

Universidade Federal Fluminense

LUCAS CONSTANTINO MENDONÇA

Modelagem Matemática e Computacional de
Escoamento Bifásico em Meios Porosos
Heterogêneos sob Efeito Gravitacional e
Presença de Fase não-Newtoniana

VOLTA REDONDA

2023

LUCAS CONSTANTINO MENDONÇA

Modelagem Matemática e Computacional de
Escoamento Bifásico em Meios Porosos
Heterogêneos sob Efeito Gravitacional e
Presença de Fase não-Newtoniana

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Orientador:

Panters Rodríguez-Bermúdez

Coorientador:

Alexandre Santos Francisco
Yoisell Rodríguez-Núñez

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

VOLTA REDONDA

2023

Modelagem Matemática e Computacional de Escoamento Bifásico em Meios Porosos Heterogêneos sob Efeito Gravitacional e Presença de Fase não-Newtoniana

Lucas Constantino Mendonça

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada por:

Prof. Panters Rodríguez-Bermúdez, D.Sc. / MCCT-UFF
(Presidente)

Prof. Alexandre Santos Francisco, D.Sc. / MCCT-UFF

Prof. Grazione de Souza Boy, D.Sc. / UERJ

Prof. Jorge Alberto Rodriguez Duran, D.Sc. / UFF

Volta Redonda, 30 de Junho de 2023.

Dedicatória. Para meus pais e família

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus, pela saúde e pela ajuda que nenhum outro ser humano é capaz de fornecer. Agradeço a Ele por ter me concedido sabedoria, paciência e determinação para completar este trabalho. Que Ele continue a me guiar em minha jornada futura. Agradeço à minha família, em especial à minha mãe Ireci e ao meu pai Moacir, cujo suporte e encorajamento foram essenciais para minha caminhada de forma digna e consciente. Vocês foram fundamentais em todos os momentos da minha trajetória, me impulsionando e ajudando a seguir em frente nos momentos mais desafiadores. Agradeço à minha noiva Lorrany, que compreende minhas ausências e me fornece apoio e incentivo diariamente. Sua presença e motivação têm sido o alicerce para a minha perseverança em alcançar meus objetivos. Agradeço ao meu orientador Dr. Panters Rodríguez-Bermúdez, cujos ensinamentos e orientações foram moldura para finalização deste trabalho. A todas as demais pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram e torceram por mim, o meu agradecimento.

Resumo

Na indústria de óleo e gás os mecanismos de produção naturais permitem recuperar em média de 20 a 40% do óleo total contido no reservatório. Em vista disso, métodos de recuperação secundária e avançada são utilizados visando uma maior recuperação de óleo e/ou a manutenção da pressão do reservatório. Os métodos de injeção imiscível de água e injeção imiscível de gás são os mais empregados na recuperação secundária. Na recuperação avançada de petróleo, alguns métodos utilizam soluções surfactantes, alcalinas ou com polímeros, que podem fornecer ao fluido injetado um comportamento não-Newtoniano. A consideração de uma fase não-Newtoniana no processo de deslocamento dos fluidos somada aos efeitos gravitacionais, heterogeneidade e anisotropia do reservatório fornece desafios adicionais durante o emprego dos métodos de recuperação. A grande recorrência na utilização de tais métodos se torna motivação para a realização de diversos estudos voltados para a simulação de escoamento de fluidos Newtonianos e não-Newtonianos em meios porosos. Isto posto, a presente pesquisa se propôs ao estudo de um modelo matemático e computacional para escoamento bifásico imiscível em meios porosos heterogêneos considerando o efeito gravitacional e a presença de fase não-Newtoniana do tipo plástico de Bingham, baseado em uma extensão do modelo de Buckley-Leverett. Para obtenção das soluções aproximadas, foram implementados os esquemas numéricos de Lax-Friedrichs clássico e um novo esquema Lagrangeano-Euleriano desenvolvido por Sepulveda (2015). Os esquemas foram estendidos para serem capazes de solucionar problemas com funções de fluxo descontínuas em relação a variável espacial que surgem em virtude da heterogeneidade do meio poroso. As soluções numéricas obtidas foram comparadas com as soluções analíticas determinadas através de uma extensão da construção geométrica de Oleinik para funções de fluxo descontínuas apresentada por Kaasschieter (1999). As soluções consistiram na combinação de ondas de choque e rarefação, com a presença de um choque estacionário no ponto de descontinuidade da variável espacial que surge em decorrência da função de fluxo descontínua. Os resultados numéricos se mostraram satisfatórios quando comparados com as soluções analíticas, e foi possível constatar que o esquema Lagrangeano-Euleriano forneceu resultados mais acurados em relação esquema de Lax-Friedrichs.

Abstract

In the oil and gas industry, natural production mechanisms allow for the recovery of an average of 20 to 40% of the total oil contained in the reservoir. In view of this, secondary and enhanced recovery methods are employed to achieve a higher oil recovery and/or reservoir pressure maintenance. The most commonly used methods in secondary recovery are waterflooding and gas injection. In advanced oil recovery, some methods utilize surfactant, alkaline, or polymer solutions, which can impart non-Newtonian behavior to the injected fluid. Considering a non-Newtonian phase in the fluid displacement process, along with the effects of gravity, reservoir heterogeneity, and anisotropy, presents additional challenges during the implementation of recovery methods. The widespread use of such methods motivates numerous studies focused on simulating the flow of Newtonian and non-Newtonian fluids in porous media. Against this backdrop, this research aimed to study a mathematical and computational model for immiscible biphasic flow in heterogeneous porous media, considering the gravitational effect and the presence of a non-Newtonian plastic Bingham-type phase, based on an extension of the Buckley-Leverett model. To obtain approximate solutions, the classic Lax-Friedrichs scheme and a new Lagrangian-Eulerian scheme developed by Sepulveda (2015) were implemented. The schemes were extended to solve problems with discontinuous flow functions in the spatial variable arising from the heterogeneity of the porous medium. The numerical solutions obtained were compared with analytical solutions determined through an extension of Oleinik's geometric construction for discontinuous flux functions presented by Kaasschieter (1999). The solutions consisted of a combination of shock and rarefaction waves, with the presence of a stationary shock at the point of discontinuity in the spatial variable resulting from the discontinuous flux function. The numerical results proved to be satisfactory when compared to the analytical solutions, and it was observed that the Lagrangian-Eulerian scheme provided more accurate results compared to the Lax-Friedrichs scheme.

Palavras-chave

1. Escoamento em Meios Porosos
2. Fluidos não-Newtonianos
3. Leis de Conservação Escalares
4. Método das Diferenças Finitas
5. Equação de Buckley-Leverett
6. Problemas de Riemann
7. Construção Geométrica de Oleinik

Glossário

- CFL : Courant–Friedrichs–Lewy
- EDP : Equação Diferencial Parcial
- EOR : Enhanced Oil Recovery
- LEH : Esquema Langrangeano-Euleriano
- LF : Lax-Friedrichs
- MDF : Método das Diferenças Finitas
- MEF : Método dos Elementos Finitos
- MVF : Método dos Volumes Finitos

Sumário

Lista de Símbolos	xi
Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xv
1 Introdução	16
1.1 Contextualização	16
1.2 Objetivos	19
1.3 Estrutura do Trabalho	20
2 Leis de Conservação Escalares e Solução Analítica	21
2.1 Leis de Conservação Lineares	21
2.2 Leis de Conservação não-Lineares	22
2.3 Formulação Fraca e Choques	24
2.3.1 Lei de Conservação de Massa	24
2.3.2 Condição de Choque de Rankine-Hugoniot	25
2.4 Problema de Riemann e Rarefação	28
2.5 Condições de Entropia	30
2.6 Funções de Fluxo	32
2.6.1 Funções de Fluxo Convexas	32
2.6.2 Caso não-Convexo e Construção Geométrica de Oleinik	32
2.6.3 Extensão da Construção Geométrica de Oleinik para Funções de Fluxo Descontínuas	35

3	Escoamento Bifásico de Fluidos Newtonianos e não-Newtonianos em Meios Porosos	37
3.1	Fluidos Newtonianos	37
3.2	Lei de Darcy para Fluidos Newtonianos	39
3.3	Modelo Matemático para Fluidos Newtonianos	39
3.4	Fluidos não-Newtonianos	42
3.4.1	Fluidos não-Newtonianos Independentes do Tempo	43
3.4.2	Fluidos não-Newtonianos Dependentes do Tempo	44
3.5	Modelos Reológicos	45
3.6	Lei de Darcy para o Plástico de Bingham	46
3.7	Modelo Matemático para Fluidos não-Newtonianos	47
4	Esquemas Numéricos por Diferenças Finitas para Leis de Conservação	48
4.1	Método das Diferenças Finitas	48
4.2	Métodos Conservativos	50
4.3	Esquema de Lax-Friedrichs	50
4.3.1	Forma não Conservativa	51
4.3.2	Forma Conservativa	52
4.4	Esquema Lagrangeano-Euleriano do tipo Diferenças Finitas	52
4.4.1	Forma não Conservativa	54
4.4.2	Forma Conservativa	55
4.5	Extensão para Funções de Fluxo Descontínuas	55
5	Resultados e Discussões	57
5.1	Algoritmo e Validação Numérica	57
5.1.1	Validação com Fases Newtonianas	58
5.1.2	Validação com Fase não-Newtoniana	62
5.2	Adimensionalização	70

5.2.1	Função de Fluxo Contínua	70
5.2.2	Comportamento Newtoniano <i>versus</i> não-Newtoniano	72
5.2.3	Função de Fluxo Descontínua	75
5.3	Resultados e Análises	76
5.3.1	Análise de Convergência de Malha	85
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	88
6.1	Conclusões	88
6.2	Trabalhos Futuros	89
	Anexo A – Lei de Darcy para o Plástico de Bingham	90
	Referências	92

Lista de Símbolos

$\dot{\gamma}$:	Taxa de cisalhamento
μ	:	Viscosidade dinâmica
μ_{ne}	:	Viscosidade da fase Newtoniana
$\mu_{nn}(\nabla\phi_{nn}, S_{ne})$:	Viscosidade aparente da fase não-Newtoniana
μ_B	:	Parâmetro de consistência do modelo reológico do plástico de Bingham
Ψ	:	Função teste
ϕ	:	Porosidade da rocha
Φ	:	Potencial de Fluxo
ρ	:	Massa específica
τ_{yx}	:	Tensão de cisalhamento em relação ao plano y-x
τ_o	:	Tensão de cisalhamento mínima
g	:	Constante gravitacional
G	:	Gradiente de pressão mínimo
H	:	Índice de consistência
k	:	Permeabilidade absoluta da rocha
k_{ri}	:	Permeabilidade relativa à fase fluida
P	:	Pressão
S	:	Saturação
S_{lim_r}	:	Saturação limite à direita da descontinuidade
S_{lim_l}	:	Saturação limite à esquerda da descontinuidade
\vec{u}	:	Vetor da velocidade de Darcy

Lista de Figuras

1.1	Ilustração do método de injeção de água.	17
2.1	Contaminante sendo carregado com o fluido em um tubo.	22
2.2	Curvas características e solução da equação de Burgers invíscida. Adaptado de [25].	24
2.3	Balço de massa no volume de controle. Adaptado de [25].	25
2.4	Curva de descontinuidade. Adaptado de [25].	26
2.5	Solução de onda de choque e características. Adaptado de [15].	28
2.6	Solução não-entrópica. Adaptado de [15].	30
2.7	Solução de onda de rarefação e características. Adaptado de [15].	30
2.8	Exemplo para o problema de Buckley-Leverett solucionado numericamente por um método Lagrangeano-Euleriano do tipo diferenças finitas.	33
2.9	Função de fluxo e derivada da função de fluxo da equação (2.29).	33
2.10	Construção geométrica de Oleinik. Adaptado de [15].	34
2.11	Construção geométrica. Adaptado de [12].	36
3.1	(a) Elemento de fluido no tempo t . (b) Deformação do elemento de fluido no tempo $t + \Delta t$. Adaptado de [11].	38
3.2	Comportamento reológico para fluidos não-Newtonianos independentes do tempo.	44
3.3	Comportamento reológico para os fluidos não-Newtonianos dependentes do tempo.	45
4.1	Malha para o método das diferenças finitas.	49
4.2	Estêncil para o esquema de Lax-Friedrichs.	51

4.3	Arquitetura geométrica do volume de controle espaço-temporal local Lagrangeano-Euleriano. Adaptado de [22].	54
5.1	Construção de Oleinik para o Caso I.	59
5.2	Cenário 1 com $s_l = 1$, $s_r = 0$, $\nu = 0$, CFL = 0,4, T = 2, 1024 células e 248 passos de tempo.	59
5.3	Cenário 2 com $s_l = 1$, $s_r = 0$, $\nu = 0,01$, CFL = 0,6, T = 1, 512 células e 58 passos de tempo.	60
5.4	Construção de Oleinik para o Caso II.	61
5.5	Cenário 1 com $s_l = 0$, $s_r = 1$, $\nu = 0$, CFL = 0,7, T = 0,5, 2048 células e 989 passos de tempo.	61
5.6	Cenário 2 com $s_l = 0$, $s_r = 0,25$, $\nu = 0$, CFL = 0,7, T = 1, 1024 células e 410 passos de tempo.	62
5.7	Permeabilidades Relativas.	63
5.8	Funções de fluxo e potencial de fluxo para o exemplo 5.1.2(a).	64
5.9	Soluções numéricas e analítica para o exemplo 5.1.2(a) com CFL = 0,6 e número de nodos igual a 20000.	64
5.10	Permeabilidades Relativas.	65
5.11	Funções de fluxo e potencial de fluxo para o exemplo 5.1.2b.	66
5.12	Soluções numéricas e analítica para o exemplo 5.1.2(b) com CFL = 0,6 e número de nodos igual a 5000.	66
5.13	Permeabilidades Relativas.	67
5.14	Funções de fluxo e potencial de fluxo para o exemplo 5.1.2(c).	68
5.15	Soluções numéricas e analíticas para o exemplo 5.1.2(c).	69
5.16	Gradiente de potencial de fluxo.	71
5.17	Funções de fluxo, onde a curva A é proveniente de $-\nabla\Phi$ e a curva B proveniente de $-\nabla\Phi^*$	72
5.18	Comportamento Newtoniano e não-Newtoniano dos gradientes de potencial de fluxo e funções de fluxo.	73
5.19	Razão entre as viscosidades M para distintos G^*	74

5.20	Comportamento Newtoniano e não-Newtoniano das soluções.	74
5.21	Curvas de gradiente de potencial de fluxo para o caso em que $ \nabla\Phi^* > G^*$	78
5.22	Curvas de funções de fluxo e extensão da construção geométrica da Oleinik para o caso em que $ \nabla\Phi^* > G^*$	79
5.23	Soluções analíticas e numéricas para o caso em que $ \nabla\Phi^* > G^*$	80
5.24	Curvas de gradiente de potencial de fluxo para o caso em que $ \nabla\Phi^* \leq G^*$	82
5.25	Curvas de funções de fluxo e extensão da construção geométrica da Oleinik para o caso em que $ \nabla\Phi^* \leq G^*$	83
5.26	Soluções analíticas e numéricas para o caso em que $ \nabla\Phi^* \leq G^*$	84
5.27	Convergência de malha ao longo do tempo.	86
5.28	Análise de convergência de malha.	87

Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros adimensionais do escoamento.	58
5.2	Parâmetros adimensionais do escoamento.	60
5.3	Parâmetros dos fluidos e da rocha. Adaptado de [29].	62
5.4	Parâmetros dos fluidos e da rocha. Adaptado de [29].	65
5.5	Parâmetros dos fluidos e da rocha. Adaptado [29].	67
5.6	Parâmetros dos fluidos e da rocha.	71
5.7	Parâmetros adimensionais do escoamento.	72
5.8	Erros máximos em relação ao número de nodos para os esquemas de LF e LEH.	86

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

Na indústria petrolífera a produção de óleo e gás é planejada para ocorrer de maneira natural (por surgência), ou seja, para se utilizar inicialmente a energia primária do reservatório como mecanismo de produção. Os mecanismos naturais utilizados na recuperação de petróleo incluem: mecanismo de capa de gás, gás em solução, influxo de água, mecanismo de expansão de fluido e rocha e drenagem gravitacional. No entanto, a utilização desses mecanismos só permite a recuperação de em média 20 a 40% do petróleo total contido no reservatório, podendo alcançar valores de até 75% dependendo do mecanismo de produção [3, 4, 24]. Sendo assim, para que se possa recuperar uma maior quantidade de óleo/gás é necessária a utilização de outros métodos em etapas posteriores, tais como os métodos de recuperação secundários e os terciários que são atualmente denominados como métodos de recuperação avançada ou em inglês *Enhanced Oil Recovery* (EOR) [4].

Na recuperação secundária, o foco é mantido na manutenção da energia do reservatório. Os métodos mais utilizados na recuperação secundária são: injeção imiscível de água e injeção imiscível de gás. No primeiro, água é injetada no reservatório de forma a promover o seu deslocamento (Fig. 1.1), enquanto no segundo o gás é injetado na capa de gás do reservatório. Já a EOR, inclui todos os métodos dirigidos para extrair o petróleo não recuperável nas duas primeiras etapas de produção, que podem ser categorizados como térmicos, químicos, microbiológicos e miscíveis [4].

Uma gama de fluidos utilizados na EOR, como soluções compostas por surfactantes, polímeros ou soluções alcalinas, podem fornecer aos fluidos um comportamento reológico característico de um fluido não-Newtoniano. Em paralelo, óleos altamente densos e

viscosos, também podem exibir um comportamento não-Newtoniano [10].

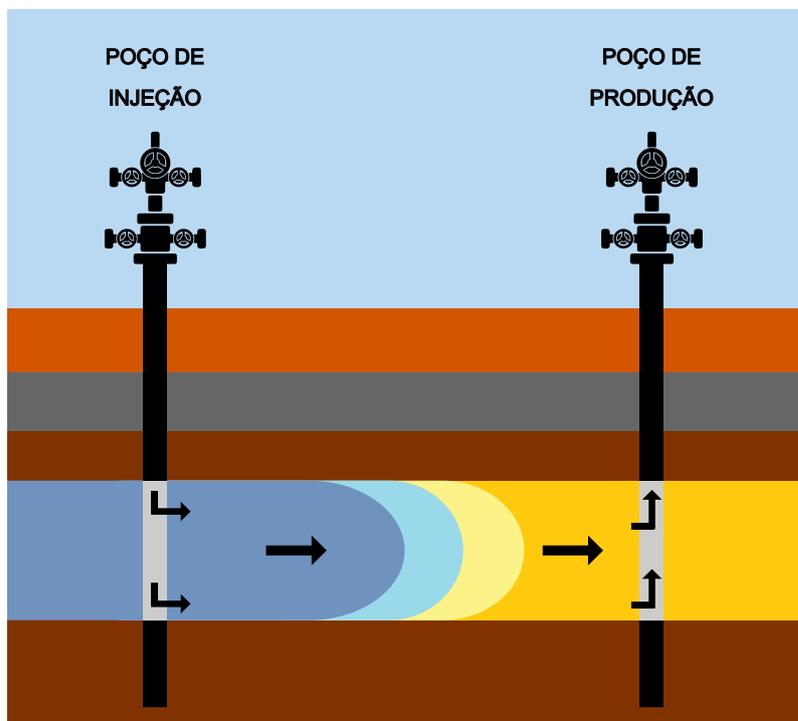


Figura 1.1: Ilustração do método de injeção de água.

Uma expressiva parcela dos fenômenos físicos presentes nos processos de recuperação de petróleo mencionados anteriormente podem ser descritos através de leis de conservação. Uma lei de conservação pode ser expressa como um sistema de Equações Diferenciais Parciais (EDP's), que é capaz de descrever a natureza física da conservação de uma determinada quantidade ou grandeza conservada. Em virtude disso, uma variedade de modelos matemáticos tem sido sugerida para o estudo de escoamentos em reservatórios de petróleo.

Entre os modelos matemáticos que possuem relevância e aplicação na recuperação de petróleo, é possível mencionar o modelo de Buckley-Leverett. Ele consiste em um modelo matemático baseado em uma lei de conservação hiperbólica capaz de descrever o deslocamento imiscível de fluidos em meios porosos. A título de exemplo, é possível citar a aplicação do método de injeção imiscível de água em reservatórios de petróleo. Em adição, extensões do modelo de Buckley-Leverett para fluidos não-Newtonianos têm sido propostas por diversos autores, como Salman et al. (1990) e Wu et al. (1992). Tais modelos são capazes de descrever a dependência da tensão de cisalhamento na taxa de cisalhamento no escoamento de fluidos em meios porosos. Ademais, extensões para escoamento de fluidos em meios porosos heterogêneos também têm sido cada vez mais

estudadas ao longo dos últimos anos.

No entanto, alguns desses modelos físico-matemáticos são baseados em equações que apresentam soluções não triviais, como o surgimento de choques por exemplo, ou ainda não possuem solução analítica. Dessa forma, a utilização de métodos numéricos se torna um caminho desejável para obtenção das soluções do problema de interesse, pois os métodos numéricos permitem a resolução dos problemas através da utilização de algoritmos matemáticos e auxílio de computadores.

Para que se possa realizar a avaliação numérica de EDP's é necessário um processo de discretização, que consiste em dividir o domínio espacial e temporal em uma malha discreta, transformando a EDP em sistema de equações algébricas capazes de serem solucionados computacionalmente. As classes de métodos de discretização para EDP's mais conhecidas são: Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Volumes Finitos (MVF) e a aplicabilidade de cada um desses métodos varia de acordo com o problema ou fenômeno físico estudado [18].

Em problemas que possuem soluções descontínuas é esperada que uma discretização por diferenças finitas de uma EDP seja inapropriada, pois ela assume que a solução varia suavemente entre os pontos da malha, uma vez que ela é baseada em aproximações que envolvem o cálculo de derivadas em pontos próximos [15]. Sendo assim, se as soluções descontínuas para as leis de conservação forem obtidas através de métodos clássicos desenvolvidos sobre a hipótese de existência de soluções suaves, os resultados numéricos não serão satisfatórios, o que motiva o desenvolvimento de métodos que sejam apropriados para resolução dessa classe de problema [15].

Dentre os métodos existentes para leis de conservação com base em diferenças finitas, é possível citar alguns em destaque como: Godunov, Lax-Wendroff, MacCormack e Lax-Friedrichs. Cada um deles, possui características específicas, tais como, acurácia, estabilidade, discretização espacial/temporal e complexidade de implementação e devem ser utilizados com cautela, pois suas limitações devem se adequar ao tipo de problema analisado. Sendo assim, o entendimento, desenvolvimento, estudo e aplicação dos métodos numéricos têm se tornado cada vez mais objeto de interesse entre a comunidade científico-tecnológica[15].

1.2 Objetivos

De maneira geral o presente trabalho possui o objetivo de realizar estudos sobre o escoamento de fluidos não-Newtonianos do tipo plástico de Bingham [8] em meios porosos heterogêneos sob influência da gravidade por intermédio da utilização da extensão da construção geométrica de Oleinik [15] para obtenção das soluções analíticas, bem como a utilização dos esquemas numéricos por diferenças finitas Lax-Friedrichs e Langrangeano-Euleriano para obtenção das soluções numéricas.

Isto posto, seguem os seguintes objetivos específicos:

- Realizar a revisão bibliográfica teórica sobre leis de conservação escalares;
- Realizar a revisão bibliográfica acerca da reologia dos fluidos Newtonianos e não-Newtonianos;
- Abordar a teoria de escoamento bifásico imiscível em meios porosos homogêneos e heterogêneos para fluidos Newtonianos e não-Newtonianos;
- Abordar os esquemas numéricos para leis de conservação escalares hiperbólicas do tipo diferenças finitas: Lax-Friedrichs e Langrangeano-Euleriano;
- Realizar a implementação de um algoritmo na linguagem do programa MATLAB[®] [19] para resolução numérica e analítica de problemas hiperbólicos com dados constantes por partes (problemas de Riemann) com funções de fluxo contínuas e descontínuas através dos esquemas: Lax-Friedrichs e Langrangeano-Euleriano e da extensão da construção geométrica de Oleinik, respectivamente;
- Efetuar a validação do algoritmo desenvolvido por meio de soluções de referência da literatura;
- Desenvolver análises numéricas para o escoamento vertical de fluidos não-Newtonianos em meios porosos heterogêneos através da extensão da equação de Buckley-Leverett para fluidos não-Newtonianos do tipo plástico de Bingham;
- Comparar as soluções numéricas obtidas com as soluções analíticas;
- Comparar as soluções numéricas obtidas através do esquema de Lax-Friedrichs com as obtidas por meio do esquema Langrangeano-Euleriano.

1.3 Estrutura do Trabalho

A estrutura geral do trabalho foi segregada em 6 capítulos. No capítulo 1 foi apresentada a contextualização do trabalho, ou seja, a motivação para o tema da pesquisa com base em problemas reais com aplicação na engenharia de petróleo, as principais ferramentas matemáticas e numéricas utilizadas na simulação dos fenômenos físicos associados ao problema proposto, bem como os objetivos gerais e específicos.

O capítulo 2 aborda conceitos básicos acerca das leis de conservação escalares e são expostos os principais tópicos relacionados a teoria das leis de conservação, tais como: problema de Riemann, formulação fraca, formação de ondas de choque e rarefação, condições de entropia, funções de fluxo convexas e não-convexas e construção geométrica de Oleinik.

Já no capítulo 3, são descritos os conceitos fundamentais da reologia dos fluidos, exemplificando as principais distinções entre os fluidos Newtonianos e não-Newtonianos. Em paralelo, é realizada também uma breve abordagem sobre a lei de Darcy para fluidos Newtonianos e não-Newtonianos do tipo plástico de Bingham. Além disso, são discutidas as equações que constituem o modelo para escoamento bifásico imiscível de fluidos Newtonianos e não-Newtonianos em meios porosos homogêneos e heterogêneos sob ação da gravidade.

No capítulo 4 são apresentados dois esquemas numéricos por diferenças finitas para resolução de problemas hiperbólicos baseados em leis de conservação (Lax-Friedrichs e Langrangeano-Euleriano). Na sequência, são mostradas as extensões dos esquemas numéricos para resolução de problemas com funções de fluxo descontínuas.

O foco do capítulo 5 é a apresentação dos resultados numéricos e analíticos obtidos para o modelo matemático aqui considerado, bem como exemplificações numéricas e analíticas para validação do algoritmo implementado.

Por fim, no capítulo 6 é realizada uma síntese do conteúdo e das análises desenvolvidas ao decorrer do trabalho de forma a elucidar os resultados obtidos e principais dificuldades encontradas. Em acréscimo, são relatadas as possíveis melhorias a serem implementadas na pesquisa e algumas sugestões para desenvolvimento em trabalhos futuros.

Capítulo 2

Leis de Conservação Escalares e Solução Analítica

Conforme exposto em LeVeque (2013), uma lei de conservação pode ser expressa para um caso unidimensional como um sistema de equações diferenciais parciais da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

onde $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um vetor m -dimensional de certas quantidades conservadas ou um estado de variáveis, como massa, quantidade de movimento e energia e $f(u)$ é uma função de fluxo para um determinado sistema de leis de conservação, sendo $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

2.1 Leis de Conservação Lineares

Uma série de fenômenos físicos podem ser modelados através de sistemas hiperbólicos de equações diferenciais parciais. Em geral, muitos problemas existentes são dependentes do tempo, o que significa que nesses casos a solução depende tanto do tempo quanto de uma ou mais variáveis espaciais [13].

Em uma única coordenada espacial, um sistema de equações diferenciais parciais homogêneo de primeira ordem em x e t tem a seguinte forma:

$$u_t(x, t) + Au_x(x, t) = 0, \quad (2.2)$$

onde A é uma matriz real constante $m \times m$. Um caso particular pode ser considerado quando m for igual 1, o que reduz a matriz A para um valor escalar. Este será um problema hiperbólico desde que o escalar A seja real. A partir desta equação é possível

modelar o transporte advectivo de substâncias, ou seja, é possível modelar o fenômeno de carreamento de uma substância em decorrência do movimento de um determinado fluido.

Neste contexto, toma-se como exemplo o carreamento de um dado contaminante que está sendo advectado por algum fluido que está escoando em um tubo unidimensional com velocidade constante a conforme apresentado na Figura 2.1.

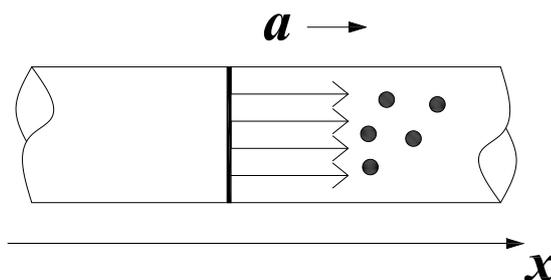


Figura 2.1: Contaminante sendo carreado com o fluido em um tubo.

A concentração ou densidade $u(x, t)$ do contaminante satisfaz a seguinte equação de advecção escalar:

$$u_t(x, t) + au_x(x, t) = 0, \quad (2.3)$$

e admite soluções da forma

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad (2.4)$$

para qualquer função $u_0(\xi)$.

De fato a lei de conservação (2.3) é um problema linear com fluxo $f(u) = au$. Contudo, diversos outros problemas físicos dão origem a leis de conservação em que $f(u)$ é um função não-linear de u .

2.2 Leis de Conservação não-Lineares

Conforme mencionado anteriormente $f(u)$ pode ser uma função não-linear de u e nesse caso a quantidade conservada/solução não é mais transportada de maneira uniforme. Em vez disso, a solução deforma à medida que evolui no tempo, possibilitando o surgimento de ondas de choque em locais onde a solução é descontínua. Em casos não-lineares, é possível ainda escrever a lei de conservação (2.1) na sua forma quasi-linear a partir da

diferenciação da função de fluxo $f(u)$ obtendo

$$u_t + f'(u)u_x = 0. \quad (2.5)$$

A partir da forma quasi-linear é possível determinar as características da equação. Contudo, equações desta forma devem ser abordadas com cuidado, pois a maioria dos problemas hiperbólicos não-lineares fisicamente relevantes surgem de leis de conservação integrais, o que torna preferível a utilização da equação na sua forma conservativa.

Definição 2.2. As curvas características são curvas no plano $x-t$ que representam como a informação é transportada no domínio de solução de uma equação diferencial.

Como exemplo de lei de conservação escalar com função de fluxo não-linear é possível citar a equação de Burgers invíscida que apresenta uma função de fluxo quadrática

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0. \quad (2.6)$$

Exemplo 2.2. Equação de Burgers invíscida (Eq. 2.6).

De maneira preliminar, seja assumido $f \in C^2$, $f'' > 0$, e

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 0, \\ 1-x, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{se } 1 \leq x. \end{cases} \quad (2.7)$$

A equação (2.6) em sua forma quasi-linear assume a forma

$$u_t + uu_x = 0, \quad (2.8)$$

e é possível mostrar que em porções suaves da solução o valor de u é constante ao longo das características viajando com velocidade u .

A construção da solução da equação (2.6) é dada na forma::

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < t, \\ (1-x)/(1-t), & \text{se } t \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{se } x > 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Na Figura 2.2(b) é possível observar que as características são retas que se interceptam a partir de um tempo $t = 1$, mostrando a existência de uma solução descontínua. A Figura 2.2(a) mostra que dada uma condição inicial, a solução se deforma com o tempo e

quebra no tempo $t = 1$ e forma uma onda de choque que se propaga com uma velocidade característica. O surgimento dessa onda de choque é decorrente da lei de conservação escalar hiperbólica não-linear e obedece uma condição conhecida como: condição de choque de Rankine-Hugoniot, que será abordada em tópicos seguintes.

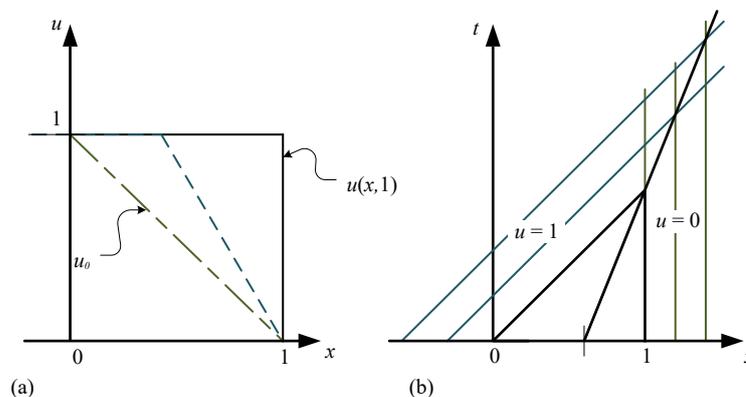


Figura 2.2: Curvas características e solução da equação de Burgers invíscida. Adaptado de [25].

2.3 Formulação Fraca e Choques

Conforme abordado em tópicos anteriores, os sistemas físicos descritos com base em leis de conservação podem apresentar soluções descontínuas que diante de uma perspectiva clássica não satisfazem as EDP's em todos os pontos, uma vez que suas derivadas não são definidas nas discontinuidades, o que implica a necessidade da utilização da solução fraca, que pode ser aplicada de forma geral para reescrever uma equação diferencial parcial em sua forma integral requerendo uma menor suavidade para que se possa definir a solução [15].

2.3.1 Lei de Conservação de Massa

De forma a ilustrar um exemplo de lei de conservação em sua forma integral, toma-se o escoamento de um fluido com propriedades constantes em um tubo com área de seção transversal muito fina e constante de maneira a permitir uma análise unidimensional conforme apresentado na Figura 2.3. Seja u denotado como densidade, neste caso em particular $[M][L^{-1}]$ e f o correspondente fluxo de massa. Em adição, seja $f = f(u)$ uma dada relação constitutiva. A lei de conservação pode ser expressa matematicamente

através da realização do balanço de massa no volume de controle fornecendo a equação

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx + \left\{ f(u(b, t)) - f(u(a, t)) \right\} = 0, \quad (2.10)$$

para qualquer $-\infty < a < b < \infty$ e $t > 0$. Caso u e f sejam suaves, a lei de conservação se resume em

$$\int_a^b \left\{ u_t + (f(u))_x \right\} dx = 0, \quad (2.11)$$

e desde que isto se mantenha para qualquer $a < b$ temos

$$u_t + (f(u))_x = 0. \quad (2.12)$$

Definição 2.3.1 (Volume de Controle). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região do espaço fixada por qual o fluido atravessa é dito volume de controle.

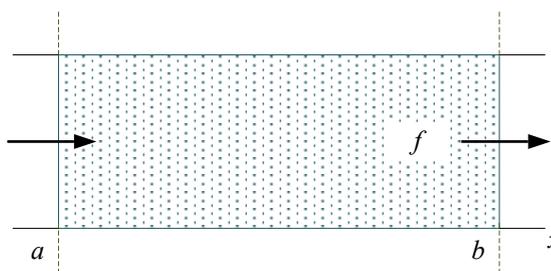


Figura 2.3: Balanço de massa no volume de controle. Adaptado de [25].

2.3.2 Condição de Choque de Rankine-Hugoniot

Como continuidade do tópico anterior, supõe-se agora que u seja descontínuo através de uma curva suave $x(t)$ e que a equação diferencial se mantenha em ambos os lados conforme ilustrado na Figura 2.4 [25].

Então a partir da lei de conservação integral (Eq. 2.10), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_a^{x(t)} u(x, t) dx + \int_{x(t)}^b u(x, t) dx \right\} \\ &= \int_a^{x(t)} u_t dx + \frac{dx}{dt} u(x(t)^-, t) + \int_{x(t)}^b u_t dx - \frac{dx}{dt} u(x(t)^+, t) \\ &= \int_a^{x(t)} u_t dx + \int_{x(t)}^b u_t dx + \frac{dx}{dt} (u_l - u_r) \\ &= f_a - f_l - f_b + f_r + \frac{dx}{dt} (u_l - u_r). \end{aligned}$$

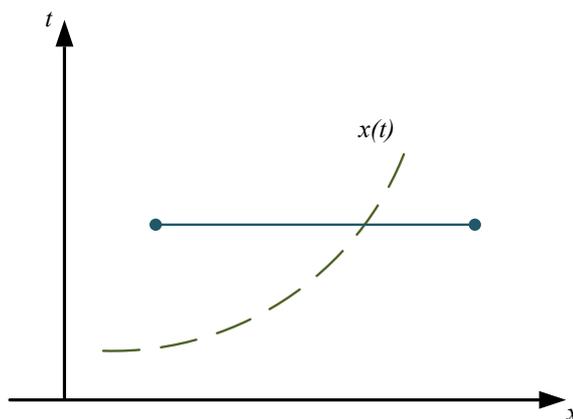


Figura 2.4: Curva de descontinuidade. Adaptado de [25].

Como consequência do princípio da conservação através do choque obtemos a condição de choque de Rankine-Hugoniot:

$$s = \frac{dx}{dt} = \frac{f_r - f_l}{u_r - u_l} =: \frac{[f]}{[u]}, \quad (2.13)$$

onde os subíndices l e r são notações abreviadas para *left* (esquerda) e *right* (direita) e $x(t)^-$ e $x(t)^+$ são os limites pela esquerda e direita, respectivamente, e s é a velocidade do choque.

Dessa forma, a condição de choque de Rankine-Hugoniot pode ser utilizada para determinar a velocidade do choque em qualquer momento em termos dos estados $u_l(t)$ e $u_r(t)$ imediatamente à esquerda e à direita do choque que, em geral, variam ambas com o tempo. Contudo, para casos em especial como o problema de Riemann com dados constantes por partes (u_l e u_r) o choque se propaga com velocidade constante.

Exemplo 2.3. Determinando a velocidade do choque.

Dando continuidade ao Exemplo 2.2 como uma solução de choque com $u_l = 1$ e $u_r = 0$ em $t = 1$, tem-se

$$u(x, 1) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 1, \\ 0, & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad (2.14)$$

e encontra-se a a velocidade do choque

$$s = \frac{dx}{dt} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{1}{2} \frac{u_r^2 - u_l^2}{u_r - u_l} = \frac{u_r + u_l}{2} = \frac{1}{2}. \quad (2.15)$$

Logo, para $t \geq 1$ deve-se definir:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 1 + 0.5(t - 1), \\ 0, & \text{se } x > 1 + 0.5(t - 1). \end{cases} \quad (2.16)$$

Por fim, é possível combinar matematicamente a condição de choque e a equação diferencial em uma única expressão, ou seja, a formulação fraca da equação diferencial, que pode ser obtida multiplicando a equação diferencial por uma função teste suave Ψ , posteriormente integrar uma ou mais vezes em algum domínio e na sequência aplicar a integração por partes para mover as derivadas da função u para a função de teste suave, fornecendo como resultado uma equação que envolve menos derivadas em u e, portanto, requer menos suavidade.

Seja $Q := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ e $\Psi \in C_0^1(\bar{Q})$, em que C_0^1 é um espaço de funções que são continuamente diferenciáveis com suporte compacto.

Multiplicando $u_t + f(u)_x = 0$ por $\Psi(x, t)$ e integrando sobre o espaço e o tempo, tem-se:

$$\int_Q \{ \Psi u_t + \Psi f(u)_x \} dx dt = 0. \quad (2.17)$$

Integrando por partes a expressão resulta em:

$$\int_Q \{ u \Psi_t + f(u) \Psi_x \} dx dt = - \int_{\mathbb{R}} \Psi(x, 0) u_0(x) dx. \quad (2.18)$$

Definição 2.3. Uma função mensurável limitada u é chamada de solução fraca de um dado problema P , com dados iniciais mensuráveis u_0 , se

$$\int_Q \{ u \Psi_t + f(u) \Psi_x \} dx dt + \int_{\mathbb{R}} \Psi(x, 0) u_0(x) dx = 0$$

para todo $\Psi \in C_0^1(\bar{Q})$ que some identicamente para t e $|x|$ muitos grandes, com $Q := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

2.4 Problema de Riemann e Rarefação

O problema de Riemann é um problema de valor inicial com dados constantes por partes que pode ser expresso da seguinte forma [15, 25]:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l, & \text{se } x < 0, \\ u_r, & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

A forma da solução dependerá dos valores de u_l e u_r . Como exemplo, seja considerada novamente a equação de Burgers $u_t + uu_x$ e o dados iniciais constantes da condicional (2.19).

Caso I: $u_l > u_r$.

Neste caso irá existir uma única solução fraca

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & \text{se } x < st, \\ u_r, & \text{se } x > st, \end{cases} \quad (2.20)$$

onde

$$s = \frac{u_r + u_l}{2}. \quad (2.21)$$

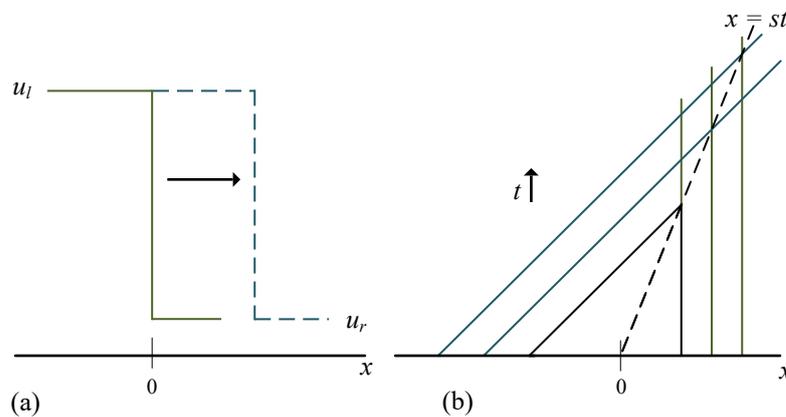


Figura 2.5: Solução de onda de choque e características. Adaptado de [15].

Neste caso, a solução será uma onda de choque e em cada uma das regiões onde u é constante, as características entram no choque à medida que o tempo avança, conforme exemplificado na Figura 2.5.

Caso II: $u_l < u_r$.

Para este caso existirão uma infinidade de soluções fracas. A solução apresentada na

Figura 2.6 é uma delas; uma descontinuidade que se propaga com velocidade s , porém, é possível observar que as características estão saindo do choque e que esta solução não é estável mediante à perturbações, pois uma mínima porção de viscosidade adicionada muda a solução por completo. Logo, do ponto de vista físico, esta solução não possui significado e portanto não é a solução entrópica (fisicamente aceitável).

Uma outra possibilidade de solução é

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & \text{se } x < u_l t, \\ x/t, & \text{se } u_l t \leq x \leq u_r t, \\ u_r, & \text{se } x > u_r t. \end{cases} \quad (2.22)$$

A solução (2.22) é uma onda de rarefação (Fig. 2.7) e estável mediante a perturbações e, portanto, é a solução entrópica do problema. Essas ondas de rarefação surgem de modificações no método das características em regiões do plano $x-t$ em que as curvas características não estão definidas.

Considera-se novamente o **Caso II** em um domínio $-\infty < u_l < u_r < \infty$. De modo inicial fornece-se um argumento intuitivo. Seja $u = u(x, t)$ que denota a única solução entrópica do problema de valor inicial em questão. Então, para cada $k > 0$, as funções escalares

$$u_k(x, t) = u(kx, kt)$$

são também soluções entrópicas do problema. Então, a partir da unicidade,

$$u(x, t) = u_k(x, t) = u(kx, kt) \quad \forall k > 0 \text{ e } \forall (x, t) \in Q,$$

Logo,

$$u\left(x, \frac{1}{k}\right) = u(kx, 1) \quad \forall k > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}.$$

Como consequência, u deve ser da forma

$$u(x, t) = r(\eta) \quad \text{com } \eta = x/t$$

De modo formal, isto fornece para r a seguinte equação:

$$-\eta \frac{dr}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} f(r) = \{-\eta + f'(r)\} \frac{dr}{d\eta} = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}, \quad (2.23)$$

e as condições de contorno:

$$r(-\infty) = u_l, \quad r(+\infty) = u_r. \quad (2.24)$$

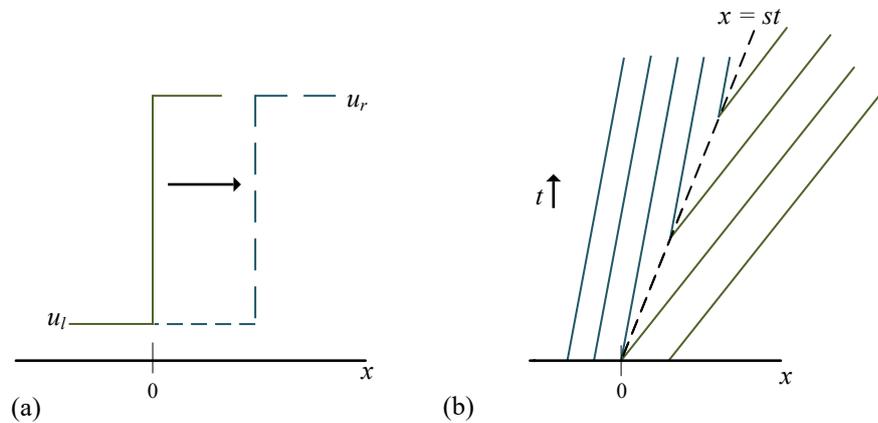


Figura 2.6: Solução não-entrópica. Adaptado de [15].

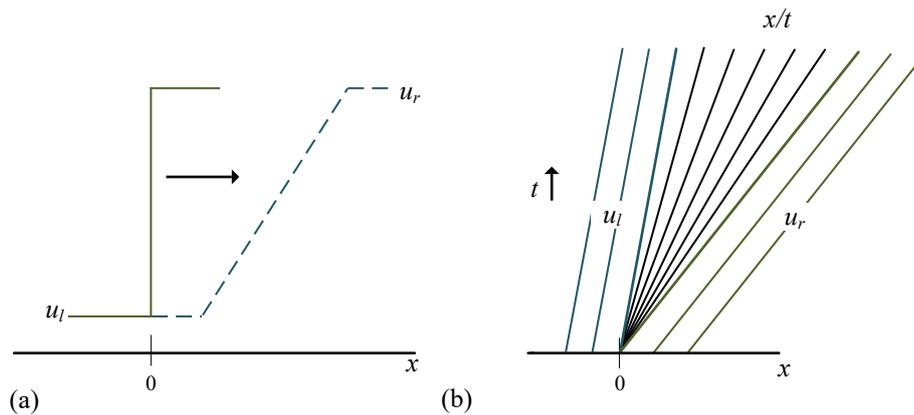


Figura 2.7: Solução de onda de rarefação e características. Adaptado de [15].

Definição 2.4. A solução do problema de valor de contorno (2.23) e (2.24) (em um senso apropriado) é dita uma onda de rarefação.

2.5 Condições de Entropia

Foi visto anteriormente que as soluções fracas de problemas de valor inicial podem não ser únicas, apresentando múltiplas soluções possíveis, demandando assim uma condição adicional para determinar a solução única entrópica, ou seja, fisicamente aceitável. Para essas condições dar-se o nome de condições de entropia [15, 20, 25].

Condição I (Condição de Entropia de Lax) . Uma descontinuidade se propagando com velocidade s dada pela condição de choque de Rankine-Hugoniot (Eq. 2.13) satisfaz a condição de entropia se

$$f'(u_l) > s > f'(u_r), \quad (2.25)$$

onde $f'(u)$ é a velocidade característica e também a inclinação da curva característica. Caso f seja convexa a velocidade do choque s deve estar entre $f'(u_l)$ e $f'(u_r)$, então o critério de Lax (Eq. 2.25) se reduz ao requisito de que

$$f'(u_l) > f'(u_r),$$

que novamente por convexidade requer que

$$u_l > u_r.$$

Esta condição pode ser ainda reescrita de uma forma mais geral, que devido a Oleinik (1957), aplica-se também a funções de fluxo f escalares não-convexas.

Condição II (Condição de Entropia de Lax-Oleinik). $u(x, t)$ é uma solução entrópica se toda descontinuidade tem a seguinte propriedade:

$$\frac{f(u) - f(u_l)}{u - u_l} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u_r)}{u - u_r}, \quad \forall u \text{ entre } u_l \text{ e } u_r. \quad (2.26)$$

Para f convexa, este requerimento se reduz a equação (2.25). Considera-se ainda uma outra forma de condição de entropia, que é embasada na distribuição de características em um leque de rarefação. Sendo assim, se $u(x, t)$ é uma função crescente de x em alguma região, então as características se espalham caso $f'' > 0$. Em adição, a taxa de espalhamento pode ser quantificada fornecendo a seguinte condição, também devido a Oleinik (1957) .

Condição III (Condição de Entropia de Oleinik). $u(x, t)$ é uma solução entrópica se existir uma constante $E > 0$ tal que, para todo $a > 0$, $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{u(x + a, t) - u(x, t)}{a} \leq \frac{E}{t}, \quad \forall (x, t) \in Q \quad (2.27)$$

onde E é uma constante independente positiva de x , t e a .

2.6 Funções de Fluxo

2.6.1 Funções de Fluxo Convexas

Uma função f pode ser convexa ou côncava de u (em ambos os casos serão ditas convexas), o que significa que $f''(u)$ não irá mudar de sinal. A equação de Burgers (Eq. 2.6) apresentada anteriormente é convexa, desde que $f''(u) \equiv 1$. Um outro exemplo de função de fluxo que se encaixa nessa classificação é a função para o modelo de fluxo de trânsito:

$$f(\rho) = \rho u_{max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right) \quad (2.28)$$

onde ρ denota a densidade de carros, ρ_{max} o valor em que os carros estão com os pára-choques em contato e u_{max} a velocidade limite da via. Para este caso, f'' é constante e negativa em qualquer lugar onde $u_{max} > 0$. Isso implica que a velocidade característica $f'(u)$ varia monotonicamente conforme u varia.

Quando f é convexa a solução para o problema de Riemann será sempre, ou uma onda de choque ou uma onda de rarefação.

2.6.2 Caso não-Convexo e Construção Geométrica de Oleinik

As funções de fluxo vistas anteriormente foram assumidas como sendo funções convexas ou côncavas de u . Contudo, se a função de fluxo é não-convexa então o problema de Riemann se torna mais interessante, podendo envolver uma combinação de ondas de choque e rarefação.

Cita-se a equação de Buckley-Leverett como exemplo de surgimento de funções de fluxo não-convexas (Eq. 2.29, Fig. 2.9), onde ocorrerá a combinação de ondas de choque e rarefação conforme apresentado na Figura 2.8. A equação consiste basicamente em um modelo para escoamento bifásico imiscível em meios porosos com aplicação em simulação de reservatórios de petróleo e terá mais ênfase em tópicos posteriores, no qual

$$f(u) = \frac{u^2}{u^2 + M(1-u)^2} \quad (2.29)$$

onde M é uma constante.

Para se determinar a correta solução fraca para uma lei de conservação escalar não-convexa é necessário um critério de admissibilidade para as ondas de choque que se aplicam

a este caso.

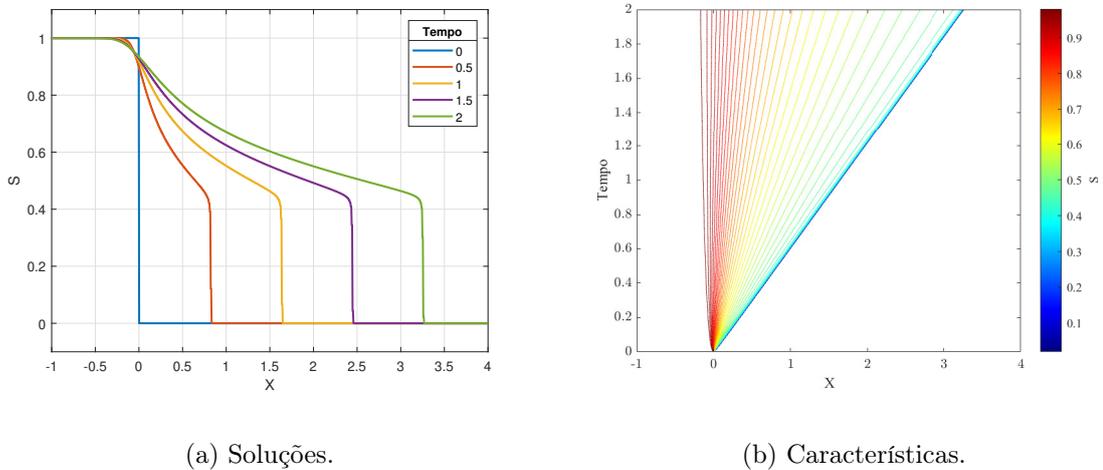


Figura 2.8: Exemplo para o problema de Buckley-Leverett solucionado numericamente por um método Lagrangeano-Euleriano do tipo diferenças finitas.

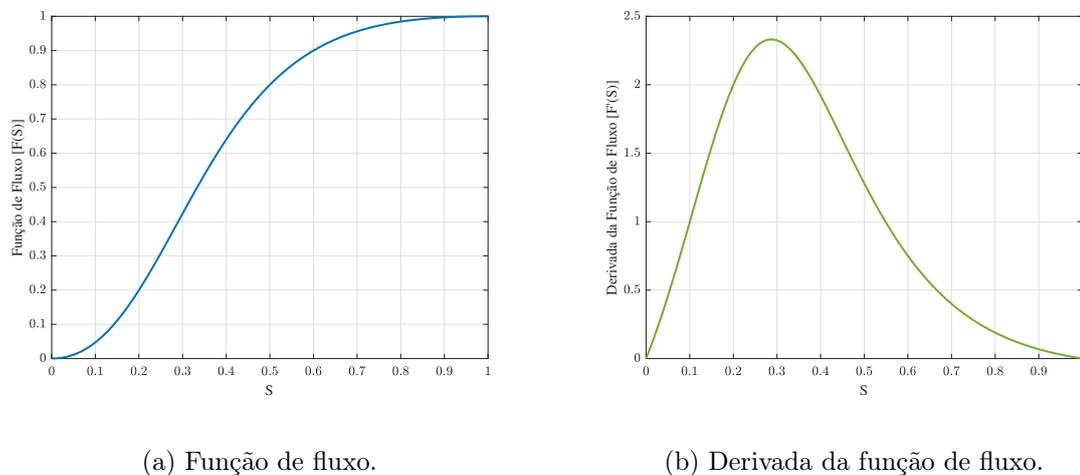


Figura 2.9: Função de fluxo e derivada da função de fluxo da equação (2.29).

Em geral, a condição de entropia de Oleinik pode ser utilizada como princípio para construção da solução analítica do problema de Riemann para problemas não-convexos através de uma abordagem geométrica denominada construção geométrica de Oleinik. Em casos onde ocorra a combinação de choques e rarefações, a construção geométrica de Oleinik pode ser realizada através da determinação dos pontos de tangência da envoltória da função de fluxo que são obtidos através do cálculo do zero da equação (2.30) para ondas de choque características à direita e a partir do cálculo do zero da equação (2.31)

para ondas de choque características à esquerda,

$$\frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} - f'(u_r) = 0, \text{ fixando } u_l, \quad (2.30)$$

$$\frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} - f'(u_l) = 0, \text{ fixando } u_r. \quad (2.31)$$

Por enquanto, será mantido o foco em um exemplo simples da aplicação da construção geométrica de Oleinik para a função de fluxo (Eq. 2.29) conforme ilustrado na Figura 2.10.

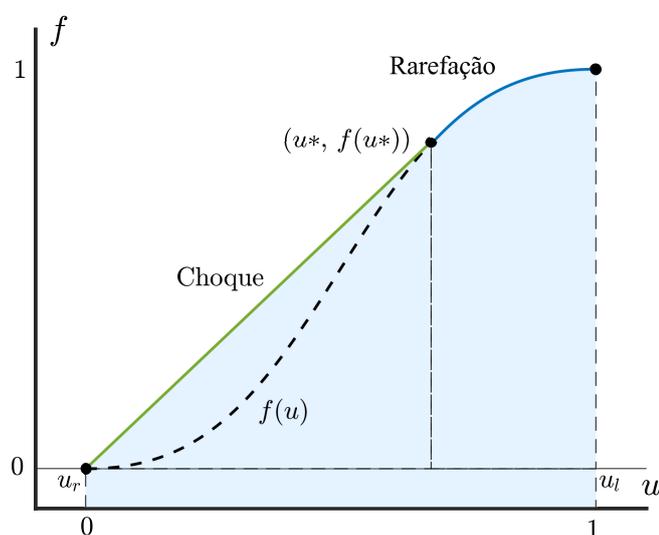


Figura 2.10: Construção geométrica de Oleinik. Adaptado de [15].

A solução que satisfaz a entropia para um problema de Riemann não-convexo pode ser determinada a partir do gráfico da função de fluxo $f(u)$ (Fig. 2.10) de maneira simples. Se $u_r < u_l$, então é construída uma envoltória convexa do conjunto $\{(u, y) : u_r \leq u \leq u_l \text{ e } y \leq f(u)\}$. A envoltória convexa é o menor conjunto convexo contendo o conjunto original (o exemplo mostrado na Figura 2.10 é para o caso em que $u_l = 1$ e $u_r = 0$) [15].

É possível observar que o limite superior deste conjunto é composto por um segmento de reta de $(0,0)$ à $(u^*, f(u^*))$ e segue $y = f(u)$ até $(1,1)$ e que o ponto de tangência u^* é precisamente o valor pós-choque. O seguimento de reta representa um salto de $u = 0$ para $u = u^*$, e o seguimento onde o limite segue $f(u)$ é a onda de rarefação. Isso funcionará de forma mais geral para quaisquer dois estados e qualquer f , desde que $u_l > u_r$. Isto posto, é possível verificar ainda que a inclinação do segmento de reta é igual à velocidade do choque e o fato desta reta ser tangente à curva $f(u)$ em u^* significa que $s = f'(u^*)$.

Logo, o choque se move na mesma velocidade que a característica nesta borda do leque de rarefação [15].

No entanto, se o choque estivesse conectado a algum ponto $\hat{u} < u^*$, então a velocidade do choque $f(\hat{u})/\hat{u}$ seria menor que $f'(\hat{u})$, gerando uma solução de valor triplo. Por outro lado, se o choque fosse conectado a algum ponto acima de u^* , então a condição de entropia de Oleinik seria violada, o que explica a exigência de tangência, que surge naturalmente da construção da envoltória convexa. A mesma construção funciona para qualquer $u_r < u_l$ situado em $[0,1]$. Caso $u_l < u_r$, a ideia funciona, mas, em vez disso, devemos construir a solução através da envoltória côncava [15].

Observação 2.6.2. Se f é convexa, então a construção da envoltória convexa fornece um único segmento de reta (um único choque) se $u_l > u_r$ ou a própria função f (uma única rarefação) se $u_l < u_r$.

2.6.3 Extensão da Construção Geométrica de Oleinik para Funções de Fluxo Descontínuas

Uma extensão da construção geométrica de Oleinik para problemas de Riemann com funções de fluxo descontínuas em relação à coordenada espacial Z foi abordada por Kasschieter [12]. Como generalização o seguinte problema foi considerado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_l(u)}{\partial Z} &= 0, & Z < 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_r(u)}{\partial Z} &= 0, & Z > 0, \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$u(Z, 0) = \begin{cases} u_l^0, & Z < 0, \\ u_r^0, & Z > 0, \end{cases}$$

$$f_l(u_l) = f_r(u_r).$$

Aqui $f_l, f_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ são assumidos ser duas vezes diferenciáveis tal que $f_l(0) = f_r(0)$ e $f_l(1) = f_r(1)$. A última expressão da equação (2.32) expressa a conservação da massa e representa a condição de Rankine-Hugoniot para choques estacionários, enquanto os

estados esquerdo e direito do choque estacionário são dados como segue [2, 12]:

$$u_l(t) = \lim_{Z \uparrow 0} u(x, t), u_r(t) = \lim_{Z \downarrow 0} u(x, t), t > 0. \quad (2.33)$$

Em seus estudos, Kaasschieter apresentou duas desigualdades de entropia, uma para velocidades de choque s diferentes de zero e outra para velocidades de choque iguais a zero. Dessa forma, Kaasschieter constatou que se $s \neq 0$, todos os saltos satisfazem a condição de entropia de Oleinik, de tal forma que para $Z < 0$ existirá um grupo de ondas negativas, para $Z > 0$ um grupo de ondas positivas e em $Z = 0$ um choque estacionário que separa esses dois grupos de ondas. Portanto, todas as ondas não estacionárias atendem a condição de entropia de Oleinik clássica para uma das funções de fluxo e a construção é realizada através da envoltória côncava ou convexa de uma das funções de fluxo, enquanto que os estados de conexão do choque estacionário u_l e u_r podem ser obtidos de maneira geométrica através de uma linha horizontal que conecta as funções de fluxo, conforme exemplificado na Figura 2.11.

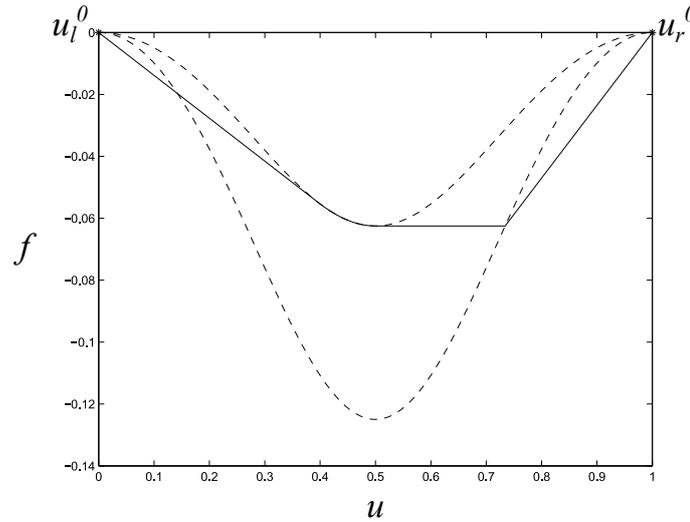


Figura 2.11: Construção geométrica. Adaptado de [12].

Contudo, para que se possa realizar a seleção apropriada de tais estados, a seguinte desigualdade de entropia deve ser satisfeita:

$$f'_l(u_l) \succeq 0 \text{ ou } f'_r(u_r) \preceq 0. \quad (2.34)$$

Observação 2.6.3. A notação $f'_l(u_l) \succeq 0$ é usada se $f'_l(u_l) \geq 0$ e $\lim_{u \uparrow u_l} \text{sign}(f'_l(u)) = 1$ ou $\lim_{u \downarrow u_l} \text{sign}(f'_l(u)) = 1$. De maneira análoga a notação $f'_r(u_r) \preceq 0$ é usada se $f'_r(u_r) \leq 0$ e $\lim_{u \uparrow u_r} \text{sign}(f'_r(u)) = -1$ ou $\lim_{u \downarrow u_r} \text{sign}(f'_r(u)) = -1$.

Capítulo 3

Escoamento Bifásico de Fluidos Newtonianos e não-Newtonianos em Meios Porosos

Neste capítulo, o enfoque se volta para apresentação do modelo matemático para o deslocamento imiscível de fluidos Newtonianos e não-Newtonianos em meios porosos. Para tal, é realizada uma breve abordagem acerca das principais distinções entre os fluidos Newtonianos e Não-Newtonianos e os principais modelos reológicos existentes. Em adição, é realizada também uma breve abordagem da lei da Darcy para fluidos Newtonianos e da sua versão modificada para fluidos não-Newtonianos do tipo plástico de Bingham.

3.1 Fluidos Newtonianos

De maneira introdutória, tomemos como exemplo a Figura 3.1, que mostra o comportamento de um elemento de fluido entre duas placas infinitas [11].

No instante de tempo inicial t o elemento de fluido se encontra em repouso. Após, é aplicada uma força constante para direita ΔF na placa superior que é arrastada através do fluido com velocidade constante Δu enquanto a placa inferior se mantém fixa. A ação de cisalhamento da placa superior produz uma tensão de cisalhamento τ_{yx} aplicada ao elemento de fluido dada por

$$\tau_{yx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y} = \frac{dF_x}{dA_y} \quad (3.1)$$

na qual ΔF_x é a força exercida pela placa sobre o elemento de fluido e ΔA_y é a área de contato do elemento fluido com a placa. No intervalo de tempo Δt , a taxa de deformação

(taxa de cisalhamento) $\dot{\gamma}$ do fluido é dada por

$$\dot{\gamma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt} \quad (3.2)$$

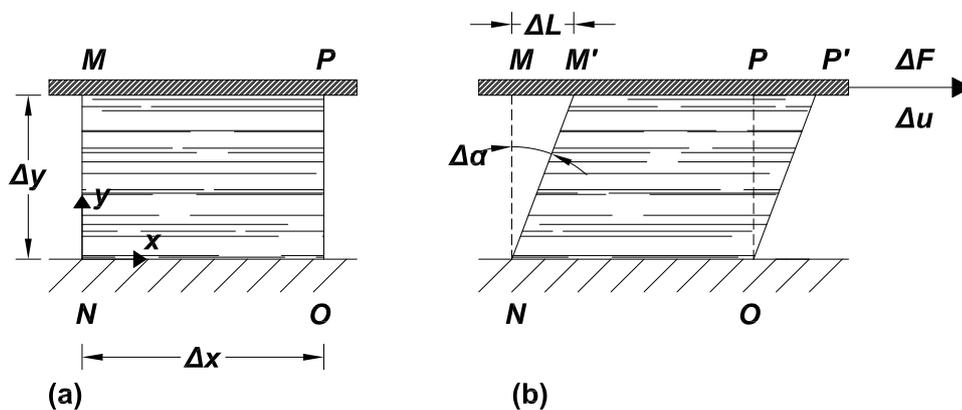


Figura 3.1: (a) Elemento de fluido no tempo t . (b) Deformação do elemento de fluido no tempo $t + \Delta t$. Adaptado de [11].

É possível expressar $\Delta\alpha/\Delta t$ em função de outras variáveis, uma vez que a distância ΔL entre os pontos M e M' é expressa por

$$\Delta L = \Delta u \Delta t \quad (3.3)$$

Para pequenos ângulos temos que

$$\Delta L = \Delta y \Delta\alpha \quad (3.4)$$

Igualando as equações (3.3) e (3.4) e tomando o limite de ambos os lados da expressão temos

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{du}{dy} \quad (3.5)$$

Sendo assim, o elemento de fluido experimenta uma taxa de cisalhamento du/dy quando é submetido à uma tensão de cisalhamento τ_{yx} obedecendo a seguinte proporcionalidade

$$\tau_{yx} \propto \frac{du}{dy} \quad (3.6)$$

Os fluidos para os quais a expressão (3.6) é válida são ditos Newtonianos. A água e o

óleo em condições de pressão e temperatura ambiente são exemplos de fluidos Newtonianos. Neste caso, a viscosidade dinâmica μ é a constante de proporcionalidade da equação (3.6) que quando considerada gera a equação (3.7), mais conhecida como Lei de Newton para viscosidade, e unidimensional neste caso em particular, dada por

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad (3.7)$$

3.2 Lei de Darcy para Fluidos Newtonianos

Conforme relatado por Wu et al. (2015), a Lei de Darcy é uma relação empírica ou fenomenológica capaz de descrever o fluxo de fluidos em meios porosos que são impulsivados por um gradiente de pressão e energia potencial. A Lei de Darcy possui diversas aplicações no ramo da mecânica nos fluidos e fenômenos de transporte. Uma destas aplicações é o fluxo bifásico imiscível de fluidos em reservatórios de petróleo. Apesar de a Lei de Darcy ter sido formulada originalmente para fluxo monofásico, ela foi estendida de maneira a permitir a descrição de fluxo para múltiplos fluidos imiscíveis. A Lei de Darcy generalizada para o fluxo multifásico simultâneo imiscível de fluidos Newtonianos em um sistema de meio poroso, isotérmico ou não isotérmico é representada como:

$$\vec{u}_i = -\frac{Kk_{ri}}{\mu_i}(\nabla P_i - \rho_i g \nabla Z), \quad i = w, o, \quad (3.8)$$

onde \vec{u}_i é um vetor da velocidade Darcy ou vazão volumétrica por unidade de área da fase fluida i , com i sendo o índice da fase fluida; P_i , μ_i e ρ_i denotam pressão, viscosidade e massa específica do fluido da fase i , respectivamente; Z é a coordenada vertical, com direção positiva para baixo; K é a permeabilidade absoluta ou intrínseca da rocha; k_{ri} é a permeabilidade relativa à fase fluida i ; e g é a constante gravitacional.

3.3 Modelo Matemático para Fluidos Newtonianos

Com o intuito de se deduzir o modelo matemático para fluxo bifásico para fluidos Newtonianos desenvolvido por Buckley e Leverett através do conceito de fluxo fracionário, seja considerado a título de exemplo o deslocamento imiscível de óleo por água. Logo, a conservação de massa é mantida dentro das fases de água e óleo, que são designadas pelos

subscritos w e o , respectivamente [29]:

$$-\nabla \cdot (\rho_i \vec{u}_i) + q_i = \frac{\partial(\rho_i S_i \phi)}{\partial t}, \quad i = w, o, \quad (3.9)$$

onde q_i é um termo fonte ou sumidouro, ϕ é a porosidade da rocha e S_i a saturação das fases.

A solução das equações (3.8) e (3.9) para um fluxo em uma dada geometria é capaz de propiciar a obtenção das distribuições de pressão e saturação, assim como das velocidades de fluxo de fase em qualquer ponto (x, y, z) e tempo no meio poroso. É possível descrever o deslocamento de maneira simples desprezando q_i e supondo que o fluxo ocorra de maneira unidimensional na direção do eixo x de forma que a equação pode ser reescrita como:

$$-\frac{\partial(\rho_o u_o)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho_o S_o \phi)}{\partial t} \quad (3.10)$$

e

$$-\frac{\partial(\rho_w u_w)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho_w S_w \phi)}{\partial t}. \quad (3.11)$$

As equações (3.10) e (3.11) podem ainda ser escritas em termos de taxa de fluxo volumétrico, $(q_o$ e $q_w)$, pela multiplicação de ambos os lados das equações por uma constante A , que representa a área de seção transversal ao fluxo. Dessa maneira, temos:

$$-\frac{\partial(\rho_o q_o)}{\partial x} = A \frac{\partial(\rho_o S_o \phi)}{\partial t} \quad (3.12)$$

e

$$-\frac{\partial(\rho_w q_w)}{\partial x} = A \frac{\partial(\rho_w S_w \phi)}{\partial t}, \quad (3.13)$$

e supondo que o sistema de fluxo ou de deslocamento seja incompressível, temos que ρ_o , ρ_w e ϕ são constantes e as equações (3.12) e (3.13) podem ser reescritas como:

$$-\frac{\partial q_o}{\partial x} = A \phi \frac{\partial S_o}{\partial t} \quad (3.14)$$

e

$$-\frac{\partial q_w}{\partial x} = A \phi \frac{\partial S_w}{\partial t}. \quad (3.15)$$

A soma das duas equações acima é igual a:

$$-\frac{\partial(q_o + q_w)}{\partial x} = A \phi \frac{\partial(S_o + S_w)}{\partial t} \quad (3.16)$$

Uma vez que $S_o + S_w = 1$, obtemos:

$$\frac{\partial(q_o + q_w)}{\partial x} = 0 \quad (3.17)$$

De acordo com Willhite (1986), o fluxo fracionário de uma fase fluida f_i , é definido como a fração do fluxo volumétrico da fase que está fluindo na posição x e no tempo t . Supondo que se tenha o fluxo de óleo e água, os respectivos fluxos fracionários são dados como:

$$f_o = \frac{q_o}{q_t} = \frac{q_o}{q_o + q_w} \quad (3.18)$$

e

$$f_w = \frac{q_w}{q_t} = \frac{q_w}{q_o + q_w} \quad (3.19)$$

onde $q_t = q_o + q_w$ é a taxa de fluxo volumétrico total. A Lei de Darcy (3.8) pode ser aplicada para uma área de seção de transversal A fornecendo:

$$q_i = -A \frac{K k_{r_i}}{\mu_i} (\nabla P_i - \rho_i g), \quad i = w, o \quad (3.20)$$

Substituindo as equações (3.18) e (3.19) na equação acima têm-se:

$$(1 - f_w)q_t = -A \frac{K k_{r_o}}{\mu_o} \left(\frac{\partial P_o}{\partial x} - \rho_o g \right) \quad (3.21)$$

e

$$f_w q_t = -A \frac{K k_{r_w}}{\mu_w} \left(\frac{\partial P_w}{\partial x} - \rho_w g \right). \quad (3.22)$$

Ao abstrair e rearranjar as duas equações acima é possível obter a função de fluxo para a fase w que é dada pela seguinte equação:

$$f_w = \frac{1 + \frac{A K k_{r_o}}{q_t \mu_o} \left(\frac{\partial P_c}{\partial x} - \Delta \rho g \right)}{1 + \frac{k_{r_o} \mu_w}{k_{r_w} \mu_o}}, \quad (3.23)$$

onde

$$\frac{\partial P_c}{\partial x} = \frac{\partial(P_o - P_w)}{\partial x}. \quad (3.24)$$

A equação (3.23) leva em consideração um fluxo vertical no qual o escoamento é influenciado pela aceleração da gravidade. Quando o fluxo é horizontal o problema se

reduz a seguinte equação:

$$f_w = \frac{1}{1 + \frac{k_{ro} \mu_w}{k_{rw} \mu_o}} \quad (3.25)$$

As permeabilidades relativas podem ser dadas através de expressões exponenciais. Uma das expressões mais conhecidas na engenharia de petróleo são as de Brooks e Corey (1964):

$$k_{rw} = k_{rw,max} \left(\frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right)^{n_w} \quad (3.26)$$

e

$$k_{ro} = k_{ro,max} \left(\frac{1 - S_w - S_{or}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right)^{n_o} \quad (3.27)$$

onde S_{or} é a saturação de óleo residual e S_{wc} é a saturação de água conata.

Substituindo as equações (3.26) e (3.27) em (3.25), admitindo que S_{or} e S_{wc} sejam iguais a zero e reescrevendo a equação chegamos na função de fluxo (2.29) apresentada no capítulo 2.

3.4 Fluidos não-Newtonianos

No caso de um fluido não-Newtoniano a curva de fluxo (tensão de cisalhamento *versus* taxa de cisalhamento) pode apresentar um comportamento não linear ou apresentar um comportamento linear sobre condição de existência de uma tensão cisalhante mínima para que haja deformação, ou seja, para fluidos não-Newtonianos a tensão de cisalhamento não é diretamente proporcional à taxa de deformação como nos casos em que os fluidos são regidos pela Lei de Newton para viscosidade. Em um fluido não-Newtoniano a viscosidade aparente (relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de cisalhamento) não é constante a dadas temperaturas e pressões, mas depende das condições de fluxo, como por exemplo, geometria do fluxo e taxa de cisalhamento [8].

Os fluidos não-Newtonianos podem ser classificados segundo o seu comportamento reológico como:

- (i) Viscoelásticos: possuem características de líquidos viscosos, quando submetidos à tensão de cisalhamento sofrem uma deformação e quando esta cessa, ocorre uma certa recuperação da deformação sofrida.

- (ii) Dependentes do tempo: apresentam propriedades que variam, além da tensão de cisalhamento, também variam com o tempo de aplicação da tensão, para um velocidade de cisalhamento constante. Esses fluidos ainda podem ser classificados como reopéticos ou tixotrópicos.
- (iii) Independentes do tempo: são aqueles cujas propriedades reológicas independem do tempo de aplicação da tensão de cisalhamento. Esses fluidos podem ser subdivididos em dois grupos: os com tensão de cisalhamento inicial (plástico de Bingham e Herschel-Bulkley) e sem tensão de cisalhamento inicial (dilatantes e pseudoplásticos).

3.4.1 Fluidos não-Newtonianos Independentes do Tempo

Para esta classe de fluidos o valor da taxa de cisalhamento em qualquer ponto dentro do fluido cisalhado é determinado apenas pelo valor atual da tensão de cisalhamento nesse ponto, ou seja, a taxa de cisalhamento depende apenas da tensão de cisalhamento ou vice-versa. Dependendo da relação de dependência entre $\dot{\gamma}$ e τ , os fluidos não-Newtonianos independentes do tempo podem ser subdivididos como [8]:

- (i) Pseudoplásticos: caracterizado por uma viscosidade aparente que diminui com o aumento da taxa de cisalhamento, tanto em taxas de cisalhamento muito baixas quanto muito altas.
- (ii) Dilatantes: os fluidos dilatantes são semelhantes aos sistemas pseudoplásticos, pois eles não apresentam tensão de escoamento, mas sua viscosidade aparente aumenta com o aumento da taxa de cisalhamento.
- (iii) Plásticos de Bingham: apresentam uma relação linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação, a partir do momento em que se atinge uma tensão de cisalhamento inicial.
- (iv) Herschel-Bulkley: assim como o plástico de Bingham, também necessita de uma tensão inicial para começar a deformar, porém, a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação não é linear.

O comportamento reológico para diversos tipos de fluidos não-Newtonianos independentes do tempo pode ser observado na Figura 3.2 que apresenta a dependência entre a taxa de cisalhamento e a tensão de cisalhamento.

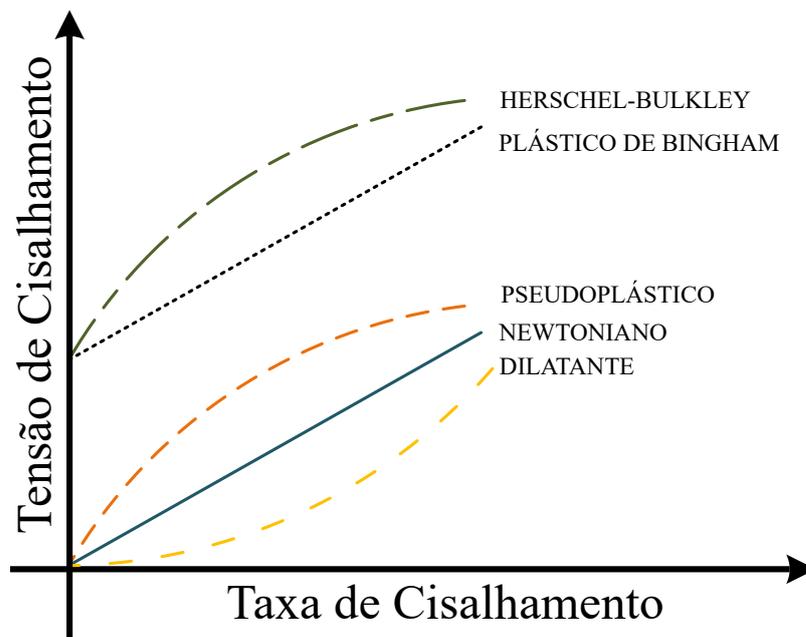


Figura 3.2: Comportamento reológico para fluidos não-Newtonianos independentes do tempo.

3.4.2 Fluidos não-Newtonianos Dependentes do Tempo

Existe uma série de fluidos em que o comportamento de fluxo não pode ser descrito através de uma equação reológica simples, como para o caso dos fluidos independentes do tempo, pois as viscosidades aparentes podem depender não apenas da taxa de cisalhamento, mas também do tempo de aplicação da tensão de cisalhamento. O comportamento de um fluido dependente do tempo pode ser subdividido em duas categorias [8]:

- (i) Tixotrópicos: um fluido exibe tixotropia se quando é cisalhado a uma taxa constante, sua viscosidade aparente (ou a tensão de cisalhamento correspondente) diminui com o tempo de cisalhamento.
- (ii) Reopéticos: inversamente aos fluidos tixotrópicos, a viscosidade destes fluidos aumenta com o tempo de aplicação da tensão, retornando à viscosidade inicial quando esta força cessa.

O comportamento reológico para os fluidos não-Newtonianos dependentes do tempo é apresentado na Figura 3.3, e apresenta a evolução temporal da tensão de cisalhamento a uma taxa de cisalhamento constante para os fluidos não-Newtonianos tixotrópicos e reopéticos.

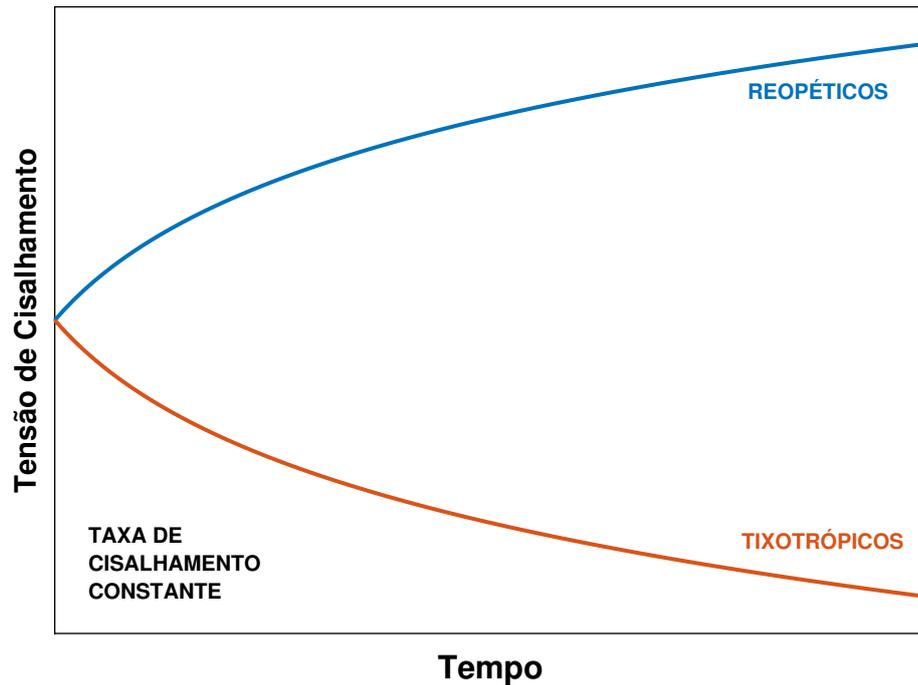


Figura 3.3: Comportamento reológico para os fluidos não-Newtonianos dependentes do tempo.

3.5 Modelos Reológicos

Os modelos reológicos são equações capazes de descrever a dependência da tensão de cisalhamento τ na taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$. Por objetividade, serão abordados apenas os modelos reológicos para os fluidos independentes do tempo. Dentre os modelos existentes, o mais geral é o de Herschel-Bulkley que pode ser descrito conforme a seguinte equação [10]:

$$\tau = H\dot{\gamma}^n + \tau_o, \quad (3.28)$$

onde H é o índice de consistência e n é o índice de comportamento de fluxo. A partir desse modelo é possível deduzir diversos outros modelos atribuindo valores para τ_o e n . Caso $\tau_o = 0$ se chega ao modelo conhecido como Lei de Potência conforme a equação (3.29). Caso $n = 1$ se alcança o modelo conhecido como plástico de Bingham conforme a equação (3.30).

$$\tau = H\dot{\gamma}^n \quad (3.29)$$

e

$$\tau = H\dot{\gamma} + \tau_o. \quad (3.30)$$

O modelo reológico para fluido Newtoniano também pode ser obtido a partir do modelo de Herschel-Bulkley quando se faz $\tau_o = 0$ e $n = 1$.

3.6 Lei de Darcy para o Plástico de Bingham

Para que se possa realizar uma descrição fenomenológica do fluxo de fluidos não-Newtonianos do tipo plástico de Bingham em meios porosos é necessário se levar em consideração a viscosidade aparente do modelo reológico em questão na Lei de Darcy. Para tal, diversos estudos experimentais e teóricos vem sendo conduzidos no intuito de propor modelos reológicos ou correlações empíricas para a viscosidade aparente e parâmetros de fluxo para um dado fluido não-Newtonianos e material poroso. Uma versão modificada da Lei de Darcy para fluidos não-Newtonianos do tipo plástico de Bingham é apresentada como segue [5, 21, 28, 29]:

$$\vec{u} = \begin{cases} -\frac{k}{\mu_B} \left(1 - \frac{G}{|\nabla\Phi|}\right) \nabla\Phi, & \text{se } |\nabla\Phi| > G, \\ 0, & \text{se } |\nabla\Phi| \leq G, \end{cases} \quad (3.31)$$

onde

$$\nabla\Phi = \nabla P + \rho g. \quad (3.32)$$

Uma dedução intuitiva possível para a obtenção da Lei de Darcy modificada (Eq. 3.31) a partir do modelo reológico para o plástico de Bingham apoiada na análise dimensional das variáveis é apresentada no Anexo A.

A viscosidade aparente pode ser obtida rearranjando a equação (3.31):

$$\mu_{nn} = \begin{cases} \frac{\mu_B}{\left(1 - \frac{G}{|\nabla\Phi|}\right)}, & \text{se } |\nabla\Phi| > G, \\ \infty, & \text{se } |\nabla\Phi| \leq G. \end{cases} \quad (3.33)$$

3.7 Modelo Matemático para Fluidos não-Newtonianos

Durante décadas, a análise do fluxo de fluidos não-Newtonianos em meios porosos tem sido objeto de substancial interesse devido ao seu valor para uma ampla gama de aplicações industriais, notavelmente na indústria petrolífera. O uso da viscosidade aparente para fluidos não-Newtonianos se faz necessário na equação de fluxo de Darcy modificada em virtude da influência exercida pela taxa de cisalhamento ou pelo gradiente de velocidade na viscosidade desses fluidos. Para tal, Wu (2015), propôs modelos capazes de prever o comportamento reológico para essa classe de fluidos.

Em particular, será abordado apenas o modelo para fluidos não-Newtonianos do tipo plástico de Bingham. A função de fluxo para a fase Newtoniana, considerando que ela é a fase deslocante (fase que desloca a fase não-Newtoniana) para fluxo vertical (com gravidade) pode ser representada da seguinte forma:

$$f_{ne} = \frac{1}{1 + \frac{k_{rnn}(S_{ne})}{k_{rne}(S_{ne})} \frac{\mu_{ne}}{\mu_{nn}(\nabla\phi_{nn}, S_{ne})}} + \frac{\frac{AKk_{rnn}(S_{ne})}{q_t\mu_{nn}(\nabla\phi_{nn}, S_{ne})} (\rho_{nn} - \rho_{ne}) g}{1 + \frac{k_{rnn}(S_{ne})}{k_{rne}(S_{ne})} \frac{\mu_{ne}}{\mu_{nn}(\nabla\phi_{nn}, S_{ne})}} \quad (3.34)$$

onde os subíndices nn e ne representam, respectivamente, as fases não-Newtoniana e Newtoniana. É possível observar que a principal diferença entre o modelo para fluidos Newtonianos e não-Newtonianos é que o segundo agora depende não só das permeabilidades relativas, mas também da viscosidade aparente μ_{nn} ou efetiva, onde a viscosidade aparente é considerada função da saturação da fase Newtoniana e do gradiente de potencial de fluxo:

$$\mu_{nn} = \mu_{nn}(\nabla\phi_{nn}, S_{ne}) \quad (3.35)$$

É possível reescrever o gradiente de potencial de fluxo como uma função da saturação da fase Newtoniana a partir da seguinte condição de restrição:

$$\frac{q_t}{A} + K \left[\frac{k_{rne}(S_{nn})}{\mu_{ne}} + \frac{k_{rnn}(S_{nn})}{\mu_{nn}} \right] \frac{\partial P}{\partial x} + K \left[\frac{\rho_{ne}k_{rne}(S_{nn})}{\mu_{ne}} + \frac{\rho_{nn}k_{rnn}(S_{nn})}{\mu_{nn}} \right] g = 0 \quad (3.36)$$

e posteriormente introduzindo a equação (3.33) na equação (3.36), se obtém a expressão para o gradiente de potencial de fluxo como função da saturação da fase Newtoniana:

$$-(\nabla\phi)_{S_{ne}} = -\rho_{nn}g + \frac{\frac{q_t}{AK} + \frac{k_{rnn}}{\mu_B} G + \left(\frac{k_{rne}}{\mu_{ne}} \rho_{ne} + \frac{k_{rnn}}{\mu_B} \rho_{nn} \right) g}{\frac{k_{rne}}{\mu_{ne}} + \frac{k_{rnn}}{\mu_B}} \quad (3.37)$$

Capítulo 4

Esquemas Numéricos por Diferenças Finitas para Leis de Conservação

Neste capítulo é realizada uma breve abordagem acerca do método das diferenças finitas, bem como a apresentação de dois esquemas numéricos para leis de conservação hiperbólicas com formulação por diferenças finitas utilizados na obtenção das soluções aproximadas dos problemas. Os esquemas em questão são os de Lax-Friedrichs clássico e um novo esquema Lagrangeano-Euleriano desenvolvido por Sepulveda (2015) que possui certas similaridades com o esquema de Lax-Friedrichs. No entanto, o esquema Lagrangeano-Euleriano possui certa superioridade por fornecer resultados com maior acurácia e também prevenir o surgimento de oscilações espúrias em descontinuidades. Por fim, uma extensão dos esquemas para problemas com funções de fluxo descontínuas também é apresentada.

4.1 Método das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas é uma técnica numérica utilizada para aproximar soluções de equações diferenciais. Ele é baseado na discretização do domínio das equações em pontos discretos e na aproximação das derivadas por diferenças finitas [1].

Para melhor entendimento, seja definida uma malha com pontos no plano (x, t) e sejam h e k números positivos que representam o intervalo espacial e temporal da malha. Então para os números inteiros arbitrários n e j , a malha será constituída dos pontos $(x_j, t_n) = (jh, nk)$, conforme apresentado na Figura 4.1. Uma função contínua u arbitrária, pode ser representada em pontos discretos, e a função discreta torna-se uma aproximação da função contínua. Para uma função u definida na malha a notação u_j^n é utilizada para

representar a solução $u(x_j, t_n)$ nos pontos da malha (x_j, t_n) . Para um valor fixo de n , o conjunto de pontos (x_j, t_n) é chamado de nível da malha n [23].

Em uma equação diferencial parcial, as derivadas de uma dada função u podem ser substituídas por uma aproximação por diferenças finitas, que podem ser obtidas a partir da expansão em série de Taylor ou através de outros artifícios matemáticos [1, 23]. Uma aproximação possível para a derivada de u em relação a x seria

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h}, \quad (4.1)$$

desde que h seja um número fixo diferente de zero, a derivada de u em relação a x pode ser aproximada como

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) \approx \frac{u(x_j + h, t_n) - u(x_j, t_n)}{h}. \quad (4.2)$$

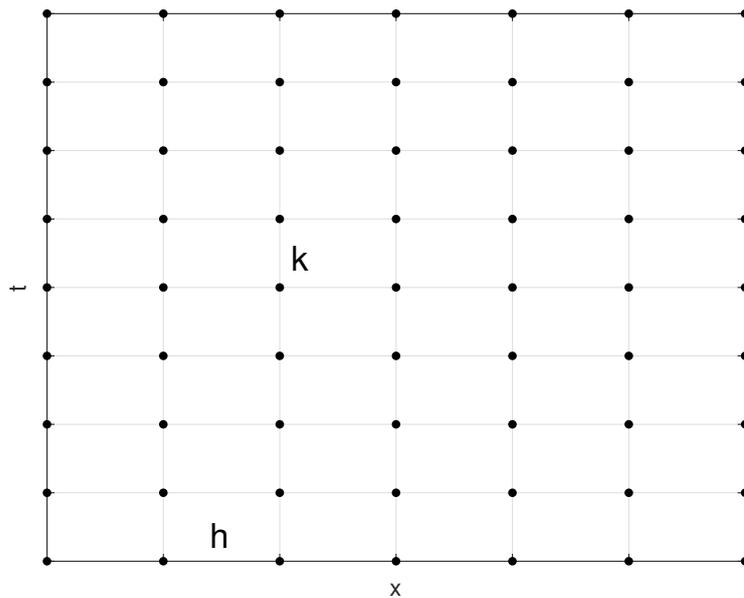


Figura 4.1: Malha para o método das diferenças finitas.

Em virtude das diversas formas de aproximação das derivadas, é possível se obter diversos esquemas numéricos, com diferentes ordens de acurácia, complexidade de implementação e custo computacional. Dessa forma, cada esquema numérico pode se adequar melhor à uma determinada classe de problema.

4.2 Métodos Conservativos

A título de exemplo supõe-se que objetivo seja resolver numericamente uma lei de conservação não linear. Nesse caso, surgirão desafios extras que não se apresentam em problemas lineares, podendo gerar dificuldades adicionais na resolução numérica. Uma dessas dificuldades é a possível "instabilidade não linear" do método, ou seja, mesmo que as versões linearizadas pareçam estáveis, o método pode ser instável no problema não linear, especialmente quando ocorrem oscilações. Além disso, o método pode convergir para uma solução que não é uma solução fraca da equação original ou, pode ser ainda a solução fraca incorreta que não atende à condição de entropia [14, 15].

Contudo, existe uma solução simples e natural que pode garantir que os métodos numéricos não venha a convergir para soluções incorretas. A solução consiste em reescrever o método em sua forma conservativa, que é uma condição necessária para garantir que a solução obtida seja válida. Em vista disso, os métodos numéricos utilizados no presente trabalho serão usados essencialmente em sua forma conservativa. Essa forma é bastante específica e deve ser seguida estritamente para garantir a precisão dos resultados. Para que o método seja conservativo, ele deve ter a seguinte forma [7, 14, 15]:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} [F(U_{j-p}^n, U_{j-p+1}^n, \dots, U_{j+q}^n) - F(U_{j-p-1}^n, U_{j-p}^n, \dots, U_{j+q-1}^n)], \quad (4.3)$$

para alguma função F dos argumentos $p+q+1$, onde F é dita a função de fluxo numérico.

Para um caso particular simples, em que $p = 0$ e $q = 1$, F é função apenas de duas variáveis e a equação se torna:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} [F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)]. \quad (4.4)$$

4.3 Esquema de Lax-Friedrichs

O esquema de Lax-Friedrichs é um método numérico explícito e com acurácia de primeira ordem, que pode ser empregado para solucionar equações diferenciais parciais hiperbólicas, baseado no esquema FTCS (*Forward in Time, Centered in Space*), ou seja, centrado no espaço e avançado no tempo, cuja o tempo anterior é avaliado como uma média dos pontos espaciais $j - 1$ e $j + 1$ conforme o estêncil apresentado na Figura 4.2. O esquema de Lax-Friedrichs é um esquema consistente, monótono e possui em sua essência uma viscosidade artificial suficiente para que seja estável. Dessa forma o método é capaz de controlar a dissipação numérica e assegurar que a solução não produza oscilações espúrias

ou negatividades onde a solução real é sempre positiva. No entanto, devido sua difusidade, ele suaviza as soluções em regiões onde a solução real contém descontinuidades, que pode ser excessiva em certas ocasiões e promover a perda de informações importantes, uma vez que o esquema possui um nível de difusão fixo [23, 13, 15].

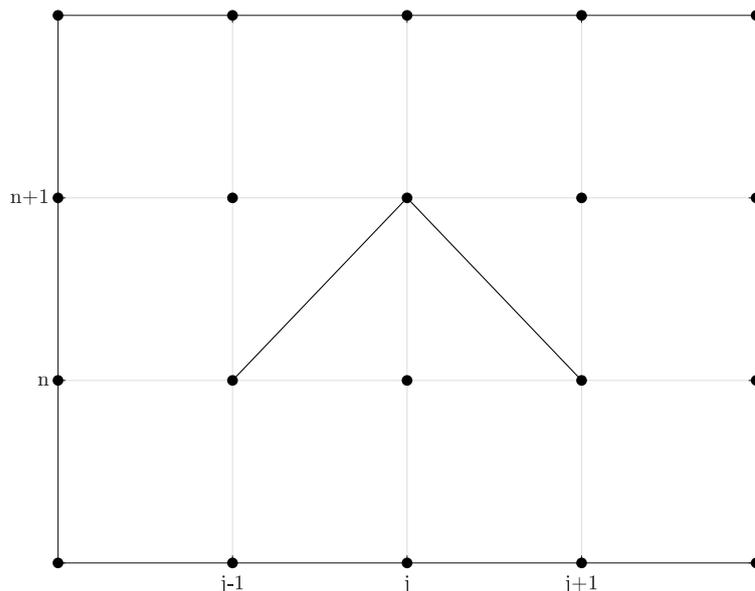


Figura 4.2: Estêncil para o esquema de Lax-Friedrichs.

4.3.1 Forma não Conservativa

O esquema clássico de Lax-Friedrichs em sua forma não conservativa é dado como [14, 26]:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)) \quad (4.5)$$

sendo Δx o passo de espaço, Δt o passo de tempo, U_j^{n+1} a solução aproximada para uma determinada quantidade conservada no nível de tempo $n + 1$, j os pontos da malha respectivos à discretização espacial e n os pontos da malha respectivos a discretização temporal. A condição de CFL (Courant, Friedrichs and Lewy, 1928) para este método é dada por:

$$\max_j |f'(U_j^n)| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (4.6)$$

4.3.2 Forma Conservativa

O esquema clássico de Lax-Friedrichs pode ser escrito em sua forma conservativa, o que permite que o método seja capaz de solucionar leis de conservação não-lineares de maneira adequada. Isto posto, o esquema é representado da seguinte forma [26]:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)) \quad (4.7)$$

As funções $F(U_j^n, U_{j+1}^n)$ e $F(U_{j-1}^n, U_j^n)$ são ditas os fluxos numéricos e são dadas como:

$$F(U_{j-1}^n, U_j^n) = \frac{1}{2}(f(U_{j-1}^n) + f(U_j^n)) - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(U_j^n - U_{j-1}^n), \quad (4.8)$$

$$F(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{1}{2}(f(U_j^n) + f(U_{j+1}^n)) - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(U_{j+1}^n - U_j^n). \quad (4.9)$$

com a mesma condição de CFL apresentada acima.

4.4 Esquema Lagrangeano-Euleriano do tipo Diferenças Finitas

O presente esquema foi desenvolvido por Abreu e Sepulveda (2015), e consiste em uma nova classe de esquemas Lagrangeanos-Eulerianos do tipo diferenças finitas para leis de conservação hiperbólicas. O método possui uma formulação por diferenças finitas equivalente a uma abordagem Lagrangeana-Euleriana baseada em um método de volumes finitos localmente conservativo.

Para construção formal do problema Sepulveda (2015) considerou o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} &= 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(x, 0) &= \eta(x), \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned} \quad (4.10)$$

e para construção do procedimento Lagrangeano-Euleriano, reescreveu a lei de conservação em um espaço-tempo localmente conservativo na forma divergente generalizada

$$\nabla_{t,x} \cdot \begin{bmatrix} u \\ F(u) \end{bmatrix} = 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.11)$$

Com objetivo de obtenção da solução aproximada do problema através do método Lagrangeano-Euleriano, a região plana $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ = \{(x, t); -\infty < x < \infty; t \geq 0\}$ é substituída por uma malha $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} = \{(j, n); j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots\}$ considerando as sequências $U^n = (U^n)_j$, $j \in \mathbb{Z}$ para $n=0,1,2,\dots$, para uma dada malha com $h > 0$ e nível de tempo

$$t^n = \sum_{i=0}^n \Delta t^i, \quad (4.12)$$

com $t^0 = 0$, para um passo de tempo não constante Δt^i . Sendo assim, no passo de tempo t^n , têm-se $x_j^n = jh$, $x_{j+\frac{1}{2}}^n = jh + h/2$, em uma malha uniforme local, onde $h_j^n = \Delta x^n = x_{j+\frac{1}{2}}^n - x_{j-\frac{1}{2}}^n = h$. Para uma malha não uniforme $h_j^{n+1} = \bar{\Delta} x^{n+1} = \bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \bar{x}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}$ para um nível de tempo t^{n+1} , a solução de u nas células $[x_{j+\frac{1}{2}}^n, x_{j-\frac{1}{2}}^n]$ e $[\bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}, \bar{x}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}]$ é definida da seguinte maneira

$$U(x_j, t^n) = U_j^n = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}^n}^{x_{j+\frac{1}{2}}^n} u(x, t^n) dx, \quad j \in \mathbb{Z}$$

e

$$\bar{U}_j^{n+1} = \frac{1}{h_j^{n+1}} \int_{\bar{x}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}}^{\bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}} u(x, t^{n+1}) dx, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (4.13)$$

Como continuidade do processo de construção do método, [22] levou em consideração volumes finitos com células centradas na estrutura Lagrangeana conforme mostrado na Figura 4.3, e fez o uso do teorema da divergência para provar a existência de uma conservação local discreta sobre o volume de controle $V_j^n = \{(t, x)/t^n \leq t \leq t^{n+1}, \sigma_j^n(t) \leq x \leq \sigma_{j+1}^n(t)\}$, onde $\sigma_j^n(t)$ é uma curva parametrizada, de tal forma que $\sigma_j^n(t^n) = x_j^n$.

E a conservação local é expressa por:

$$\int_{\bar{x}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}}^{\bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}} u(x, t^{n+1}) dx = \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} u(x, t^n) dx, \quad (4.14)$$

onde se define $\bar{x}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = \sigma_j^n(t^{n+1})$ e $\bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \sigma_{j+1}^n(t^{n+1})$.

Após se utilizar a equação com a lei de conservação 4.14 se obtém as aproximações locais, que são definidas como

$$\bar{U}_j^{n+1} = \frac{1}{h} [c_{0j} \bar{U}_{j-1}^{n+1} + c_{1j} \bar{U}_j^{n+1}], \quad (4.15)$$

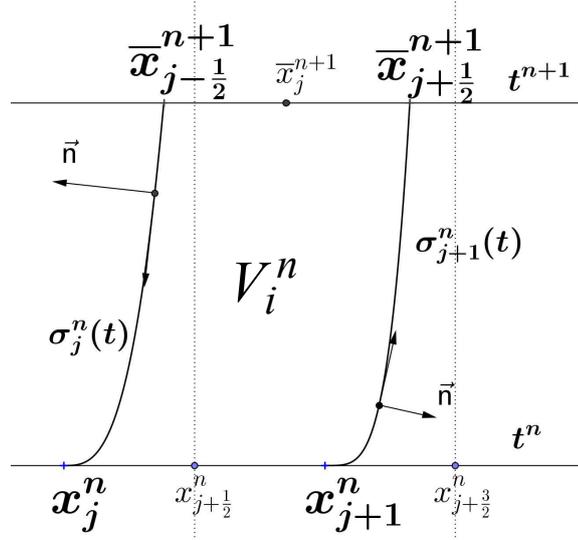


Figura 4.3: Arquitetura geométrica do volume de controle espaço-temporal local Lagrangeano-Euleriano. Adaptado de [22].

onde $c_{0j} = \frac{h}{2} + f_j^n k^n$, $c_{1j} = h - c_{0j}$ e $f_j^n \approx \frac{F(u)}{u}$.

Uma vez que

$$\begin{aligned} \bar{U}_j^{n+1} &= \frac{1}{h_j^{n+1}} \int_{\bar{x}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}}^{\bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}} u(x, t^{n+1}) dx = \frac{1}{h_j^{n+1}} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} u(x, t^n) dx \\ &= \frac{1}{h_j^{n+1}} \frac{1}{2} h [U_j^n + U_{j+1}^n] = \frac{1}{2} [U_j^n + U_{j+1}^n], \end{aligned} \quad (4.16)$$

é possível substituir a equação (4.16) na equação (4.15) considerando uma função de fluxo $F(u) = au$, para $k=k^n$ e se obtém esquema Lagrangeano-Euleriano por diferenças finitas para o caso linear

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{4} (U_{j-1}^n + 2U_j^n + U_{j+1}^n) - \frac{ak}{2h} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n). \quad (4.17)$$

A versão do esquema Lagrangeano-Euleriano para leis de conservação não-lineares é apresentada adiante.

4.4.1 Forma não Conservativa

A versão não conservativa do esquema Lagrangeano-Euleriano é escrita como:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{4} (U_{j-1}^n + 2U_j^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)), \quad (4.18)$$

e deve atender a seguinte condição CFL:

$$\max_j |f'(U_j^n)| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (4.19)$$

4.4.2 Forma Conservativa

O esquema pode ser escrito também em sua versão conservativa:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)) \quad (4.20)$$

com os seguintes fluxos numéricos:

$$F(U_{j-1}^n, U_j^n) = \frac{1}{4} \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} (U_{j-1}^n - U_j^n) + 2(f(U_j^n) + f(U_{j-1}^n)) \right], \quad (4.21)$$

$$F(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{1}{4} \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} (U_j^n - U_{j+1}^n) + 2(f(U_{j+1}^n) + f(U_j^n)) \right]. \quad (4.22)$$

com a mesma condição de CFL apresentada anteriormente.

4.5 Extensão para Funções de Fluxo Descontínuas

Para funções de fluxo descontínuas em relação à variável espacial é necessário que o método seja adaptado através da modificação dos fluxos numéricos do método numérico. Para o esquema de Lax-Friedrichs o fluxo numérico assume a forma [2]:

$$F(U_{j-1}^n, U_j^n) = \frac{1}{2} (f(U_{j-1}^n, x_{j-1}^n) + f(U_j^n, x_j^n)) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (U_j^n - U_{j-1}^n), \quad (4.23)$$

com a seguinte condição de CFL:

$$\max_j (|f_l'(U_j^n)|, |f_r'(U_j^n)|) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (4.24)$$

Já para o esquema Lagrangeano-Euleriano o fluxo numérico passa a ser expresso como:

$$F(U_{j-1}^n, U_j^n) = \frac{1}{4} \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} (U_{j-1}^n - U_j^n) + 2(f(U_j^n, x_j^n) + f(U_{j-1}^n, x_{j-1}^n)) \right], \quad (4.25)$$

e a condição de CFL para este esquema é:

$$\max_j (|f_l'(U_j^n)|, |f_r'(U_j^n)|) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4.26)$$

Para ambos os métodos, a função de fluxo é aproximada de maneira a ser capaz de captar numericamente a descontinuidade através da seguinte condição:

$$f_j^n = f(U_j^n, x_j) = \begin{cases} g(U_j^n), & \text{se } j < 0, \\ \frac{1}{2} [g(U_j^n) + f(U_j^n)] + \frac{1}{2} \min \{f_{\max}, g_{\min}\} & \text{se } j = 0, \\ f(U_j^n), & \text{se } j > 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

onde, o índice $j = 0$ é admitido ser o ponto correspondente $x = 0$ na malha, $f_{\max} = f(\max \{u_f^*, U_1^n\})$, $g_{\min} = g(\min \{u_g^*, U_{-1}^n\})$, sendo u_f^* e u_g^* os pontos de máximo e mínimo de f e g respectivamente, $f(U_j^n)$ a função de fluxo à esquerda de $j = 0$ e $g(U_j^n)$ a função de fluxo à direita de $j = 0$.

Capítulo 5

Resultados e Discussões

O presente capítulo tem por objetivo apresentar os resultados analíticos e numéricos obtidos para um problema de escoamento bifásico imiscível com a presença de uma fase não-Newtoniana do tipo plástico de Bingham em meios porosos heterogêneos sob ação da gravidade através da utilização da extensão da construção geométrica de Oleinik e dos métodos numéricos de Lax-Friedrichs e Lagrangeano-Euleriano do tipo diferenças finitas. Em paralelo, também foram realizadas análises para fluidos Newtonianos e meios porosos homogêneos com o objetivo de validação numérica e elucidação das principais diferenças entre os resultados encontrados na consideração de apenas fases Newtonianas e os resultados encontrados na consideração de uma fase não-Newtoniana. Desse modo, em um primeiro momento foi considerado um escoamento apenas com a presença de fases Newtonianas, tanto para um meio poroso homogêneo, quanto heterogêneo, enquanto em um segundo momento a presença de uma fase não-Newtoniana foi levada em conta.

5.1 Algoritmo e Validação Numérica

Um código computacional foi desenvolvido na linguagem do programa MATLAB[®] para resolução de problemas hiperbólicos de valor inicial com dados constantes por partes baseados em leis de conservação escalares por intermédio dos métodos numéricos Lax-Friedrichs e Lagrangeano-Euleriano do tipo diferenças finitas. Como objeto de validação, foram utilizadas como referência as mesmas análises realizadas no trabalho de Araujo et al., (2020) e Wu et al., (2015).

As soluções numéricas obtidas foram comparadas graficamente com as soluções analíticas. Os resultados consistem basicamente em combinações de ondas de choque e rarefação provenientes das soluções do problema de Buckley-Leverett para escoamento vertical.

5.1.1 Validação com Fases Newtonianas

Uma primeira validação foi realizada considerando o meio poroso homogêneo, enquanto que em uma segunda validação o meio poroso foi considerado composto por dois trechos com permeabilidades distintas, que *a priori*, promoverá o surgimento de uma onda de choque estacionária no ponto de descontinuidade da rocha, sendo necessária a extensão da construção geométrica de Oleinik segundo Kaasschieter (1999) para que se possa conectar os fluxos de maneira adequada.

A função de fluxo (Eq. 5.1) utilizada no problema consiste em uma função para escoamento vertical (sujeito à ação da gravidade) e fluxo descontínuo exposta em [2].

$$f(S_w, z) = \begin{cases} f_l, & \text{se } z < 0, \\ f_r, & \text{se } z > 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

$$f_l = \frac{S_w^2}{S_w^2 + \mu(1 - S_w)^2} [\nu + (1 - S_w)^2 \mu(1 - \rho)] \quad (5.2)$$

e

$$f_r = \frac{S_w^2}{S_w^2 + \mu(1 - S_w)^2} \left[\nu + (1 - S_w)^2 \mu(1 - \rho) \frac{K_r}{K_l} \right] \quad (5.3)$$

onde $\rho = \rho_o/\rho_w$ é a razão entre as massas específicas das fases, $\mu = \mu_o/\mu_w$ é a razão entre as viscosidades das fases e $K = K_r/K_l$ é a razão entre as permeabilidades absolutas da rocha nas duas regiões existentes.

É possível observar que caso a relação K_r/K_l seja igual a 1, a equação retorna ao caso comum; caso em que o meio poroso é homogêneo, pois f_l e f_r serão iguais, o que indica que a equação pode ser aplicada de forma geral tanto para problemas em meios porosos homogêneos, quanto heterogêneos.

Caso I: meio poroso homogêneo.

Para este caso, o meio foi considerado homogêneo e dois cenários distintos com os respectivos parâmetros adimensionais apresentados na Tabela 5.1.

Parâmetros	Valor (Cenário 1)	Valor (Cenário 2)	Unidade
ν	0	0,01	-
K	1	1	-
μ	0,25	0,25	-
ρ	0,8	0,8	-
S_l	1	1	-
S_r	0	0	-

Tabela 5.1: Parâmetros adimensionais do escoamento.

As funções de fluxo para os cenários considerados são apresentadas na Figura 5.1 e mostram a construção geométrica de Oleinik realizada para obtenção das soluções analíticas, enquanto nas Figuras 5.2 e 5.3 são apresentadas as soluções numéricas e analíticas obtidas, onde LEH faz menção ao esquema numérico Langrangeano-Euleriano e LF ao esquema de Lax-Friedrichs.

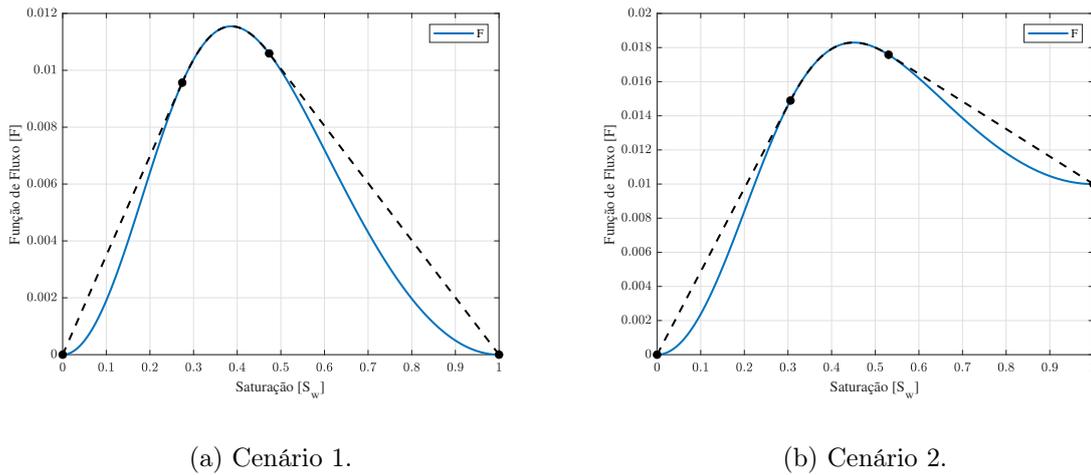


Figura 5.1: Construção de Oleinik para o Caso I.

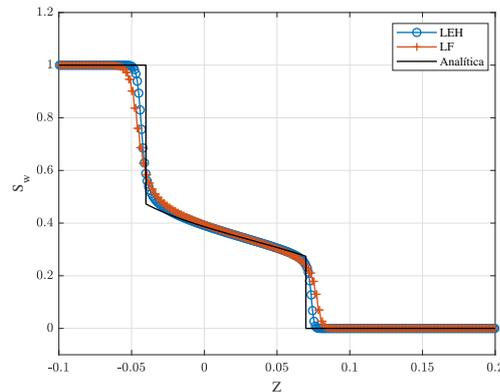


Figura 5.2: Cenário 1 com $s_l = 1$, $s_r = 0$, $\nu = 0$, CFL = 0,4, T = 2, 1024 células e 248 passos de tempo.

Ao analisar os resultados é possível observar que para ambos os casos a solução consiste em uma onda de choque que viaja com velocidade negativa para cima no reservatório (região com valores negativos no eixo Z), um choque que viaja com velocidade positiva para baixo no reservatório (região com valores positivos no eixo Z) e uma onda de rarefação entre eles, que abrange velocidades negativas e positivas no eixo de Z. Contudo, é possível

observar que para o cenário 1, $\nu = 0$ e o fluxo é puramente gravitacional, enquanto no cenário 2, $\nu = 0.01$ e o fluxo é misto com gravidade dominante. Do ponto de vista numérico, os resultados obtidos mostram que ambos os métodos convergem para a solução analítica de forma acurada. Em adição, as soluções obtidas através do código desenvolvido apresentam resultados concordantes com as da referência [2].

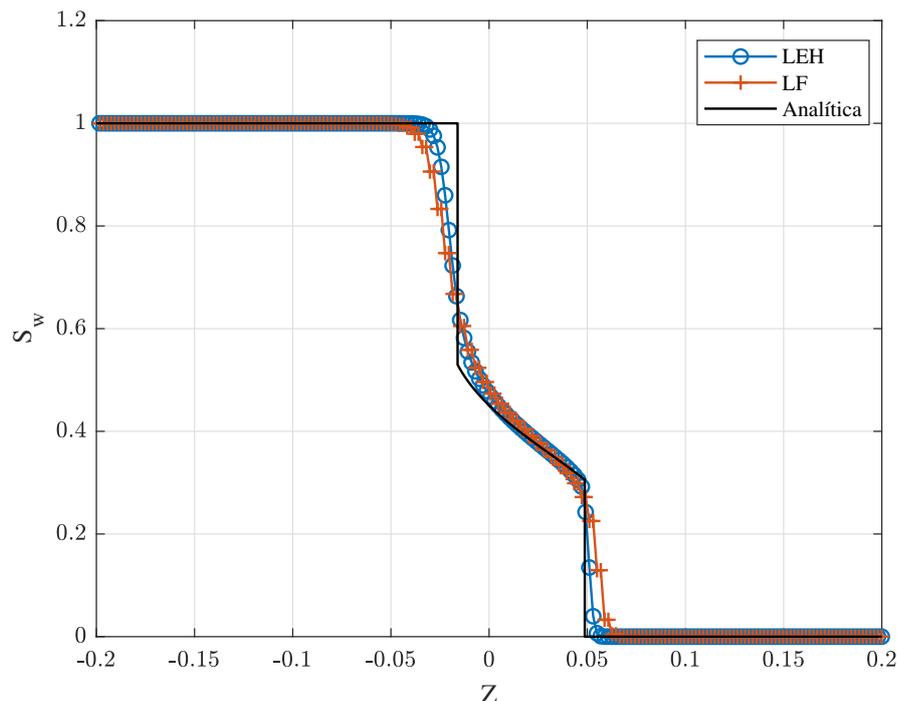


Figura 5.3: Cenário 2 com $s_l = 1$, $s_r = 0$, $\nu = 0,01$, $CFL = 0,6$, $T = 1$, 512 células e 58 passos de tempo.

Caso II: meio poroso heterogêneo.

Neste caso, foram considerados dois cenários distintos conforme no caso anterior e os parâmetros adimensionais apresentados na Tabela 5.2. Contudo, o meio poroso foi admitido ser heterogêneo.

Parâmetros	Valor (Cenário 1)	Valor (Cenário 2)	Unidade
ν	0	0	-
K	2	2	-
μ	1/3	0,1	-
ρ	3/2	3/2	-
S_l	0	0	-
S_r	1	0,25	-

Tabela 5.2: Parâmetros adimensionais do escoamento.

Os resultados para os problemas são apresentados nas Figuras 5.5 e 5.6 respectivamente, e de maneira similar ao Caso I, foi realizada a construção geométrica de Oleinik

para ambos os cenários (Fig. 5.4). Todavia, para o Caso II, surge um choque estacionário no ponto de descontinuidade da rocha separando o grupo de ondas não estacionárias, conforme exposto nas Figuras 5.5 e 5.6. Com base nos resultados obtidos, é possível verificar que os resultados numéricos se aproximam de maneira satisfatória da solução analítica e também são equivalentes aos resultados da referência [2]. Sendo assim, é possível concluir que para as considerações realizadas para o problema, o código desenvolvido atende aos requisitos de validação.

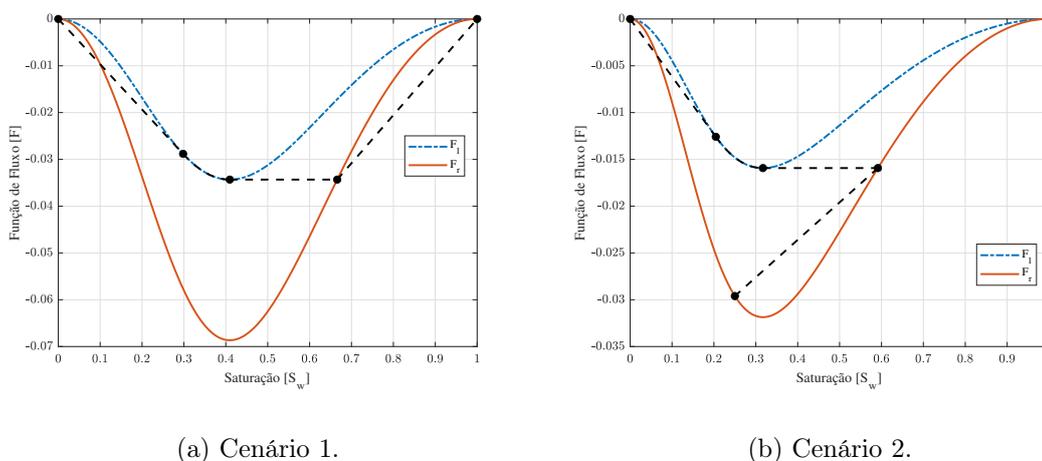


Figura 5.4: Construção de Oleinik para o Caso II.

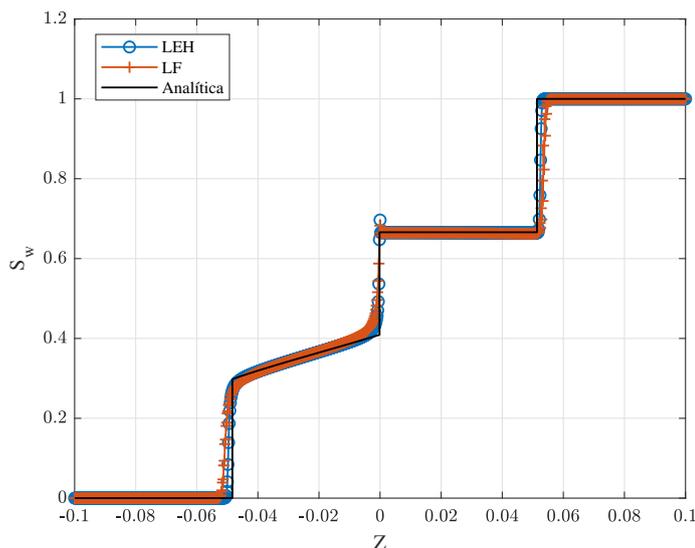


Figura 5.5: Cenário 1 com $s_l = 0$, $s_r = 1$, $\nu = 0$, CFL = 0,7, T = 0,5, 2048 células e 989 passos de tempo.

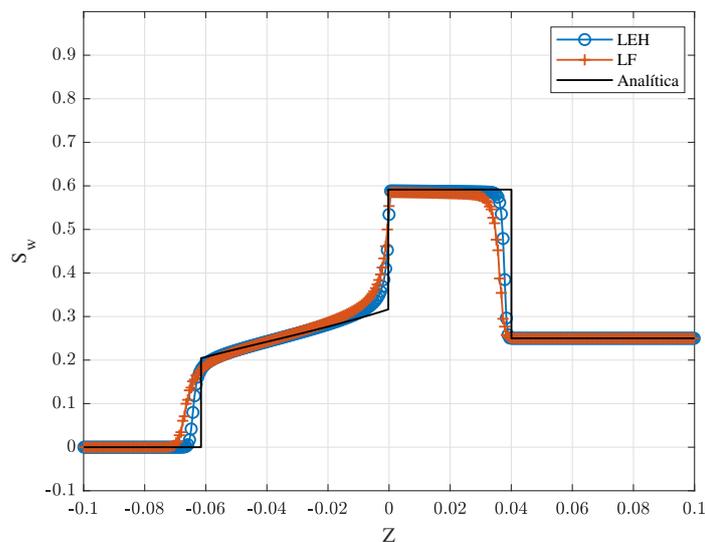


Figura 5.6: Cenário 2 com $s_l = 0$, $s_r = 0,25$, $\nu = 0$, CFL = 0,7, T = 1, 1024 células e 410 passos de tempo.

5.1.2 Validação com Fase não-Newtoniana

Para a validação do algoritmo para o caso em que uma das fases é considerada não-Newtoniana, foram reproduzidos alguns exemplos apresentados por Wu et al. (2015) para o fluxo bifásico imiscível de fluidos não-Newtonianos do tipo plástico de Bingham em meios porosos homogêneos. Os resultados foram obtidos numericamente através dos mesmos esquemas numéricos apresentados anteriormente.

Exemplo 5.1.2(a). Solução numérica 1.

Parâmetros	Valor	Unidade
ϕ	0,20	-
k	9,869e-13	m ²
A	1	m ²
L	4	m
q	2e-6	m ³ /s
t	1	dias
μ_{ne}	1e-3	Pa.s
μ_B	4e-3	Pa.s
$S_{ne,ir}$	0	-
$S_{nn,ir}$	0,20	-
$K_{rne,max}$	1	-
$K_{rnn,max}$	1	-
n_{ne}	2	-
n_{nn}	2	-
ρ_{ne}	1000	kg/m ³
ρ_{nn}	900	kg/m ³
θ	0	rad
G	1e4	Pa/m

Tabela 5.3: Parâmetros dos fluidos e da rocha. Adaptado de [29].

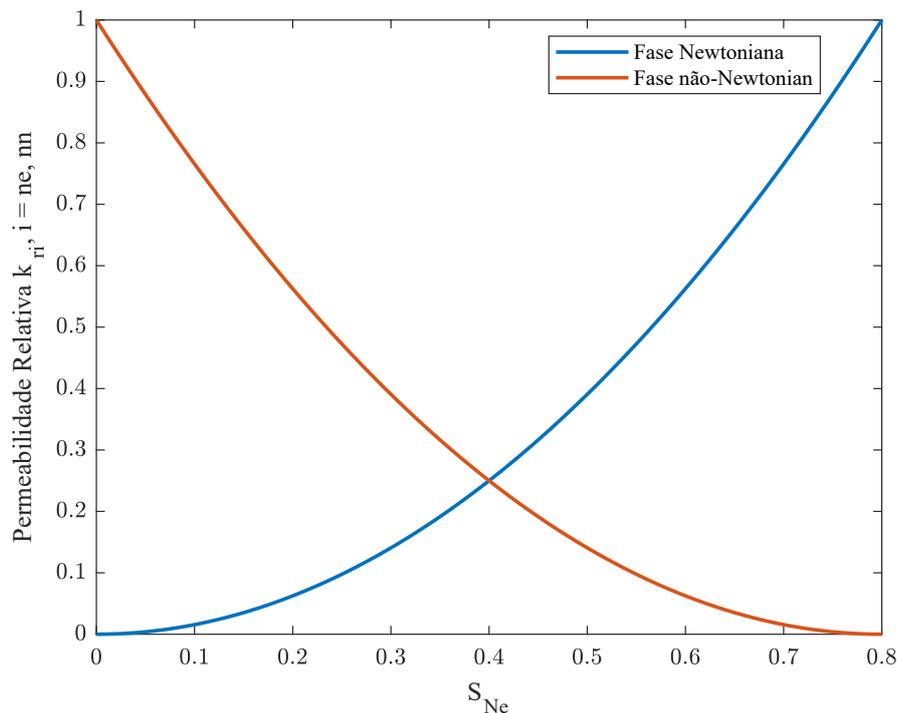


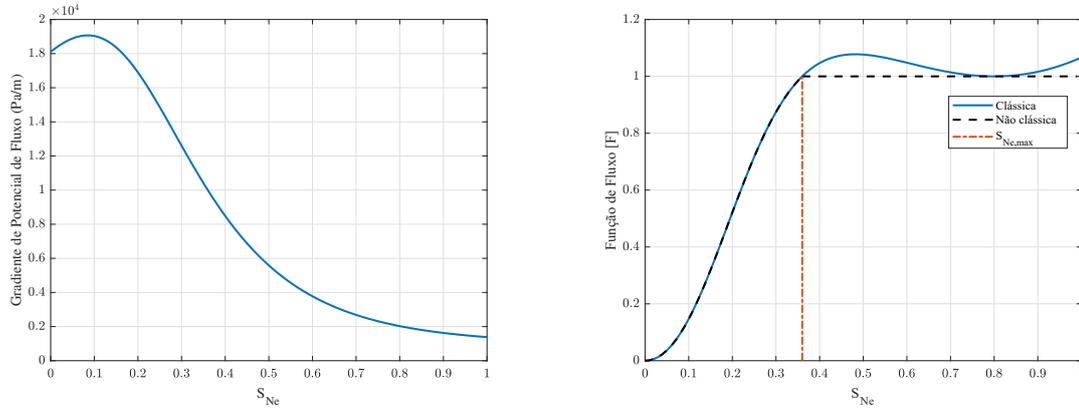
Figura 5.7: Permeabilidades Relativas.

Para o primeiro exemplo foi considerado um escoamento bifásico imiscível de dois fluidos, um Newtoniano e outro não-Newtoniano, com as propriedades descritas na Tabela 5.3. A curva de permeabilidade relativa para cada fase é apresentada na Figura 5.7. Já na Figura 5.8, são apresentadas as curvas do gradiente de potencial de fluxo e as funções de fluxo. Para fins de comparação, na Figura 5.8(b) são exibidas duas funções de fluxo, uma que é representada pela curva tracejada na cor preta, que exhibe o comportamento da função de fluxo tanto abaixo quanto acima da saturação limite e outra representada pela curva na cor azul, que exhibe o comportamento da função diante de uma perspectiva clássica.

Na primeira curva citada, é possível observar que a partir de uma dada saturação limite o gradiente de potencial de fluxo atinge o gradiente de pressão mínimo G . Esta saturação será definida como saturação máxima ou limite e em valores superiores a ela o fluido passa a se comportar como um sólido. Dessa forma, a função de fluxo na forma clássica é exibida apenas com a finalidade de exibir como se comportaria a função de fluxo sem a exigência de um gradiente de pressão mínimo para se promover o escoamento.

As soluções dispostas na Figura 5.9 foram construídas para $G = 1e4$ Pa/m, ou seja, para o caso em que gradiente de potencial de fluxo atinge o gradiente de pressão mínimo.

É possível observar que a solução consiste de um estado constante de saturação limitado em $S_{ne,max}$, seguido de uma onda de rarefação e uma onda de choque.



(a) Gradiente de Potencial de fluxo.

(b) Função de fluxo.

Figura 5.8: Funções de fluxo e potencial de fluxo para o exemplo 5.1.2(a).

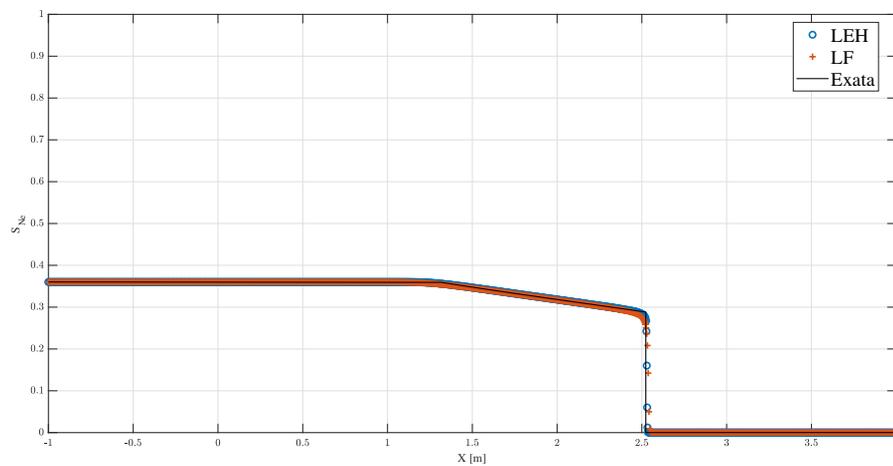


Figura 5.9: Soluções numéricas e analítica para o exemplo 5.1.2(a) com $CFL = 0,6$ e número de nodos igual a 20000.

Do ponto de vista numérico, é possível constatar a acurácia dos resultados numéricos obtidos através dos esquemas de LF e LEH quando comparados com a solução analítica.

Exemplo 5.1.2(b). Solução numérica 2.

De maneira similar ao exemplo 5.1.2(a), é considerado um escoamento bifásico onde

a fase deslocante é Newtoniana e a fase deslocada é não-Newtoniana. Contudo, os dados considerados seguem os da Tabela 5.4.

Parâmetros	Valor	Unidade
ϕ	0,20	-
k	9,869e-13	m ²
A	1	m ²
L	4	m
q	2e-6	m ³ /s
t	1	dias
μ_{ne}	1e-3	Pa.s
μ_B	5e-3	Pa.s
$S_{ne,ir}$	0	-
$S_{nn,ir}$	0,20	-
$K_{rne,max}$	0,75	-
$K_{rnn,max}$	0,75	-
n_{ne}	2	-
n_{nn}	2	-
ρ_{ne}	1000	Kg/m ³
ρ_{nn}	900	Kg/m ³
θ	0	rad
G	5e3	Pa/m

Tabela 5.4: Parâmetros dos fluidos e da rocha. Adaptado de [29].

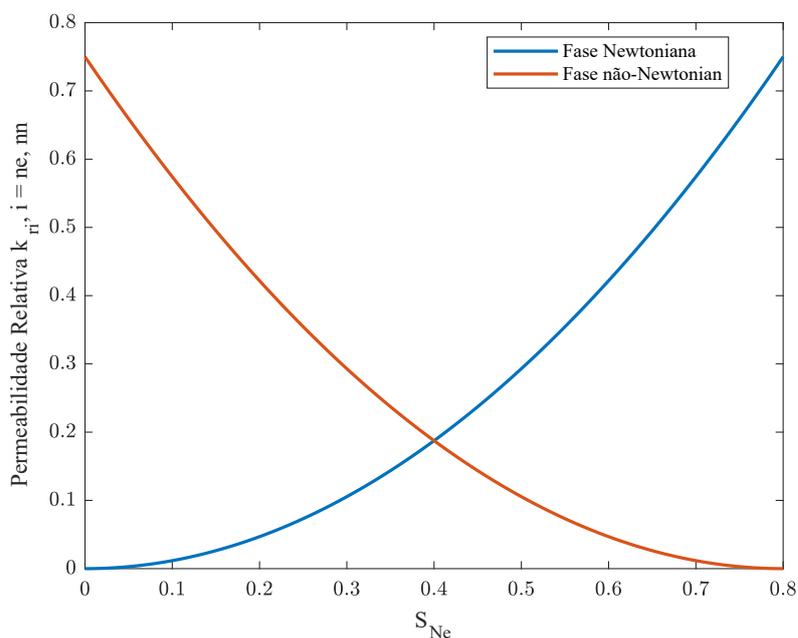
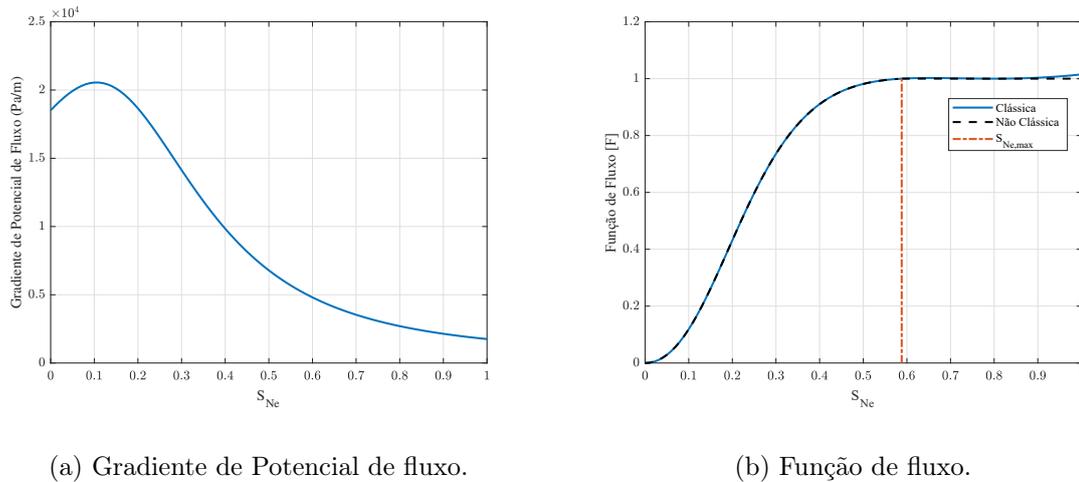


Figura 5.10: Permeabilidades Relativas.

As curvas das permeabilidades relativas das fases para este cenário são apresentadas na Figura 5.10, a curva do gradiente de potencial de fluxo para $G = 5e3$ Pa/m é disposta na Figura 5.11(a) e as curvas das funções de fluxo podem ser vistas na Figura 5.11(b), e novamente é possível observar a saturação limite da fase Newtoniana para que o fluido continue se comportando como um líquido.

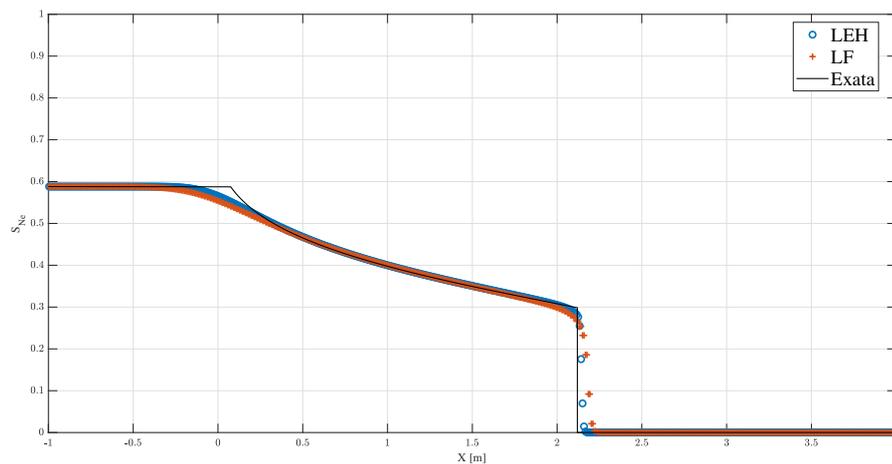


(a) Gradiente de Potencial de fluxo.

(b) Função de fluxo.

Figura 5.11: Funções de fluxo e potencial de fluxo para o exemplo 5.1.2b.

Através das soluções obtidas (Fig. 5.12), é possível observar que para este caso, um menor valor de G permite que o fluido permaneça se comportando como um líquido dentro de um maior intervalo de saturação, enquanto que um maior valor de μ_B promove uma maior abrangência da onda de rarefação. Uma vez que os resultados obtidos são comparados com as soluções analíticas, também se observa a acurácia conforme para o caso anterior.

Figura 5.12: Soluções numéricas e analítica para o exemplo 5.1.2(b) com $CFL = 0,6$ e número de nodos igual a 5000.

Exemplo 5.1.2(c). Solução numérica 3.

Como último exemplo numérico, foram considerados cenários com distintos valores

de μ_B com os demais parâmetros de fluxo conforme os apresentados na Tabela 5.5. As funções de fluxo e as curvas de gradiente de potencial de fluxo para os respectivos valores de μ_B atribuídos são apresentadas na Figura 5.14, enquanto as curvas das permeabilidades relativas são apresentadas na Figura 5.13.

Parâmetros	Valor	Unidade
ϕ	0,20	-
k	9,869e-13	m ²
A	1	m ²
L	10	m
q	2e-6	m ³ /s
t	10	h
μ_{ne}	1e-3	Pa.s
μ_B	4e-3	Pa.s
$S_{ne,ir}$	0	-
$S_{nn,ir}$	0,20	-
$K_{rne,max}$	0,75	-
$K_{rnn,max}$	0,75	-
n_{ne}	2	-
n_{nn}	2	-
ρ_{ne}	1000	Kg/m ³
ρ_{nn}	800	Kg/m ³
θ	0	rad
G	2.5e3	Pa/m

Tabela 5.5: Parâmetros dos fluidos e da rocha. Adaptado [29].

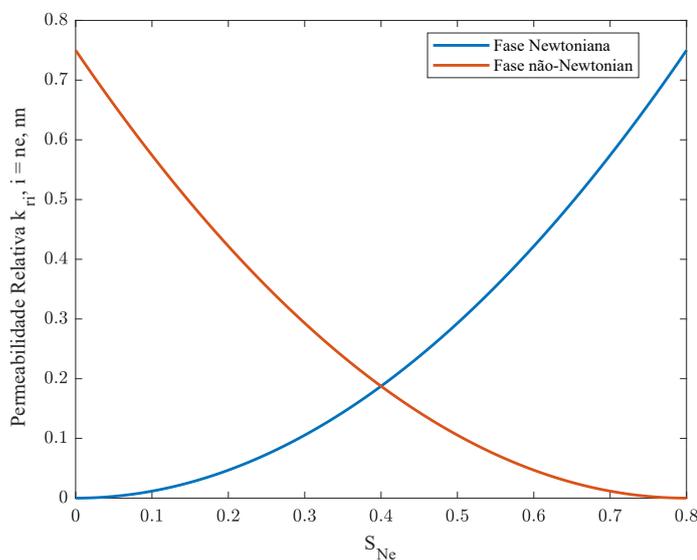


Figura 5.13: Permeabilidades Relativas.

As soluções (Fig. 5.15) evidenciam a influência do valor de μ_B na abrangência das ondas de rarefação para um mesmo valor de G . Por fim, os resultados numéricos obtidos se mostraram satisfatórios mais uma vez, quando comparados com as soluções analíticas. Dessa forma, é possível constatar que os métodos se mostraram eficazes tanto para resoluções de problemas com fluxo de fluidos Newtonianos, quanto não-Newtonianos.

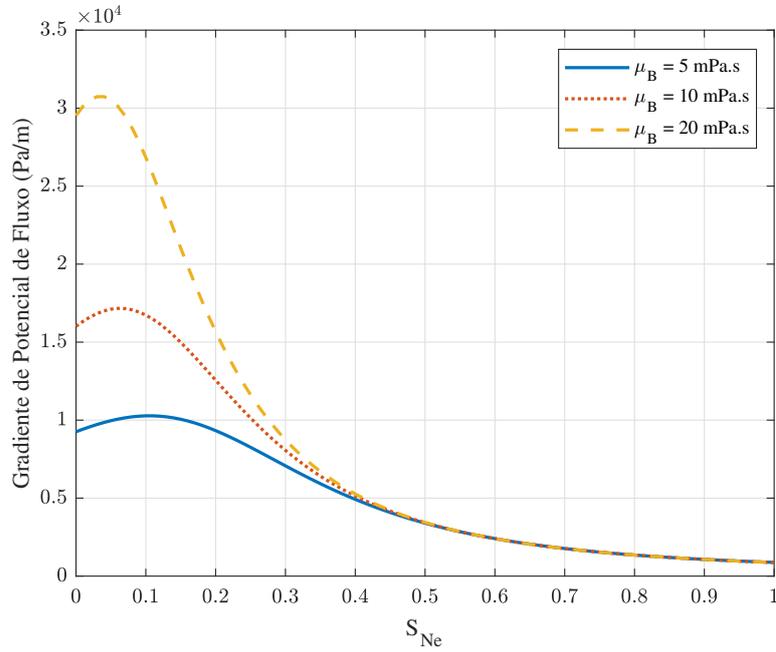
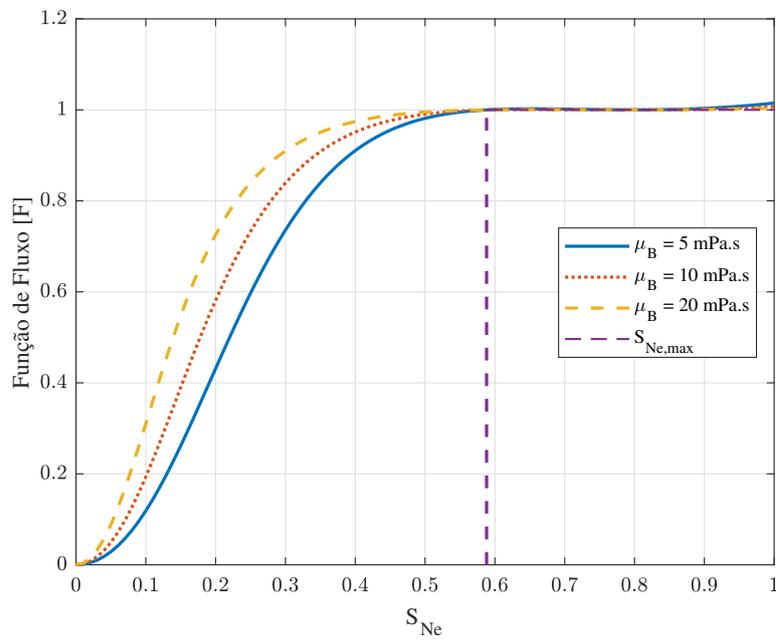
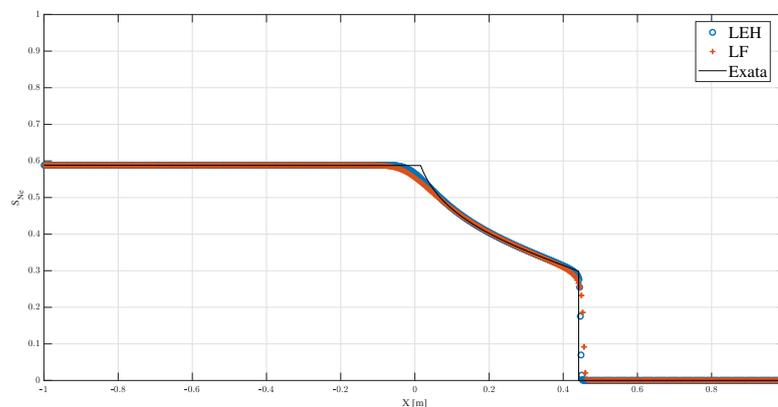
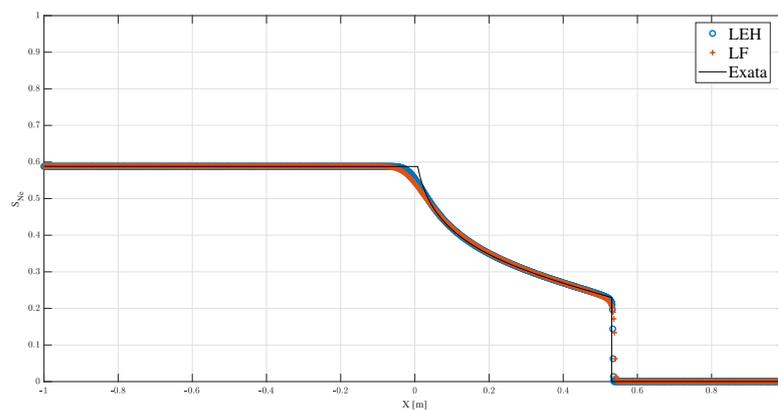
(a) Gradiente de Potencial de fluxo para diferentes μ_B .(b) Função de fluxo para diferentes μ_B .

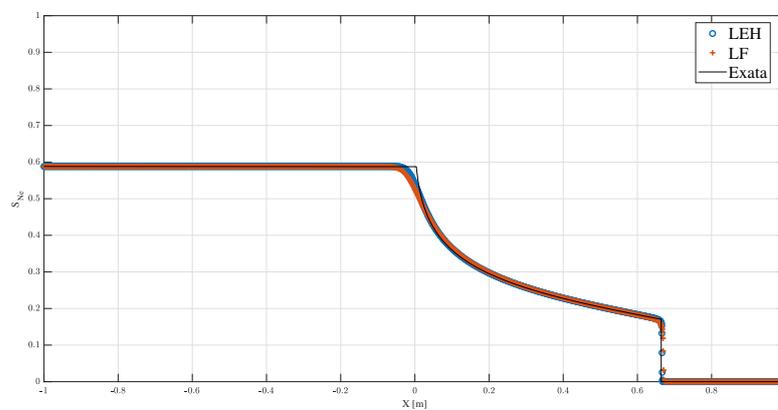
Figura 5.14: Funções de fluxo e potencial de fluxo para o exemplo 5.1.2(c).



(a) $\mu_B = 5$ mPa.s, CFL = 0,6 e número de nodos igual a 5000.



(b) $\mu_B = 10$ mPa.s, CFL = 0,6 e número de nodos igual a 10000.



(c) $\mu_B = 20$ mPa.s, CFL = 0,6 e número de nodos igual a 20000.

Figura 5.15: Soluções numéricas e analíticas para o exemplo 5.1.2(c).

5.2 Adimensionalização

As equações adimensionais são equações que não dependem de unidades de medida específicas, uma vez que as quantidades físicas ou grandezas são expressas em termos de números adimensionais, o que permite a análise de fenômenos físicos complexos de forma mais simples e generalizada. Sendo assim, com a finalidade de simplificação das análises que serão realizadas adiante, as equações apresentadas anteriormente, serão postas na forma adimensional.

5.2.1 Função de Fluxo Contínua

Admitindo $k_{rnn} = (1 - S_{ne})^2$ e $k_{rne} = S_{ne}^2$, a equação (3.34) pode ser escrita na seguinte forma adimensional:

$$f_{ne} = \frac{1}{1 + \frac{(1-S_{ne})^2}{S_{ne}^2} M} [1 + N_g(1 - S_{ne})^2] \quad (5.4)$$

onde

$$\begin{aligned} N_g = N_g(\mu_{nn}, S_{ne}, \nabla\Phi) &= \frac{Ak}{q_t \mu_{nn}(\nabla\Phi_{nn}, S_{ne})} (\rho_{nn} - \rho_{ne}) g \\ &= \frac{M(\nabla\Phi_{nn}, S_{ne}) m_\alpha}{\eta} [1 - \gamma^*] \end{aligned} \quad (5.5)$$

e

$$M(\nabla\Phi_{nn}, S_{ne}) = \frac{\mu_{ne}}{\mu_{nn}(\nabla\Phi_{nn}, S_{ne})} = \begin{cases} \frac{1}{m_\alpha} \left(1 - \frac{G^*}{|\nabla\Phi^*|}\right), & \text{se } |\nabla\Phi| > G^*, \\ 0, & \text{se } |\nabla\Phi| \leq G^*, \end{cases} \quad (5.6)$$

onde N_g é um parâmetro gravitacional.

O gradiente de potencial de fluxo (3.37) pode ser adimensionalizado conforme a seguinte expressão:

$$-\nabla\Phi^*(S_{ne}) = -1 + \frac{\eta + G^*(1 - S_{ne})^2 + \omega S_{ne}^2 + (1 - S_{ne})^2}{m_\alpha S_{ne}^2 + (1 - S_{ne})^2} \quad (5.7)$$

com

$$G^* = \frac{G}{\gamma'_{nn}}, \quad \eta := \frac{\mu'_B q}{Ak \gamma'_{nn}}, \quad \omega := m_\alpha \gamma^*,$$

$$m_\alpha := \frac{\mu'_B}{\mu_{ne}}, \quad \gamma^* = \frac{\gamma_{ne}}{\gamma_{nn}}. \quad (5.8)$$

onde

$$\gamma_{ne} = \rho_{ne}g \quad (5.9)$$

e

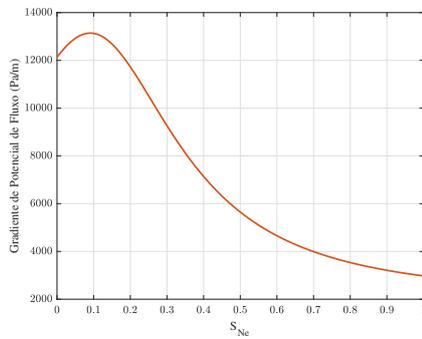
$$\gamma_{nn} = \rho_{nn}g. \quad (5.10)$$

É possível observar na Figura 5.16 o gradiente de potencial de fluxo adimensional e constatar através da Figura 5.17 que é possível obter a mesma função de fluxo utilizando os parâmetros adimensionais que são provenientes do processo de adimensionalização.

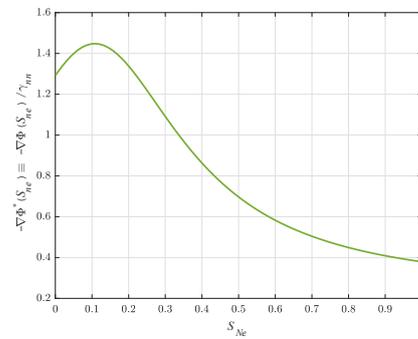
Parâmetros	Valor	Unidade
k	9,869e-13	m ²
A	1	m ²
q	1e-6	m ³ /s
μ_{ne}	1e-3	Pa.s
μ_B	1e-2	Pa.s
$S_{ne,ir}$	0	-
$S_{nn,ir}$	0	-
$K_{rne,max}$	1	-
$K_{rnn,max}$	1	-
n_{ne}	2	-
n_{nn}	2	-
ρ_{ne}	1000	Kg/m ³
ρ_{nn}	800	Kg/m ³
θ	1	rad
G	2e3	Pa/m

Tabela 5.6: Parâmetros dos fluidos e da rocha.

Para os dados da Tabela 5.6 se obtêm os seguintes parâmetros adimensionais $\mu_\alpha = 10$, $\eta = 1.2916$, $G^* = 0.2549$, $\gamma^* = 1.25$ e $\omega = 12.5$.



(a) Dimensional.



(b) Adimensional.

Figura 5.16: Gradiente de potencial de fluxo.

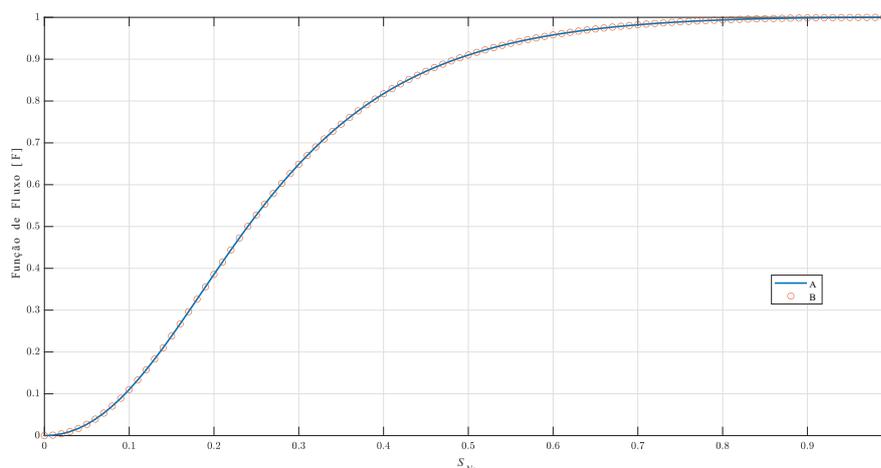


Figura 5.17: Funções de fluxo, onde a curva A é proveniente de $-\nabla\Phi$ e a curva B proveniente de $-\nabla\Phi^*$.

5.2.2 Comportamento Newtoniano *versus* não-Newtoniano

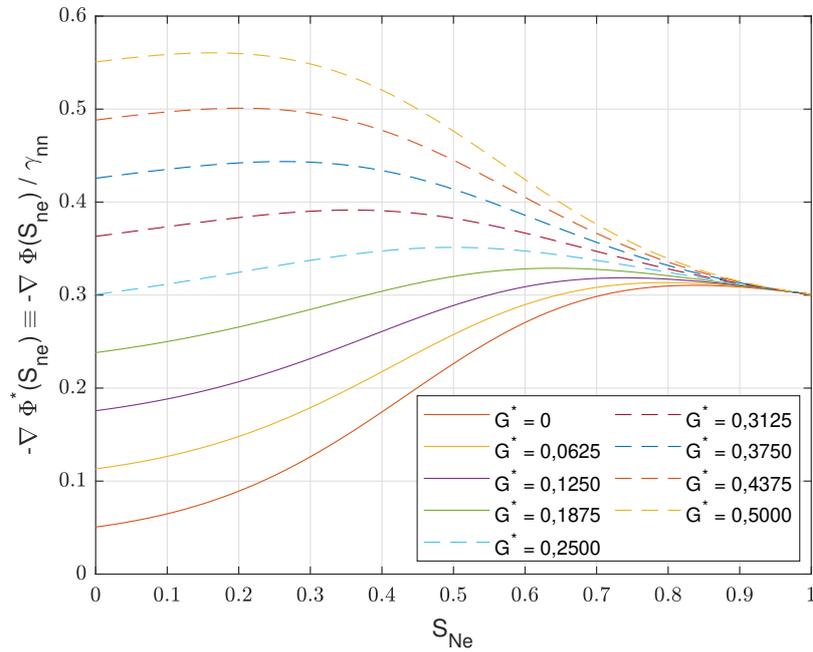
Para visualização dos efeitos da consideração de uma fase não-Newtoniana e influência da gravidade no processo de deslocamento dos fluidos, foi realizada um análise geométrica da transição da função de fluxo Newtoniana para a não-Newtoniana a partir da consideração de distintos G^* . Os dados considerados para o problema são apresentados na Tabela 5.7.

As curvas contínuas apresentadas nas Figuras 5.18, 5.20 e 5.19 representam o comportamento das variáveis de análise para valores de G^* menores que $|\nabla\Phi|$, enquanto as curvas tracejadas representam o comportamento para valores de G^* que em algum momento são maiores que $|\nabla\Phi|$.

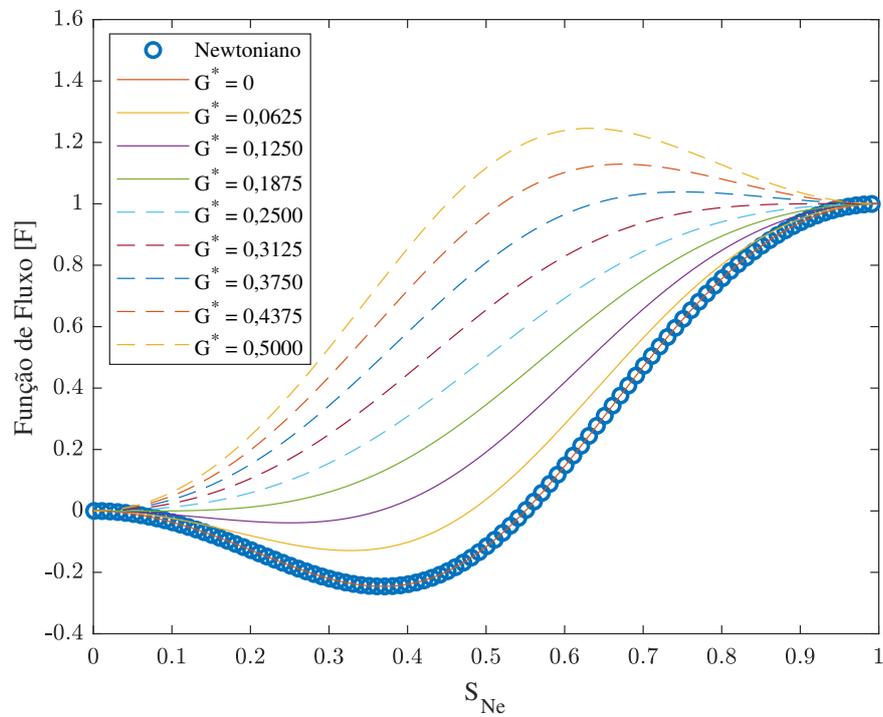
Parâmetros	Valor	Unidade
m_α	1	-
η	0.051	-
γ	1.25	-
ω	1.25	-

Tabela 5.7: Parâmetros adimensionais do escoamento.

Ao analisar a Figura 5.18, nota-se que caso $G = 0$, a curva da função de fluxo obtida através da equação para a presença de fase não-Newtoniana é idêntica à curva obtida através da equação que considera apenas a presença fases Newtonianas, o que indica que nesse caso o fluido possui comportamento Newtoniano, pois não apresenta tensão de cisalhamento mínima e apresenta viscosidade constante, conforme exposto na Figura 5.19 que apresenta a razão entre a viscosidade da fase Newtoniana e não-Newtoniana M .



(a) Curvas de potencial de fluxo.



(b) Curvas de função de fluxo.

Figura 5.18: Comportamento Newtoniano e não-Newtoniano dos gradientes de potencial de fluxo e funções de fluxo.

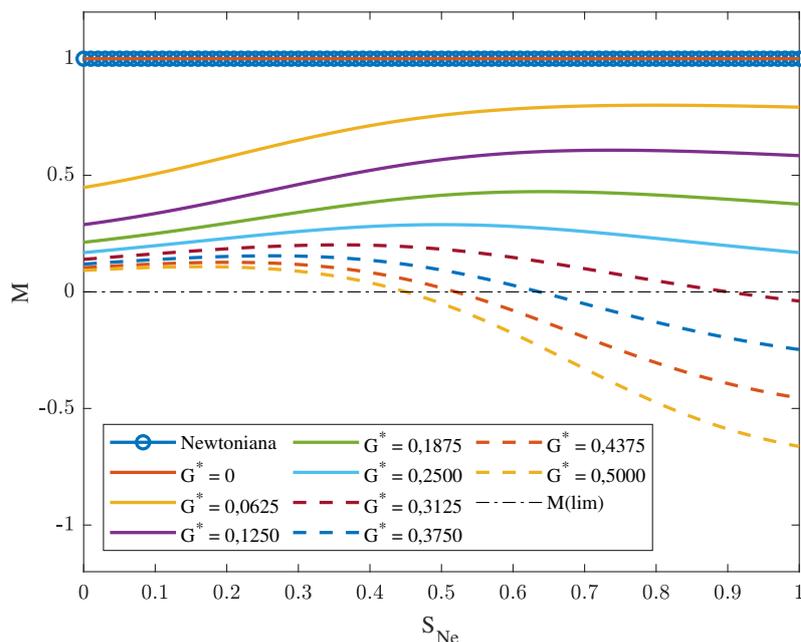
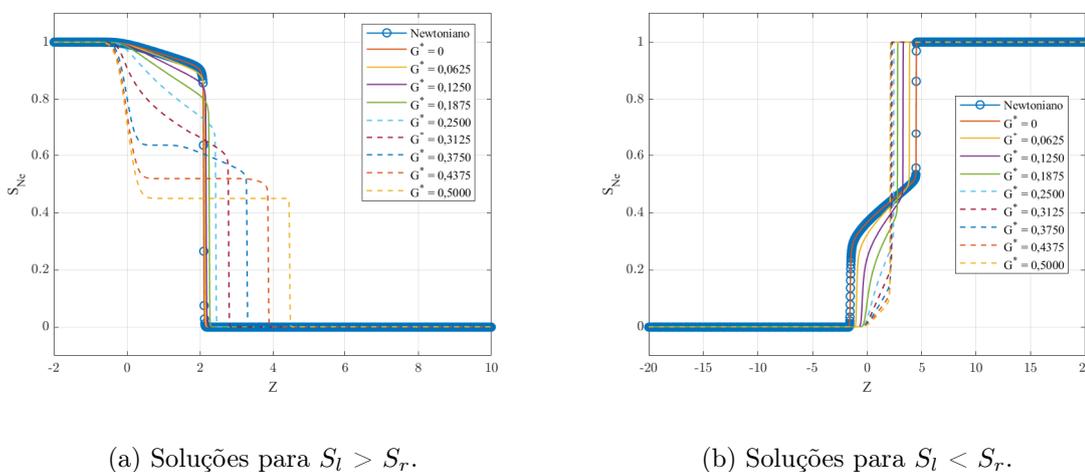
Figura 5.19: Razão entre as viscosidades M para distintos G^* .

Figura 5.20: Comportamento Newtoniano e não-Newtoniano das soluções.

Por outro lado, para valores de G^* maiores que zero, as curvas de gradiente de potencial de fluxo e função de fluxo mudam o comportamento, de tal forma, que ocorre a inversão dos pontos de máximo ou mínimo, e quando G^* é maior ou igual a $|\nabla\Phi|$ a função de fluxo precisa atender a condição (5.6), pois é possível observar na figura 5.19 que para valores de S maiores que os da saturação limite, os valores M são negativos e caso fossem considerados não haveria significado físico, pois as viscosidades precisam assumir valores

positivos, logo deverá existir uma saturação limite para que o fluido escoe e a partir desta o valor de M será zero, pois o valor da viscosidade aparente de um fluido não-Newtoniano do tipo plástico de Bingham é infinita para esta condição que surge da própria física do problema.

Em adição é possível observar a relação entre cada variável através das curvas apresentadas, como a saturação limite por exemplo, que é possível ser obtida a partir de qualquer uma das curvas apresentadas, inclusive das funções de fluxo, pois devido ao processo de adimensionalização sabe-se que para valores de gradiente de potencial de fluxo menores ou iguais a G^* , S será limitada quando o valor de $f(u)$ for igual a 1.

A influência do parâmetro G^* nas soluções do problema é mostrada na Figura 5.20, onde para $S_l > S_r$, a medida que o valor de G^* se torna maior, a solução transita de uma combinação entre uma onda de rarefação e uma onda de choque com velocidade positiva, para uma onda de choque estacionária e uma onda de choque com velocidade positiva, e durante a transição apresenta a combinação entre uma onda de choque estacionária, uma onda de choque com velocidade positiva e uma onda de rarefação que abrange velocidades positivas. Já para $S_l < S_r$, a solução parte da combinação de uma onda de choque com velocidade negativa, uma onda de choque com velocidade positiva e uma onda de rarefação que abrange velocidades negativas e positivas para uma solução de choque estacionário em G_∞ , e durante a transição apresenta soluções com a combinação de uma onda estacionária e uma onda de rarefação. Por fim, é importante ressaltar que o surgimento de ondas com velocidades negativas é devido a influência da gravidade presente no parâmetro Ng da função de fluxo.

5.2.3 Função de Fluxo Descontínua

Para meios porosos compostos por duas rochas com permeabilidades absolutas distintas, o meio poroso apresenta uma homogeneidade particionada, logo define-se a permeabilidade absoluta da rocha por meio da seguinte condição:

$$K(z) = \begin{cases} K_L & se, z < 0, \\ K_R & se, z > 0, \end{cases} \quad (5.11)$$

em que o resultado decorrente é uma função de fluxo descontínua que se apresenta na seguinte forma:

$$f_{ne}(S_{ne}, z) = \begin{cases} f_{neL} & se, z < 0, \\ f_{neR} & se, z > 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

Dessa forma, é necessária uma modificação na equação de fluxo. Para o caso Newtoniano se adiciona um fator K_f que multiplica o número gravitacional N_g na equação de fluxo do lado direito da descontinuidade. Já para o caso não-Newtoniano, além de realizar o mesmo procedimento é necessário também realizar a divisão de η pelo mesmo fator K_f na equação do gradiente de potencial de fluxo, onde

$$K_f = \frac{K_R}{K_L}. \quad (5.13)$$

Portanto,

$$f_{neL} = \frac{1}{1 + \frac{(1-S_{ne})^2}{S_{ne}^2} M} [1 + N_g(1 - S_{ne})^2] \quad (5.14)$$

com

$$-\nabla\Phi^*(S_{neL}) = -1 + \frac{\eta + G^*(1 - S_{ne})^2 + \omega S_{ne}^2 + (1 - S_{ne})^2}{m_\alpha S_{ne}^2 + (1 - S_{ne})^2} \quad (5.15)$$

e

$$f_{neR} = \frac{1}{1 + \frac{(1-S_{ne})^2}{S_{ne}^2} M} [1 + K_f N_g(1 - S_{ne})^2] \quad (5.16)$$

com

$$-\nabla\Phi^*(S_{neR}) = -1 + \frac{\frac{\eta}{K_f} + G^*(1 - S_{ne})^2 + \omega S_{ne}^2 + (1 - S_{ne})^2}{m_\alpha S_{ne}^2 + (1 - S_{ne})^2}. \quad (5.17)$$

Caso ambas as fases sejam Newtonianas, M é constante e o termo de gradiente de potencial de fluxo pode ser abstraído nas equações acima.

5.3 Resultados e Análises

A presente seção tem por objetivo apresentar alguns resultados analíticos e numéricos para o modelo proposto, obtidos por intermédio da extensão da construção geométrica de Oleinik para funções de fluxo descontínuas e dos esquemas numéricos LEH e LF. Para tal, foram considerados dois casos com distintos cenários. Para o primeiro caso, $|\nabla\Phi^*|$ foi considerado maior que G^* , enquanto que para o segundo caso, $|\nabla\Phi^*|$ foi considerado menor ou igual G^* . Sendo assim, é assumido um problema de Riemann para uma extensão da equação de Buckley-Leverett para escoamento vertical de fluidos não-Newtonianos do tipo plástico de Bingham em meios porosos heterogêneos, levando em consideração a injeção da fase Newtoniana no ponto de descontinuidade. Por fim, vale salientar que para todos

os casos $f_r > f_l$ para todo $S_{Ne} \in (0,1)$.

Caso I: $|\nabla\Phi^*| > G^*$.

Para este caso foram simulados cenários em que $|\nabla\Phi^*|$ é maior que G^* , o que implica na permanência do comportamento fluido da fase não-Newtoniana apesar da dependência do gradiente de potencial de fluxo, que torna a viscosidade variável (aparente) uma função da saturação da fase Newtoniana. Para fins de simplificação da análise, não foram analisados casos com dados iniciais do problema de Riemann maiores que os da saturação limite, pois da mesma forma que a heterogeneidade do meio produz uma onda de choque estacionária em $Z=0$, tais dados também produziram, exigindo uma análise mais complexa.

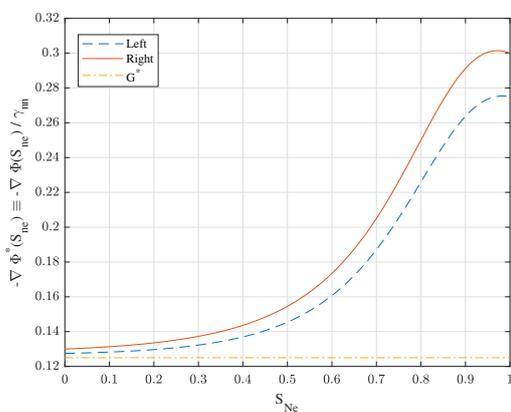
Na Figura 5.21 são exibidas as curvas de gradiente de potencial de fluxo para as funções de fluxo à esquerda e à direita da descontinuidade, com destaque para a linha amarela tracejada que indica o valor de G^* para verificação visual da existência ou não de uma saturação limite, que é o valor de saturação máxima da fase Newtoniana em que fluido não-Newtoniano continua se comportando como líquido, ou seja, o valor de saturação o qual o fluido não-Newtoniano continuará escoando. Para o cenário (a), $G^* > 0$ e a curva do gradiente de potencial de fluxo não muda de sinal, logo, $|\nabla\Phi^*|$ sempre será maior que G^* e M irá satisfazer a primeira condição da equação (5.6). De mesmo modo, os demais casos também irão satisfazer a primeira condição da equação (5.6), pois para todo valor de saturação, $|\nabla\Phi^*|$ também é maior que G^* .

A construção geométrica para os casos propostos foi realizada seguindo as combinações entrópicas possíveis para $f_r > f_l$ através da extensão da construção geométrica de Oleinik possibilitando a construção das soluções analíticas conforme ilustrado na Figura 5.22. Devido aos dados de Riemann e da sua localização em relação aos pontos de inflexão das funções de fluxo, surgem alguns subcasos, nos quais a conexão entre as funções de fluxo é realizada através de uma linha horizontal através dos pontos de máximo ou mínimo de uma das funções (casos (a) e (c)) e outros em que a conexão entre as funções de fluxo é realizada através de uma linha horizontal através de pontos da função de fluxo esquerda ou direita à descontinuidade que são equivalentes ao estado inicial da função de fluxo do lado oposto (casos (b) e (d)) especificados no problema de Riemann (Veja [9]).

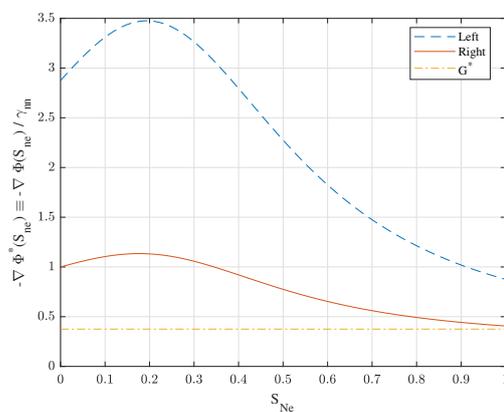
Um outro aspecto a ser notado, é que devido ao número gravitacional Ng ser variável devido a viscosidade também ser variável por dependência da saturação da fase Newtoniana, a função de fluxo pode ser monótona conforme nos casos (b) e (d) ou não-monótona congruente aos casos (a) e (c).

Na Figura 5.23 são apresentadas as soluções analíticas geradas com o auxílio da extensão da construção geométrica de Oleinik e as soluções aproximadas obtidas com o auxílio dos esquemas numéricos LF e LEH.

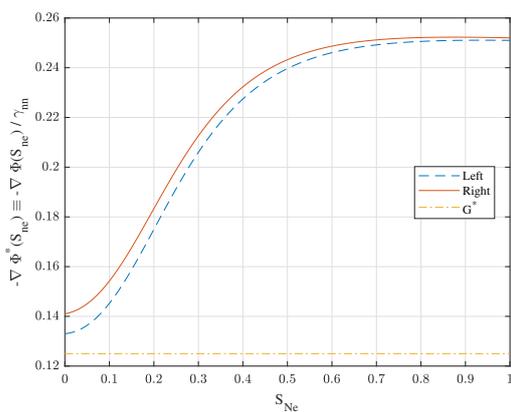
As soluções dispostas nas Figuras 5.23(a) e 5.23(c) são compostas por uma onda de choque com velocidade positiva que viaja para baixo no reservatório, uma onda de rarefação que abrange velocidades positivas, uma onda de choque estacionária no ponto de descontinuidade da rocha e uma onda de choque com velocidade negativa que viaja para cima no reservatório, enquanto a solução disposta na Figura 5.23(b) é composta por uma onda de choque com velocidade positiva que viaja para baixo no reservatório e uma onda de choque no ponto de descontinuidade da rocha.



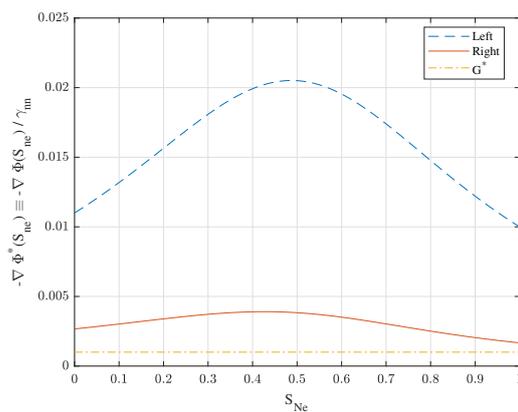
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.21: Curvas de gradiente de potencial de fluxo para o caso em que $|\nabla \Phi^*| > G^*$.

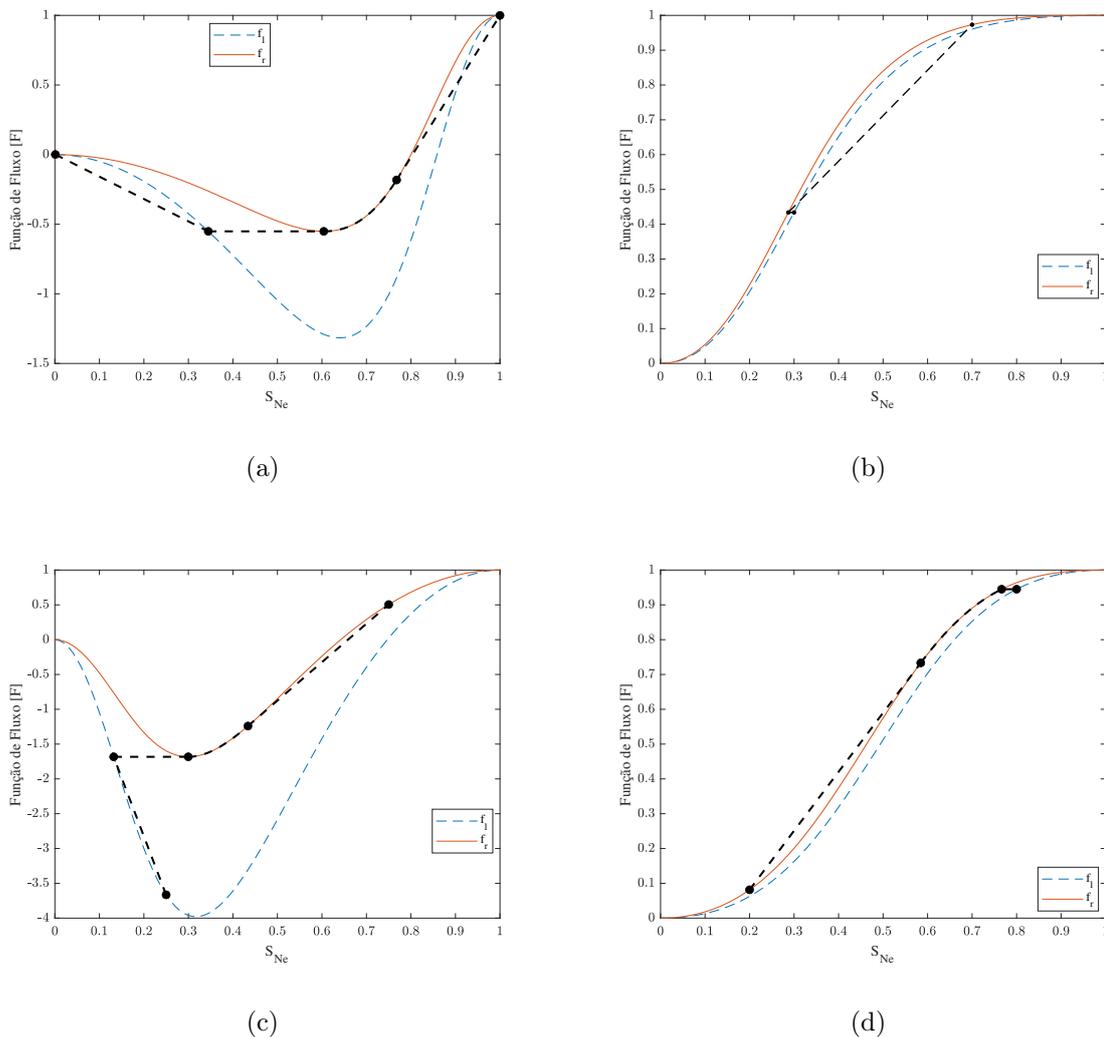
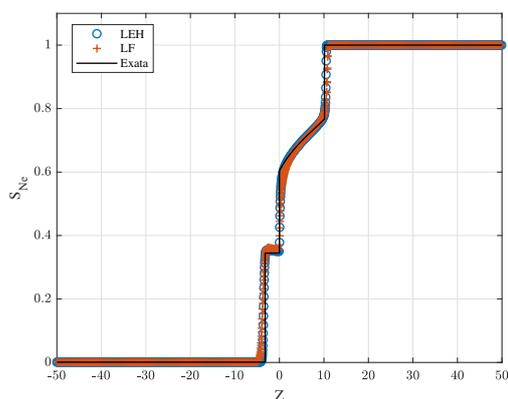


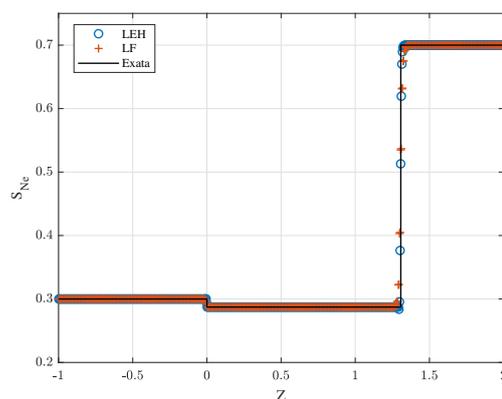
Figura 5.22: Curvas de funções de fluxo e extensão da construção geométrica da Oleinik para o caso em que $|\nabla\Phi^*| > G^*$.

Já na Figura 5.23(d), a solução compreende uma onda de choque que viaja com velocidade positiva para baixo no reservatório, uma onda de rarefação que abrange velocidades positivas e uma onda de choque estacionária.

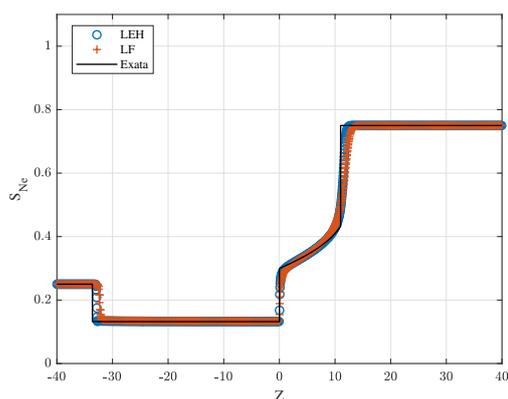
Do ponto de vista numérico, as soluções aproximadas se mostraram satisfatórias e convergentes quando comparadas com as soluções analíticas. Ademais, a superioridade do esquema LEH em relação ao esquema LF se torna mais nítida na observação do caso (c), em que é possível perceber uma maior aproximação da solução analítica.



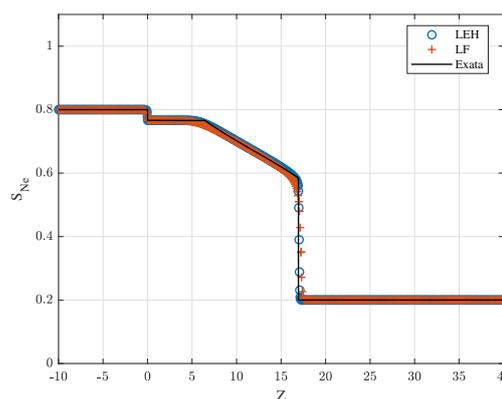
(a) Número de nodos igual a 5000, $CFL = 0,6$, $T = 2$, $S_l = 0$, $S_r = 1$, Número de passos de tempo = 1625, $m_\alpha = 0,1$, $\eta = 0,0025$, $G^* = 0.1250$, $\gamma^* = 1,25$, $\omega^* = 0,125$ e $K_f = 0,5$.



(b) Número de nodos igual a 5000, $CFL = 0,6$, $T = 1$, $S_l = 0,3$, $S_r = 0,7$, Número de passos de tempo = 1027, $m_\alpha = 4$, $\eta = 2,5$, $G^* = 0,375$, $\gamma^* = 1,25$, $\omega^* = 5$ e $K_f = 0,5$.



(c) Número de nodos igual a 10000, $CFL = 0,6$, $T = 2$, $S_l = 0,25$, $S_r = 0,75$, Número de passos de tempo = 1717, $m_\alpha = 8$, $\eta = 0,008$, $G^* = 0,125$, $\gamma^* = 1,25$, $\omega^* = 10$ e $K_f = 0,5$.



(d) Número de nodos igual a 5000, $CFL = 0,6$, $T = 10$, $S_l = 0,8$, $S_r = 0,2$, Número de passos de tempo = 847, $m_\alpha = 1$, $\eta = 0,001$, $G^* = 0,375$, $\gamma^*=1$, $\omega^*=1$ e $K_f = 6$.

Figura 5.23: Soluções analíticas e numéricas para o caso em que $|\nabla\Phi^*| > G^*$.

Diante de um olhar prático, a variação da permeabilidade absoluta da rocha de um trecho para o outro irá aumentar ou diminuir a capacidade de escoamento dos fluidos, caso a permeabilidade seja muito baixa, o escoamento sofrerá uma maior resistência e dependendo de como o processo de deslocamento dos fluidos ocorre, poderá ser ineficiente. Nesse caso, em um processo ineficiente de recuperação de fluidos em reservatórios de petróleo, técnicas adicionais seriam necessárias, como o fraturamento hidráulico, estimulação mecânica, estimulação ácida, injeção de polímeros e injeção de surfactantes. As duas últimas técnicas citadas podem envolver a presença de fluidos não-Newtonianos,

conforme já mencionado ao decorrer do trabalho, o que ressalta a relevância do estudo do escoamento dessa classe de fluidos em meios porosos heterogêneos. Dessa forma, outros modelos reológicos poderiam ser implementados e a determinação da eficiência do processo de deslocamento, poderia ser realizada através de análises como as realizadas nesta pesquisa, onde para um determinado cronograma de produção, é possível determinar se o fluido a ser produzido conseguirá ser deslocado ou não de maneira eficiente além de ser possível determinar em que tempo o reservatório começará a produzir água, permitindo um melhor planejamento da produção e do descomissionamento.

Caso II: $|\nabla\Phi^*| \leq G^*$.

Neste caso foram simulados cenários em que $|\nabla\Phi^*|$ é menor ou igual à G^* . Tal condição fará com que o fluido não-Newtoniano se comporte como um sólido para saturações maiores que a saturação limite e como um líquido para saturações inferiores a saturação limite.

As curvas de gradiente de potencial de fluxo para as funções de fluxo à esquerda e à direita da descontinuidade são apresentadas na Figura 5.24. De modo similar aos exemplos anteriores, é possível observar a linha tracejada que indica o valor de G^* . Contudo, é possível verificar que a linha traçada no gráfico atravessa os pontos da curva do gradiente de potencial de fluxo, que são coincidentes com a saturação limite para cada função de fluxo. Para se realizar a construção geométrica da envoltória é necessário se atentar o fato de que devido a condição (5.6) e a abordagem de adimensionalização realizada, em valores maiores aos da saturação limite, $f(s) = 1$, pois quando a viscosidade aparente tende ao infinito, $f(s)$ tende a 1. Logo, os pontos de máximo ou mínimo das funções passarão a ser os valores de $f(S_{lim_l})$ e $f(S_{lim_r})$ para este caso. Na Figura 5.25 é possível visualizar as funções de fluxo, que são mantidas em sua forma clássica para fins de comparação, bem como as linhas tracejadas que indicam as saturações limites para cada função de fluxo e a construção geométrica.

Dessa forma, vale ressaltar que as funções de fluxo são apresentadas na forma clássica apenas para fins ilustrativos e de comparação, pois conforme mencionado anteriormente em valores maiores ao da saturação limite, $f(u) = 1$.

As soluções numéricas e analíticas encontradas podem ser vistas na Figura 5.26. Para os resultados dispostos nas Figuras 5.26(a), 5.26(c) e 5.26(d), as soluções consistem em uma única onda de choque não estacionária que viaja com velocidade positiva para baixo no reservatório e uma onda de choque estacionária no ponto de descontinuidade, cuja distinção entre as soluções é referente aos estados.

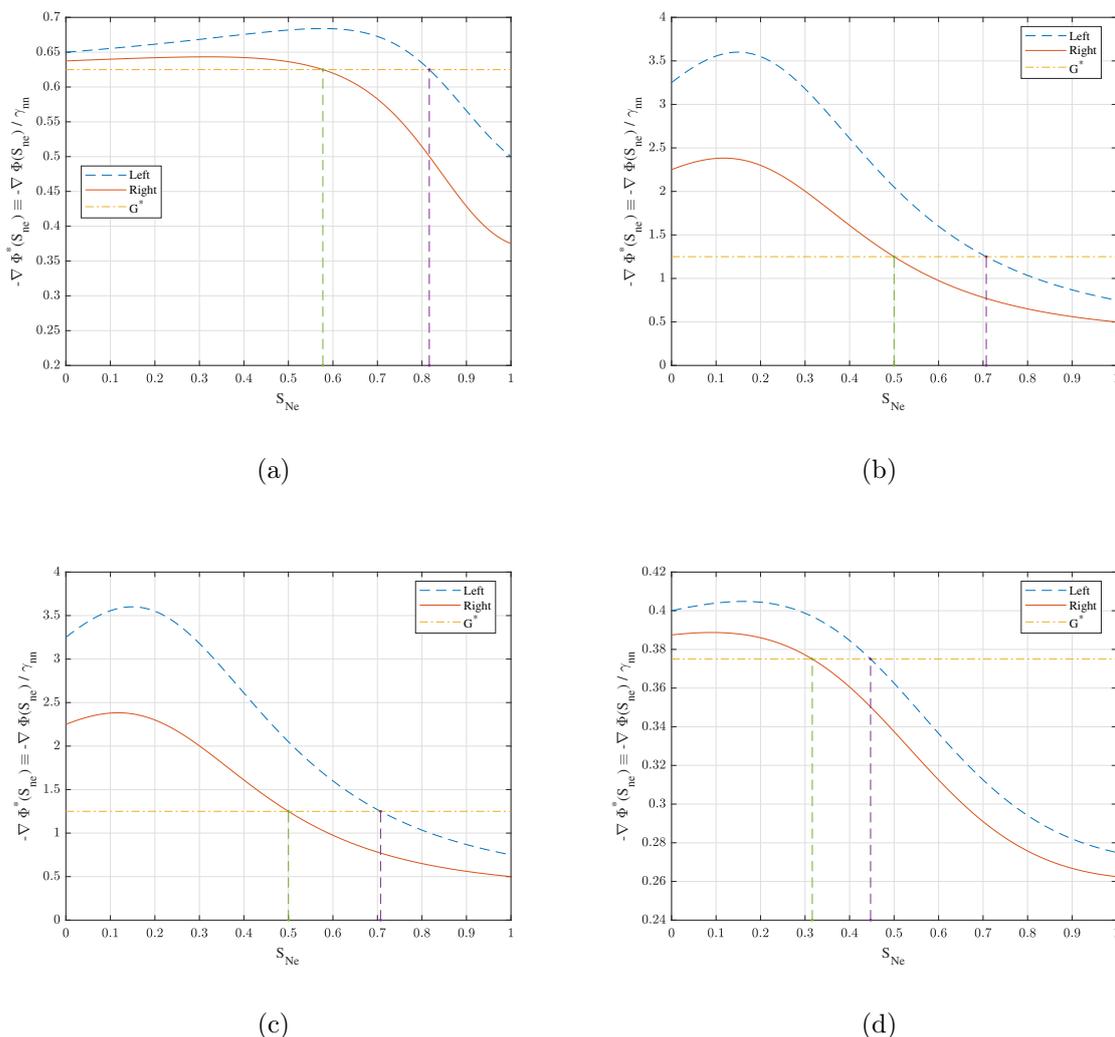


Figura 5.24: Curvas de gradiente de potencial de fluxo para o caso em que $|\nabla\Phi^*| \leq G^*$.

Por fim, a solução encontrada para o cenário (b) consiste em uma onda de choque com velocidade positiva que viaja para baixo no reservatório, uma onda de rarefação que abrange velocidades positivas e uma onda de choque estacionária no ponto de descontinuidade da rocha. Nesta solução as saturações para o lado esquerdo e direito também são limitadas e separadas pela onda de choque estacionária. Mais uma vez, do ponto de vista numérico, as soluções aproximadas se mostraram apropriadas quando comparadas com as soluções analíticas.

Diante de uma perspectiva real do problema, as soluções para os cenários considerados neste caso dizem que o fluido seria deslocado apenas em valores de saturação da fase Newtoniana abaixo da saturação limite, onde uma parte do fluido não-Newtoniano ficaria retida no meio poroso, por conseguir não escoar.

Sendo assim, em um cenário de emprego do método de injeção imiscível de água para o deslocamento de um óleo altamente viscoso com propriedades reológicas de um plástico de Bingham, a efetividade do método seria comprometida e uma análise técnico-econômica seria necessária para se determinar a viabilidade da produção do óleo a partir de tal método, que *a priori* possui vantagens pelo baixo custo operacional. Nesse caso, a simulação seria fundamental para determinação do método adequado para o processo de deslocamento do óleo, pois pode haver casos em há a necessidade de injeção de aditivos e/ou de calor, visando a redução da tensão de cisalhamento mínima necessária para promover o escoamento.

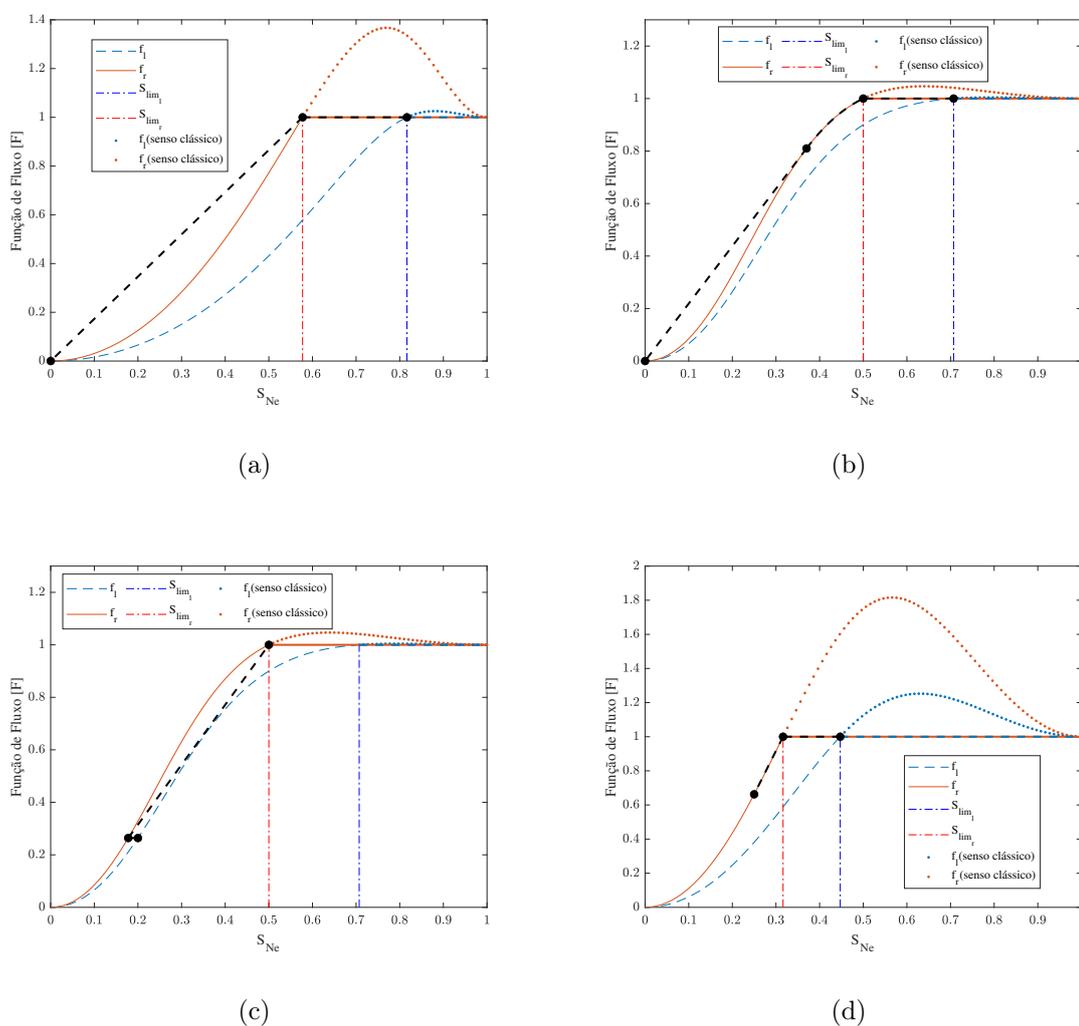
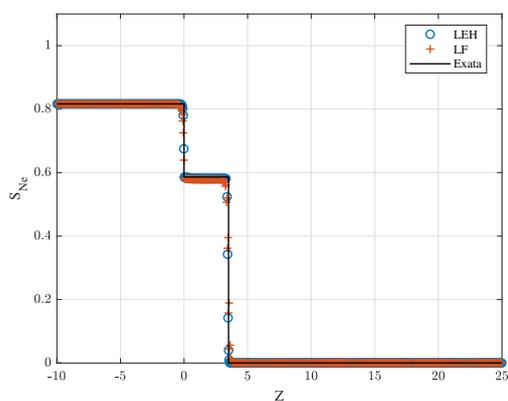
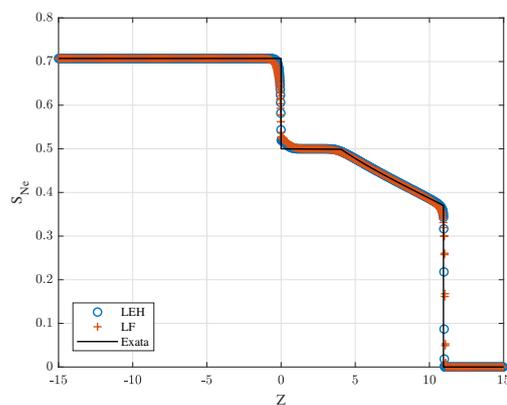


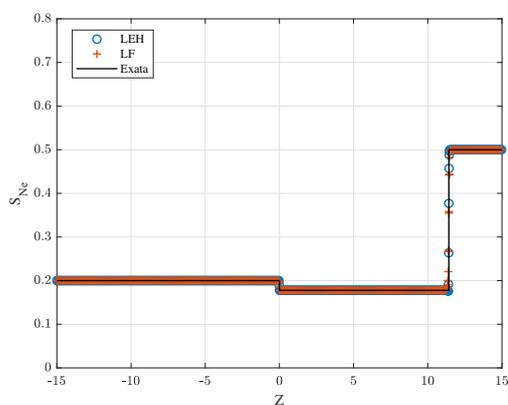
Figura 5.25: Curvas de funções de fluxo e extensão da construção geométrica da Oleinik para o caso em que $|\nabla\Phi^*| \leq G^*$.



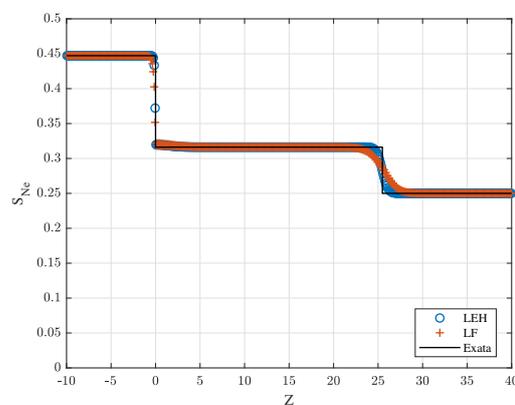
(a) Número de nodos igual a 5000, $CFL = 0,6$, $T = 2$, $S_l = 0,8165$, $S_r = 0$, Número de passos de tempo = 246, $m_\alpha = 0,1$, $eta = 0,025$, $G^* = 0,625$, $\gamma^* = 1,25$, $\omega^* = 0,125$, $K_f = 2$, $S_{lim_l} = 0,8165$ e $S_{lim_r} = 0,5773$.



(b) Número de nodos igual a 5000, $CFL = 0,6$, $T = 5$, $S_l = 0,7071$, $S_r = 0$, Número de passos de tempo = 2148, $m_\alpha = 4$, $eta = 2$, $G^* = 1,25$, $\gamma^* = 1,25$, $\omega^* = 5$, $K_f = 2$, $S_{lim_l} = 0,7071$ e $S_{lim_r} = 0,5000$.



(c) Número de nodos igual a 5000, $CFL = 0,6$, $T = 5$, $S_l = 0,2$, $S_r = 0,5000$, Número de passos de tempo = 2148, $m_\alpha = 4$, $eta = 2$, $G^* = 1,25$, $\gamma^* = 1,25$, $\omega^* = 5$, $K_f = 2$, $S_{lim_l} = 0,7071$ e $S_{lim_r} = 0,5000$.



(d) Número de nodos igual a 2000, $CFL = 0,6$, $T = 5$, $S_l = 0,4472$, $S_r = 0,25$, Número de passos de tempo = 434, $m_\alpha = 1$, $eta = 0,025$, $G^* = 0,375$, $\gamma^* = 1,25$, $\omega^* = 1,25$, $K_f = 2$, $S_{lim_l} = 0,4472$ e $S_{lim_r} = 0,3162$.

Figura 5.26: Soluções analíticas e numéricas para o caso em que $|\nabla\Phi^*| \leq G^*$.

5.3.1 Análise de Convergência de Malha

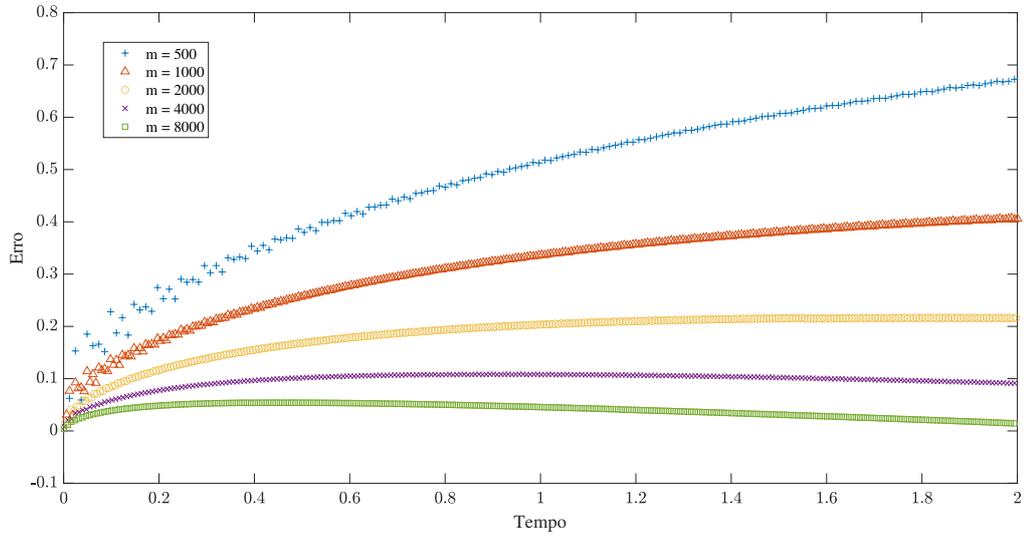
Com o objetivo de observação e comparação da acurácia dos esquemas LEH e LF, foi realizado um breve estudo de convergência de malha com os mesmo dados do cenário (a) do Caso I, com excessão do valor de G^* , que foi adotado como zero. O estudo consistiu na determinação do erro na norma $\|\cdot\|_1$ entre as soluções numéricas dos esquemas e a solução analítica para distintos refinamentos de malha ao longo do tempo. O erro espacial na norma $\|\cdot\|_1$ é definido como [26]:

$$\varepsilon_{\Delta x}^1(t) = \Delta x \sum_{j=1}^m \|u(x_j, t) - u_j^n\|, \quad (5.18)$$

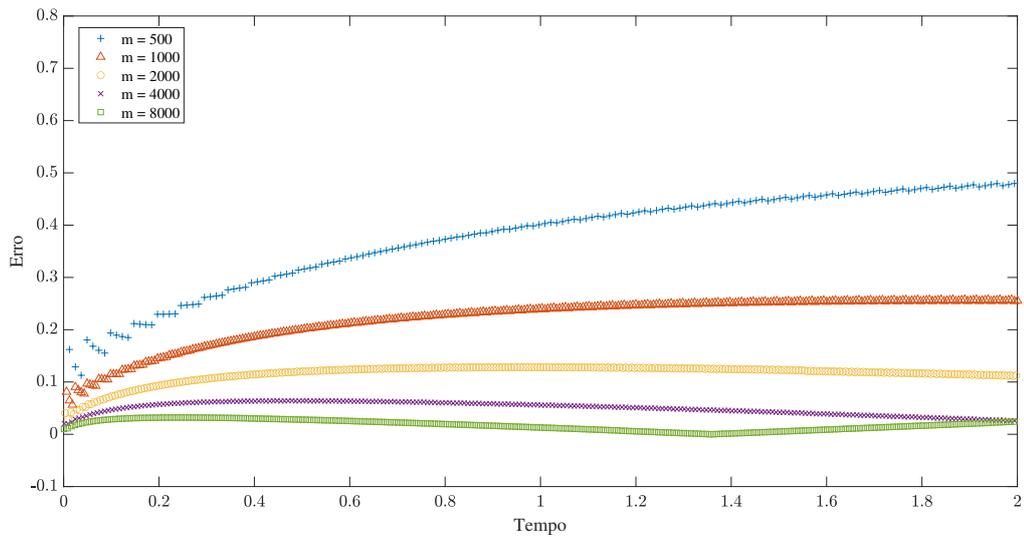
onde m é número de nodos.

O erro na norma $\|\cdot\|_1$ para os esquemas LF e LEH ao longo do tempo para distintos números de nodos são apresentadas nas Figuras 5.27(a) e 5.27(b), onde é possível observar que quanto maior número de nodos, ou seja, quanto mais refinada é a malha, menor é o erro de discretização de malha associado. É possível constatar ainda, que o erro tende a crescer à medida que tempo avança e em um dado tempo o erro deixa de ter um crescimento significativo. Já as comparações entre as soluções numéricas em relação a solução analítica, são apresentadas nas Figuras 5.28(a), 5.28(b), 5.28(c), 5.28(d), 5.28(e), onde é possível observar qualitativamente como as soluções numéricas se aproximam das soluções analíticas a medida em que a malha é refinada.

Ao comparar os esquemas LF e LEH, é possível constatar através da Figura 5.28(f) (que apresenta o máximo erro para o intervalo de tempo simulado), que o esquema de LEH possui maior acurácia e que ambos os métodos são convergentes com decaimento exponencial do erro de discretização de malha à medida que a malha se torna mais refinada. Os erros máximos para os esquemas também são dispostos na Tabela 5.8 para comparação quantitativa. Apesar de os esquemas LF e LEH apresentarem resultados satisfatórios, existem métodos com maior acurácia, como o de Godunov por exemplo, que é capaz de capturar de maneira mais satisfatória os efeitos em discontinuidades, pois por ser um método local, usa uma abordagem da solução de Riemann exata para calcular as flutuações nas interfaces das células.



(a) LF.

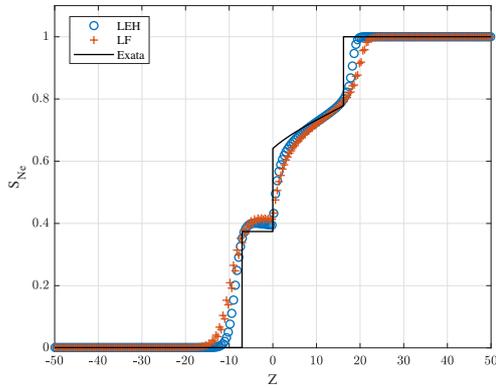


(b) LEH.

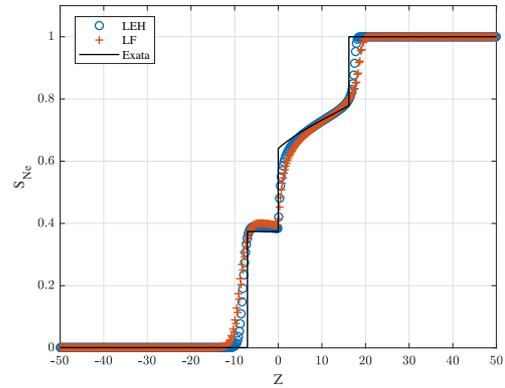
Figura 5.27: Convergência de malha ao longo do tempo.

m	$\max \varepsilon_{\Delta x, LF}^1$	$\max \varepsilon_{\Delta x, LEH}^1$
500	0,6726	0,4798
1000	0,4071	0,2573
2000	0,2172	0,1287
4000	0,1086	0,0643
8000	0,0543	0,0322

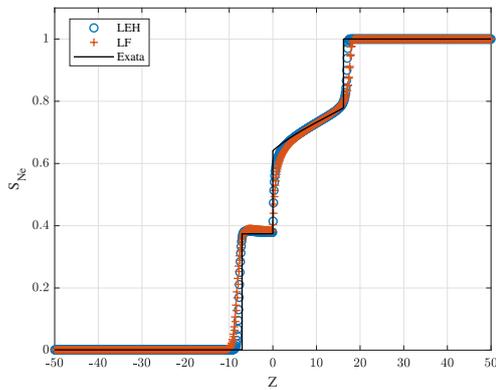
Tabela 5.8: Erros máximos em relação ao número de nodos para os esquemas de LF e LEH.



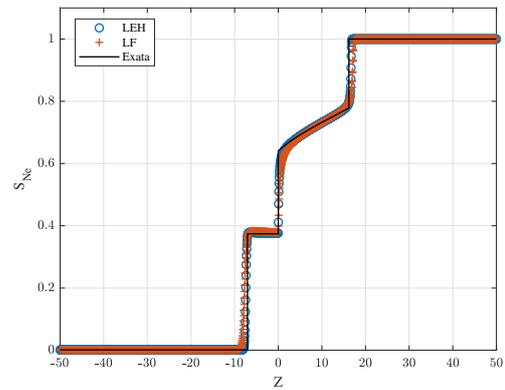
(a) Número de nodos igual a 500.



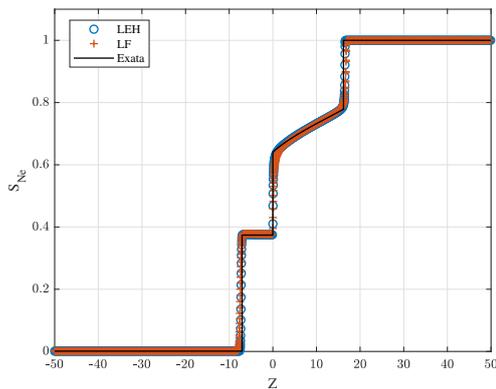
(b) Número de nodos igual a 1000.



(c) Número de nodos igual a 2000.



(d) Número de nodos igual a 4000.



(e) Número de nodos igual a 8000.

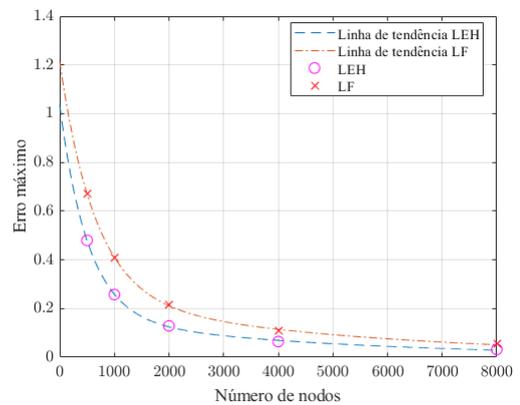
(f) Máximo erro entre esquemas LEH e LF em função do número de nodos para um intervalo de tempo adimensional $T=2$.

Figura 5.28: Análise de convergência de malha.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

6.1 Conclusões

Ao decorrer do trabalho foi apresentado um modelo matemático para escoamento bifásico imiscível em meios porosos descontínuos com gravidade e fase não-Newtoniana do tipo plástico de Bingham baseado na extensão da equação de Buckley-Leverett proposta por Wu et al., (2015). Além disso, foi abordado diversos tópicos que norteiam a teoria das leis de conservação escalares e de modelos reológicos para fluidos não-Newtonianos.

Para resolução analítica dos problemas analisados foi utilizada a extensão da construção geométrica de Oleinik de acordo com os estudos realizados por Kaasschieter (1999), enquanto para obtenção das soluções aproximadas foram utilizados os esquemas numéricos de diferenças finitas de Lax-Friedrichs e o esquema Lagrangeano-Euleriano desenvolvido por Sepulveda (2015) com uma modificação no fluxo numérico para que fosse capaz de captar adequadamente o choque estacionário que surge na solução em problemas com funções de fluxo descontínuas.

Os problemas analisados consistiram em um problema de Riemann que forneceram soluções variadas de acordo com os dados iniciais e funções de fluxo consideradas. As soluções consistiram numa combinação de ondas choques e rarefação, em alguns casos apenas ondas de choque e para todos os casos descontínuos houve a presença de uma onda de choque estacionária devido a existência de funções de fluxo descontínuas.

Em casos onde $|\nabla\Phi^*| \leq G^*$ as funções de fluxo apresentaram valores de saturação limite. Conforme o modelo proposto, foi visto que para os valores de saturação acima da saturação limite a viscosidade aparente do fluido tendia ao infinito, nesse caso o fluido se comportava como um sólido e apresentava resistência ao escoamento, já em valores

inferiores, o fluido permanecia se comportando como um líquido.

Por fim, foi possível observar que diante de uma perspectiva numérica após se realizar uma comparação qualitativa das soluções numéricas em relação as soluções analíticas, ambos os métodos numéricos implementados através do programa MATLAB[®] se mostraram eficazes na obtenção das soluções aproximadas, porém, foi possível constatar que esquema LEH produziu melhores resultados quando comparado ao esquema de Lax-Friedrichs.

6.2 Trabalhos Futuros

Os problemas analisados se restringiram a apenas alguns cenários possíveis devido à complexidade de construção das soluções. Dessa forma, é recomendado que em trabalhos futuros sejam realizados estudos mais profundos acerca das possíveis combinações entrópicas das ondas de choque e rarefação. Em trabalhos futuros é desejável também que sejam analisados outros modelos reológicos para fluidos não-Newtonianos, tais como o modelo de lei de potência e modelo de Herschel–Bulkley.

Uma outra recomendação para trabalhos futuros é a extensão do modelo para casos bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D) para estudos em que apenas uma coordenada espacial não seja suficiente para definir o problema.

ANEXO A – Lei de Darcy para o Plástico de Bingham

O modelo reológico unidimensional para um fluido não-Newtoniano do tipo plástico de Bingham para $\tau > |\tau_o|$ é descrito pela equação (A.1) que pode ser rearranjada resultando na equação (A.2) [29].

$$\tau = -\mu_B \frac{du}{dx} + \tau_o, \quad (\text{A.1})$$

onde μ_B é o parâmetro de consistência do modelo reológico do plástico de Bingham e $du/dx = \dot{\gamma}$ é a taxa de cisalhamento.

$$\frac{du}{dx} = -\frac{(\tau - \tau_o)}{\mu_B} \quad (\text{A.2})$$

A equação (A.2) pode ser integrada resultando na equação (A.3):

$$u = -\frac{(\tau - \tau_o)}{\mu_B} x + C \quad (\text{A.3})$$

Para escoamentos em meios porosos, τ pode ser substituído por um diferencial de pressão ($P_2 - P_1$), τ_o por uma pressão mínima P_o e a variável x pode ser substituída por outra de mesma equivalência dimensional que caracterize o meio poroso. Nesse caso, a variável x é substituída por k/L resultando em uma versão modificada da Lei de Darcy, ou seja, a Lei de Darcy para um fluido não-Newtoniano do tipo Plástico de Bingham (A.4). Logo, para $C = 0$ tem-se:

$$u = -\frac{(P_2 - P_1)}{L} \frac{k}{\mu_B} + \frac{P_o}{L} \frac{k}{\mu_B}, \quad (\text{A.4})$$

onde k é a permeabilidade do meio poroso e L é o comprimento do meio poroso.

Reescrevendo a relação entre o termo de diferencial de pressão e o comprimento do

meio poroso como um gradiente de pressão, é possível reescrever a equação (A.4) como:

$$u = \begin{cases} -\frac{k}{\mu_B} \left(1 - \frac{G}{|\nabla P|}\right) \nabla P, & \text{se, } |\nabla P| > G, \\ 0, & \text{se, } |\nabla P| \leq G, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

onde:

$$G = \frac{P_o}{L} \quad (\text{A.6})$$

A gravidade pode ser considerada no escoamento fornecendo a equação (A.7):

$$u = \begin{cases} -\frac{k}{\mu_B} \left(1 - \frac{G}{|\nabla \Phi|}\right) \nabla \Phi, & \text{se, } |\nabla \Phi| > G, \\ 0, & \text{se, } |\nabla \Phi| \leq G, \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

onde:

$$\nabla \Phi = \nabla P + \rho g \quad (\text{A.8})$$

A viscosidade aparente pode ser obtida rearrajando a equação (A.7) gerando a seguinte igualdade para $|\nabla \Phi| > G$:

$$\frac{\mu_B}{\left(1 - \frac{G}{|\nabla \Phi|}\right)} = -\frac{\nabla \Phi k}{u} \quad (\text{A.9})$$

Uma vez que ambos os lados da igualdade possuem dimensão de viscosidade dinâmica, $[M][L^{-1}][T^{-1}]$, tem-se que viscosidade aparente para o fluido não-Newtoniano do tipo plástico de Bingham μ_{nn} para $|\nabla \Phi| > G$ é dada como:

$$\mu_{nn} = \frac{\mu_B}{\left(1 - \frac{G}{|\nabla \Phi|}\right)} \quad (\text{A.10})$$

Da relação $-\frac{\nabla \Phi k}{u}$ na equação (A.9) é possível verificar que para $|\nabla \Phi| \leq G$, μ_{nn} tende ao infinito pois conforme na equação (A.5) u é igual a 0, e a viscosidade aparente é dada pela condição (A.11).

$$\mu_{nn} = \begin{cases} \frac{\mu_B}{\left(1 - \frac{G}{|\nabla \Phi|}\right)}, & \text{se } |\nabla \Phi| > G, \\ \infty, & \text{se } |\nabla \Phi| \leq G. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Referências

- [1] ANDERSON, J. D., WENDT, J. *Computational fluid dynamics*, vol. 206. Springer, 1995.
- [2] ARAUJO, I. L., RODRÍGUEZ-BERMÚDEZ, P., RODRÍGUEZ-NÚÑEZ, Y. Numerical study for two-phase flow with gravity in homogeneous and piecewise-homogeneous porous media. *TEMA (São Carlos) 21* (2020), 21–41.
- [3] ARCHER, J. S., WALL, C. G. *Petroleum engineering: principles and practice*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] BAHADORI, A. *Fundamentals of enhanced oil and gas recovery from conventional and unconventional reservoirs*, 1 ed. Gulf Professional Publishing, 2018.
- [5] BEAR, J. *Dynamics of fluids in Porous Media*, 1 ed. Dover Publications, 1988.
- [6] BROOKS, R., COREY, A. Hydraulic properties of porous media. hydrology paper no. 3. *Civil Engineering Department, Colorado State University, Fort Collins, CO* (1964).
- [7] BURDEN, R. L., FAIRES, J. D., BURDEN, A. M. *Numerical analysis*, 10 ed. Cengage learning, 2015.
- [8] CHHABRA, R. P., RICHARDSON, J. F. *Non-Newtonian flow and applied rheology: engineering applications*, 2 ed. Butterworth-Heinemann, 2011.
- [9] DA SILVA, D. S. M. Soluções de Riemann para um escoamento bifásico com fonte de dirac em um meio poroso. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense - UFF, Mestrado em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, Rio de Janeiro, Volta Redonda, 2016.
- [10] EL-KHATIB, N. Immiscible displacement of non-Newtonian fluids in communicating stratified reservoirs. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering - SPE Reservoir Evaluation & Engineering 9* (08 2006), 356–365.
- [11] FOX, R. W., McDONALD, A. T., MITCHELL, J. W. *Introduction to fluid mechanics*, 10 ed. John Wiley & Sons, 2020.
- [12] KAASSCHIETER, E. F. Solving the Buckley-Leverett equation with gravity in a heterogeneous porous medium. *Computational Geosciences 3* (1999), 23–48.
- [13] LEVEQUE, R. J. *Finite volume methods for hyperbolic problems*, 1 ed., vol. 31. Cambridge university press, 2002.

-
- [14] LEVEQUE, R. J. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*, 1 ed. SIAM, 2007.
- [15] LEVEQUE, R. J. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser Basel, 2013.
- [16] LEWY, H., FRIEDRICHS, K., COURANT, R. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische annalen* 100 (1928), 32–74.
- [17] M. SALMAN, M., BAGHDIKIAN, S., HANDY, L., YORTSOS, Y. Modification of Buckley-Leverett and JBN methods for power-law fluids. Relatório Técnico, University of Southern California, Los Angeles, CA (USA). Dept. of Petroleum, 1990.
- [18] MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos*, 1 ed. Computacional. Editora LTC, 1995.
- [19] MATHWORKS. MATLAB[®] primer. *Natick, MA* (2017).
- [20] OLEINIK, O. Discontinuous solutions of nonlinear differential equations. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 26*, 2 (1957), 95–172.
- [21] SCHEIDEGGER, A. E. *The physics of flow through porous media*. University of Toronto press, 1957.
- [22] SEPULVEDA, J. A. P. *Métodos de aproximação Lagrangeano-Euleriano para leis de balanço e leis de conservação hiperbólicas*. PhD thesis, Unicamp, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, São Paulo, Campinas, 2015.
- [23] STRIKWERDA, J. C. *Finite difference schemes and partial differential equations*. SIAM, 2004.
- [24] THOMAS, J. E. *Fundamentos de engenharia de petróleo*. Interciência, 2001.
- [25] VAN DUIJN, C. An introduction to conservation laws: theory and applications to multi-phase flow. *Lecture Notes, Delft University of Technology* (2002).
- [26] VÁZQUEZ-CENDÓN, M. E. *Solving hyperbolic equations with finite volume methods*, vol. 90. Springer, 2015.
- [27] WILLHITE, G. *Waterflooding*, vol. 3. Society of Petroleum Engineers, Richardson, TX, 1986.
- [28] WU, Y., PRUESS, K., WITHERSPOON, P. Flow and displacement of Bingham non-Newtonian fluids in porous media. *SPE Reservoir Engineering* 7, 03 (1992), 369–376.
- [29] WU, Y.-S. *Multiphase fluid flow in porous and fractured reservoirs*, 1 ed. Gulf professional publishing, 2015.