - 39: $x_{p1} = L_{p1}$ (x_{p1} sai da base)
 - 40: **fim se**
 - 41: **se** $\delta = S2$ **então**
 - 42: $x_{p2} = U_{p2}$ (x_{p2} sai da base)
 - 43: **fim se**
 - 44: **fim se**
 - 45: Atualiza inversa da nova base, incrementa a iteração
 - 46: **fim enquanto**
-

Na próxima seção é apresentado um exemplo de como é realizado os cálculos de um problema de programação linear com o método Primal Simplex para variáveis Canalizadas.

3.4 Exemplo com o método PSC

Para ilustra os passos do método Primal Simplex para variáveis Canalizadas, considere o exemplo extraído do Bazaraa p. 247 [6]. Este exemplo representa um problema primal no espaço \mathbb{R}^2 , conforme dado a seguir:

$$\begin{aligned}
 &Max \quad f(x) = 2x_1 + x_2 \\
 &S.a. \\
 &\quad -2x_1 + x_2 \leq 0 \\
 &\quad 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
 &\quad x_1 - x_2 \leq 1 \\
 &\quad 0 \leq x_1 \leq 1 \\
 &\quad 0 \leq x_2 \leq 3/2
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Inicialmente deve-se passar o problema para a forma padrão e inserir as variáveis de folga x_3 , x_4 e x_5 . Também se optou por converter o problema de maximização para um problema de minimização, conforme descrito a seguir:

$$\begin{aligned}
 &Min \quad f(x) = -2x_1 - x_2 \\
 &S.a. \\
 &(r1) \quad -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\
 &(r2) \quad 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\
 &(r3) \quad x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\
 &(r4) \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \\
 &(r5) \quad 0 \leq x_2 \leq 3/2 \\
 &0 \leq x_3 \leq 999999,9999 \\
 &0 \leq x_4 \leq 999999,9999 \\
 &0 \leq x_5 \leq 999999,9999
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Para representar o exemplo graficamente, a Figura 3.4 ilustra o polígono convexo formado pela região primal factível. Sendo que r_1, r_2 e r_3 formam as delimitações da região das restrições. Já r_4 representa os limitantes com relação à x_1 e r_5 os limites de x_2 da região factível.

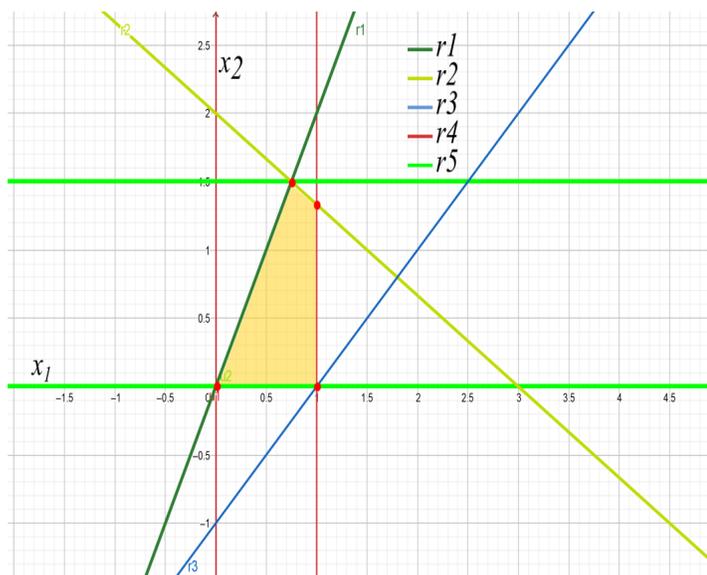


Figura 3.4: Região de factibilidade.

Fonte: O Autor, 2021.

Iteração 1

Agora é necessário fixar a matriz base dada por $B = \{a^3, a^4, a^5\}$, considere que a matriz base é formada pelas colunas a^3, a^4, a^5 . Observe que estas colunas formam a matriz identidade. Posteriormente, deve defini-se as variáveis não básicas (VNB), nos seus respectivos limites inferiores, logo $I_{N1} = \{1, 2\}$ e I_{N2} é vazio. A partir daí deve-se calcular a solução básica inicial.

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N1x_{N1} - B^{-1}N2x_{N2} \quad (3.18)$$

Neste passo, não houve a necessidade de calcular $B^{-1}N2x_{N2}$, pois não têm variáveis no seu limitante superior e a partição $N2$ não existe.

Logo:

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

O segundo passo é calcular o vetor multiplicador que é expresso por:

$$\pi^T = c_B^T B^{-1} \quad (3.20)$$

$$\pi^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Calculam-se os custos reduzidos, sendo que $c_j - \pi^T a_j$ tal que $j \in N1 \cup N2$. O menor desses custos é escolhido para entrar na base (regra de Dantzig).

$$c_1 - \pi^T a_1 = -2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \quad (3.22)$$

$$c_2 - \pi^T a_2 = -1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \quad (3.23)$$

Neste caso, o menor é o apresentado na equação (3.22). Portanto, x_1 é a variável candidata a entrar na base. Logo $q = 1$ é o índice que entra na base.

O próximo passo agora é calcular a direção Simplex.

$$d_B = B^{-1} a_q = d_B = B^{-1} a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Além disso, são feitos os cálculos das razões, também conhecido como o tamanho do passo. O quanto se deve caminhar na direção da solução do problema. De acordo com a seção 3.1.3 os cálculos são feitos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 S1 &= \begin{cases} \text{mínimo}_i \in I_B \left\{ \frac{x_i - L_i}{d_{B_i}} : d_{B_i} > 0 \right\} = \frac{x_p - L_p}{d_{B_i}} & \text{se } d_{B_i} > 0 \\ \infty & \text{se } d_{B_i} \leq 0 \end{cases} \\
 S2 &= \begin{cases} \text{mínimo}_i \in I_B \left\{ \frac{U_i - x_i}{-d_{B_i}} : d_{B_i} < 0 \right\} = \frac{U_p - x_p}{-d_{B_i}} & \text{se } d_{B_i} < 0 \\ \infty & \text{se } d_{B_i} \geq 0 \end{cases} \\
 S3 &= Uq - Lq
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Assim,

$$S1 = \left\{ \text{mínimo}_i \in I_B \left\{ \frac{x_4 - L_4}{d_{B_2}}, \frac{x_5 - L_5}{d_{B_3}} \right\} = \text{mínimo}_i \in I_B \left\{ \frac{6-0}{2}, \frac{1-0}{1} \right\} = 1 \right. \tag{3.26}$$

$$S2 = \left\{ \text{mínimo}_i \in I_B \left\{ \frac{U_3 - x_3}{-d_{B_2}} \right\} = \text{mínimo}_i \in I_B \left\{ \frac{\infty-0}{-(-2)} \right\} = \infty \right. \tag{3.27}$$

$$S3 = U_1 - L_1 = 1 - 0 = 1 \tag{3.28}$$

O δ é calculado tomando a menor solução entre S1, S2 e S3. Neste caso, δ é igual a 1, logo, x_5 sai da base, assumindo seu limitante inferior, isto é, $x_5 = 0$ e o índice $p = 5$.

Ademais, é feita a atualização das novas matrizes, a atualização da Inversa da Base. Também é calculado o valor de x_1 .

$$N1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, N2 = \emptyset \tag{3.29}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

$$x_1 = L_1 + \delta = 0 + 1 = 1 \tag{3.31}$$

A Figura 3.5 mostra o percurso através da seta em preto.

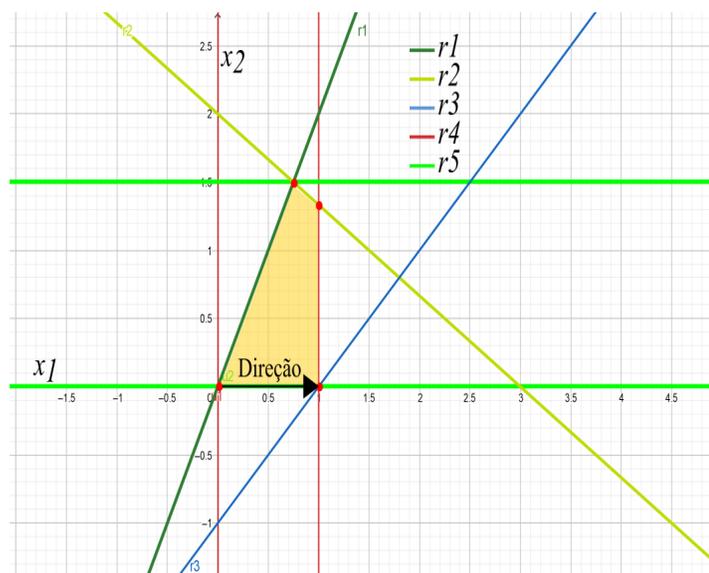


Figura 3.5: Direção para se chegar à solução.

Fonte: O Autor, 2021.

Contudo, ainda não se chegou à solução ótima, então é necessário pelo menos mais uma iteração.

Iteração 2

Tem-se que o vetor de custos é dado por:

$$c^T = [-2 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (3.32)$$

Os conjuntos de índices das variáveis são:

$$I_B = \{3, 4, 1\}, \quad I_{N1} = \{5, 2\} \quad e \quad I_{N2} = \emptyset \quad (3.33)$$

Agora calcula-se a nova solução básica conforme equação (3.18).

Neste passo, ainda não há a necessidade de calcular $B^{-1}N_2x_{N2}$, pois não se tem variáveis no seu limitante superior, bem como a partição N_2 das variáveis não básicas no seu limitante superior.

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Logo, a solução atual é dada por:

$$x^T = [1 \ 0 \ 2 \ 4 \ 0] \quad (3.35)$$

O segundo passo é calcular o vetor multiplicador que é expresso pela equação (3.20) da seguinte forma:

$$\pi^T = [0 \ 0 \ -2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ -2] \quad (3.36)$$

Em seguida, calculam-se os custos reduzidos, sendo que $c_j - \pi^T a_j$ tal que $j \in N1 \cup N2$. O menor desses custos é escolhido para entrar na base.

$$c_5 - \pi^T a_5 = 0 - [0 \ 0 \ -2] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \quad (3.37)$$

$$c_2 - \pi^T a_2 = -1 - [0 \ 0 \ -2] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = -3 \quad (3.38)$$

Neste caso, o menor é o apresentado na equação (3.38). Portanto, x_2 é a candidata a entrar na base ($q = 2$).

O próximo passo agora é calcular o 3º sistema, isto é, calcular a direção Simplex.

$$d_B = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Além disso, são feitos os cálculos das razões conforme descrito a seguir:

$$S1 = \left\{ \text{mínimo}_i \in I_B \left\{ \frac{x_4 - L_4}{d_{B_2}} = \frac{4}{5} \right. \right. \quad (3.40)$$

$$S2 = \left\{ \text{mínimo}_i \in I_B \left\{ \frac{U_3 - x_3}{-d_{B_2}}, \frac{U_1 - x_1}{-d_{B_3}} \right\} = \text{mínimo}_i \in I_B \left\{ \frac{\infty - 2}{-(-1)}, \frac{1 - 1}{-(-1)} \right\} = 0 \quad (3.41)$$

$$S3 = U_2 - L_2 = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2} \quad (3.42)$$

Neste caso, δ é igual a 0, logo, x_1 sai da base, assumindo seu limitante superior, isto é, $x_1 = 1$.

Ademais, é feita a atualização das novas matrizes, a atualização da inversa da base. Também é calculado o valor de x_2 .

$$N1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, N2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} e B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$x_2 = L_2 + \delta = 0 + 0 = 0 \quad (3.45)$$

Um PPL é degenerado quando há ao menos uma variável básica igual à zero. Em problemas reais é muito comum ocorrer uma solução degenerada, fato que não ocorreu nos problemas tratados.

Já os índices estão distribuídos da seguinte forma:

$$I_B = \{3, 4, 2\}, I_{N1} = \{5\} e I_{N2} = \{1\} \quad (3.46)$$

Como δ é igual a 0, é possível observar que o caminho percorrido no sentido da solução continua o mesmo. Ou seja, muda a base mas permanece na mesma solução, neste caso degenerada.

Contudo, ainda não se chegou à solução ótima, então executa-se novamente os passos.

Iteração 3

Logo temos:

$$I_B = \{3, 4, 2\}, \quad I_{N1} = \{5\} \quad e \quad I_{N2} = \{1\} \quad (3.47)$$

Calcula-se o 1º sistema dado pela equação (3.18).

Neste passo, há a necessidade de calcular $B^{-1}N_2x_{N2}$, pois não tem variáveis no seu limitante superior, bem como a partição N_2 das variáveis não básicas no seu limitante superior.

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

O vetor x é atualizado com as seguintes componentes:

$$x^T = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad 0] \quad (3.49)$$

O segundo passo é calcular o vetor multiplicador que é expresso pela equação (3.20).

$$\pi^T = [0 \quad 0 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1] \quad (3.50)$$

O menor desses custos é escolhido para entrar na base.

$$c_5 - \pi^T a_5 = 0 - [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \quad (3.51)$$

$$c_1 - \pi^T a_1 = -2 - [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -3 \quad (3.52)$$

Neste caso, o menor em módulo é o apresentado na equação (3.51). Portanto, x_5 é a candidata a entrar na base. A equação (3.52) está no ótimo superior, pois $c_j - \pi^T a_j \leq 0, \forall j \in I_{N2}$.

O próximo passo agora é calcular o 3º sistema, isto é, calcular a direção Simplex. Trata-se do sentido que se deve caminhar para encontrar a solução.

$$d_B = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Além disso, são feitos os cálculos das razões expresso pela equação (3.25).

$$S1 = \left\{ \text{mínimo}_i \in I_B \left\{ \frac{x_4 - L_4}{d_{B_2}}, \frac{x_5 - L_5}{d_{B_3}} \right\} = \text{mínimo}_i \in I_B \left\{ \frac{2-0}{1}, \frac{4-0}{3} \right\} = \frac{4}{3} \right. \quad (3.54)$$

$$S2 = \left\{ \text{mínimo}_i \in I_B \left\{ \frac{U_2 - x_2}{-d_{B_3}} \right\} = \text{mínimo}_i \in I_B \left\{ \frac{\frac{3}{2} - 0}{-(-1)} \right\} = \frac{3}{2} \right. \quad (3.55)$$

$$S3 = U_5 - L_5 = \infty - 0 = \infty \quad (3.56)$$

O δ é calculado tomando a menor solução entre S1, S2 e S3. Neste caso, δ é igual a $\frac{4}{3}$, logo, x_4 sai da base, assumindo seu limitante inferior, isto é, $x_4 = 0$.

Temos agora os seguintes valores:

$$N1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, N2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} e B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$x_5 = L_5 + \delta = 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \quad (3.59)$$

De posse do δ , é possível observar o caminho percorrido no sentido da solução. A Figura 3.6 mostra o percurso através da seta em preto.

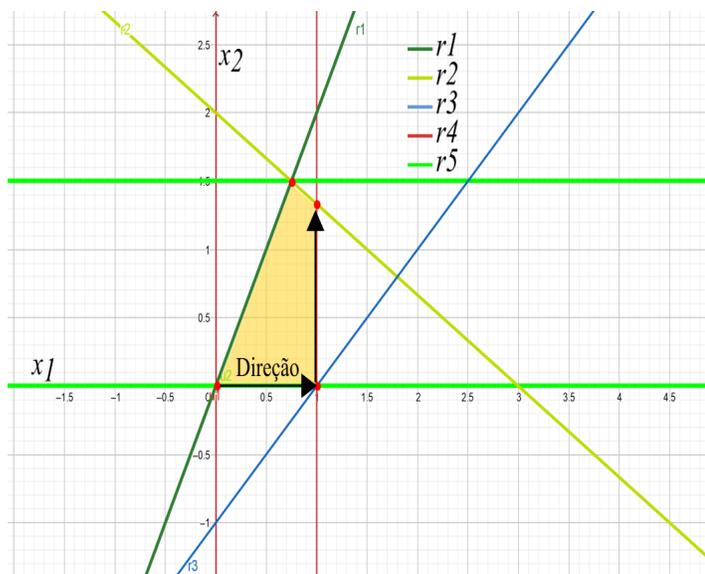


Figura 3.6: Direção para se chegar à solução - 3ª iteração.
 Fonte: O Autor, 2021.

Observe que ainda não se chegou à solução ótima.

Iteração 4

Os índices estão distribuídos da seguinte forma:

$$I_B = \{3, 5, 2\}, \quad I_{N1} = \{4\} \quad e \quad I_{N2} = \{1\} \tag{3.60}$$

Cálculo do 1º sistema visto na equação (3.18):

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

O vetor x é atualizado para a seguinte forma:

$$x^T = \left[1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad \frac{4}{3} \right] \tag{3.62}$$

O segundo passo é calcular o vetor multiplicador conforme equação (3.20):

$$\pi^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Calculam-se os custos reduzidos, sendo que $c_j - \pi^T a_j$ tal que $j \in N1 \cup N2$. O menor desses custos é escolhido para entrar na base.

$$c_4 - \pi^T a_4 = 0 - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \quad (3.64)$$

$$c_1 - \pi^T a_1 = -2 - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{4}{3} \quad (3.65)$$

Conforme o método Simplex Canalizado, se $c_j - \pi^T a_j \geq 0$, tal que $j \in I_{N1}$ e $c_j - \pi^T a_j \leq 0$, tal que $j \in I_{N2}$, então finaliza-se a execução, pois a solução encontrada é ótima para o problema.

A solução ótima é representada pelo par ordenado (x_1, x_2) que possui os seguintes valores $(1; 1, 33334)$.

Tem-se assim a seguinte solução ótima:

$$x^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Já o valor da Função Objetivo $-FO$ para minimizar o problema é:

$$FO = -2 - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3} = -3,3334. \quad (3.67)$$

A Figura 3.7 apresenta a solução gráfica do problema.

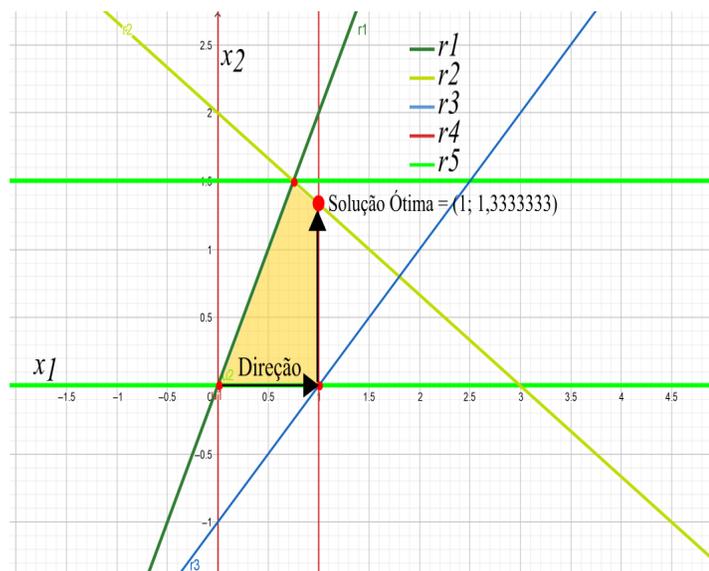


Figura 3.7: Direção para se chegar à solução.

Fonte: O Autor, 2021.

Na próxima seção é apresentada a regra de Dantzig Normalizada, conforme descrito na literatura, pois o uso desta regra pode reduzir o número de iterações do método PSC.

3.5 Regra de Dantzig Normalizada

Na Otimização Linear é possível encontrar diversas variações do método Simplex conforme apresentado por Sousa [43]. Além disso, há diferentes formas de escolher as variáveis que entram e saem da base. Por exemplo, a regra de Dantzig usual seleciona o índice que fornece o maior valor em módulo no cálculo dos custos, já a regra de Bland calcula todos os custos reduzidos das variáveis não básicas e, seleciona entre os custos negativos, o menor índice conforme pode ser visto em Maculan e Fampa [25].

Os primeiros experimentos da regra de Dantzig Normalizada (DN) se deram por Kuhn e Quandt(1963) e por Wolfe e Cuttler (1963). Inicialmente esta regra foi rejeitada pelo fato de sua implementação ser direta e devido sua complexidade, tornando-a impraticável. Porém, Goldfarb e Reid(1977), em seus experimentos usando o método Simplex com a regra de Dantzig Normalizada, derivaram fórmulas de recorrência e realizaram testes computacionais que demonstraram a superioridade desta regra comparada com a regra usual de Dantzig [43].

Em métodos tipo simplex, no geral, ocorre à flexibilidade quando há troca de base. O método Primal Simplex, por exemplo, toda variável de custo relativo negativo pode ser escolhida para entrar na base. A regra de Dantzig usual toma a direção que possui o coeficiente mais negativo, buscando reduzir a função objetivo, porém, esta seleção não leva em consideração que o comprimento das arestas é determinante para a escolha da direção, isto é, pode ser diferente. Já a regra de Dantzig Normalizada seleciona o custo relativo normalizado mais negativo, isto é, o quanto cada um pode contribuir na função objetivo por cada unidade desta direção, de acordo com a expressão abaixo.

$$\text{Min } \left\{ \frac{\hat{c}_j}{d^j} \right\}, j \in I_N \quad (3.68)$$

Sendo \hat{c}_j o custo relativo com j pertencente aos conjuntos não básicos. Já d^j é a direção Simplex associada ao \hat{c}_j .

Para a regra de DN na primeira iteração do método é feito o cálculo de todas as direções Simplex. O cálculo explícito de todas as direções é muito custoso computacionalmente, este fato inviabilizou suas primeiras implementações.

Portanto, Forrest e Goldfarb [17] utilizam fórmulas recursivas para a atualização nas normas das direções a partir da 2ª iteração.

Para o PSC logo, usando a regra de Dantzig Normalizada, o índice q é definido pela maior violação primal tanto no limite superior quanto no inferior (que são os custos relativos) dividido pela norma da direção primal Simplex, isto é, toma-se um dos índices não básicos que apresente o maior valor de razão em módulo [43]. Esta operação é denominado de cálculo das razões e utiliza a seguinte fórmula:

$$\frac{\hat{c}_j}{\|d^j\|}, \quad j = 1, \dots, m \quad j \in I_{N1} \cup I_{N2}. \quad (3.69)$$

Além disso, são realizados outros cálculos extras. Sendo o primeiro o cálculo do alfa (α_j), o segundo consiste em resolver um sistema dado por $B^T v$ e o por último o produto interno ($a_j v$). Para mais detalhes consulte Sousa [43] e Forrest e Goldfarb [17].

Para obter as normas das direções de forma recursiva (em função da anterior), a partir da segunda iteração usa-se a norma ao quadrado com o intuito de facilitar a operação algébrica. Neste caso considera-se o cálculo somente das componentes básicas da direção Simplex d_B^j .

Esta equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\|d_{Bj}^-\|^2 = \|d_{Bj}\|^2 - 2\bar{\alpha}_j a_j B^{-1}w + (\bar{\alpha}_j)^2(1 + w^T w). \quad (3.70)$$

Definindo $v = B^{-1}w$ ou $(B^{-1})^T d_B$, $\gamma^j = \|d^j\|^2$ que é igual a $1 + \|d_B^j\|^2$, já $\bar{\alpha}_j$ é dado por $\frac{\alpha_j}{\alpha_q}$, sendo $\alpha_j = \bar{e}^T (B^T) a_{N_j}^T$. O α_j é a p -ésima componente de $B^{-1}a_j$, já o α_q é a p -ésima componente da direção (w_p). Sendo assim, os quadrados das normas das direções Primais Simplex podem ser representados por:

$$\bar{\gamma}^j = \gamma_j - 2\bar{\alpha}_j a_j^T v + \bar{\alpha}_j^2 \gamma_q, \quad j \in I_{N1} \cup I_{N2}, \quad j \neq q \quad (3.71)$$

No caso, quando $j = q$, tem-se:

$$\bar{\gamma}^q = \frac{\gamma_q}{\alpha_j^2}, \quad j = q \quad (3.72)$$

Para utilizar a regra de Dantzig Normalizada são necessário os seguintes passos:

Cálculo 1^a Iteração:

- Direção Simplex - calcula-se para todas as direções $d_B^j = B^{-1}a_j$.
- Cálculo das Normas - $\|d_B^j\|$, $j \in N1 \cup N2$.
- Cálculo das razões $\frac{\bar{c}_j}{\|d^j\|}$, toma a maior razão em módulo (q).
- calcula $v = (B^{-1})^T d_B$ (é um dos cálculos extras).

A partir da 2^a iteração usam-se as fórmulas de recorrência conforme equações (3.71) e (3.72).

No próximo capítulo é apresentado uma implementação com interface gráfica para auxiliar o profissional na formulação das razões em sua atividade.

Capítulo 4

Interface Gráfica

Neste capítulo aborda o desenvolvimento de uma interface gráfica inicial para o método PSC que é implementado em linguagem de programação C++. Em seguida, pensando em trazer uma interface mais amigável para o usuário utilizou-se para a criação das telas o Qt Creator¹, ferramenta muito utilizada para criar interface gráfica, que consiste de uma IDE multiplataforma de desenvolvimento de *software*.

Nas próximas seções são apresentadas as principais telas de cadastros e de acesso ao sistema desenvolvido.

4.1 Telas de Cadastro - PSC

O protótipo desenvolvido conta com funcionalidades para o gerenciamento da produção de ração. O *software* conta com um controle de usuário, sendo que, para ter acesso às funcionalidades é necessário ter um perfil de acesso. Além disso, há diversas telas de cadastro, de gestão e de formulação da ração.

Para acessar o programa e demais funções o usuário deve estar cadastrado e com as devidas permissões de acesso. Após efetuar o *login*, de acordo com o perfil do usuário, são liberado as demais telas e eventuais funcionalidades.

Antes de formular uma ração é necessário ter cadastrados todas as informações como: ingredientes disponíveis, custos, nutrientes e exigências nutricionais. Posteriormente é possível ter acesso às informações cadastradas e realizar a formulação das rações.

¹<https://www.qt.io/product/development-tools>

A Figura 4.1 apresenta a interface onde o usuário entra com sua informação de *login* e senha para acesso.



Figura 4.1: Tela de Login.
Fonte: O Autor (2022).

Na tela principal há um ícone de um cadeado fechado em vermelho com a mensagem “Sem Usuário Logado!”. Ao clicar neste botão é exibida a tela de login, conforme apresentado na Figura 4.1. Após o usuário logar-se no sistema é liberado o acesso às funcionalidades na tela principal.

A Figura 4.2 apresenta a tela principal do sistema e suas principais funcionalidades.

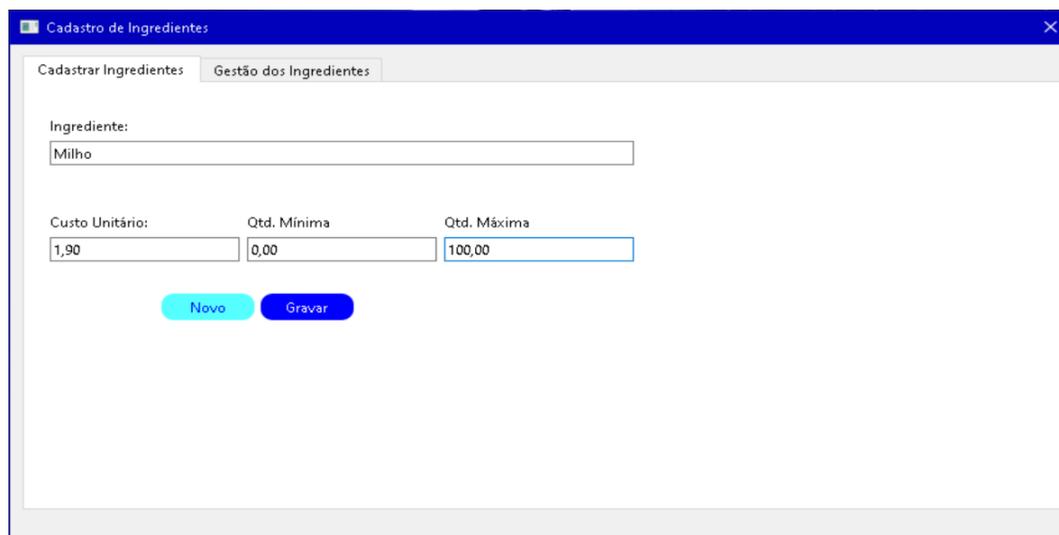


Figura 4.2: Tela Principal.
Fonte: O Autor (2022).

O menu de acesso conta com as principais funcionalidades do sistema. Dentre elas podem-se destacar: cadastrar ingredientes, cadastrar nutrientes e cadastro de ração. Além disso, na própria tela de cadastro de ingredientes tem uma aba onde é possível realizar a gestão de ingredientes. Na tela de cadastro de nutrientes também há uma aba de gestão de nutrientes. De forma análoga ocorre para a gestão de rações.

O sistema foi desenvolvido para trabalhar com rações tanto para aves quanto para suínos. Na tela principal é possível encontrar informações pertinentes ao desenvolvedor. Além disso, há uma logo fictícia de uma empresa de sistema, Marcio Gevegy Sistemas, com *slogan* soluções em gerenciamento de ração.

A Figura 4.3 apresenta a tela de cadastro de ingredientes.



A imagem mostra uma janela de software intitulada "Cadastro de Ingredientes". No topo, há duas abas: "Cadastrar Ingredientes" (ativa) e "Gestão dos Ingredientes". Abaixo, há um formulário com os seguintes campos:

- Ingrediente: Milho
- Custo Unitário: 1,90
- Qtd. Mínima: 0,00
- Qtd. Máxima: 100,00

Na base do formulário, há dois botões: "Novo" (em um botão azul claro) e "Gravar" (em um botão azul escuro).

Figura 4.3: Tela de Cadastro de Ingredientes.
Fonte: O Autor (2022).

Na tela principal ao clicar no botão Cadastrar ingredientes é possível realizar o registro do novo insumo, necessários para a fabricação da ração. Para isso, é só clicar no botão novo e fornecer as seguintes informações: o nome do ingrediente a quantidade mínima e máxima em *kg* de alimento a ser produzida. Por último, clique em salvar para armazenar as informações do novo alimento.

A Figura 4.4 apresenta a tela de cadastro de nutriente.

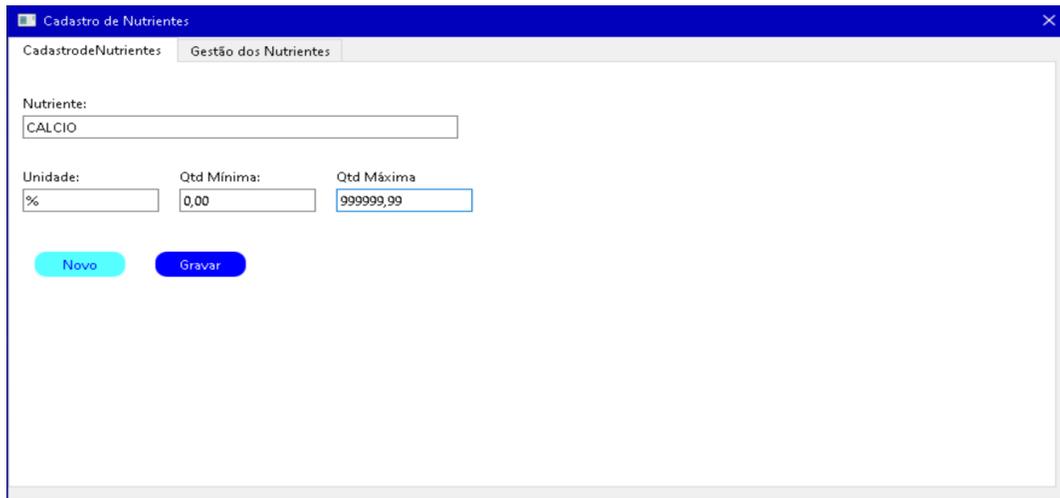


Figura 4.4: Tela de Cadastro de Nutrientes.
Fonte: O Autor (2022).

Já na tela de cadastro de nutrientes o usuário insere as informações pertinentes à exigência nutricional. Para isso, deve-se clicar em novo, preencher o nome do nutriente, a unidade de medida, a quantidade mínima e máxima permitida. Posteriormente é necessário clicar no botão gravar para armazenar as informações no banco de dados.

A Figura 4.5 apresenta a tela de cadastro da ração a ser formulada.



Figura 4.5: Tela de Cadastro de Ração.
Fonte: O Autor (2022).

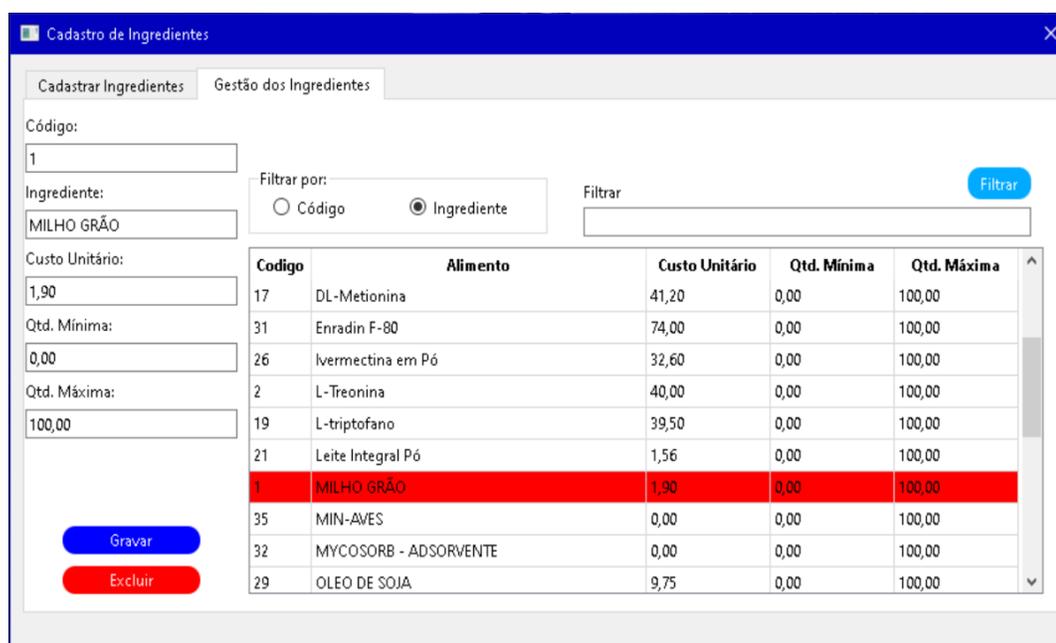
De maneira análoga, no cadastro da ração o usuário clica no botão novo, seleciona a espécie animal (suínos ou aves). Em seguida insere o nome da ração e a informação referente à exigência a ser atendida. Para armazenar o cadastro clique em salvar.

Na próxima seção são apresentadas as principais telas responsáveis pela gestão das informações cadastradas no sistema.

4.2 Telas de Gestão - PSC

Para a manutenção dos cadastros, o programa conta com telas de gerenciamento das informações. Na interface é possível realizar a alteração de registro, fazer uma consulta filtrando por código, por tipo da informação ou mesmo digitando o nome do ingrediente e clicar em filtrar para executar a busca.

A Figura 4.6 apresenta a interface de consulta e edição dos ingredientes.



A interface de usuário para a gestão de ingredientes é dividida em duas abas: 'Cadastrar Ingredientes' e 'Gestão dos Ingredientes'. A aba 'Gestão dos Ingredientes' está selecionada e contém um formulário de busca e uma tabela de ingredientes.

O formulário de busca possui os seguintes campos:

- Código: 1
- Ingrediente: MILHO GRÃO
- Custo Unitário: 1,90
- Qtd. Mínima: 0,00
- Qtd. Máxima: 100,00

Existem botões 'Gravar' (azul) e 'Excluir' (vermelho) no formulário. A tabela de ingredientes cadastrados é a seguinte:

Código	Alimento	Custo Unitário	Qtd. Mínima	Qtd. Máxima
17	DL-Metionina	41,20	0,00	100,00
31	Enradin F-80	74,00	0,00	100,00
26	Ivermectina em Pó	32,60	0,00	100,00
2	L-Treonina	40,00	0,00	100,00
19	L-triptofano	39,50	0,00	100,00
21	Leite Integral Pó	1,56	0,00	100,00
1	MILHO GRÃO	1,90	0,00	100,00
35	MIN-AVES	0,00	0,00	100,00
32	MYCOSORB - ADSORVENTE	0,00	0,00	100,00
29	OLEO DE SOJA	9,75	0,00	100,00

Figura 4.6: Tela de Gestão de Ingredientes.

Fonte: O Autor (2022).

O sistema fornece uma lista dos ingredientes cadastrados, ao selecionar um elemento as informações são carregadas nos campos respectivos. A linha da tabela que foi selecionada fica com uma cor vermelha, identificando a informação a ser manipulada. Feita a edição, deve-se salvar as informações para eventual correção.

Além disso, as tela de gestão possuem um campo de filtro onde é feita as consultas. Marcando o campo código ou marcando o nome do ingrediente, os registros são ordenados por código ou por nome, para isso clique em filtrar. É possível realizar o filtro por um nome específico ou partes do mesmo, em seguida clique em filtrar para exibir na tabela as informações pertinentes a pesquisa.

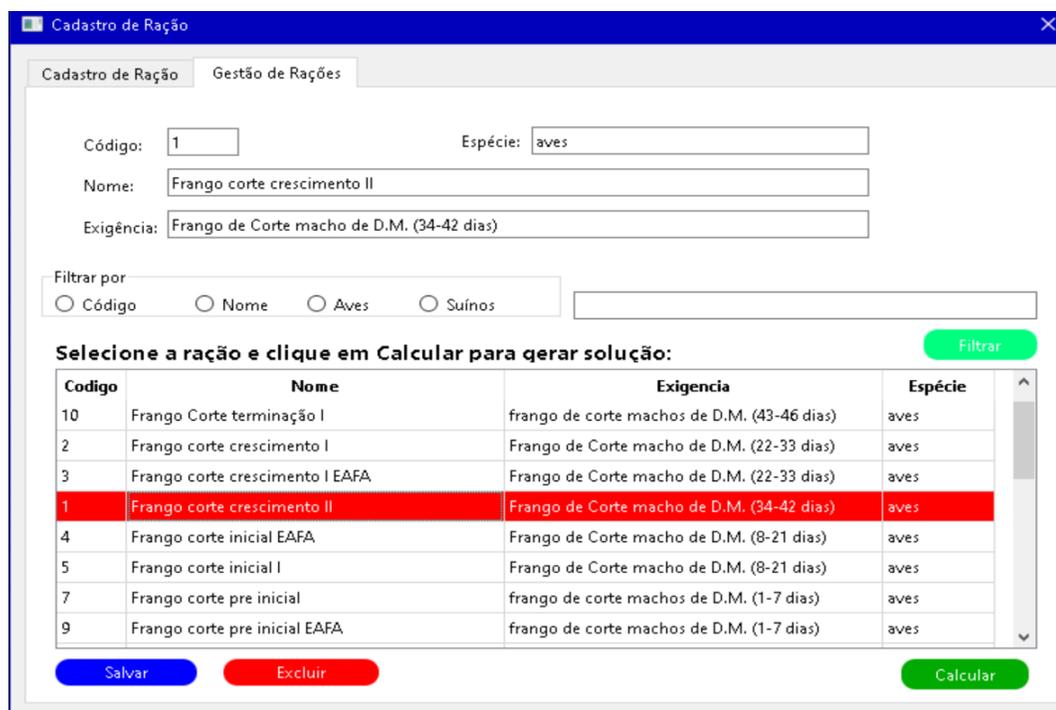
A Figura 4.7 apresenta a tela de gestão de nutrientes para realizar a manutenção destes cadastros.

Figura 4.7: Tela de Gestão de Nutrientes.

Fonte: O Autor (2022).

Por meio da gestão dos nutrientes é possível editar o nome do nutriente, a unidade de medida, as quantidades mínimas e máxima. Além disso, o sistema possui o recurso de filtrar, esta funcionalidade permite executar pesquisa ordenadas por código e por nutriente. Caso deseje pesquisar um nutriente específico, é só informar no campo de filtro e clicar no botão filtrar. Se o nutriente está cadastrado no banco de dados, são apresentadas as respectivas informações deste elemento.

A Figura 4.8 apresenta a tela de gestão ração para realizar a manutenção destes cadastros.



Cadastro de Ração

Cadastro de Ração Gestão de Rações

Código: Espécie:

Nome:

Exigência:

Filtrar por
 Código Nome Aves Suínos

Selecione a ração e clique em Calcular para gerar solução: Filtrar

Codigo	Nome	Exigencia	Espécie
10	Frango Corte terminação I	frango de corte machos de D.M. (43-46 dias)	aves
2	Frango corte crescimento I	Frango de Corte macho de D.M. (22-33 dias)	aves
3	Frango corte crescimento I EAFA	Frango de Corte macho de D.M. (22-33 dias)	aves
1	Frango corte crescimento II	Frango de Corte macho de D.M. (34-42 dias)	aves
4	Frango corte inicial EAFA	Frango de Corte macho de D.M. (8-21 dias)	aves
5	Frango corte inicial I	Frango de Corte macho de D.M. (8-21 dias)	aves
7	Frango corte pre inicial	frango de corte machos de D.M. (1-7 dias)	aves
9	Frango corte pre inicial EAFA	frango de corte machos de D.M. (1-7 dias)	aves

Salvar Excluir Calcular

Figura 4.8: Tela de Gestão de Ração.
 Fonte: O Autor (2022).

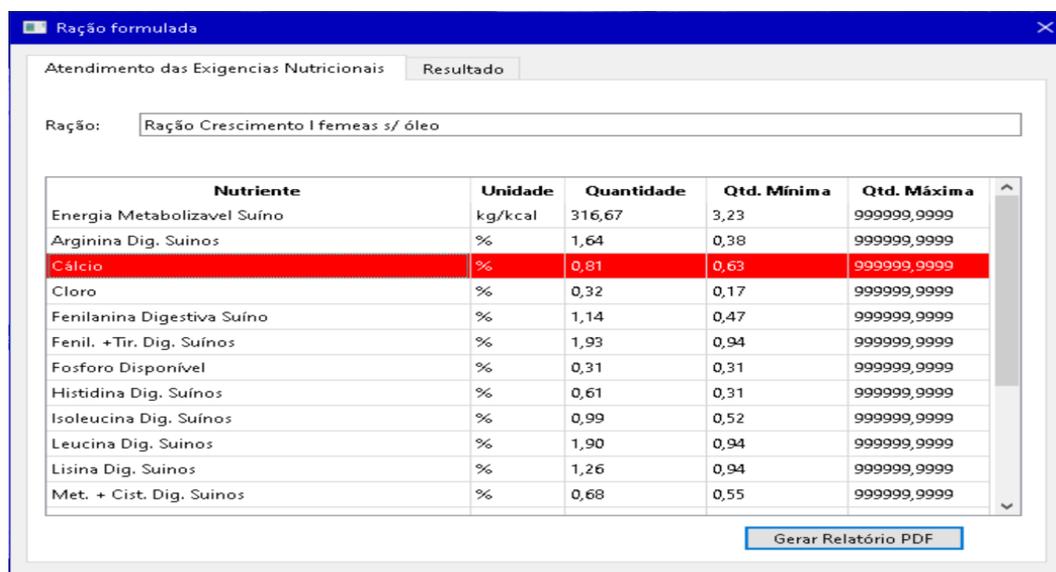
De forma análoga ocorre com a gestão de ração, nesta tela é apresentado uma lista de ração a ser formulada. Esta tela facilita o gerenciamento do operador na edição, exclusão e atualização das informações referentes à ração. Para gerar a formulação da ração é necessário selecionar uma ração e clicar no botão calcular.

Na próxima seção é abordado às telas de resultados com as exigências nutricionais atendidas e a quantidade de alimentos a ser usada para a fabricação da ração.

4.3 Telas de Solução do Problema da Ração - PSC

Para gerar solução de uma formulação da ração, faz-se necessário acessar a tela de Gestão de Ração, conforme visto na Figura 4.8. Primeiramente selecione um tipo de ração de acordo com a espécie a ser usada. Após a seleção o usuário deve clicar no botão calcular. Em seguida será apresentado a solução da formulação desta ração.

A Figura 4.9 apresenta as informações acerca das restrições nutricionais atendidas pela ração selecionada.



Atendimento das Exigencias Nutricionais Resultado

Ração:

Nutriente	Unidade	Quantidade	Qtd. Mínima	Qtd. Máxima
Energia Metabolizavel Suíno	kg/kcal	316,67	3,23	999999,9999
Arginina Dig. Suínos	%	1,64	0,38	999999,9999
Cálcio	%	0,81	0,63	999999,9999
Cloro	%	0,32	0,17	999999,9999
Fenilalanina Digestiva Suíno	%	1,14	0,47	999999,9999
Fenil. +Tir. Dig. Suínos	%	1,93	0,94	999999,9999
Fosforo Disponível	%	0,31	0,31	999999,9999
Histidina Dig. Suínos	%	0,61	0,31	999999,9999
Isoleucina Dig. Suínos	%	0,99	0,52	999999,9999
Leucina Dig. Suínos	%	1,90	0,94	999999,9999
Lisina Dig. Suínos	%	1,26	0,94	999999,9999
Met. + Cist. Dig. Suínos	%	0,68	0,55	999999,9999

Gerar Relatório PDF

Figura 4.9: Tela de Exigências Atendidas.

Fonte: O Autor (2022).

Nesta tela é apresentado o nome da ração a ser fabricada e quais nutrientes compõem esta mistura. Além disso, é fornecida a quantidade atendida por cada nutriente, bem como a quantidade mínima e máxima permitida desta exigência nutricional. Há casos em que a restrição está ativa, isto é, quando o valor mínimo proposto foi alcançado para esta formulação.

O próximo passo é saber a quantidade de alimentos a ser usada para se ter uma ração balanceada a um custo mínimo. Como solução é informado o quantitativo em *kg* de cada alimento. Além da quantidade, o sistema fornece o custo total produção (100*kg*) e o custo por *kg* desta ração. Neste caso, percebe-se que a solução está dentro do intervalo mínimo e máximo permitido.

A Figura 4.10 apresenta às informações pertinentes a quantidade de alimentos a ser usada na composição da ração.

Solução Ótima: R\$ 256.32
Custo/kg: R\$ 2.5632

Ingrediente	Quantidade	Custo Un.	Custo Nominal
milho grão	51.37	1.9	97.61
Soja Farelo	46	3.18	146.28
Fosfato Bicalcico	0.99	8.9	8.85
Calcário	1.18	1.1	1.29
Sal comum	0.45	1.25	0.56
Premix Suino	0	21.9	0
L-Linisa HCL	0	36.8	0
Adsorvente de Micotoxina	0	18.99	0
L-Treonina	0	40	0
DL-Metionina	0	41.2	0
Sulfato de Cobalto	0	41.6	0

Relatório

Figura 4.10: Tela de Resultado.

Fonte: O Autor (2022).

Assim, de posse da solução o zootecnista pode solicitar a produção da ração. Posteriormente é feito a pesagem dos ingredientes e o seu processamento conforme descrito no capítulo 5.

4.3.1 Relatórios do Sistema

O sistema conta ainda com um relatório que fornece as principais informações para a produção da ração. Conforme abordado na seção 4.3, em ambas as telas de solução há um botão para gerar o relatório com estas soluções.

O primeiro deles é referente às exigências nutricionais atendidas na formulação desta ração. Após ser calculado a ração, na aba de atendimento das exigências nutricionais, clique no botão relatório.

A Figura 4.11 refere-se ao relatório gerado pela tela ração formulada na aba atendimento das exigências nutricionais.

Sistema de Gerenciamento de Ração				
Ração Crescimento I fêmeas s/ óleo		<small>Desenvolvido por: Marcio Geveg</small>		
 Atendimento das Exigências Nutricionais Ração Formulada				
Nutriente	Unidade	Atendido	Qtd. Mínima	Qtd Máxima
Energia Metabolizavel Suíno	kg/kcal	316,67	3,23	999999,9999
Arginina Dig. Suínos	%	1,64	0,38	999999,9999
Cálcio	%	0,81	0,63	999999,9999
Cloro	%	0,32	0,17	999999,9999
Fenilalanina Digestiva Suíno	%	1,14	0,47	999999,9999
Fenil. +Tir. Dig. Suínos	%	1,93	0,94	999999,9999
Fosforo Disponível	%	0,31	0,31	999999,9999
Histidina Dig. Suínos	%	0,61	0,31	999999,9999
Isoleucina Dig. Suínos	%	0,99	0,52	999999,9999
Leucina Dig. Suínos	%	1,90	0,94	999999,9999
Lisina Dig. Suínos	%	1,26	0,94	999999,9999
Met. + Cist. Dig. Suínos	%	0,68	0,55	999999,9999
Metionina Dig. Suínos	%	0,32	0,28	999999,9999
Potássio Dig. Suínos	%	0,99	0,44	999999,9999
Proteína Bruta	%	24,84	16,16	999999,9999
Sódio	%	0,19	0,18	999999,9999
Treonina Dig. Suínos	%	0,84	0,61	999999,9999
Triptofano Dig. Suínos	%	0,28	0,16	999999,9999
Valina Dig. Suínos	%	0,65	0,65	999999,9999

Figura 4.11: Relatório de Exigências Nutricionais Atendidas.

Fonte: O Autor (2022).

Os relatórios apresentam a logo da empresa fictícia, bem como, as principais informações pertinentes à fabricação da ração e o custo de produção. Além disso, descreve as exigências que foram atendidas da ração a ser formulada.

De maneira análoga, ocorre na aba de resultados. Ao final do relatório é apresentado a quantidade em *kg* a ser produzida, o custo por *kg* e a solução ótima para a ração balanceada.

A Figura 4.12 refere-se ao relatório contendo as informações da quantidade de ingredientes a ser usado.

Sistema de Gerenciamento de Ração			
Ração crescimento I fêmeas s/ óleo		<i>Desenvolvido por: Marcio Geveg</i>	
 Composição Alimentar Ração Formulada			
Ingrediente	Quantidade	Custo Un.	Custo Nominal.
milho grão	51.37	1.9	97.61
Soja Farelo	46	3.18	146.28
Fosfato Bicalcico	0.99	8.9	8.85
Calcário	1.18	1.1	1.29
Sal comum	0.45	1.25	0.56
Premix Suino	0	21.9	0
L-Linisa HCL	0	36.8	0
Adsorvente de Micotoxina	0	18.99	0
L-Treonina	0	40	0
DL-Metionina	0	41.2	0
Sulfato de Cobre	0	41.6	0
L-Triptofano	0	39.5	0
Quantidade : 100 kg		Custo/kg: R\$ 2.5632	Solução Ótima: R\$ 256.32

Figura 4.12: Relatório da Quantidade de Ingredientes para Formular a Ração.
Fonte: O Autor (2022).

Cabe destacar que o sistema está em uma versão inicial, sendo necessários ajustes futuros. A implementação do PSC não está incorporado à interface, porém a solução gerada pelo método esta sendo gravada em banco de dados para uso na interface. A incorporação do PSC com a interface gráfica será implementado em um trabalho futuro.

No próximo Capítulo é apresentado um estudo de caso da fábrica de ração do IFES *campus* Alegre - ES.

Capítulo 5

Estudo de Caso: Fábrica de Ração

Este capítulo aborda o estudo de caso do problema da produção de ração da fábrica do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES) *campus* Alegre - ES.

5.1 Instituto Federal do Espírito Santo - IFES

A partir da abertura da Escola de Aprendizagem Artífices do Espírito Santo, ocorrida em 1909, até a conversão para o IFES¹, tem tido notável evidência com relação à educação na região. O instituto possui aproximadamente 36 mil alunos e contempla cursos técnicos, graduação e pós-graduação. Ao todo, a instituição conta com 100 cursos técnicos, nos níveis de graduação são 63 cursos, nos níveis de especialização, pós-graduação e aperfeiçoamento são 30 cursos, além de 11 no mestrado e um de doutorado profissional [22].

No nível técnico são oferecidos cursos de Agropecuária, Agroindústria e Informática. A nível de graduação são oferecidos: Análise e Desenvolvimento de Sistemas, Engenharia de Aquicultura, Tecnologia em Cafeicultura, Licenciatura em Ciências Biológicas, Bacharelado em Ciências Biológicas, e Bacharelado em Agronomia. A pós-graduação conta com Especialização em Agroecologia e Sustentabilidade (presencial e EaD), por último o Mestrado Profissional em Agroecologia. Todos os cursos visam atender a demanda da região [22].

Com a junção do Centro Federal de Educação Tecnológica com a Escola Agrícola Federal em 2008, o instituto fornece educação pública de qualidade. Para formar uma sociedade democrática, sustentável e justa são integrados o ensino, a pesquisa e a extensão, fatores essenciais na formação do cidadão [22].

¹<https://www.ifes.edu.br/>

A Figura 5.1 apresenta a entrada do instituto no *campus* de Alegre/ES.



Figura 5.1: O IFES - *Campus* de Alegre.
Fonte: O Autor (2022).

A Figura apresenta as mediações do instituto, os prédios com as salas de aula.



Figura 5.2: Interior do IFES - *Campus* de Alegre.
Fonte: O Autor (2022).

Localizado nas microrregiões capixabas, conta com 22 *campi* em atividades, já incluindo o Centro de Referência em Formação e em Educação a Distância (Cefor). Ademais, conta com mais 49 polos na modalidade de Educação a Distância, isto é, o Polo de Inovação e a Cidade da Inovação [22].

O IFES - *campus* Alegre² que está situado no km 47 na Rodovia BR-482, que tem como dimensão 300 hectares e 23,5 hectares de área construída.

A cidade de Alegre está localizada no estado do Espírito Santo e, de acordo com o IBGE³, conta com uma população estimada de cerca de 29.869 habitantes em 2021. Possui densidade demográfica de 39,85 pessoas por quilômetro quadrado. Dispõe de uma extensão territorial de 756,860km², e taxa de escolarização de 97,6% de crianças com idade de 6 a 14 anos [21].

Na próxima seção é apresentado a caracterização da fábrica de ração do IFES.

5.2 Fábrica de Ração

No geral, a produção de ração necessita de uma série de fatores e cuidados com a matéria-prima, com transporte e por último a entrega. As principais etapas são: recebimento da matéria-prima, pesagem, moagem de alguns alimentos, mistura, armazenamento e transporte [7].

Em uma visita técnica realizada ao *campus* do IFES foram coletadas informações referentes a todo o processo de fabricação de ração. A reunião ocorreu na cooperativa do instituto juntamente com o zootecnista. Nesta cooperativa são comercializados produtos como queijo, muçarela, iogurte e derivados de suínos como linguiça etc. Os produtos são fabricados no próprio instituto sem fins lucrativos. Posteriormente visitou-se a fábrica para conhecer o processo de produção de ração na prática.

Na fábrica o responsável vinculado ao setor de zootecnia se reuniu para falar sobre o funcionamento da mesma e fornecer informações referentes à produção de ração. O funcionário responsável possui doutorado e tem experiência na área de zootecnia. Ele relatou como é feito na prática a formulação da ração e apresentou quais os tipos que são fabricadas para cada espécie de animal. O instituto fabrica ração para bovinos, caprinos, suínos e aves.

²<https://alegre.ifes.edu.br/>

³<https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/es/alegre.html>

A Figura 5.3 apresenta a fachada da Cooperativa de Alunos do IFES.



Figura 5.3: Cooperativa dos Alunos do IFES
Fonte: IFES (2022).

A Figura 5.4 a seguir apresenta a vista frontal da fábrica de ração do IFES.



Figura 5.4: Fábrica de ração do IFES.
Fonte: O Autor (2022).

No galpão no lado esquerdo é onde a fábrica recebe o milho (moega de recebimento). Este produto passa por um processo de limpeza, secagem e posteriormente é armazenado os grão no silo estrutura mais ao fundo da Figura 5.4, tem forma cilíndrica metálica e se encontra entre a moega e a fábrica, tem capacidade para armazenar cerca de 150 toneladas.

A Figura 5.5 apresenta o armazenamento dos alimentos no interior da fábrica.



Figura 5.5: Almojarifado da fábrica.
Fonte: O Autor (2022).

Os alimentos disponíveis são armazenados no almojarifado, já os demais alimentos são armazenados em sacos no interior da fábrica.

Neste sentido, para a produção da ração, o fluxo do milho passa pelo processo de moagem (trituração). A partir de então todos os alimentos passam pela pesagem, onde um funcionário coloca os ingredientes na balança. Logo em seguida é feito o processo de mistura, este procedimento é realizado no misturador de 1 tonelada. Este processo de misturar os ingredientes dura cerca de 6 minutos. Há na fábrica também um misturador de 150 *kg* de ração que leva cerca de 5 minutos para mistura os alimentos. Na sequência, é feito o armazenamento em um silo menor e, para a comercialização, é feita primeiro o ensaque e a estocagem para posteriormente ser utilizada para os animais do instituto.

A Figura 5.6 representa as fases do processo de fabricação da ração desde a recepção da matéria-prima até a ensacagem do produto.

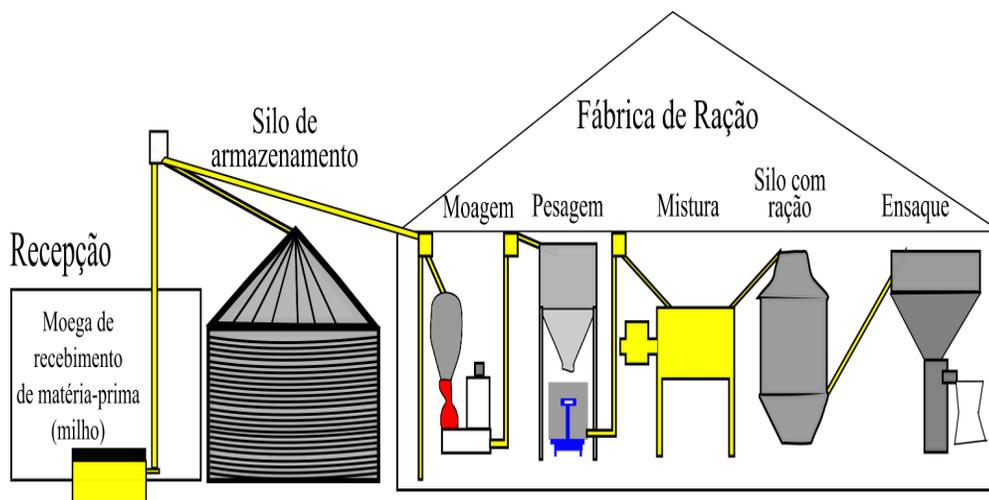


Figura 5.6: Processo de fabricação da ração do IFES/ES.
Fonte: O Autor (2022).

A Figura 5.7 mostra a balança de pesagem dos alimentos e o misturador de 150 *kg*.



Figura 5.7: Balança e misturador 150 *kg* da fabricação da ração do IFES/ES.
Fonte: O Autor (2022).

Para a produção da ração os alimentos são pesados e processados por meio do misturador. Para quantidades menores de ração é utilizado o misturador de 150 *kg*. Posteriormente é feito o armazenamento deste produto.

A Figura 5.8 apresenta o misturador principal da fábrica.



Figura 5.8: Misturador 1 tonelada da fabricação da ração do IFES/ES.
Fonte: O Autor (2022).

O misturador principal é o equipamento utilizado para o processamento dos alimentos. Normalmente para misturar 1 tonelada leva em torno de 6 minutos. A mistura é armazenada em um silo no interior da fábrica.

A Figura 5.9 representa as fases de armazenamento da ração e o ensacagem do produto.



Figura 5.9: Silo de armazenamento e processo de ensaque da ração.
Fonte: O Autor (2022).

Após o processamento da ração (mistura) é feito o armazenamento no silo metálico no interior da fábrica. Posteriormente é feito o ensaque para ser usado na alimentação dos diversos animais presentes no instituto.

A Figura 5.10 apresenta a disposição dos equipamentos no interior da fábrica do IFES.

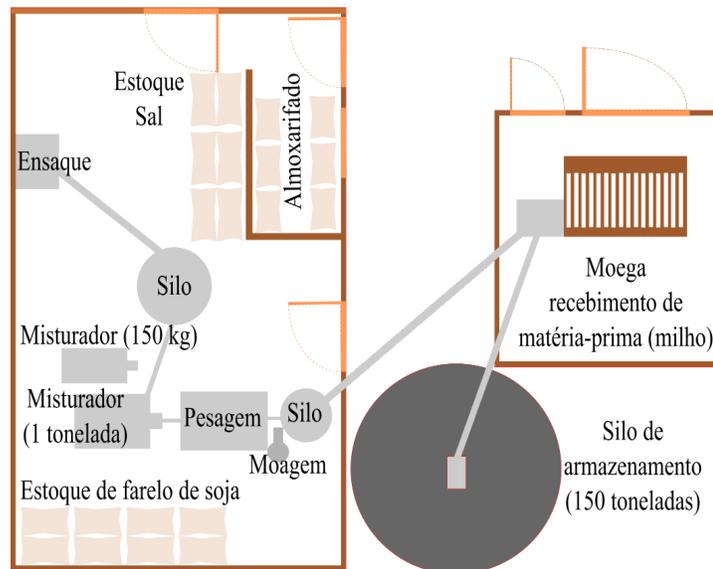


Figura 5.10: Planta baixa da fábrica.

Fonte: O Autor (2022).

Para resumir, a planta baixa apresenta as características físicas da fábrica vista de cima. Na imagem é possível identificar a moega onde ocorre o recebimento da matéria prima, em seguida é realizada a limpeza com uma peneira e posteriormente este ingrediente é guardado no silo ou vai para a fábrica para realizar o processamento. Além do almoxarifado há outros ingredientes que são armazenados em sacos no interior da instalação.

O IFES possui uma granja onde são incubados os frangos. Neste local as aves tem um ambiente arejado com boas condições de higiene e temperatura para o desenvolvimento dos frangos.

A Figura 5.11 apresenta o galpão onde ficam os frangos do IFES.



Figura 5.11: Granja principal do IFES.
Fonte: O Autor (2022).

A lona azul é para o controle de luminosidade e temperatura do ambiente. No interior da instalação há diversas luzes para controlar o aquecimento do ambiente. Para impedir a disseminação de doenças no galpão, é utilizada a cal logo na entrada do estabelecimento evitando a circulação de micro-organismos causadores de doenças nas aves. Em dias muito quentes é aberta a lona azul para melhorar a ventilação no galpão.

A Figura 5.12 apresenta o interior da granja do IFES.



Figura 5.12: Interior da granja principal.
Fonte: O Autor (2022).

As aves são separadas de acordo com a idade e sua repartição é numerada para facilitar o controle e identificar a fase em que se encontra o frango. Há um sistema de ventilação usado no período de calor para proporcionar uma melhor temperatura. As aves ficam confinadas nesta ambiente onde são alimentadas e acompanhadas pelos profissionais do instituto.

A Figura 5.13 apresenta a disposição das aves no interior da granja do IFES.



Figura 5.13: Disposição dos frangos no interior da granja.
Fonte: O Autor (2022).

A área de confinamento possui um reservatório onde é composto por ração e outro composto por água. O ambiente é bem arejado, proporcionando boas condições para o desenvolvimento das aves.

Os relatórios fornecidos pelo responsável técnico envolvem informações da produção de ração e são destinados a dois tipos de animais: aves e suínos. Cada documento representa uma variação de ração de acordo com a classificação da fase em que o animal se enquadra.

Podem-se destacar os seguintes exemplos de rações de acordo com a fase do animal: frango de corte crescimento, frango de corte inicial, poedeiras em postura, pré-inicial, terminação, codorna. Já para suínos possuem as seguintes fases: crescimento, gestação, inicial leite, lactação, pré-inicial, terminação.

O documento ainda contém informações relacionadas à composição alimentar, isto é, quais alimentos foram utilizados para a determinada ração. Além disso, é apresentada uma lista contendo as exigências nutricionais que devem ser atendidas na fabricação e estão totalmente relacionadas com as tabelas Rostano [35].

Ao todo, foram formulados matematicamente 15 modelos do problema da ração para aves, 9 relacionados à produção de ração suína.

Na próxima seção é apresentado a composição da ração de aves e suínos com mais detalhes.

5.3 Composição da Ração de Aves e Suínos

Durante a visita técnica no IFES foram levantadas diversas informações referentes à produção de ração. O zootecnista forneceu informações referentes aos alimentos utilizados, tipos de ração, nutrientes, aminoácidos e antibióticos utilizados para formular uma ração balanceada.

Conforme visto na literatura, há quinze variações de rações para frango macho e mais quinze para fêmeas, este quantitativo pode variar conforme disponibilidade de ingredientes para a formulação [35]. Para esta espécie há diversas restrições que necessitam serem atendidas de acordo com o tipo de desempenho do animal, por exemplo, regular, médio e superior. As principais rações para aves são: crescimento I, crescimento II, corte inicial, poedeiras em postura, corte terminação, codornas, poedeiras semipesadas. No IFES são usados dez tipos para aves, sendo algumas variações de uma das sete descritas na literatura.

De igual forma, para suínos há as seguintes rações: gestação, lactação, inicial, pré-inicial, crescimento e terminação, podendo variar conforme a quantidade de alimento disponível na fábrica. O zootecnista do IFES informou que não há um número exato de quantidade de ração, pois a mesma pode variar de acordo com os níveis máximos e praticáveis [35], conforme a espécie e ingredientes disponíveis. Atualmente, devido ao menor número de animais, a fábrica utiliza um número bem menor de ração na alimentação dos suínos.

O quantitativo usado no IFES vai depender do estágio em que se encontra o animal para a fabricação desta alimentação. Assim como nas aves, para suínos usam-se dez tipos de rações, podendo variar estes tipos. As principais rações de suínos utilizadas na alimentação no IFES são: pré-inicial, inicial I, inicial II, crescimento I, crescimento II, terminação I, terminação II, gestação I (0 a 70 dias), gestação II (70 a 114 dias), por último, lactação.

Para se ter uma ração balanceada são necessários diversos alimentos que devem ser misturados de forma adequada, visando fornecer os nutrientes adequados para cada fase da vida animal. Na alimentação são empregados os alimentos, aminoácidos, suplementos, sais minerais, além de antibióticos e medicamentos para o combate a micotoxinas presentes nos alimentos. Além disso, a alimentação é composta por energia, proteínas, fibras e outros componentes essenciais para atender as exigências nutricionais.

Conforme informado pelo responsável técnico os principais alimentos utilizados na fabricação de ração para aves e suínos são: milho, farelo de soja, sal, farelo de arroz, óleo, gordura animal. Os dois primeiros alimentos são responsáveis por mais de 90% da composição da alimentação, o primeiro com aproximadamente 60%, já o segundo com cerca de 25% a 30% , estes alimentos podem variar de quantidade de acordo com a fase de vida do animal. O óleo de soja e a gordura animal fornecem exclusivamente energia, não fornecendo nenhum outro nutriente como, por exemplo, proteínas e minerais.

Os nutrientes são importantes, pois fornecem características específicas para os animais conforme sua fase de vida (gestação, lactação, crescimento, etc.). Os principais utilizados são: proteína, energia metabolizável, fósforo, cálcio, sódio, lisina digestível, metionina digestível. Já as principais fontes de minerais são: calcário calcítico, sal comum e fosfato bicálcico. Além destes ingredientes são utilizados medicamentos para prevenir doenças. O adsorvente de micotoxina serve para adsorver micotoxinas presentes nos grãos, principalmente do milho. Essa toxina pode causar mal aos animais, podendo levá-los a óbitos. Cabe destacar que existem ingredientes que não fornecem em quantidade significativa nenhum nutriente. Como exemplo pode-se citar o caso do adsorvente de micotoxinas, antibióticos, coccidiostáticos, etc.

O coccidiostático serve para prevenir o surgimento de coccidiano. A ciprofloxacina é um antibiótico usado para curar ou prevenir doenças. Outro ingrediente utilizado é o premix, um polivitamínico (vitaminas e minerais) que fornece exclusivamente nutrientes que precisam de pequenas quantidades e que sua falta pode comprometer o desenvolvimento do animal. De acordo com o fabricante utilizado, podem fornecer aminoácidos sintéticos, antibióticos e outros ingredientes, podendo ocorrer variações.

Porém, as rações de suínos podem conter o tecnoroma que é um palatabilizante que serve para deixar a ração cheirosa e palatável para os animais. Já a ivermectina em pó serve para combater vermes. Além disso, os principais aminoácidos usados são: lisina, metionina, treonina, triptofano, arginina, valina, etc. Os três primeiros são mais usados, o uso destes ingredientes pode variar dependendo do custo.

Na próxima seção é apresentado uma instância de um problema real da fábrica de ração com mais detalhes.

5.4 Instância de um Problema Real

Uma instância representa um caso particular do problema que está sendo tratado. Cada uma possui informações específicas, por exemplo, informações sobre custo dos alimentos a serem utilizados, percentual da composição dos nutrientes, restrições nutricionais, limitantes inferiores e superiores. Este conjunto de informações define uma instância. Então o problema consiste em produzir uma ração balanceada a um custo mínimo respeitando as exigências nutricionais e a quantidade de alimentos disponíveis.

Conforme pontuado por Gomide [19], para se elaborar uma ração balanceada de custo mínimo, faz-se necessário levantar cinco tipos de informações: o preço, a disponibilidade e a composição química dos alimentos; quais exigências nutricionais para a classe de animais (aves, suínos, bovinos, etc.); por último, as limitações de quantidade dos alimentos.

Com relação a aves, a fábrica do IFES produz 15 tipos de rações, assim para analisar uma instância é considerada a ração para poedeiras em postura. Esta mistura deve ser composta pelos seguintes alimentos: milho (7,88%), soja farelo (45%), calcário, fosfato bicálcico, premix poedeira, sal comum, adsorvente de micotoxina, L-lisina HCL e por último DL-Metionina.

Para fabricar 100kg desta ração balanceada é necessário conter no mínimo 16,02% de proteína bruta e 2,8500 kcal/kg de energia metabolizável. Para a produção estima-se que o milho custe R\$ 1,90 centavos por quilo, a soja R\$ 3,18, fosfato bicálcico R\$ 8,90, calcário R\$ 1,10, sal comum R\$ 1,25, L-Lisina HCL R\$ 36,80, premix poedeira R\$ 29,00, DL-Metionina R\$ 41,20 e, por último, o adsorvente de micotoxina com custo de R\$ 18,99. Estas informações estão presentes no relatório fornecido pelo setor responsável pela fabricação de ração do IFES. Os custos dos alimentos foram atualizados em 2022.

Nesta mistura, foram utilizados nove alimentos, no qual são descritas a quantidade em kg utilizada de cada um dos componentes, o valor unitário e o valor total. Além disso, são apresentadas as quantidades mínimas e máximas permitidas dos ingredientes de acordo com as exigências nutricionais.

A Tabela 5.1 ilustra a composição alimentar da ração de poedeiras em postura com exigência nutricional para poedeiras em produção.

Tabela 5.1: Ração poedeiras em postura.

Composição Alimentar			
Ingrediente	Custo Unitário	Quantidade (kg)	
		Mínima	Máxima
Milho	1,90	0	100
Soja Farelo	3,18	0	100
Calcário	1,10	0	100
Fosfato Bicálcico	8,90	0	100
Premix poedeira	28,00	0	100
Sal Comum	1,25	0	100
Adsorvente de Micotoxina	18,99	0	100
L-Lisina HCL	36,80	0	100
DL-Metionina	41,20	0	100

Fonte: adaptado IFES (2022).

De acordo com Zardo e Lima [49], a exigência nutricional pode ser definida como sendo a quantidade mínima necessária de nutrientes absorvida pelo animal. Estas exigências variam de acordo com a idade, sexo, potencial genético, peso e fase produtiva na qual o animal se enquadra. O cálculo realizado para descobrir a quantidade de alimentos que irá compor a ração de acordo com as exigências nutricionais levando em consideração a categoria a que o animal pertence é denominado de formulação da ração [49].

Cada alimento tem uma composição nutricional, por exemplo, o milho possui: 1,91% de ácido Linoleico, 0,03% de cálcio, 0,06% de cloro, 0,01% de sódio. Já o sal é composto por: 59,6% de cloro e 39,7% de sódio etc..

As exigências nutricionais desta ração que está sendo considerada são apresentadas na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Exigências nutricionais.

Nutriente	Unidade	Qtd.	Qtd. Mín.	Qtd. Máx.
ACIDO LINOLEICO	%	1,4325	1,1750	999999, 9999
ARGININA DIG.Aves	%	0,8369	0,7170	999999, 9999
CÁLCIO	%	3,5227	3,9000	999999, 9999
CLORO	%	0,2296	0,1940	999999, 9999
ENERG. MET.Aves	<i>kcal/kg</i>	273,69	285,00	999999, 9999
FENIL. DIG.Aves	%	0,8063	0,4660	999999, 9999
FENIL.+TIR.DIG.Aves	%	1,3778	0,8460	999999, 9999
FÓSFORO DISPONIVEL	%	0,4102	0,2910	999999, 9999
GLICINA + SERINA TOTAL	%	1,6101	0,5520	999999, 9999
HISTIDINA DIG.Aves	%	0,4474	0,2080	999999, 9999
ISOLEUCINA DIG.Aves	%	0,5069	0,5450	999999, 9999
LEUCINA DIG.Aves	%	1,4491	0,8750	999999, 9999
LISINA DIG.Aves	%	0,6785	0,7170	999999, 9999
MET.+CIST.DIG.Aves	%	0,5021	0,6520	999999, 9999
METIONINA DIG.Aves	%	0,2418	0,3590	999999, 9999
POTÁSSIO	%	0,6650	0,5630	999999, 9999
PROTEÍNA BRUTA	%	16,8788	16,0200	999999, 9999
SÓDIO	%	0,1369	0,2180	999999, 9999
TREONINA DIG.Aves	%	0,5863	0,5450	999999, 9999
TRIPTOFANO DIG.Aves	%	0,1857	0,1650	999999, 9999
VALINA DIG.Aves	%	0,7376	0,6810	999999, 9999

Fonte: adaptado IFES (2022).

Além disso, a quantidade é referente às exigências atendidas praticada na fábrica do IFES. Entretanto, a quantidade mínima segue a tabela do Rostagno [35]. Nesta mistura são consideradas 21 restrições nutricionais, sendo que se deve incluir mais uma restrição que determina a quantidade de ração a ser produzida.

No geral, para representar um número grande computacionalmente adotou-se o valor 999999, 9999. Este valor representa o limitante superior da quantidade máxima permitida do nutriente. Com exceção da energia metabolizável (*kcal/kg*) e da restrição técnica da quantidade a ser produzida (*kg*), os demais nutrientes são mensurados em %. A quantidade a ser atendida deve respeitar os limites da quantidade mínima e máxima.

Para a formulação do modelo matemático foram considerados as informações relacionadas à composição alimentar, as exigências nutricionais e o custo dos alimentos.

Observe que tanto a composição alimentar quanto as exigências nutricionais possui uma variação de quantidade mínima e máxima de cada elemento que são permitidas na produção de cada ração [27].

Considera-se que, para a produção da ração, a variável de decisão x_1 representa a quantidade de milho a ser utilizada na composição da ração. A variável x_2 representa a soja farelo, x_3 calcário, x_4 fosfato bicálcico, x_5 premix poedeira, x_6 sal comum, x_7 adsorvente de micotoxina, x_8 L-Lisina HCL e por último, a variável x_9 DL-Metionina.

O modelo matemático formulado para *instAves6* é representado a seguir:

Minimizar:

$$f(x) = 1,90x_1 + 3,18x_2 + 1,100x_3 + 8,9x_4 + 28,00x_5 + 1,25x_6 + 18,99x_7 + 36,80x_8 + 41,20x_9$$

Sujeito as seguintes restrições:

Quantidade de ração a ser produzida:

$$100 \leq 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 1x_6 + 1x_7 + 1x_8 + 1x_9 \leq 100$$

$$270,00 \leq 3,381x_1 + 2,254x_2 + 3,762x_8 + 5,639x_9 \leq 999999,9999 \text{ (Energia Dig)}$$

$$1,1750 \leq 0,0191x_1 + 0,0089x_2 \leq 999999,9999 \text{ (Ácido Linoleico)}$$

$$0,7170 \leq 0,0034x_1 + 0,0317x_2 \leq 999999,9999 \text{ (Arginina Digestiva)}$$

$$3,500 \leq 0,0003x_1 + 0,0024x_2 + 0,377x_3 + 0,245x_4 \leq 999999,9999 \text{ (Cálcio)}$$

$$0,1940 \leq 0,0006x_1 + 0,0005x_2 + 0,596x_6 \leq 999999,9999 \text{ (Cloro)}$$

$$0,4660 \leq 0,0034x_1 + 0,0218x_2 \leq 999999,9999 \text{ (FENIL.Digestivo)}$$

$$0,8460 \leq 0,0058x_1 + 0,0373x_2 \leq 999999,9999 \text{ (Fenil.Tir.Digestivo)}$$

$$0,2910 \leq 0,0006x_1 + 0,0022x_2 + 0,185x_4 \leq 999999,9999 \text{ (FÓSFORO DISPONIVEL)}$$

$$0,5520 \leq 0,0069x_1 + 0,0446x_2 \leq 999999,9999 \text{ (Glicina + Serina Total)}$$

$$2080 \leq 0,0021x_1 + 0,0112x_2 \leq 999999,9999 \text{ (Histidina Dig.)}$$

$$0,50500 \leq 0,0024x_1 + 0,0192x_2 \leq 999999,9999 \text{ (Isoleucina Dig.)}$$

$$0,8750 \leq 0,0090x_1 + 0,0319x_2 \leq 999999,9999 \text{ (Leucina Dig.)}$$

$$0,7170 \leq 0,0019x_1 + 0,0257x_2 + 0,788x_8 \leq 999999,9999 \text{ (Lisina Dig.)}$$

$$0,5020 \leq 0,0029x_1 + 0,0113x_2 + 0,982x_9 \leq 999999,9999 \text{ (Met.+Cis.Dig)}$$

O modelo matemático formulado para *instAves6* continuação a seguir:

$$0,2418 \leq 0,0015x_1 + 0,0055x_2 \leq 999999,9999 \text{ (Met. Dig)}$$

$$0,5630 \leq 0,0029x_1 + 0,0183x_2 \leq 999999,9999 \text{ (Potássio)}$$

$$0,5020 \leq 0,0029x_1 + 0,0113x_2 + 0,982x_9 \leq 999999,9999 \text{ (Met. +Cis. Dig)}$$

$$0,2418 \leq 0,0015x_1 + 0,0055x_2 \leq 999999,9999 \text{ (Met. Dig)}$$

$$0,5630 \leq 0,0029x_1 + 0,0183x_2 \leq 999999,9999 \text{ (Potássio)}$$

$$16,0200 \leq 0,0788x_1 + 0,4522x_2 + 0,858x_8 + 0,594x_9 \leq 999999,9999 \text{ (Proteína Bruta.)}$$

$$0,1369 \leq 0,002x_1 + 0,0002x_2 + 0,397x_6 \leq 999999,9999 \text{ (Sódio)}$$

$$0,5450 \leq 0,0027x_1 + 0,0157x_2 \leq 999999,9999 \text{ (Treonina Digestiva)}$$

$$0,1650 \leq 0,0005x_1 + 0,0058x_2 \leq 999999,9999 \text{ (Triptofano)}$$

$$0,6810 \leq 0,0033x_1 + 0,0197x_2 \leq 999999,9999 \text{ (Valina)}$$

Restrição com relação não negatividade:

$$0 \leq x_1 \leq 100, \quad 0 \leq x_2 \leq 100, \quad 0 \leq x_3 \leq 100,$$

$$0 \leq x_4 \leq 100, \quad 0 \leq x_5 \leq 100, \quad 0 \leq x_6 \leq 100,$$

$$0 \leq x_7 \leq 100, \quad 0 \leq x_8 \leq 100, \quad 0 \leq x_9 \leq 100.$$

Com base na solução do modelo, foi possível a realização de análises e determinar decisões pertinentes ao problema apresentado. Como consequência, foram sugeridas soluções que atendam a demanda de produção do presente estudo.

No Brasil, geralmente, para a formulação de uma ração balanceada devem-se considerar as exigências nutricionais da Tabela Brasileira de Exigências Nutricionais Aves e Suínos [35].

Cabe destacar que para todas as rações os modelos são similares em termos de exigências nutricionais, energia metabolizável, quantidade total de ração e solução ótima (FO) associada.

Os resultados obtidos nesta instância (*instAves6*) e demais problemas serão apresentados no capítulo 6 com mais detalhes.

Capítulo 6

Resultados Computacionais

Neste capítulo são apresentados os resultados computacionais obtidos das instâncias do IFES/Alegre e demais problemas abordados no presente trabalho. Apresenta-se também a análise dos resultados computacionais alcançados pelo método Primal Simplex para variáveis Canalizadas.

6.1 Introdução

Para a implementação e testes, foi utilizado um notebook da marca Lenovo com 8 Gb de memória RAM, processador Intel Celeron CPU 1000M @1.8Ghz. O sistema operacional utilizado foi o Windows 8.1 Single Language de 64bits. A linguagem de programação utilizada foi C++, juntamente com o IDE Visual Studio Community e o compilador GCC (MingGW).

Na execução do programa PSC, é solicitado o nome da instância a ser solucionada. Em seguida, é feita a resolução do problema e, caso haja uma solução ótima, o programa apresenta a quantidade de iterações executadas, tempo computacional, a quantidade em *kg* de cada alimento que deve ser usado para a fabricação da ração informada. Por último, é apresentado o valor ótimo, isto é, o custo total para se produzir 100 *kg* desta ração.

Os problemas foram classificados pelo autor como sendo de pequeno porte, dado a sua dimensão ser inferior a 100.

Inicialmente, o PSC executa a leitura dos modelos em um formato de arquivo de texto, a formulação do problema pode ser vista na seção 5.4 com mais detalhes.

A Figura 6.1 apresenta a solução da *instAves6* gerada na tela do Windows (DOS).

```

-----
SOLUCAO OTIMA:
-----
  Variaveis      valores      custo relativo
  x[1] =         61.66886421      0.000000000
  x[2] =         28.59825735      0.000000000
  x[3] =          8.400000000      -0.3561791967
  x[4] =          1.032878459      0.000000000
  x[5] =          0.000000000      26.54382080
  x[6] =          0.300000000      -0.2061791967
  x[7] =          0.000000000      17.53382080
  x[8] =          0.000000000      35.34382080
  x[9] =          0.000000000     -102.3680639

  Total          100.000 Kg

-----
VALOR OTIMO:
-----
Funcao Objetivo      Iteracoes      Tempo (seg)
0.000000000000000    46             0.000000000000000    (FASE I)
226.9209186458      5              0.000000000000000    (FASE II)
  Total              51             0.000000000000000    (TOTAL)

FUNCAO OBJETIVO R$: 226.9209186458029
-----

```

Figura 6.1: Tela de solução da *instAves6*.
Fonte: O Autor, 2022.

Observa-se que esta versão do sistema apresenta a solução ótima e os custos relativos da *instAves6*, onde os alimentos são representados pelas variáveis $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Em seguida é apresentado o total de ração em *kg* a ser produzido, neste caso, 100 *kg*. Além disso, na fase I e fase II são apresentados o valor da FO, o número de iterações em cada uma das fases e o tempo computacional para execução do método PSC, em seguida é apresentado o total de iterações e o tempo total de execução. Por último, é apresentado o valor ótimo, no caso, R\$ 226,9209 reais para produzir 100 *kg* desta ração.

Ao realizar a execução de todas as instâncias foi registrado o tempo de 0,000000000000 segundos. Assim, não é apresentado o tempo computacional para os problemas.

Destaca-se que a fabricação da ração é feita realizando uma combinação de alimentos seguindo as especificações diárias de quantidade de acordo com as restrições nutricionais dos diversos tipos de animais (aves, suínos, bovinos, caprinos, por exemplo) [6]. Além disso, é feito o processamento de forma que o produto final satisfaça os critérios relativos aos nutrientes empregados na produção, por exemplo, cálcio, proteínas, carboidratos, vitaminas, etc.

Para os problemas reais, como no caso da fabricação de ração, o modelo matemático é canalizado tanto nas variáveis quanto nas restrições, veja seção 2.5. Estas características são favoráveis para a utilização e realização da validação da implementação do método desenvolvido nesta pesquisa.

Segundo Gonçalves [20], formular uma ração é uma tarefa complexa pois envolve diversas opções de alimentos que devem atender um número elevado de exigências nutricionais. Porém, ao contrário de formular manualmente, o uso de *software* incorporado com método adequado possibilita agilidade, precisão para realizar ajustes no modelo de forma a atender as exigências.

Nas seções a seguir são especificadas as instâncias utilizadas neste trabalho.

6.2 Instâncias Utilizadas nos Experimentos Computacionais

Os dados presentes nas instâncias foram extraídos de um relatório técnico fornecido pela fábrica do IFES. Este documento apresenta a composição alimentar e as exigências nutricionais. No primeiro há a quantidade de cada alimento a ser usado na fabricação da ração, o custo unitário, o custo total, seguido da quantidade mínima e máxima permitida. Posteriormente, são listadas as restrições, a unidade em porcentagem (%) ou em *kcal/kg* no caso a Energia Metabolizável, seguida da quantidade mínima e máxima permitida. Por último, o relatório apresenta a quantidade produzida, no caso 100 *kg*, e o custo total da produção desta instância.

Inicialmente, foram utilizadas 24 instâncias de variações de problemas da ração em porcentagem. Estes modelos não retratam o problema real da fabricação de ração, isto é, a solução difere-se dos valores aplicados no IFES. A utilização destes problemas tem como intuito verificar o desempenho do PSC, a qualidade da solução e o efeito de incorporar a regra de Dantzig Normalizada. Os resultados para estes problemas são apresentados na seção 6.3.

Posteriormente, foram utilizadas 15 instâncias do problema da fábrica de ração destinadas à alimentação de aves [13]. Além destas, outras 9 instâncias de rações para suínos foram utilizadas na pesquisa. As duas classes de problemas retratam o problema real da produção de ração do IFES. Os resultados computacionais para estes problemas são apresentados na seção 6.4.

Cada instância possui um nome correspondente e uma dimensão, sendo, a variável m representada pelo número de restrições técnicas, também pode ser entendida como sendo as exigências nutricionais, quantidade a ser produzida e energia metabolizável a serem atendidas, já n representa o número de variáveis do problema, isto é, os ingredientes (alimentos) a serem utilizados para a produção da ração. Estas duas variáveis definem a dimensão do problema a ser solucionado, isto é, m representa o número de linhas e n o número de colunas do problema.

O *software* CPLEX¹ é utilizado com o intuito de comparar, validar a solução e verificar o desempenho do método PSC. Este *software* é mantido pela IBM e é muito utilizado para resolver modelos matemáticos grandes para auxiliar na tomada de decisões. Ele tem uma suíte de funcionalidades de alto desempenho que fornece soluções precisas de forma eficiente. O programa resolve problemas de programação linear, programação inteira mista, programação quadrática e com restrições.

Segundo Moreira [28], a letra C da sigla CPLEX é referente à linguagem de programação C, já PLEX, remete ao algoritmo Simplex utilizado na Programação Linear.

6.3 Variações do Problema da Ração

Como relatado anteriormente, a formulação utilizada nestas instâncias é uma variação de problemas de produção de rações expressos em porcentagem que não retratam o problema real. Esta formulação é uma mudança de escala, como por exemplo, com relação à instância que é apresentada na seção 6.4 que trabalha com os valores em quilograma. Esta seção objetiva validar a implementação do método PSC e comparar a solução com *software* o CPLEX, em 24 instâncias.

As instâncias de 1 até 15, conforme apresentado na Tabela 6.1, são equivalentes as rações de aves. Já as instâncias de 16 a 24 equivalem as de suínos.

Segundo Santos [13], a esparsidade é uma característica de um PPL. Ela pode ser definida em função do número de elementos não-nulos da matriz de coeficientes do problema. Deste modo, a esparsidade é calculada tomando o total de elementos não-nulos pela quantidade de elementos da matriz.

¹<https://www.ibm.com/br-pt/analytics/cplex-optimizer>

A Tabela 6.1 apresenta a dimensão (linhas e colunas), a quantidade de valores não nulos e o percentual de esparsidade.

Tabela 6.1: Instâncias variação do problema da mistura.

Instância	Linhas	Colunas	Não-Nulos	Esparsidade (%)
<i>instancia1</i>	22	9	61	69,19
<i>instancia2</i>	22	9	60	69,70
<i>instancia3</i>	22	9	60	69,70
<i>instancia4</i>	22	9	62	68,69
<i>instancia5</i>	22	9	62	68,69
<i>instancia6</i>	22	9	62	68,69
<i>instancia7</i>	22	9	62	68,69
<i>instancia8</i>	22	9	62	68,69
<i>instancia9</i>	22	6	53	59,85
<i>instancia10</i>	22	10	65	70,45
<i>instancia11</i>	19	11	63	71,36
<i>instancia12</i>	22	11	80	66,94
<i>instancia13</i>	23	11	88	65,22
<i>instancia14</i>	22	10	63	71,36
<i>instancia15</i>	34	11	63	83,16
<i>instancia16</i>	20	12	64	73,33
<i>instancia17</i>	21	11	65	71,86
<i>instancia18</i>	20	11	79	64,09
<i>instancia19</i>	21	15	84	73,33
<i>instancia20</i>	20	10	54	73,00
<i>instancia21</i>	21	15	90	72,56
<i>instancia22</i>	22	17	87	76,67
<i>instancia23</i>	20	12	64	73,33
<i>instancia24</i>	20	13	65	75,00
MÉDIA	21,88	10,75	67,42	70,56

Fonte: O Autor (2022).

Observe que as instâncias tem em média de, aproximadamente, 22 linhas e 11 colunas. Já a média de números não nulos é de 67,42, seguida da média da esparsidade que é de 70,56%. A quantidade máxima de valores não nulos é de 88 para a *instancia13*. Entretanto a que tem maior esparsidade é a *instancia15* com 83,16%.

Cabe destacar que em problemas reais a esparsidade é grande, chegando a alguns casos em torno de 99%.

A Tabela 6.2 expõe a quantidade de iteração necessária para resolver os problemas para o método PSC (regra usual e regra de Dantzig Normalizada) e para o CPLEX.

Tabela 6.2: Iterações: método PSC e CPLEX.

Instância	D	D	DN	DN	CPLEX
	PSC	PSC	PSC	PSC	
	fase I	Fase II	fase I	Fase II	
<i>instancia1</i>	59	6	44	5	6
<i>instancia2</i>	69	3	44	3	2
<i>instancia3</i>	52	4	31	8	6
<i>instancia4</i>	63	4	31	8	7
<i>instancia5</i>	45	6	38	7	7
<i>instancia6</i>	53	2	34	5	6
<i>instancia7</i>	61	4	43	13	7
<i>instancia8</i>	49	4	32	7	7
<i>instancia9</i>	42	3	29	4	5
<i>instancia10</i>	1	2	1	2	1
<i>instancia11</i>	1	2	1	2	1
<i>instancia12</i>	83	6	45	4	9
<i>instancia13</i>	73	2	45	11	4
<i>instancia14</i>	62	2	43	13	7
<i>instancia15</i>	63	5	60	2	2
<i>instancia16</i>	25	6	30	8	1
<i>instancia17</i>	27	11	31	4	6
<i>instancia18</i>	21	4	23	8	1
<i>instancia19</i>	37	15	41	4	6
<i>instancia20</i>	50	3	21	8	8
<i>instancia21</i>	31	13	28	1	3
<i>instancia22</i>	37	13	44	7	9
<i>instancia23</i>	33	10	34	8	2
<i>instancia24</i>	13	3	13	7	4
MÉDIA	43,75	5,54	32,75	6,21	4,88

Fonte: O Autor (2022).

Observe que a quantidade de iterações na fase I do método PSC adotando a regra usual (D) apresenta uma média aproximada de 44 iterações. Já a fase II exibe uma média de, aproximadamente, 6 iterações. Ou seja, é necessário mais esforço para se obter uma solução básica inicial factível para o início da fase II, que consiste em encontrar a solução ótima.

Com relação à regra DN, o quantitativo de iterações na fase I tem uma média de, aproximadamente, 33 e fase II uma média de 6 iterações.

Com base nestes resultados, pode-se observar que o uso da Regra de Dantzig, conforme a literatura, reduziu o número de iterações na fase I. A média total de iterações usando a regra de Dantzig Usual é de 49 iterações. Já usando a regra de Dantzig Normalizada é de, aproximadamente, 39 iterações.

Em contrapartida, o CPLEX consegue resolver os problemas com uma média de 5 iterações, aproximadamente. O máximo de iterações realizadas por este método foi em dois dos problemas: *instancia12* e *instancia22*. Em ambos, levou 9 iterações para alcançar os resultados.

Mesmo o CPLEX sendo um *software* com mais de 20 anos e com uma grande equipe de desenvolvedores, resolvendo os problemas em unidades de iterações, o desempenho do PSC foi razoável, pois soluciona os problemas em algumas dezenas de iterações.

A Tabela 6.3 apresenta os valores ótimos dos problemas usando a regra de Dantzig usual e Dantzig Normalizada para o PSC e o CPLEX.

Tabela 6.3: Valor ótimo: método PSC e CPLEX.

Instâncias	PSC D FO	PSC DN FO	CPLEX FO	Diferença PSC D - CPLEX
<i>instancia1</i>	28,7716928708266	28,7716928709414	28,7716928710	-0,00000000017
<i>instancia2</i>	54,0050745342383	54,0050745368450	54,0050745340	0,00000000024
<i>instancia3</i>	28,8110207951430	28,8110207945380	28,8110207950	0,00000000014
<i>instancia4</i>	28,8709625955826	28,8709625949174	28,8709625950	0,00000000058
<i>instancia5</i>	43,2447183796737	43,2447183717086	43,2447183710	0,00000000867
<i>instancia6</i>	34,4931398522949	34,4931398529025	34,4931398520	0,00000000029
<i>instancia7</i>	44,3406190979741	44,3406190913715	44,3406190920	0,00000000597
<i>instancia8</i>	28,7015552399876	28,7015552400976	28,7015552400	-0,00000000001
<i>instancia9</i>	28,9746464209925	28,9746464212823	28,9746464210	-0,00000000001
<i>instancia10</i>	74,6405000000000	74,6405000000000	74,6405000000	0,00000000000
<i>instancia11</i>	89,7219000000000	89,7219000000000	89,7219000000	0,00000000000
<i>instancia12</i>	1,0098772139409	1,0098772140356	1,0098772135	0,00000000044
<i>instancia13</i>	47,9852114770449	47,9852114759809	47,9852114760	0,00000000104
<i>instancia14</i>	28,6183020000000	28,6183018803922	28,6183018820	0,00000011800
<i>instancia15</i>	54,5058924578800	54,5058924578800	54,5058924580	-0,00000000012
<i>instancia16</i>	53,3173599999999	53,3173600004885	53,3173600000	-0,00000000000
<i>instancia17</i>	30,7137387630700	30,7137387652676	30,7137387640	-0,00000000093
<i>instancia18</i>	51,0603999999999	51,0604000002278	51,0604000000	-0,00000000000
<i>instancia19</i>	37,8681990024928	38,3857919643269	37,8681990020	0,00000000049
<i>instancia20</i>	67,3759345909591	67,3759345940794	67,3759345940	-0,00000000304
<i>instancia21</i>	79,0180468466244	79,0180468543805	79,0180468510	-0,00000000438
<i>instancia22</i>	28,9777287875192	28,9777287877803	28,8754908160	0,10223797152
<i>instancia23</i>	50,5726347303832	50,5726347303832	50,5726347310	-0,00000000062
<i>instancia24</i>	28,4633944295910	28,4633944291449	28,4633944300	-0,00000000041

Fonte: O Autor (2022).

No geral, observa-se que a precisão da solução é de, aproximadamente, nove casas decimais comparando com o CPLEX. A única exceção, tanto usando a regra usual quanto usando a regra de Dantzig Normalizada é a *instancia22* que divergiu de um décimo ao se comparar com a solução do CPLEX.

Note que para a *instancia19*, há uma imprecisão numérica no resultado quando se utiliza a regra de Dantzig Normalizada. Assim, é necessário, como trabalho futuro, avaliar e fazer ajustes nas tolerâncias utilizadas para esta regra.

Portanto, com base nos valores dos problemas apresentados na Tabela 6.3 é notório que o método PSC tem um excelente desempenho em termos de precisão numérica. Ressalta-se que foram realizados extensivos testes computacionais para validar a

implementação do método PSC, e em todos eles foram encontrados os valores ótimos com mesma precisão apresentada nesta seção.

6.4 Problemas da Fábrica de Ração do IFES Desempenho PSC e CPLEX

Destaca-se novamente que por meio dos relatórios fornecidos pelo zootecnista responsável do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Espírito Santo (IFES) foram realizadas as formulações dos problemas da produção de rações de aves e suínos.

A fábrica de ração trabalha com os seguintes tipos de ração para aves: frango de corte macho crescimento I (*instAves1*), crescimento II (*instAves2*), crescimento III (*instAves3*), inicial (*instAves4*), Inicial I (*instAves5*), Poedeiras em postura (*instAves6*), pré inicial (*instAves7*), terminação (*instAves8*), pré inicial I (*instAves9*), terminação I (*instAves10*), codorna (*instAves11*), poedeiras em postura I (*instAves12*), poedeiras semipesadas (*instAves13*), poedeiras semipesadas I (*instAves14*), poedeiras semipesadas II (*instAves15*). Algumas estão com o mesmo nome, porém há diferença em determinado alimento ou quando se fixa o quantitativo de determinado alimento.

A Tabela 6.4 ilustra as 15 instâncias de aves utilizadas e suas dimensões.

Tabela 6.4: Dimensão e esparsidade - Ração para aves.

Instância	Linhas	Colunas	Não-Nulos	Esparsidade (%)
<i>instAves1</i>	22	9	61	69,19
<i>instAves2</i>	22	9	60	69,70
<i>instAves3</i>	22	9	60	69,70
<i>instAves4</i>	22	9	62	68,69
<i>instAves5</i>	22	9	62	68,69
<i>instAves6</i>	22	9	62	68,69
<i>instAves7</i>	22	9	62	68,69
<i>instAves8</i>	22	9	62	68,69
<i>instAves9</i>	22	6	53	59,85
<i>instAves10</i>	22	10	65	70,45
<i>instAves11</i>	19	11	63	71,36
<i>instAves12</i>	22	11	80	66,94
<i>instAves13</i>	23	11	88	65,22
<i>instAves14</i>	22	10	63	71,36
<i>instAves15</i>	34	11	63	83,16
MÉDIA	22,67	9,47	64,40	69,36

Fonte: O Autor (2022).

As instâncias apresentam de 22 a 34 restrições técnicas (restrições nutricionais, quantidade a ser utilizada e energia metabolizável), e 9 a 11 variáveis que estão associadas à quantidade a ser utilizada de cada alimento. Com relação à esparsidade, esta classificação representa o percentual de valores nulos na matriz do problema. Pode-se perceber que, aproximadamente, 60% a 70% dos componentes são valores nulos.

A Tabela 6.5 apresenta a quantidade de iterações do método PSC usando a regra de Dantzig usual e Dantzig Normalizada e a comparação com o CPLEX.

Tabela 6.5: Número de iterações - PSC e CPLEX - Aves.

Instância	PSC D		PSC DN		CPLEX
	fase I	fase II	fase I	fase II	
<i>instAves1</i>	43	4	45	3	5
<i>instAves2</i>	40	4	40	5	4
<i>instAves3</i>	40	4	41	3	5
<i>instAves4</i>	42	4	28	7	6
<i>instAves5</i>	44	5	41	5	4
<i>instAves6</i>	46	5	41	3	8
<i>instAves7</i>	34	4	35	7	1
<i>instAves8</i>	44	4	48	2	7
<i>instAves9</i>	44	3	43	2	6
<i>instAves10</i>	43	5	46	3	7
<i>instAves11</i>	18	4	19	7	9
<i>instAves12</i>	38	4	40	13	1
<i>instAves13</i>	46	5	47	7	4
<i>instAves14</i>	46	4	46	4	3
<i>instAves15</i>	65	5	66	3	6
MÉDIA	42,20	4,27	41,73	4,93	5,07

Fonte: O Autor (2022).

Observa-se que a média de iterações usando a regra de Dantzig usual (D) na fase I é de, aproximadamente, 42,20 iterações, seguida da fase II com 4,27. Já usando a regra de Dantzig Normalizada (DN) ocorreu uma pequena redução, uma média de 41,73 iterações na fase I e 4,93 na fase II, sendo esta última uma média um pouco superior que a regra usual na fase II. Em muitos casos DN foi inferior a D.

Para a instância *instAves4* na fase I, DN teve um ótimo desempenho comparado com D, mas pode-se perceber que para estes problemas a regra de Dantzig Normalizada não reduziu as iterações, como foi visto na seção 6.3. O CPLEX obteve uma média de 5 iterações. Para as duas regras implementadas, a fase I ficou na média na casa das unidades, na fase II ficou na casa das dezenas.

No geral, verifica-se que o desempenho do método PSC com regra D e o CPLEX foram semelhantes nos problemas da seção anterior.

A próxima Tabela exhibe os resultados obtidos com relação aos valores ótimos para o método PSC (D e DN) e CPLEX.

Tabela 6.6: Qualidade da solução PSC e CPLEX - Aves/IFES.

Instâncias	PSC		CPLEX FO	Diferença PSC D - CPLEX
	D FO	DN FO		
<i>instAves1</i>	317,938263624112	317,938263626184	317,938263610	0,00000001411
<i>instAves2</i>	312,737313637549	312,737313576780	312,737313510	0,00000012755
<i>instAves3</i>	238,200271280072	238,200271280072	238,200271370	-0,00000008993
<i>instAves4</i>	254,587177621759	254,587177602686	254,587177600	0,00000002176
<i>instAves5</i>	300,102859384186	300,102859235882	300,102859460	-0,00000007581
<i>instAves6</i>	226,920918645802	226,920916594807	226,920916580	0,00000206580
<i>instAves7</i>	255,155999999823	255,156000000001	255,156000000	-0,00000000018
<i>instAves8</i>	254,613130338601	254,613130280827	254,613130270	0,00000006860
<i>instAves9</i>	250,549454619190	250,549454639079	250,549454600	0,00000001919
<i>instAves10</i>	268,578678347934	268,578678328143	268,578678360	-0,00000001207
<i>instAves11</i>	252,897099737040	252,897100778399	252,897100990	-0,00000125296
<i>instAves12</i>	216,202000003176	216,202000001759	216,202000000	0,00000000318
<i>instAves13</i>	217,630286507885	217,630287263048	217,630286490	0,00000001788
<i>instAves14</i>	259,373527128053	259,373527014805	259,373527030	0,00000009805
<i>instAves15</i>	266,925810178974	266,925810290845	266,925810130	0,00000004897

Fonte: O Autor (2022).

Conforme pode ser visto, os resultados apresentam uma ótima precisão quando comparados com a solução do CPLEX. O valor ótimo se iguala com o *software* até a sétima casa decimal. Mais uma vez, os resultados demonstram a precisão numérica tratada na implementação do PSC. Assim, é necessário ter uma implementação robusta para atingir esta precisão.

Com relação à produção de ração suína, há no estudo de caso 9 tipos de rações. A fábrica trabalha com os seguintes tipos de ração para suínos: crescimento I (*instSuino1*), crescimento II (*instSuino2*), gestação (*instSuino3*), inicial I (*instSuino4*), inicial II (*instSuino5*), lactação (*instSuino6*), pré inicial (*instSuino7*), terminação (*instSuino8*), terminação II (*instSuino9*). Cada uma destas rações se destina a uma fase da vida do animal.

A Tabela 6.7 apresenta as características dos problemas.

Tabela 6.7: Dimensão e esparsidade - Ração suína.

Instância	Linhas	Colunas	Não-Nulos	Esparsidade (%)
<i>instSuino1</i>	20	12	64	73,33
<i>instSuino2</i>	21	11	65	71,86
<i>instSuino3</i>	20	11	79	64,09
<i>instSuino4</i>	21	15	84	73,33
<i>instSuino5</i>	20	10	54	73,00
<i>instSuino6</i>	22	15	90	72,56
<i>instSuino7</i>	22	17	87	76,67
<i>instSuino8</i>	20	12	64	73,33
<i>instSuino9</i>	20	13	65	75,00
MÉDIA	20,67	12,89	72,44	72,57

Fonte: O Autor (2022).

As instâncias possuem uma média de, aproximadamente, 21 linhas e 13 colunas. Além disso, a média de números não nulos é de 72,44, em seguida, a média de esparsidade é de 72,57%. A quantidade máxima de valores não nulos é de 90 para a *instSuino6*. Entretanto, a que tem maior esparsidade é a *instSuino7* com 76,67% dos elementos nulos.

A Tabela 6.8 apresenta o número de iterações do PSC usando a regra usual e regra de Dantzig Normalizada e CPLEX.

Tabela 6.8: Número de iterações - Método PSC e CPLEX - Suínos/IFES.

Instâncias	PSC D		PSC DN		CPLEX
	Fase I	Fase II	Fase I	Fase II	
<i>inst1Suínos</i>	34	4	34	3	3
<i>inst2Suínos</i>	37	4	38	5	3
<i>inst3Suínos</i>	37	4	36	5	4
<i>inst4Suínos</i>	38	8	41	6	5
<i>inst5Suínos</i>	24	5	23	4	3
<i>inst6Suínos</i>	36	5	36	5	3
<i>inst7Suínos</i>	40	4	40	5	6
<i>inst8Suínos</i>	37	5	36	6	4
<i>inst9Suínos</i>	37	7	37	8	4
MÉDIA	35,56	5,11	35,67	5,22	3,89

Fonte: O Autor (2022).

Verifica-se que a média de iterações usando a regra usual (D) é de 35,56 na fase I e 5,11 na fase II. Para a regra de Dantzig Normalizada (DN) a média de iterações é de 35,67 na fase I e 5,22 na fase II. Observa-se que usando ambas as regras as médias são bem similares para estes problemas. Durante a execução do método PSC, observou-se que nos casos onde há a fixação de alguns alimentos, reduzindo o espaço de busca, a regra usual leva vantagem no desempenho.

O comportamento da regra DN é similar ao problema da ração de aves (seção anterior), ou seja, não reduziu o número de iterações com relação à regra D. Note que o desempenho do CPLEX e PSC foram muito próximos também aos resultados obtidos com os problemas da ração para aves. Esta comparação é válida tanto usando a regra usual quanto a de Dantzig Normalizada.

A média total de iterações usando tanto a primeira regra quanto a segunda é de 41. Isto é, as regras tiveram comportamentos similares.

A Tabela 6.9 apresenta os valores ótimos para os problemas tratados tanto para o PSC (regra D e DN) quanto para o CPLEX.

Tabela 6.9: Qualidade da solução PSC e CPLEX - Suínos/IFES.

Instâncias	PSC D FO	PSC DN FO	CPLEX FO	Diferença PSC D - CPLEX
<i>instSuinos1</i>	254,604283816199	254,604283816199	254,60428378	0,000000036199
<i>instSuinos2</i>	244,478869885988	244,478869885988	244,47886981	0,000000075988
<i>instSuinos3</i>	222,937456386946	222,937456382652	222,93745644	-0,000000053054
<i>instSuinos4</i>	277,972291084490	277,972291027866	277,97229105	0,000000034490
<i>instSuinos5</i>	282,104672523379	282,104672515090	282,10467251	0,000000013379
<i>instSuinos6</i>	295,548511621892	295,548511569412	295,54851155	0,000000071892
<i>instSuinos7</i>	244,931766947135	244,931766909286	244,93176693	0,000000017135
<i>instSuinos8</i>	236,974388647334	236,974388647334	236,97438853	0,000000117334
<i>instSuinos9</i>	223,612240931667	224,131361436225	223,61224102	-0,000000088333

Fonte: O Autor (2022).

Neste sentido, o PSC encontra a solução com uma ótima precisão, pois os resultados se igualam ao do CPLEX até a sétima casa decimal. Perceba que nas instâncias *instSuinos3* e *instSuinos9* o método PSC encontrou um valor ótimo com uma precisão melhor que a do CPLEX. Isto pode ter ocorrido devido ao valor de tolerância usado na implementação do PSC, sendo que, para estes problemas foram obtidos valores com uma ótima precisão numérica. Conforme situação anterior tem-se também uma solução aproximada para a *instSuinos9*.

Na seção 6.5 é apresentada a análise de resultado com relação à contribuição dos alimentos na solução do problema.

6.5 Problemas da Fábrica de Ração do IFES - Análise de Resultados

Tomando-se como base a instância *instAves6* abordada no capítulo 5, apresenta-se mais detalhes com relação à solução do método PSC encontrada para o problema. A Tabela 6.10 apresenta a solução (quantidade de alimentos) em termos de custo de produção da ração *instAves6* da fábrica de ração do IFES.

Tabela 6.10: *InstAves6* - Contribuição dos ingredientes no custo de produção.

Ingrediente	Solução Encontrada (kg)	Custo Unitário (R\$)	Custo Nominal (R\$)	Total (%)
Milho	61,67	1,90	117,17	51,64
Soja Farelo	28,60	3,18	90,94	40,08
Calcário	8,40	1,10	9,24	4,07
Fosfato Bicálcico	1,03	8,90	9,19	4,05
Premix Poedeira	0,00	28,00	0,00	0,00
Sal Comum	0,30	1,25	0,38	0,17
Adsor. Micot.	0,00	18,99	0,00	0,00
L-Lisina HCL	0,00	36,80	0,00	0,00
DL-Metionina	0,00	41,20	0,00	0,00
Total	100,00	-	226,92	100,00

Fonte: O Autor (2022).

Os alimentos utilizados para a fabricação desta ração são: milho, soja farelo, fosfato bicálcico, calcário, sal comum, L-Lisina HCL, premix frango, DL-metionina, adsorvente de micotoxina. Os alimentos que mais contribuem no percentual do custo total são: o milho com 51,64%, a soja farelo com 40,08%, seguida do fosfato bicálcico com 4,05%, calcário com 4,07%, e por último, o sal comum com 0,17%.

No entanto, com relação à quantidade de ração produzida em porcentagem: milho 61,67%, soja farelo 28,60%, seguida do fosfato bicálcico com 1,03%, calcário com 8,40%, e por último, o sal comum com 0,30%. Conforme apresentado por Gonçalves [20], o milho e o farelo de soja são os principais alimentos usados na produção de ração, geralmente juntos são responsáveis por 70% a 90% da dieta.

Para esta mesma ração, a Tabela 6.11 apresenta o valor de cada exigência nutricional que foram atendidas.

Tabela 6.11: *InstAves6* - Exigências nutricionais.

Exigências	Unidade	Quant. Mínima	V.N. Encontrado	Quant. Máxima
ENERG. MET.Aves	<i>kcal/kg</i>	270,000	272,962	999999,999
ÁCIDO LINOLEICO	%	1,175	1,432	999999,999
ARGININA DIG.Aves	%	0,717	1,116	999999,999
CÁLCIO	%	3,500	3,507	999999,999
COLORO	%	0,194	0,230	999999,999
FENIL. DIG.Aves	%	0,466	0,833	999999,999
FENIL.+TIR.DIG.Aves	%	0,846	1,424	999999,999
FÓSFORO DISPONIVEL	%	0,291	0,291	999999,999
GLICINA + SERINA TOTAL	%	0,552	1,701	999999,999
HISTIDINA DIG.Aves	%	0,208	0,450	999999,999
ISOLEUCINA DIG.Aves	%	0,505	0,697	999999,999
LEUCINA DIG.Aves	%	0,875	1,467	999999,999
LISINA DIG.Aves	%	0,717	0,852	999999,999
MET.+CIST.DIG.Aves	%	0,502	0,502	999999,999
METIONINA DIG.Aves	%	0,241	0,250	999999,999
POTÁSSIO	%	0,563	0,702	999999,999
PROTEÍNA BRUTA	%	16,020	17,792	999999,999
SÓDIO	%	0,137	0,136	999999,999
TREONINA DIG.Aves	%	0,545	0,615	999999,999
TRIPTOFANO DIG.Aves	%	0,165	0,197	999999,999
VALINA DIG.Aves	%	0,681	0,767	999999,999

¹V.N. = Valor Nutricional.

Fonte: O Autor (2022).

Utilizou-se a quantidade mínima como sendo os valores apresentados na Tabela 6.11. Esta opção foi adotada, pois os valores são uma relaxação nos mínimos abordados na tabela do Rostagno. Além disso, estes mínimos foram estipulados com base nos relatórios técnicos disponibilizados pelo IFES e de acordo com a experiência do zootecnista através de suas orientações.

Trabalhou-se com 4 restrições com valores abaixo dos praticados na fábrica e em Rostagno. Por exemplo, na formulação do modelo matemático atribuiu 270,0000*kcal/kg* para a energia metabolizável, 3,5000% para o cálcio, 0,5050% para a isoleucina e 0,5020% para metionina +cistina. Estes ajustes foram realizados para se obter factibilidade nos problemas e alcançar valores próximos ao que é aplicado na fábrica e na literatura.

Já a energia metabolizável ficou um pouco acima do valor mínimo. Ademais, foram obtidas 4 restrições ativas mais a restrição técnica, isto é, o valor atingiu seu mínimo. As exigências ativas são: fósforo, metionina +cistina, sódio e quantidade a ser produzida (100kg).

Caso a restrição fique bem acima do valor mínimo, é necessária uma avaliação de um zootecnista. Por exemplo, encontrou-se 1,116% para a arginina, 0,833% para fenilalanina, 1,424% para fenilalanina +tir., 1,701% glicina +serina total, 0,450% para histidina, 1,467% para leucina, veja que, glicina +serina totalé quase o triplo da quantidade mínima, já as demais é quase o dobro. Neste caso, faz-se necessário uma avaliação deste profissional para verificar se a quantidade encontrada de exigências não prejudica a saúde do animal.

Segundo o profissional do IFES com relação a casos que precisam ser avaliados por um zootecnista, faz-se as seguintes observações: embora o óleo não seja usado nesta ração, o uso em excesso pode provocar um efeito laxante no animal, de forma análoga acontece com a soja. O sal comum acima do permitido pode sobrecarregar os rins e o fígado. Além disso, faz com que o animal reduza o consumo da ração. Por outro lado, uma quantidade menor de sal pode gerar canibalismo entre a espécie, necessitando aumentar a quantidade.

Na visita técnica foi informado que, em alguns casos, quando o alimento esta muito caro, é necessário reduzir a quantidade e/ou usar outro ingrediente que forneça os mesmos nutrientes conforme as exigências nutricionais.

Sendo assim, na prática é necessária uma análise por um zootecnista aprofundada dos resultados obtidos para cada ração. Por exemplo, o método encontra uma solução ótima, porém podem haver valores muito maiores que os limites inferiores e que neste caso podem ser alterados sem prejudicar a solução final. Também podem ocorrer casos em que o excesso de um ingrediente pode afetar a saúde do animal, conforme informado pelo profissional da fábrica durante a visita técnica.

No geral, foram utilizados um total de 34 alimentos (ingredientes) na formulação dos 15 tipos de rações para aves e 9 para suínos. Nestes ingredientes estão os alimentos, antibióticos, polivitamínicos e outros. De forma análoga ocorre para os nutrientes, ao todo foram utilizados um total de 25 tipos.

Para a análise da solução encontrada a seguir, foram selecionados os principais alimentos que contribuem na quantidade de ração a ser produzida nas 24 instâncias da produção de ração para aves e suínos. O intuito não é esgotar a quantidade de ingredientes a ser analisado, mas sim apresentar o quanto cada um contribui na produção da ração. Os resultados apresentados nas tabelas a seguir são referentes ao cenário 3 que é abordado com mais detalhes no decorrer do texto.

A Tabela 6.12 apresenta a média da solução encontrada pelo PSC para os principais alimentos utilizados nas 15 instâncias do problema da ração de aves.

Tabela 6.12: Média de ingredientes para produção de ração (*kg*) - Aves.

Inst.	Milho	Soja	Fosf.	Calc.	Sal	L-Lisi.	Prem.	DL-	Ads.
		Far.	Bic.		Com.	HCL	Frango	Met.	Mic.
<i>Aves1</i>	26,74	69,80	1,66	0,40	0,50	0,00	0,40	0,30	0,20
<i>Aves2</i>	25,79	71,32	0,68	0,80	0,50	0,00	0,40	0,30	0,20
<i>Aves3</i>	65,34	31,87	1,23	1,15	0,40	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>Aves4</i>	59,88	36,86	1,48	1,15	0,40	0,00	0,23	0,00	0,00
<i>Aves5</i>	19,26	78,02	1,12	0,90	0,50	0,00	0,00	0,00	0,20
<i>Aves6</i>	61,67	28,60	1,03	8,40	0,30	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>Aves7</i>	34,31	83,55	1,44	0,95	0,59	0,00	0,40	0,00	0,00
<i>Aves8</i>	49,48	47,74	0,73	1,64	0,40	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>Aves9</i>	54,66	40,00	1,74	3,20	0,40	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>Aves10</i>	41,10	56,79	0,73	0,67	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>Aves11</i>	56,41	33,00	1,17	8,50	0,40	0,16	0,00	0,35	0,00
<i>Aves12</i>	64,00	26,40	0,00	9,00	0,60	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>Aves13</i>	72,30	16,50	1,13	1,30	2,76	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>Aves14</i>	50,34	46,27	1,64	1,20	0,55	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>Aves15</i>	56,24	31,64	3,70	0,01	0,35	0,00	0,00	0,00	0,00
Total	737,53	698,36	19,47	39,27	9,16	0,16	1,43	0,95	0,60
Média	49,17	46,56	1,30	2,62	0,61	0,01	0,09	0,06	0,04

Fonte: O Autor (2022).

Nota-se que na Tabela 6.12, há uma inversão nos valores do milho e da soja (*Aves1*, *Aves2*, *Aves5* e *Aves7*) quando comparados com o que é aplicado na literatura. Por exemplo, na *Aves1* o milho com 26,74kg é quase três vezes menor que a quantidade de soja farelo (69,80kg). O mesmo ocorre para as instâncias *Aves2*, *Aves5* e *Aves7*. Na solução encontrada o milho varia de 19,26kg até 72,30kg, seguido da soja de 16,50kg até 83,55kg.

Observa-se que a modelagem das restrições nutricionais afeta a solução, para se chegar a valores praticáveis é necessário à realização de ajustes na quantidade mínima das restrições de forma a atender estas exigências nutricionais. Estes ajustes são discutidos mais adiante no texto.

Para as rações de aves tem-se uma médias de 49,17% de milho e de 46,56% de soja farelo. De acordo com a fase do animal, o milho pode variar de 54kg a 74kg, já a soja pode variar de 16kg a 37kg, conforme análise feita no relatório fornecido pelo instituto.

Conforme a literatura, o milho e a soja farelo são os alimentos mais utilizados na produção de ração pois possuem os principais componentes. Geralmente o milho, dependendo do tipo de ração, pode ser utilizado na faixa de 50kg a 70kg a cada 100kg a depender da fase do animal. Já a soja farelo é utilizada na faixa de 20kg a 35kg (cada 100kg), conforme pode ser visto no trabalho de Cruz e Rufino [11].

No entanto, o premix frango é utilizado em apenas 4 rações, são elas: *Aves1*, *Aves2*, *Aves4* e *Aves7*. Este suplemento fornece diversos nutrientes e vitaminas essenciais para o desenvolvimento do animal. O mesmo ocorre com o adsorvente de micotoxina responsável por eliminar toxinas presentes nos alimentos está em apenas 3 rações (*Aves1*, *Aves2*, *Aves5*). Dependendo da ração a quantidade do ingrediente pode ter ser fixada ou não na formulação do modelo, como ocorre no caso do premix presente em 4 instâncias. Entretanto esta fixação não é feita de forma padronizada.

Há casos em que para se obter um valor praticável conforme a literatura para o milho e a soja, é necessário a inserção de mais alimentos. Outra forma é fixando a quantidade de alimento ou reduzindo o espaço de busca ajustando a quantidade mínima ou máxima das exigências nutricionais. Mais adiante é abordada esta situação (cenários) variando estes valores.

Agora a Tabela 6.13 apresenta a média dos principais alimentos encontrados para a produção de cada ração.

Tabela 6.13: Média de ingredientes para produção de ração (*kg*) - Suínos.

Inst.	Milho	Soja	Fosf.	Calc.	Sal	L-Lisi.	Premix	DL-	Ads.
		Far.	Bic.		Com.	HCL	Suíno	Met.	Mic.
<i>Suínos1</i>	51,38	46,00	0,99	1,18	0,45	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>Suínos2</i>	59,50	38,55	0,85	0,70	0,40	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>Suínos3</i>	56,96	16,88	0,96	0,80	0,40	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>Suínos4</i>	43,76	52,83	1,66	0,80	0,00	0,00	0,70	0,25	0,00
<i>Suínos5</i>	37,94	59,30	1,10	1,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>Suínos6</i>	26,30	60,37	1,46	0,90	0,70	0,00	0,00	0,03	0,00
<i>Suínos7</i>	3,42	19,29	2,66	0,40	0,50	0,00	0,00	0,00	0,50
<i>Suínos8</i>	71,35	26,67	0,73	0,55	0,40	0,00	0,00	0,05	0,15
<i>Suínos9</i>	86,64	11,29	0,58	0,50	0,35	0,17	0,30	0,00	0,10
Total	437,25	331,18	11,00	6,83	3,70	0,17	1,00	0,33	0,75
Média	48,58	36,80	1,22	0,76	0,41	0,02	0,11	0,04	0,08

Fonte: O Autor (2022).

Conforme Tabela 6.13 a média foi de, aproximadamente, de 48,58% para milho e 36,80% de soja farelo. De acordo com a fase do animal, na prática o milho pode variar de 54*kg* a 74*kg*, já a soja pode variar de 16*kg* a 37*kg* [11]. Na solução encontrada no relatório do intituto, o milho varia de 54*kg* até 85*kg*, seguido da soja de 12*kg* até 36*kg*. Com exceção da ração *Suínos7* (3,42*kg* de milho e 19,58*kg* de soja farelo), o milho pode variar de 26,30*kg* a 86,64*kg* e a soja variando de 11,29*kg* a 60,37*kg*.

Observe que *Suínos7* esta com um valor muito baixo para a quantidade de milho. No caso, esta ração é para leitões em fase pré-inicial onde é utilizado como alimento o leite em pó integral varredura, isto é, sobra do leite em pó das indústrias de laticínios que é comercializado para alimentação animal. Este ingrediente é responsável por 73*kg* desta ração conforme solução encontrada pelo PSC.

O milho dependendo do tipo de ração pode ser utilizado de 50*kg* a 82*kg* a depender da fase do animal. Já a soja farelo é utilizada de 11*kg* a 71*kg*, conforme pode ser visto nos exemplos de tipos de rações apresentados por Cruz e Rufino [11].

A Tabela 6.14 apresenta a contribuição (em percentual) de cada ingrediente no custo das rações para aves.

Tabela 6.14: Percentual dos ingredientes no custo da ração - Aves.

Alim.	Mil.	Soja Far.	Fosf. Bic.	Calc.	Sal	L-Lis.	Prem. Fran.	DL- Met.	Ads. Mic.	FO %
Aves1	15,98	69,81	4,63	0,14	0,20	0,00	4,15	3,89	1,19	100
Aves2	15,67	72,53	1,93	0,28	0,20	0,00	4,22	3,95	1,21	100
Aves3	52,13	42,55	4,58	0,53	0,21	0,00	0,00	0,00	0,00	100
Aves4	44,69	46,04	5,18	0,50	0,20	0,00	3,40	0,00	0,00	100
Aves5	12,19	82,67	3,33	0,33	0,21	0,00	0,00	0,00	1,27	100
Aves6	51,64	40,08	4,05	4,07	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00	100
Aves7	44,68	47,17	0,00	0,41	0,29	0,00	5,96	0,00	1,49	100
Aves8	36,92	59,63	2,54	0,71	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	100
Aves9	41,45	50,77	6,18	1,41	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	100
Aves10	29,08	67,24	2,42	0,27	0,23	0,00	0,00	0,00	0,00	99
Aves11	42,38	41,50	4,12	3,70	0,20	2,36	0,00	5,75	0,00	100
Aves12	56,24	38,83	0,00	4,58	0,35	0,00	0,00	0,00	0,00	100
Aves13	63,12	24,11	4,65	0,66	1,59	0,00	0,00	0,00	0,00	94
Aves14	36,88	56,73	5,62	0,51	0,27	0,00	0,00	0,00	0,00	100
Aves15	40,03	37,69	12,35	0,01	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00	90
Média	38,87	51,82	4,11	1,21	0,31	0,16	1,18	0,91	0,34	98,91

Fonte: O Autor (2022).

Conforme a Tabela 6.14, o milho e a soja juntos apresentam um percentual de, aproximadamente, 38,87% para o milho e 51,82% na média do custo da ração. Ambos correspondem a 90,70% do custo total da produção. No geral, a quantidade de milho é superior a da soja, neste caso ocorreu o inverso. As instâncias que estão próximas dos valores aplicados na literatura são: *Aves12*, *Aves13*, as demais precisam ser ajustadas com relação às exigências nutricionais.

A coluna FO da Tabela 6.14 representa o percentual de contribuição dos alimentos no custo nominal da produção da ração. Os valores abaixo de 100% indicam que há mais alimentos que são usados para compor esta ração. Já o percentual da FO que estão com 100% indica que todos os alimentos que estão na Tabela 6.14 foram usados na produção desta ração.

O alimento com o maior custo corresponde ao DL-metionina com R\$ 41,20. Já o de menor custo corresponde ao calcário com R\$ 1,10. Os ingredientes mais caros são usados em um percentual menor. O método PSC para minimizar os custos atribui o maior quantitativo para os alimentos de menor valor, respeitando as exigências nutricionais.

No entanto, não consta na tabela mas o ingrediente mais custoso na produção de ração é o ciprofloxacina com um custo de R\$ 180,00, preço praticado em 2022 informado pelo zootecnista do IFES.

De maneira análoga, a Tabela 6.15 apresenta o percentual de contribuição de cada ingrediente no custo da ração para suínos.

Tabela 6.15: Percentual dos ingredientes no custo da ração - Suínos.

Alim.	Mil.	Soja Far.	Fos. Bic.	Calc.	Sal	Ads. Mic.	L- Tre.	DL- Met.	Sulf. Cobre	FO %
<i>Suinos1</i>	38,34	57,45	3,48	0,51	0,22	0,00	0,00	0,00	0,00	100,00
<i>Suinos2</i>	46,24	50,14	3,10	0,31	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	100,00
<i>Suinos3</i>	48,54	24,08	3,83	0,39	0,22	0,00	0,00	0,00	0,00	77,07
<i>Suinos4</i>	29,91	60,43	5,32	0,32	0,31	0,00	0,00	3,71	0,00	100,00
<i>Suinos5</i>	25,55	66,85	3,46	0,39	0,22	0,00	0,00	0,00	1,47	97,94
<i>Suinos6</i>	16,91	64,96	4,40	0,33	0,30	0,00	0,68	0,35	0,70	88,63
<i>Suinos7</i>	2,64	24,93	9,62	0,18	0,25	3,86	0,00	0,03	0,42	41,94
<i>Suinos8</i>	57,21	35,79	2,75	0,26	0,21	1,20	0,84	0,87	0,88	100,00
<i>Suinos9</i>	73,62	16,06	2,33	0,25	0,20	0,85	0,00	0,00	0,93	94,23
Média	37,66	44,52	4,25	0,33	0,24	0,66	0,17	0,55	0,49	88,87

Fonte: O Autor (2022).

O milho e a soja são os alimentos que possuem maior percentual no custo da produção de ração para aves e suínos. Conforme Tabela 6.15 a média percentual do milho é de 37,66% e da soja 44,52%, juntos são responsáveis por, aproximadamente, 82% do custo de produção da ração para suínos.

As instâncias *Suinos3*, *Suinos8* e *Suinos9* apresentam custos próximos dos praticados na fábrica do IFES. Entretanto, a instância *Suinos7* apresenta um valor bem abaixo de milho, porém, 46,28% do custo desta ração é referente ao leite em pó varredura usado na fabricação da ração.

O alimento com o maior custo corresponde ao sulfato de cobre com R\$ 41,60. Já o de menor custo corresponde ao calcário com R\$ 1,10. Os alimentos mais caros são utilizados em pequenas quantidades ou não são usados dependendo da fase de vida do animal.

Para realizar uma análise mais criteriosa da solução encontrada pelo PSC foram executados diversos testes. Além disso, com o intuito de alcançar valores próximos aos praticados na literatura e na fábrica do IFES, ajustes foram feitos buscando melhorar a solução encontrada.

Inicialmente utilizou-se a quantidade mínima conforme apresentado por Rostagno [35], em alguns casos ocorreram infeasibilidades nas instâncias. Posteriormente usou-se os valores conforme praticado na fábrica do IFES, que também ocorreram infeasibilidades em alguns casos. Então optou-se por inserir um pequeno ajuste na segunda ou terceira casa decimal das exigências praticadas por Rostagno e pela fábrica, com isso obteve-se factibilidade para os modelos matemáticos do problema da produção de ração. A partir deste testes, criou-se diferentes cenários para analisar o comportamento da solução encontrada usando o PSC. As infeasibilidades são apresentadas no decorrer do texto.

Foram feitos quatro cenários envolvendo as rações de aves (15 instâncias) e de suínos (9 instâncias). No primeiro, usou-se a formulação baseada nos valores da tabela de exigências nutricionais de Rostagno [35] e sem fixar a quantidade dos alimentos. No segundo caso, foi feito uma pequena modificação nos valores das exigências nutricionais porém, sem fixar os alimentos. Já no terceiro cenário, folga-se as exigências e fixa-se alguns alimentos. Por último, o cenário4 seguiu as exigências de Rostagno, fixando alguns alimentos conforme orientação do zootecnista. A fixação dos alimentos ocorre de forma não padronizada, por exemplo, fixa-se o sal em $0,4kg$ e o premix com $0,5kg$ para a ração que é composta por estes ingredientes.

A Tabela 6.16 apresenta os valores para as exigências nutricionais usadas nos testes a seguir para Rostagno, valor usado na fábrica e ajustes realizado pelo autor.

Tabela 6.16: Exigências utilizadas nos cenários para a *instAves6* - Aves.

Exigência	Rostagno	Mínimo	
		Fábrica	Ajuste (autor)
ENERG. MET.Aves	285,000	273,690	270,000
ÁCIDO LINOLEICO	1,175	1,432	1,175
ARGININA DIG.Aves	0,717	0,836	0,717
CÁLCIO	3,900	3,522	3,500
COLORO	0,194	0,229	0,194
FENIL. DIG.Aves	0,466	0,806	0,466
FENIL.+TIR.DIG.Aves	0,846	1,377	0,846
FÓSFORO DISPONIVEL	0,291	0,410	0,291
GLICINA + SERINA TOTAL	0,552	1,610	0,552
HISTIDINA DIG.Aves	0,208	0,447	0,208
ISOLEUCINA DIG.Aves	0,545	0,507	0,505
LEUCINA DIG.Aves	0,875	1,449	0,875
LISINA DIG.Aves	0,717	0,678	0,717
MET.+CIST.DIG.Aves	0,652	0,502	0,502
METIONINA DIG.Aves	0,359	0,241	0,241
POTÁSSIO	0,563	0,665	0,563
PROTEÍNA BRUTA	16,020	16,878	16,020
SÓDIO	0,218	0,218	0,137
TREONINA DIG.Aves	0,545	0,545	0,545
TRIPTOFANO DIG.Aves	0,165	0,165	0,165
VALINA DIG.Aves	0,681	0,681	0,681

Fonte: O Autor (2022).

Observe que a coluna ajuste foi utilizada pelo autor tendo como base as colunas de Rostagno e fábrica, isto é, como critério em alguns casos ajustou os valores na segunda ou terceira casa decimal, com exceção da energia metabolizável que optou-se por trabalhar com um valor um pouco abaixo do que é aplicado em Rostagno e na fábrica. Ao passo que na restrição de sódio o ajuste foi realizado por tentativa, isto é, usando o valor do Rostagno e o da fábrica obteve-se soluções infactíveis. Foi feita reduções de 0,1% no sódio até alcançar um resultado factível, isto é, a factibilidade ocorreu no sódio com 0,137% de mínimo de exigência nutricional.

Percebe-se que para a *instAves6* a maior parte dos valores da coluna ajuste são referentes a coluna de Rostagno. No entanto, ocorre valores mais baixos na tabela ajuste, como é o caso da energia metabolizável (270,00kcal/kg), cálcio (3,500%), isoleucina (0,505%) e o sódio (0,137%). Por último, metionina +cistina (0,502%), metionina digestiva (0,241), treonina (0,545%), triptofano (0,165%) e valina (0,681%) que são os mesmos valores aplicados na fábrica do IFES.

A Tabela 6.17 apresenta os custos de produção para os 4 cenários considerados envolvendo as rações para aves.

Tabela 6.17: Custos de produção - Aves.

Instância	Rostagno Cenário1	Folga Rostagno Cenário2	Folga + Fixa Cenário3	Rostagno +Fixa Cenário4
<i>instAves1</i>	282,55	282,55	317,94	317,94
<i>instAves2</i>	282,86	282,86	312,74	312,74
<i>instAves3</i>	285,00	228,92	238,20	298,12 *
<i>instAves4</i>	305,13	247,39	254,59	304,84 *
<i>instAves5</i>	296,49	296,49	300,10	300,45
<i>instAves6</i>	254,36 *	221,18	226,92	265,72 *
<i>instAves7</i>	112,12	112,13	255,16	112,12
<i>instAves8</i>	262,05	232,43	254,61	262,05
<i>instAves9</i>	300,71 *	250,55	250,55	300,71 *
<i>instAves10</i>	262,05	268,58	268,58	262,05
<i>instAves11</i>	224,99	224,99	252,90	252,90 *
<i>instAves12</i>	111,54	111,54	216,20	216,20
<i>instAves13</i>	208,46	208,46	217,63	217,63
<i>instAves14</i>	257,59	258,81	259,37	259,87 *
<i>instAves15</i>	232,68	257,91	266,93	242,14

Fonte: O Autor, 2022 (*Infactível).

O melhor cenário observado na Tabela 6.17 é o segundo pois obteve as rações mais baratas, seguido do cenário1 que apresenta valores próximos porém, um pouco mais caros. O cenário3 utiliza valores próximos ao aplicado na fábrica pois a quantidade de alimentos usada na produção se aproxima dos praticados na fábrica do IFES. Por último, a ração mais cara é apresentada no cenário4.

Ademas, pode-se observa que no cenário1 ocorreram duas inactibilidades usando as exigências de Rostagno e sem fixar os alimentos. Já o cenário4 começa a complicar, pois é obtido 6 inactibilidades usando rostagno e fixando alguns alimentos, isto ocorre pois uma ou mais exigências não foram atendidas neste cenário. Já para cenário2 e cenário3 são obtidos valore factíveis para a produção da ração, nestes casos, os dois utilizam ajustes (folga) para atingir a factibilidade sendo o primeiro sem fixar alimentos e o segundo fixando.

Nota-se que, no primeiro cenário seguindo a quantidade mínima de acordo com Rostagno ocorrem dois valores inactíveis, isto é, uma ou mais restrições não foram atendidas para estas instâncias. O mesmo ocorre no cenário4, há um aumento no número de factibilidade (6 ocorrências).

Entretanto nos casos onde há uma folga nas exigências de Rostagno (cenário2 e cenário3), para os problemas, não ocorreram inactibilidades. Percebe-se que nestes casos, quando ocorre a fixação dos valores dos alimentos, acarreta em uma ração mais onerosa.

A Tabela 6.18 apresenta a qualidade do valor ótimo nos testes realizados.

Tabela 6.18: Qualidade da solução nos testes realizados - Suínos.

Instância	Rostagno Cenário1	Folga Rostagno Cenário2	Folga + Fixa Cenário3	Rostagno +Fixa Cenário4
<i>instSuinos1</i>	245,62	245,62	254,60	254,60
<i>instSuinos2</i>	234,08	234,08	244,48	244,48
<i>instSuinos3</i>	197,10	197,44	222,94	222,14
<i>instSuinos4</i>	301,16	260,28	277,97	313,77
<i>instSuinos5</i>	255,23	265,59	282,10	272,95
<i>instSuinos6</i>	261,08	260,49	295,55	295,09
<i>instSuinos7</i>	203,48	203,48	246,08	246,08
<i>instSuinos8</i>	215,68	215,68	236,97	236,97
<i>instSuinos9</i>	192,28	192,28	223,61	223,61

Fonte: O Autor (2022).

De forma análoga foram feitos os testes na ração para suínos. Estas instâncias utilizam um número maior de ingredientes quando comparados com a ração para aves.

Nos testes realizados para as rações suínas em todas as instâncias foram obitidas soluções factíveis. Pode-se observar que os valores ficaram muito próximos, por exemplo, (cenário1 com cenário2) e (cenário3 com cenário4). No primeiro caso onde não são fixados os valores dos alimentos, tem-se uma ração mais barata. Já para a segunda comparação, tem-se uma ração mais cara por conta desta fixação.

Verifica-se que os cenário3 e cenário4 possuem valores próximos do que é aplicado em problemas reais pois possuem quantidades de milho e soja próximos do que é utilizado na literatura e na fábrica do IFES. Já no caso dos cenário1 e cenário2, há uma quantidade de alimentos que não é praticado em problemas reais, pois, apresenta uma quantidade de um determinado alimento muito superior que pode comprometer a saúde do animal, porém, de acordo com a modelagem do problema encontra uma solução ótima. Mais adiante são apresentados exemplos referentes a estes casos no decorrer do texto.

A Tabela 6.19 apresenta a média dos alimentos usados nos testes para cada instância de aves.

Tabela 6.19: Média da quantidade de ingredientes - Aves.

Ração Aves	Média			
	Cenário1	Cenário2	Cenário3	Cenário4
Milho	19,87	31,87	50,88	32,23
Soja Farelo	52,62	40,64	43,51	52,89
Fosfato Bicálcico	0,92	1,18	1,20	1,07
Calcário	25,23	25,31	2,13	12,13
Premix Frango	0,02	0,02	0,10	0,07
Sal Comum	0,34	0,32	0,61	0,58
Adsor. Micotox	0,00	0,00	0,06	0,04
L-Lisina HCL	0,00	0,00	0,01	0,01
DL-Metionina	0,03	0,04	0,05	0,07

Fonte: O Autor (2022).

Cabe destacar que a média no cenário1 são valores diferentes dos praticados em problemas reais. Por exemplo, no cenário1 e cenário2 a quantidade de calcário é muito superior ao que é aplicado na fábrica do IFES que chega no máximo a 9,6kg na *instAves12*. O mesmo ocorre com o milho com uma quantidade inferior e a soja farelo com quantidade bem superior ao que apresentado na fábrica. Já o cenário3 está mais próximo das soluções propostas de acordo com a literatura. Entretanto, no cenário4 apesar do milho e soja juntos terem uma média de, aproximadamente, 90%, verifica-se que há uma quantidade excessiva de calcário, sendo estes valores superiores ao que é praticado no IFES.

De forma análoga, a Tabela 6.20 apresenta a média dos alimentos usados nos testes para ração de suínos.

Tabela 6.20: Média da quantidade de ingredientes - Suínos.

Ração Suínos	Média			
	Cenário1	Cenário2	Cenário3	Cenário4
Milho	0,00	0,00	48,58	46,41
Soja Farelo	49,04	47,69	36,80	39,00
Fosfato bicálcico	0,90	0,92	1,22	1,19
Calcario	30,37	32,42	0,76	0,76
Sal Comum	0,43	0,43	0,49	0,49
Premix Sui	0,00	0,00	0,03	0,03
L-Lisina HCL	0,00	0,00	0,02	0,03
Adsor, Micotox	0,00	0,00	0,09	0,04
DL-Metionina	0,00	0,00	0,04	0,08

Fonte: O Autor (2022).

Os cenário1 e cenário2 são impraticáveis em casos reais, porém, os demais cenários (cenário3 e cenário4) apresentam valores próximos aos praticados na literatura e na prática. Veja que nos primeiro cenários o milho não é utilizado, sendo este o principal ingrediente presente na ração. Já a soja é utiliza um valor bem acima. Outro fato que chama a atenção é com relação à quantidade de calcário (30,37 e 32,42) sendo estes valores muito superiores ao utilizado no IFES na ração de suínos que usa no máximo $1kg$ na instância *instSuino5*.

Com relação às exigências nutricionais nos quatro cenários, escolheu-se duas instâncias para serem analisadas para verificar se estão sendo atendidas e se a quantidade esta muito superior ou inferior à quantidade mínima. A primeira é a *instAves12* correspondente a ração de aves e a *instSuinos3* referente a suínos.

A Tabela 6.21 apresenta as exigências nutricionais encontradas nos testes da *instAves12* de ração para aves.

Tabela 6.21: Exigências nutricionais *instAves12* nos testes - Aves.

Exigências	Cenário1	Cenário2	Cenário3	Cenário4	Mín.
ENERG.MET.Aves	285,00	287,00	275,89	275,89	275,00
ÁCIDO LINOLEICO	1,41	1,42	145,74	145,74	1,17
ARGININA DIG.Aves	1,81	1,80	105,45	105,45	0,71
CÁLCIO	3731,57	3731,38	347,56	347,56	3,90
COLORO	0,35	0,35	40,92	40,92	0,19
FENIL. DIG.Aves	1,30	1,29	79,31	79,31	0,47
FENIL.+TIR.DIG.Aves	2,22	2,21	135,59	135,59	0,84
FÓSFORO DISPONIVEL	0,29	0,29	9,65	9,65	0,29
GLICINA +SERINA TOT.	2,65	2,65	161,90	161,90	0,55
HISTIDINA DIG. Aves	0,68	0,68	43,01	43,01	0,20
ISOLEUCINA DIG.Aves	1,11	1,11	66,05	66,05	0,43
LEUCINA DIG.Aves	2,10	2,10	141,82	141,82	0,87
LISINA DIG.Aves	1,42	1,42	80,01	80,01	0,71
MET.+CIST.DIG.Aves	0,73	0,73	48,39	48,39	0,65
METIONINA DIG.Aves	0,36	0,36	24,12	24,12	0,36
POTÁSSIO	1,09	1,09	66,87	66,87	0,56
PROTEÍNA BRUTA	27,30	27,27	1698,13	1698,13	16,02
SÓDIO	0,22	0,22	25,63	25,63	0,22
TREONINA DIG. Aves	0,95	0,94	58,73	58,73	0,54
TRIPTOFANO DIG. Aves	0,32	0,32	18,51	18,51	0,16
VALINA DIG. Aves	1,18	1,18	73,13	73,13	0,68

Fonte: O Autor (2022).

Percebe-se que a energia metabolizável nos cenário1 e cenário2 atinge valores acima do mínimo. Porém, nos cenário3 e cenário4 este valor se aproxima do valor mínimo. Além disso, para este último cenário, o percentual das restrições estão bem acima do mínimo (valor estipulado por Rostagno).

Nos cenário1 são alcançadas quatro restrições ativas (energia metabolizável, fósforo, metionina e sódio). Já no cenário2 encontrou-se três restrições ativas (fósforo, metionina e sódio). Percebe-se que o calcário ficou com valores muito altos, sendo estes impraticáveis na produção da ração.

Isto implica que é necessário uma avaliação de um profissional em zootecnia para analisar os valores estipulados na exigência nutricional dos alimentos. Neste caso, também é necessário rever o modelo para verificar eventual erro na escala utilizada para as restrições nutricionais.

A Tabela 6.22 apresenta as exigências nutricionais encontradas nos testes da *instSuinos3* de ração para suínos.

Tabela 6.22: Exigências nutricionais *instSuinos3* - Suínos.

Exigências	Cenário1	Cenário2	Cenário3	Cenário4	Mín.
ENERG. MET.Suínos	300,00	300,00	300,85	301,29	300,00
ARGININA DIG.Suínos	0,89	0,97	0,95	0,88	0,95
CÁLCIO	2,55	3,21	0,71	0,71	0,71
COLORO	3,92	5,00	0,53	0,53	0,29
FENIL. DIG.Suínos	0,65	0,71	0,66	0,62	0,66
FENIL.+TIR.DIG.Suínos	1,10	1,21	1,11	1,04	0,63
FÓSFORO DISPONIVEL	3,28	0,40	9,87	9,87	0,40
HISTIDINA DIG. Suínos	0,37	0,39	0,39	0,37	0,39
ISOLEUCINA DIG.Suínos	0,53	0,59	0,54	0,50	0,54
LEUCINA DIG.Suínos	1,22	1,31	1,20	1,15	0,63
LISINA DIG.Suínos	0,63	0,70	0,64	0,63	0,63
MET.+CIST.DIG.Suínos	0,44	0,46	0,47	0,45	0,34
METIONINA DIG.Suínos	0,21	0,22	0,22	0,21	0,17
POTÁSSIO	0,61	0,62	0,72	0,68	0,33
PROTEÍNA BRUTA	14,95	15,83	15,87	15,03	15,83
SÓDIO	0,16	0,16	0,17	0,17	0,16
TREONINA DIG.Suínos	0,49	0,53	0,49	0,46	0,46
TRIPTOFANO DIG.Suínos	0,15	0,16	0,16	0,15	0,12
VALINA DIG.Suínos	0,45	0,46	0,49	0,47	0,45

Fonte: O Autor (2022).

Verificando as exigências da *instSuino3*, os valores não ficaram muito acima, conforme visto no caso anterior. Percebe-se que os valores das exigências nutricionais estão bem próximos, exceto o cálcio e o cloro no cenário1 e cenário2, seguido do fósforo no cenário1 que esta bem acima do mínimo (Ajuste). Pode-se observar que a arginina, fenilalanina, histidina e proteína bruta estão com valores bem abaixo do mínimo, pois, seguem os valores apresentados por Rostagno.

Como restrições ativas o cenário1 possui 4 (energia metabolizável, lisina, sódio e valina), o cenário2 com 5 (energia metabolizável, fósforo, histidina, proteína bruta, sódio), o cenário3 com 5 (arginina, cálcio, fenilalanina, histidina e isoleucina). Por último, o cenário4 que possui 3 exigências ativas (cálcio, lisina, treonina).

Agora, a Tabela 6.23 apresenta a quantidade e o percentual de exigências ativas de aves para o cenário3.

Tabela 6.23: Percentual de exigências ativas - Aves.

Instância	Restrições	Ativas	Percentual
<i>instAves1</i>	22	3	13,64
<i>instAves2</i>	22	3	13,64
<i>instAves3</i>	22	4	18,18
<i>instAves4</i>	22	5	22,73
<i>instAves5</i>	22	5	22,73
<i>instAves6</i>	22	4	18,18
<i>instAves7</i>	22	1	4,55
<i>instAves8</i>	22	5	22,73
<i>instAves9</i>	22	6	27,27
<i>instAves10</i>	22	6	27,27
<i>instAves11</i>	19	5	26,32
<i>instAves12</i>	22	1	4,55
<i>instAves13</i>	23	3	13,04
<i>instAves14</i>	22	3	13,64
<i>instAves15</i>	34	5	14,71
Média	22,67	3,93	17,54

Fonte: O Autor (2022).

As instâncias de aves tem uma média de 22,67 restrições nutricionais. Além disso, possuem uma média de 3,93 restrições ativas. Todas tem ao menos 1 exigência ativa e no máximo 6, sendo o percentual desta última de 27,27%. A média do percentual de restrições ativas é de 17,54%.

As instâncias *instAves9* e *instAves10* são as rações que possuem o maior índice de restrições ativas, uma média de 27,27% cada. Em seguida outras 5 possuem o percentual de 14,71%, que é o caso das instâncias: *instAves4*, *instAves5*, *instAves8*, *instAves11* e *instAves15* respectivamente.

Isto implica que ocorreram poucas exigências ativas. Conseqüentemente, acarreta em muitas exigências nutricionais sendo atendidas com folga, necessitando de um olhar mais atento do zootecnista com relação a este excesso.

A Tabela 6.24 apresenta a quantidade e o percentual de exigências ativas de suínos no cenário3.

Tabela 6.24: Percentual de exigências ativas - Suínos.

Instância	Restrições	Ativas	Percentual
<i>instSuinos1</i>	20	3	15,00
<i>instSuinos2</i>	21	4	19,05
<i>instSuinos3</i>	21	5	23,81
<i>instSuinos4</i>	21	3	14,29
<i>instSuinos5</i>	21	3	14,29
<i>instSuinos6</i>	22	3	13,64
<i>instSuinos7</i>	22	4	18,18
<i>instSuinos8</i>	21	3	14,29
<i>instSuinos9</i>	21	5	23,81
Média	21,11	3,66	17,37

Fonte: O Autor (2022).

De forma análoga, observa-se uma média de 21,11% com relação às exigências nutricionais da ração para suínos. Dentre elas, em média 3,66% são ativas, isto é, seu valor é igual ao mínimo conforme tabela do Rostagno [35]. Já a média percentual de restrições ativas são de 17,37%.

A *instSuino9* e *instSuino3* são as instâncias com o maior percentual de restrições ativas com cerca de 23,81% cada. A maioria das rações possuem ao menos 3 restrições ativas em suas exigências.

Com base nas informações apresentadas, o PSC encontrou soluções com custos bem mais baratos dos que são aplicados na fábrica. Além disso, foram apresentados diversos cenários que devem ser analisados por um zootecnista para validar a implementação da solução. Cabe destacar que nas soluções apresentadas o valor do milho e da soja apresentam valores invertidos, isto é, em alguns casos diferentes do que é abordado na literatura. É necessário um investigação mais detalhada com relação às exigências nutricionais de forma a obter solução conforme aplicadas na prática.

No próximo capítulo são apresentadas as conclusões da pesquisa realizada.

Capítulo 7

Conclusões e Trabalhos Futuros

Este capítulo destina-se a apresentar a conclusão da pesquisa realizada e propor eventuais trabalhos futuros com o intuito de aprofundar sobre a produção de ração suína e de aves e a implementação do método tipo Simplex.

7.1 Conclusões

A utilização de recursos computacionais na agricultura e pecuária facilita muito a vida de diversos profissionais em diversas áreas, por exemplo: nutrição, veterinária, zootecnia e o setor de fabricação de ração. Através da modelagem do problema e de *softwares* é possível encontrar soluções para a tomada de decisão de forma a minimizar os custos com a criação e manejo dos animais.

O presente trabalho teve por objetivo estudar e implementar o método Primal Simplex Canalizado (PSC) como ferramenta para solucionar problemas reais com relação à produção de rações para aves e suínos da fábrica do IFES/Alegre. Foram realizados estudos destes problemas e a formulação de instâncias de produção de rações do estudo de caso. E para o Primal Simplex Canalizado foram implementadas as fase I, fase II e regra de Dantzig Normalizada.

No decorrer da pesquisa foram feitos diversos testes exaustivos buscando aprimorar a implementação. Para todos os testes obteve-se resultados com uma ótima precisão numérica.

Nos testes realizados, o método encontrou soluções que podem ser validadas usando o CPLEX. Os resultados do PSC, na maioria dos casos, com relação à precisão da solução, se iguala até a nona casa decimal com o *software* comercial.

Além do mais, foi desenvolvido uma interface em estágio inicial para auxiliar na tomada de decisão. O *software* possui telas de cadastros e de gerenciamento das informações fornecidas. A solução gerada pelo PSC é armazenada em banco de dados e utilizada nesta interface. Os resultados podem ser fornecidos por meio de um relatório em pdf gerado pelo sistema com as informações da quantidade de alimentos a ser usado, custo da produção e as exigências atendidas com a solução.

Assim, no total foram formulados e analisados 48 problemas, sendo 15 relacionados à produção de ração de aves, mais 9 relacionados a suínos, isto é, ambos retratam problemas reais da fábrica do IFES. Além disso, foram formulados e resolvidos 24 problemas com intuito de verificar o desempenho do método. Por último, o método PSC foi utilizado para resolver os problemas propostos nesta pesquisa, o qual alcançou resultados com ótima precisão numérica. As soluções foram comparadas com o *software* CPLEX.

Com base nos resultados é possível observar que o método PSC pode auxiliar na tomada de decisão com relação à produção da fábrica. Além do mais, o *software* desenvolvido apresenta a quantidade que cada alimento contribui tanto na quantidade em quilo de ração quanto no seu custo. Outra informação importante é a apresentação das restrições nutricionais sendo atendidas pela utilização do método. Esta informação garante que a ração atende as exigências nutricionais impostas ao modelo.

Usando a regra de Dantzig Normalizada, em alguns casos, foram obtidos um menor número de iterações com relação à solução do problema. Além disso, a aplicação desta técnica em poucos casos não garantiu que a solução seja factível. Em algumas instâncias foi superior a regra usual, mas no geral teve um comportamento similar ou até mesmo inferior a regra de Dantzig.

7.2 Trabalhos Futuros

Neste trabalho foram realizados testes e análises para o problema da produção de ração de suínos e aves. No entanto, deseja-se ainda utilizar o método PSC para outros tipos de rações. Na fabricação de alimentos para cães e gatos, bovinos, caprinos, peixes.

Atualmente foi desenvolvido um protótipo de uma interface, porém, em um estágio inicial. É necessário implementar mais funcionalidades, onde, através da interface é feito o cadastro dos alimentos e nutrientes e, posteriormente, com estas informações, gerar a formulação do problema com base nestes dados usando o método PSC.

Com o intuito de melhorar a implementação desenvolvida na presente pesquisa, pretende-se aprofundar os estudos relacionados ao método Simplex. Como trabalhos futuros pode-se citar as seguintes sugestões:

- Estudar e implementar outras estruturas de dados para o PSC.
- Implementar uma versão do código utilizando Programação Orientada a Objetos, aplicando técnicas para tornar o código reutilizável.
- Refinar a interface gráfica para deixar o programa mais atrativo e melhorar em suas funcionalidades.
- Investigar outros problemas reais de produção de ração.
- Realizar uma análise detalhada de cada exigência nutricional usando os 4 cenários apresentados no capítulo dos resultados.

Referências

- [1] ALBAN, J. Modelos de programación lineal. modelos matematicos aplicados a ciencias agropecuarias. www.academia.edu/39463840/MODELOS_DE_PROGRAMACION_LINEAL, 2018. acesso em 14/08/2021.
- [2] ANDRIGUETTO, J. M. *Nutrição Animal*. Nobel, 1981.
- [3] ARENALES, M. N., OTHERS. Programação linear com restrições canalizadas. Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, 1979.
- [4] BARBOSA, G. M. Utilização da programação linear na otimização de resultados de produção na empresa. *Revista Integração-Universidade São Judas Tadeu, São Paulo*, 66 (2014), 49–58.
- [5] BARBOSA, H. P., LIMA, G., FERREIRA, A. S. Estimativa da quantidade de ração necessária para produção de um suíno com 100 kg de peso vivo. *Commun. Téc 133* (1988).
- [6] BAZARAA, M. S., JARVIS, J. J., SHERALI, H. D. *Linear programming and network flows*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2010.
- [7] BY VACCINAR NUTRICAÇÃO ANIMAL, N. . S. A. Entenda como é o processo de fabricação de rações na prática. <https://nutricaoesaudeanimal.com.br/fabricacao-de-racoes/>, 2022. acesso em 08/07/2022.
- [8] CARDOSO, L. M. E. A. Minimização do custo da ração para suíno de crescimento, produzida em uma instituição federal do centro oeste de minas gerais, utilizando o problema da dieta. *XXXV Encontro Nacional de Engenharia de Produção, Perspectivas Globais para a Engenharia de Produção* (2015).
- [9] CASTRO, L. Y., BORGERT, A., DE SOUZA, F. R. Definição do mix de produção em uma indústria de lácteos com uso da programação linear: um estudo de caso. Em *Anais do Congresso Brasileiro de Custos-ABC* (2015).
- [10] CHAVES, V. H. C. Perspectivas históricas da pesquisa operacional. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro (SP), 2011.
- [11] CRUZ, J., RUFINO, J. Formulação e fabricação de rações (aves, suínos e peixes). *Manaus, AM: EDUA* (2017).
- [12] DORNELLAS, C. A. Análise de tópicos relevantes em programação linear e aplicações no ensino de engenharia. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Ilha Solteira, 2014.

- [13] DOS SANTOS, L. F. Método dual simplex para problemas canalizados com estruturas de dados eficientes. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense (UFF), Volta Redonda, 2020.
- [14] DOS SANTOS, M., QUINTAL, R. S. Problema de programação linear da dieta aplicado à nutrição de suínos. *Revista em Agronegócio e Meio Ambiente* 9, 2 (2016), 251–271.
- [15] EVARISTO, E. C. *Programação Linear*. PhD thesis, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2020.
- [16] FEED, A. A. World feed production increases to over 1.2 billion tons. <https://www.allaboutfeed.net/market/market-trends/world-feed-production-increases-to-over-1-2-billion-tons/>, 2022. acesso em 27/03/2022.
- [17] FORREST, J. J., GOLDFARB, D. Steepest-edge simplex algorithms for linear programming. *Mathematical programming* 57, 1 (1992), 341–374.
- [18] FREITAS, P. R. D. M. G. Uma apresentação dos métodos de pontos interiores na radioterapia e sua comparação com o método simplex. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, 2017.
- [19] GOMIDE, C. D. L. Sistema amigável para minimização do custo da ração. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 1988.
- [20] GONÇALVES, C. A. Acurácia e precisão na formulação não linear de ração para frangos de corte: avanço e otimização de resultados. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2013.
- [21] (IBGE), I. B. D. G. E. E. Alegre. <https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/es/alegre.html>, 2022. acesso em 03/07/2022.
- [22] (IFES), I. F. D. E. S. Institucional. <https://alegre.ifes.edu.br/>, 2022. acesso em 03/07/2022.
- [23] KOBERSTEIN, A. The dual simplex method, techniques for a fast and stable implementation. *Unpublished doctoral thesis, Universität Paderborn, Paderborn, Germany* (2005).
- [24] LUNKES, S. A. Formulação de dieta de mínimo custo para gado leiteiro utilizando a programação linear: estudo de caso em uma propriedade do oeste do paraná. B.S. thesis, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018.
- [25] MACULAN, N., FAMPA, M. H. *Otimização linear*. Rio de Janeiro: Editora Universidade da UFRJ, 2004.
- [26] MANSILHA, M. B., FARRET, F. A., KULLMANN, D. H. Programação linear: método de otimização simplex e software otimiza. *Revista Espacios* 38, 60 (2017).
- [27] MILHOMEM, D. A., DE OLIVEIRA, J. E. S., PIRES, A. V. D. S. Utilização da programação linear para formular um modelo de ração otimizada para bovinos leiteiros. *XXIII SIMPEP* (2016).

- [28] MOREIRA, A. J. M. *Aplicação de um modelo de programação linear inteira mista (PLIM) na expansão da rede de distribuição de energia elétrica em Angola*. PhD thesis, Instituto Politecnico do Porto (Portugal), 2013.
- [29] MUNARI JUNIOR, P. A. Técnicas computacionais para a implementação eficiente e estável de métodos tipo simplex. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo - USP - São Carlos, São Paulo, 2009.
- [30] NAMEN, A. A., BORNSTEIN, C. T. Uma ferramenta para avaliação de resultados de diversos modelos de otimização de dietas. *Pesquisa Operacional* 24, 3 (2004), 445–465.
- [31] NEME, R. Digestibilidade verdadeira e biodisponibilidade da lisina sulfato e da lisina hcl determinadas em aves. *Universidade Federal de Viçosa* (2000).
- [32] NETO, D. R., OTHERS. Avaliação da qualidade de uma mistura de ração para bovinos em misturador horizontal com o uso do microtracers como marcador da homogeneidade uberaba–mg 2016. Dissertação de Mestrado, Universidade de Uberaba, 2016.
- [33] PRADO, D. *Programação linear*, vol. 1. Falconi Editora, 2016.
- [34] RANGEL, S. *Introdução à construção de modelos de otimização linear e inteira*. ed. São Carlos, SP : SBMAC, 82 p., 20.5 cm - (Notas em Matemática Aplicada; v. 18), 2012.
- [35] ROSTAGNO, H. S., ALBINO, L. F. T., DONZELE, J., GOMES, P., OLIVEIRA, R. D., LOPES, D., FERREIRA, A., BARRETO, S. D. T., EUCLIDES, R. Tabelas brasileiras para aves e suínos. *Composição de alimentos e exigências nutricionais 2* (2011), 186.
- [36] ROSTAGNO, H. S., ALBINO, L. F. T., DONZELE, J. L., GOMES, P. C., OLIVEIRA, R. D., LOPES, D. C., FERREIRA, A. S., BARRETO, S., EUCLIDES, R. F. Composição de alimentos e exigências nutricionais. *Tabelas brasileiras para aves e suínos 2* (2005).
- [37] SAKOMURA, N. K., ROSTAGNO, H. S. *Métodos de pesquisa em nutrição de monogástricos*, vol. 9. Funep Jaboticabal, 2007.
- [38] SALMAN, A., OSMARI, E., DOS SANTOS, M. Manual prático para formulação de ração para vacas leiteiras. *Embrapa Rondônia-Documentos (INFOTECA-E)* (2011).
- [39] SALVADOR, T. R. Um estudo do método simplex e sua aplicação na radioterapia. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2016.
- [40] SILVA, C. T. L. D. *Problemas de otimização linear canalizados e esparsos*. PhD thesis, Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, 2002.
- [41] SINDIRAÇÕES. Setor de rações deve ter crescimento tímido em 2021, com menor consumo de carnes pelo brasileiro e altos custos dos insumos. <https://sindiracoes.org.br/setor-de-racoes-deve-ter-crescimento-timido-em-2021/>, 2021. acesso em 14/08/2021.

-
- [42] SOUSA, R. S. Estudos em otimização linear. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo - USP - São Carlos, São Paulo, 2000.
- [43] SOUSA, R. S. Método dual simplex com a regra de dantzig normalizada. *XLIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (2011), 2447–2457.
- [44] STIGLER, G. J. The cost of subsistence. *Journal of farm economics* 27, 2 (1945), 303–314.
- [45] TONIN, H. N. Modelo de programação linear aplicado a redução de custo na formulação de ração para nutrição de bovinos. Dissertação de Mestrado, Universidade de Uberaba - MG - Uniube, Uberaba, 2019.
- [46] ULBRICHT, G., RIBEIRO, R. Otimização em formatação de rações utilizando técnicas de programação linear: Um estudo de caso em processos industriais. Em *II Congresso Brasileiro de Engenharia de Produção-CONBREPRO. Ponta Grossa, PR, Brasil* (2012), vol. 28.
- [47] XAVIER, O. M. A origem da teoria dos jogos e a existência de equilíbrio em nash. Relatório Técnico, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.
- [48] ZACHI, J. M. Problemas de programação linear: uma proposta de resolução geométrica para o ensino médio com o uso do geogebra. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2016.
- [49] ZARDO, A., DE LIMA, G. Alimentos para suínos. *Publicação conjunta do CNPSA e da EMATER/RS* (1999).