

Universidade Federal Fluminense

HELDER DA FONSECA NUNES

Método Completo de Diferenças Finitas
Centradas para a Equação de Helmholtz

VOLTA REDONDA

2024

HELDER DA FONSECA NUNES

Método Completo de Diferenças Finitas Centradas para a Equação de Helmholtz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Orientador:

Prof. Gustavo Benitez Alvarez

Coorientador:

Prof. Welton Alves de Menezes

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

VOLTA REDONDA

2024

Método Completo de Diferenças Finitas Centradas para a Equação de Helmholtz

Helder da Fonseca Nunes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada por:

Documento assinado digitalmente
 **GUSTAVO BENITEZ ALVAREZ**
Data: 01/03/2024 09:40:31-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Gustavo Benitez Alvarez, D.Sc / MCCT-UFF



Prof. Welton Alves de Menezes, D.Sc. / MCCT-UFF

Documento assinado digitalmente
 **ABIMAE FERNANDO DOURADO LOULA**
Data: 02/03/2024 15:03:30-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Abimael Fernando Dourado Loula, D.Sc / LNCC

Documento assinado digitalmente
 **EDUARDO GOMES DUTRA DO CARMO**
Data: 02/03/2024 10:19:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo, D.Sc. / COPPE-UFRRJ

Documento assinado digitalmente
 **WEBE JOAO MANSUR**
Data: 04/03/2024 18:25:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Webe João Mansur, Ph.D. / COPPE-UFRRJ

Documento assinado digitalmente
 **DANIEL THOMES FERNANDES**
Data: 06/03/2024 13:02:37-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Daniel Thomes Fernandes, D.Sc. / UFES

Documento assinado digitalmente
 **CLAUDIA MAZZA DIAS**
Data: 01/03/2024 13:47:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a Claudia Mazza Dias, D.Sc. / UFRRJ

Volta Redonda, 28 de Fevereiro de 2024.

Ficha catalográfica automática - SDC/BEM
Gerada com informações fornecidas pelo autor

N972m Nunes, Helder da Fonseca
Método Completo de Diferenças Finitas Centradas para a
Equação de Helmholtz / Helder da Fonseca Nunes. - 2024.
133 f.

Orientador: Gustavo Benitez Alvarez.
Coorientador: Welton Alves De Menezes.
Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta
Redonda, Volta Redonda, 2024.

1. Método de diferenças finitas. 2. Equação diferencial
parcial. 3. Solução numérica. 4. Análise numérica. 5.
Produção intelectual. I. Alvarez, Gustavo Benitez,
orientador. II. De Menezes, Welton Alves, coorientador. III.
Universidade Federal Fluminense. Escola de Engenharia
Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda. IV. Título.

CDD - XXX

A Deus, à minha mãe Maria e ao meu irmão Jader.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, em primeiro lugar, pois sem Ele eu nem poderia escrever essa dissertação. Ele É a base de tudo.

Agradeço à minha mãe, Maria e ao meu irmão Jader, por toda força e incentivo que me deram nessa caminhada.

Agradeço aos meus amigos mais próximos, pois eles sabem o caminho árduo que percorri.

E por último, mas não menos importante, agradeço ao Prof. Gustavo Benitez por ter aceitado ser meu orientador, pela paciência e perseverança que teve comigo.

Resumo

A resolução numérica da equação de Helmholtz tem sido um desafio tanto para os Métodos de Diferenças Finitas (MDF) quanto para os Métodos de Elementos Finitos (MEF) devido a natureza oscilatória da solução. Sabe-se que a medida que o número de onda k aumenta, a solução perde estabilidade e precisão mesmo obedecendo uma regra heurística que prescreve uma relação entre o número de onda e o tamanho da malha (*rule of thumb*). Essa perda de precisão e estabilidade é chamada de efeito de poluição do erro ou apenas poluição do erro. Muitos trabalhos têm sido desenvolvidos utilizando MEF e MDF com o intuito de minimizar esse efeito. No presente trabalho, inicialmente, novos esquemas em diferenças finitas são apresentados, os quais foram desenvolvidos apenas modificando-se o segundo termo da equação de Helmholtz, o qual envolve o número de onda. Para todos eles foi realizada a análise de dispersão e o cálculo do erro de truncamento local (ETL). Logo em seguida introduz-se o Método Completo de Diferenças Finitas Centradas (MCDFC). Inicialmente o método é apresentado e definido formalmente. Nesse trabalho foram utilizados estêncis de 3, 5 e 9 pontos. Para cada estêncil realizaram-se as análises de dispersão, o cálculo do ETL e análise experimental do erro global. A análise de dispersão mostra que o método completo, dependendo da quantidade de pontos do estêncil, ou seja, dependendo da dimensão do subespaço local de aproximação, é capaz de sempre produzir um método com a mínima dispersão possível para essa quantidade de pontos. No caso 1D ocorre a eliminação por completo da poluição do erro. No caso 2D e estêncil com 5 pontos, o método completo é capaz de produzir estêncil com mínima dispersão possível para essa quantidade de pontos, obtendo uma relação de dispersão equivalente à do método *Galerkin Least-Squares* (GLS), porém com um estêncil menor, já que o GLS é formulado com um estêncil de 9 pontos. Aumentando-se o estêncil de 5 para 9 pontos, o MCDFC é capaz de minimizar a dispersão de forma a obter resultados equivalentes aos do *Quasi-Stabilized Finite Element Method* (QSFEM). O MCDFC possui também a flexibilidade de lidar com estêncis não-simétricos e simétricos, sendo essa característica verificada após o estudo de simetria, contido no presente trabalho. Pela primeira vez, na análise de dispersão aparecem duas restrições a serem satisfeitas. A equação da parte real é usada para estimar $k^h - k$. A equação da parte imaginária é uma restrição adicional que deve cumprir o método, a qual guarda relação com a simetria do estêncil. Por fim, os resultados de dispersão e numéricos são apresentados, confirmando a teoria.

Abstract

The numerical resolution of the Helmholtz equation has been a challenge for both finite difference methods (FDM) and finite element methods (FEM) due to the oscillatory nature of the solution. It is known that as the wave number k increases, the solution loses stability and accuracy even when following a heuristic rule that prescribes a relationship between the wave number and the mesh size (rule of thumb). This loss of precision and stability is called the error pollution effect or simply error pollution. Many works have been developed using FEM and FDM with the aim of minimizing this effect. In the present work, new finite difference schemes are initially presented, which were developed by modifying only the term k^2u of the Helmholtz equation. For all of them, dispersion analysis and calculation of the local truncation error (LTE) were performed. Next, the Complete Centered Finite Difference Method (CCFDM) is introduced. Initially, the method is presented and formally defined. Stencils of 3, 5, and 9 points were used in this work. For each stencil, dispersion analyses, LTE calculations, and experimental analysis of the global error were performed. The dispersion analysis shows that the complete method, depending on the number of points in the stencil, or rather, depending on the dimension of the local approximation subspace, is capable of always producing a method with the minimum possible dispersion for that number of points. In the 1D case, error pollution is completely eliminated. In the 2D case and 5-point stencil, the complete method is capable of producing a stencil with the minimum possible dispersion for that number of points, obtaining a dispersion relation equivalent to that of the GLS method but with a smaller stencil, since GLS is formulated with a 9-point stencil. By increasing the stencil from 5 to 9 points, the CCFDM is able to minimize dispersion to obtain results equivalent to those of the QSFEM method. The CCFDM also has the flexibility to handle both symmetric and non-symmetric stencils, a characteristic verified after the symmetry study contained in the present work. For the first time, two constraints to be satisfied appear in the dispersion analysis. The equation of the real part is used to estimate $k^h - k$. The equation of the imaginary part is an additional restriction that the method must fulfill, which is related to the symmetry of the stencil. Finally, dispersion and numerical results are presented, confirming the theory.

Palavras-chave

1. Diferenças Finitas
2. Equação de Helmholtz
3. Número de Onda
4. Poluição do Erro
5. Análise de Dispersão
6. Estabilização
7. Equações Diferenciais Parciais

Glossário

CC	:	Centrado Clássico
EDP	:	Equação Diferencial Parcial
ETL	:	Erro de Truncamento Local
GLS	:	<i>Galerkin Least-Squares</i>
MCDFC	:	Método Completo de Diferenças Finitas Centradas
MDF	:	Método de Diferenças Finitas
MEF	:	Método de Elementos Finitos
QSFEM	:	<i>Quasi Stabilized Finite Element Method</i>

Sumário

1	Introdução	12
2	Fundamentação Teórica	15
2.1	A Equação de Helmholtz	15
2.1.1	Ondas acústicas	15
2.1.2	Solução em uma dimensão	16
2.1.3	Solução em duas dimensões	17
2.2	Método das Diferenças Finitas	19
2.2.1	Em uma dimensão	19
2.2.2	Em duas dimensões	21
3	Esquemas de Diferenças Finitas para a Equação de Helmholtz	23
3.1	Caso Unidimensional	24
3.2	Caso Bidimensional	25
3.3	Erro de Truncamento Local	27
3.3.1	Em uma dimensão	27
3.3.2	Em duas dimensões	28
3.4	Análise de Dispersão	30
3.4.1	Em uma dimensão e estêncil de 3 pontos	30
3.4.2	Em duas dimensões e estêncil de 5 pontos	32
3.4.3	Em duas dimensões e estêncil de 9 pontos	35
3.5	Análise de Simetria no Caso Bidimensional	37

4	Método Completo de Diferenças Finitas Centradas	40
4.1	Determinação dos Vetores Geradores	44
4.1.1	Caso Unidimensional	44
4.1.2	Caso Bidimensional	45
4.1.2.1	Estêncil de cinco pontos	45
4.1.2.2	Estêncil de nove pontos	46
4.2	Análise de Dispersão e Determinação dos Parâmetros Livres	48
4.2.1	Consequências da análise de dispersão para malhas uniformes	49
4.2.2	Caso unidimensional e estêncil de três pontos	52
4.2.3	Caso bidimensional e estêncil de cinco pontos	53
4.2.4	Caso bidimensional e estêncil de nove pontos	57
4.2.4.1	Estêncil compacto e Laplaciano com 5 pontos	57
4.2.4.2	Estêncil compacto e Laplaciano com 9 pontos	60
4.3	Erro de Truncamento Local	65
4.3.1	Caso unidimensional e estêncil de três pontos	65
4.3.2	Caso bidimensional e estêncil de cinco pontos	65
4.3.3	Caso bidimensional e estêncil de nove pontos	66
4.3.3.1	Estêncil Compacto e Laplaciano com 5 pontos	66
4.3.3.2	Estêncil Compacto e Laplaciano com 9 Pontos	68
5	Resultados Numéricos	70
5.1	Implementação Computacional	70
5.2	Análise Unidimensional	73
5.2.1	Efeito de Poluição do Erro	73
5.2.2	Análise do Erro	77
5.3	Análise Bidimensional	78
5.3.1	Efeito de Poluição do Erro	79

5.3.1.1	Estêncil de 5 pontos	80
5.3.1.2	Estêncil Compacto e Laplaciano com 5 pontos	83
5.3.1.3	Estêncil Compacto e Laplaciano com 9 pontos	92
5.3.2	Análise do Erro	100
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	104
6.1	Conclusões	104
6.2	Trabalhos Futuros	105
	Referências	106
	Apêndice A – Códigos Computacionais	108
A.1	Códigos dos métodos em uma dimensão	108
A.2	Códigos dos métodos em duas dimensões	112

Capítulo 1

Introdução

A equação de Helmholtz é um modelo matemático linear que descreve os harmônicos-temporais de ondas acústicas, elásticas e eletromagnéticas e possui inúmeras aplicações nos campos da física e engenharia. Em sua forma escalar, bidimensional e com condições de contorno de Dirichlet é dada por [5]

$$\Delta u + k^2 u = f \text{ em } \Omega, \quad (1.1)$$

$$u = g \text{ em } \partial\Omega, \quad (1.2)$$

onde Δ representa o operador Laplaciano, dado por $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, u é um campo escalar que descreve os harmônicos-temporais de ondas acústicas, k é o número de onda, f um termo fonte, Ω é o interior do domínio limitado com contorno Lipschitz $\partial\Omega$ e g é a condição de contorno. Dada sua grande importância para os campos da física e engenharia, tem sido objeto de muitos estudos [10, 20, 22, 24, 25]. Porém, muitas aplicações práticas exigem que se tenha um número de onda k elevado e sabe-se que a qualidade da solução numérica depende significativamente desse parâmetro, sendo sua precisão severamente deteriorada com o aumento do valor de k [5, 9, 17]. Para se obter uma aceitável aproximação, a resolução da malha utilizada deve ser ajustada de acordo com o número de onda. Esse ajuste é obtido através de uma regra heurística que define uma quantidade mínima de nós por comprimento de onda [13]. Essa regra prescreve a relação entre o número de onda k e o parâmetro da malha h necessário para a solução numérica aproximar um comprimento de onda $kh = \frac{2\pi}{p}$, onde uma escolha intuitiva para a quantidade de nós por comprimento de onda é $7 \leq p \leq 10$ [14]. Porém, é de conhecimento que mesmo quando essa regra é obedecida, a performance dos Métodos de Diferenças Finitas (MDF) e dos Métodos de Elementos Finitos (MEF) diminui drasticamente com o aumento do número de onda

[1, 12, 20]. Esse comportamento é conhecido como efeito de poluição do erro [2, 3, 14].

Para problemas unidimensionais, já existem formulações do MEF que eliminam totalmente esse efeito, tal como o método GLS (Galerkin *Least-Squares*) apresentado por Harari e Hughes [11]. Já para problemas bidimensionais, sabe-se que é impossível eliminar totalmente esse efeito, como visto em [3]. Buscaram-se desenvolver, portanto, MEF que minimizassem a poluição do erro, como o *Quasi-Stabilized Finite Element Method* (QS-FEM) descrito por Babuška, Ihlenburg *et al.* [2]. Porém, o QSFEM, diferentemente dos MEF tradicionais, não é derivado de uma formulação variacional típica. Algum tempo depois surgiram outros MEF equivalentes ao QSFEM [1, 8, 17, 19].

Quando se observa os esforços no desenvolvimento de Métodos de Diferenças Finitas para resolução desse problema, alguns estudos podem ser considerados. Pode-se citar Sutmann [22] que desenvolveu um novo esquema de sexta ordem, Singer e Turkel [20] que desenvolveram esquemas de quarta ordem baseados nas generalizações de Padé. Wu [24] desenvolveu um esquema de quarta ordem que minimiza o erro de dispersão e juntamente com Xu em [25] desenvolveram um esquema de sexta ordem. Fernandes e Loula [10] desenvolveram o *Quasi Optimal Finite Difference Method* (QOFD) para malhas não uniformes e não-estruturadas que quando aplicado em malhas uniformes produz resultados equivalentes aos do QSFEM.

O presente trabalho, a princípio, procurou buscar métodos que reduzissem a dispersão de onda e que fossem consistentes. O Capítulo 2 introduz os conceitos básicos necessários para o entendimento acerca da equação de Helmholtz e o Método de Diferenças Finitas. O Capítulo 3 trata da busca dos novos métodos em si, onde são desenvolvidos novos esquemas de diferenças finitas apenas modificando-se a aproximação do termo k^2u da equação de Helmholtz. Foram desenvolvidos seis novos esquemas para o caso unidimensional e oito novos esquemas para o caso bidimensional. Em seguida é realizado o cálculo do erro de truncamento local (ETL) e análise de dispersão de cada método, onde importantes informações são apresentadas que serão de grande utilidade no Capítulo 4. Nessa seção também depara-se com algo que, até o presente momento, não havia sido visto em outros trabalhos, que é o aparecimento de duas equações a serem satisfeitas na análise de dispersão. Em todos os trabalhos conhecidos, apenas estava presente a equação da parte real, onde a parte imaginária era satisfeita automaticamente. Assim, no presente trabalho, entende-se que a parte imaginária representa uma restrição adicional que o método deve cumprir para verificar a análise de dispersão, como será visto adiante.

No Capítulo 4 introduz-se o Método Completo de Diferenças Finitas Centradas

(MCDFC), a principal contribuição do presente trabalho. A princípio a teoria do método é apresentada e as análises que foram feitas no capítulo 3 também foram realizadas para esse método, ou seja, cálculo do ETL, dispersão com a adição da análise de simetria.

No Capítulo 5 são apresentados os resultados numéricos e análise de erro dos métodos desenvolvidos no Capítulo 4. Por fim, são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros no Capítulo 6.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 A Equação de Helmholtz

2.1.1 Ondas acústicas

A equação de Helmholtz modela muitos fenômenos, sendo o estudo de propagação de ondas sonoras um dos mais relevantes. De acordo com [9], nesse tipo de problema as variáveis envolvidas (pressão, velocidade, densidade), experimentam pequenas variações de um estado estático, possibilitando linearizar e simplificar as equações que governam o comportamento dessas grandezas e obter a equação da onda

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

onde ϕ pode fazer referência à um campo de pressão ou a um potencial de velocidade, e a constante c representa a velocidade do som no meio em questão. Assumindo que a equação (2.1) tenha soluções do tipo

$$\phi(x, t) = u(x)e^{-i\omega t}. \quad (2.2)$$

De acordo com [5] estas soluções são chamadas de harmônicos temporais, onde $u(x)$ é a parte espacial, com $\omega > 0$ sendo a frequência. Substituindo (2.2) em (2.1), tem-se:

$$\Delta(u(x)e^{-i\omega t}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (u(x)e^{-i\omega t})}{\partial t^2} = 0. \quad (2.3)$$

Considerando que $e^{-i\omega t}$ não depende de x no primeiro termo e $u(x)$ não depende de t no segundo termo, pode-se escrever [5]:

$$e^{-i\omega t} \Delta u(x) + \frac{\omega^2}{c^2} u(x) e^{-i\omega t} = 0, \quad (2.4)$$

onde a parte estacionária $u(x) = u$ satisfaz a equação

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (2.5)$$

chamada Equação de Helmholtz, com $k^2 = \omega^2/c^2$. Maiores detalhes podem ser obtidos nas referências [5] e [12].

2.1.2 Solução em uma dimensão

Para o caso unidimensional, a equação de Helmholtz (2.5) pode ser reescrita como:

$$u''(x) + k^2 u = 0, \quad (2.6)$$

onde

$$u''(x) = \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

Trata-se de uma equação linear homogênea com coeficientes constantes e que é da mesma forma da equação do oscilador harmônico simples [5]. As soluções serão da forma

$$u(x) = e^{\lambda x}. \quad (2.7)$$

Substituindo a equação (2.7) em (2.6) com os cálculos das derivadas já realizados, tem-se:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + k^2 e^{\lambda x} = 0. \quad (2.8)$$

Dividindo ambos os lados por $e^{\lambda x} \neq 0$, te-se

$$\lambda^2 + k^2 = 0. \quad (2.9)$$

Fica claro que λ pode assumir dois valores: $\lambda_1 = -ik$ ou $\lambda_2 = +ik$. Tem-se então, duas soluções:

$$u_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{-ikx}$$

e

$$u_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{ikx}.$$

Observa-se que as soluções são linearmente independentes entre si, logo, uma combinação linear delas também será solução da equação de Helmholtz [5],

$$u(x) = c_1 e^{-ikx} + c_2 e^{+ikx}. \quad (2.10)$$

Utilizando a fórmula de Euler [7], $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$, tem-se

$$u(x) = (c_1 + c_2) \cos(kx) + i(c_2 - c_1) \sin(kx). \quad (2.11)$$

Tomando $c_1 + c_2 = \psi_1$ e $i(c_2 - c_1) = \psi_2$, pode-se reescrever (2.11) como

$$u(x) = \psi_1 \cos(kx) + \psi_2 \sin(kx). \quad (2.12)$$

Adotando um domínio $(0, 1)$ com condições de contorno de Dirichlet $u(0) = a$ e $u(1) = b$. Portanto, de acordo com [5], a solução para esse problema é apresentada como:

$$u(x) = \frac{a \sin(k - kx) + b \sin(kx)}{\sin(k)}. \quad (2.13)$$

2.1.3 Solução em duas dimensões

Considerando a equação de Helmholtz homogênea no \mathbb{R}^3

$$\Delta u + k^2 u = 0. \quad (2.14)$$

De acordo com [12], procura-se por soluções não-triviais da forma $u = X(x)Y(y)Z(z)$. Dessa maneira, substituindo em (2.14) temos:

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' + k^2XYZ = 0, \quad (2.15)$$

que pode ser reescrita como,

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k^2. \quad (2.16)$$

O lado direito da equação (2.16) não depende de x , portanto a igualdade do lado direito é válida se ambos os lados foram iguais a uma constante λ . Diante disso, de acordo com [12], obtemos as equações (2.17) e (2.18):

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k^2 - \lambda = 0, \quad (2.18)$$

que devem ser satisfeitas simultaneamente. Realizando o mesmo procedimento para a equação (2.18) e assumindo uma constante ν , as funções X, Y e Z satisfazem [5]

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (2.19)$$

$$Y'' + vY = 0, \quad (2.20)$$

$$Z'' + (k^2 - \lambda - v)Z = 0, \quad (2.21)$$

para certos valores de λ e v . Como o interesse é em soluções que remetam à propagação de ondas, apenas os valores reais positivos das constantes são considerados [12]. Tomando $\lambda = \alpha^2$, $v = \beta^2$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. A equação (2.21) pode ser reescrita como

$$Z'' + \gamma^2 Z = 0, \quad (2.22)$$

com $\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}$. Claramente, para $k^2 \geq \alpha^2 + \beta^2$, o parâmetro γ também será real, e são obtidas soluções na forma de ondas planas [12]

$$u(x, y, z) = e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \quad (2.23)$$

com os parâmetros α, β, γ satisfazendo a relação de dispersão,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2. \quad (2.24)$$

De acordo com [5] uma outra maneira de se escrever ondas planas em duas dimensões é considerar uma direção $\sigma = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Respeitando a relação de dispersão para duas dimensões, podemos escrever a solução para ondas planas

$$u(x, y) = e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}, \quad (2.25)$$

que se verifica, tomando-se $\gamma = 0$ na equação (2.23). Utilizando a fórmula de Euler, pode-se escrever a equação (2.25) da seguinte forma:

$$u(x, y) = \cos[k(x \cos \theta + y \sin \theta)] + i \sin[k(x \cos \theta + y \sin \theta)]. \quad (2.26)$$

Como o operador de Helmholtz é linear, somente a parte real da equação (2.26) será a solução procurada [5]:

$$u(x, y) = \cos[k(x \cos \theta + y \sin \theta)]. \quad (2.27)$$

Ainda de acordo com [5], uma combinação de n ondas planas superpostas também é solução do problema, podendo ser expressas como

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^n \cos[k(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i)], \quad (2.28)$$

onde θ_i é a direção de cada onda.

2.2 Método das Diferenças Finitas

O Método de Diferenças Finitas caracteriza-se pela discretização de um problema contínuo, de forma que as variáveis de interesse existam em pontos discretos, conforme distribuição em uma malha [18]. Através desse método, as derivadas são substituídas por fórmulas de diferenças finitas, obtendo-se uma representação algébrica da equação diferencial em questão.

2.2.1 Em uma dimensão

Seja uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pertencente a C^∞ , sendo Ω seu domínio, x um ponto no interior desse domínio e o ponto $x + h \in \Omega$, de acordo com [5], tem-se:

$$u(x + h) = u(x) + u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2!} + u'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots + u^{n-1}(x)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \mathcal{O}(h^n). \quad (2.29)$$

Pode-se também desenvolver a equação para um ponto $x - h \in \Omega$, obtendo:

$$u(x - h) = u(x) - u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2!} - u'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots + u^{n-1}(x)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \mathcal{O}(h^n). \quad (2.30)$$

As funções acima utilizam-se do polinômio de Taylor para interpolar a função u em torno de um ponto qualquer x . Utilizando as equações (2.29) e (2.30) pode-se aproximar as derivadas, obtendo-se vários esquemas de aproximação.

Desconsiderando-se o termo $\mathcal{O}(h^n)$ na expressão (2.29), truncando o lado direito, obtém-se uma aproximação para $u(x_0 + h)$ com erro da ordem de $\mathcal{O}(h^n)$.

De acordo com [6], em diferenças finitas, busca-se conhecer o valor u nos pontos da malha e substituir as derivadas parciais da Equação Diferencial Parcial (EDP) para resolvê-la por aproximação nestes pontos. Tomando-se a equação (2.29) e isolando-se a primeira derivada, tem-se:

$$u'(x) = \frac{u(x + h) - u(x)}{h} - \frac{h}{2!}u''(x) - \frac{h^2}{3!}u'''(x) - \cdots.$$

Admitindo-se erro de truncamento com precisão de primeira ordem, tem-se:

$$u'(x) = \frac{u(x + h) - u(x)}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (2.31)$$

A expressão (2.31) é conhecida como aproximação adiantada (*forward*) de primeira ordem para a derivada primeira. O esquema para a expressão atrasada (*backward*) é obtido de

maneira análoga, porém dessa vez utilizando-se a equação (2.30).

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x - h)}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (2.32)$$

Os erros de truncamento para ambos os esquemas são representados por $\mathcal{O}(h)$, sendo de primeira ordem. Há ainda mais um esquema bastante utilizado, que possui erro de segunda ordem, ou seja $\mathcal{O}(h^2)$, sendo assim mais preciso que os anteriores. É chamado de aproximação centrada (*centered*), obtido através da subtração e posterior manipulação das equações (2.29) e (2.30):

$$u'(x) = \frac{u(x + h) - u(x - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.33)$$

De acordo com [5], representa-se o domínio de forma particionada, onde se analisa a solução de forma pontual. Dá-se o nome para cada ponto do domínio de nó e a distância entres eles será chamada de h . A Figura 2.1 representa esse conjunto discreto, chamado de malha.

Para facilitar a escrita, pode-se reescrever as aproximações para as primeiras derivadas obtidas acima com índices convenientes, tais como: $u(x + h) = U_{i+1}$, $u(x - h) = U_{i-1}$ e $u(x) = U_i$. Dessa forma, desprezando o erro de truncamento, obtém-se:

- Adiantada:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{U_{i+1} - U_i}{h}. \quad (2.34)$$

- Atrasada:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{h}. \quad (2.35)$$

- Centrada:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}. \quad (2.36)$$

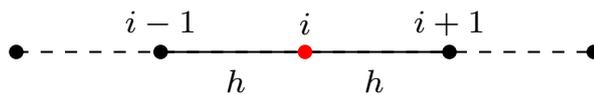


Figura 2.1: Malha 1D.

As derivadas de segunda ordem também podem ser aproximadas utilizando as relações obtidas de forma análoga às utilizadas para se obter as formulações das derivadas de primeira ordem, porém truncando-se as equações (2.29) e (2.30) após o termo que contém a segunda derivada e somando-as termo a termo.

- Adiantada:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{U_i - 2U_{i+1} + U_{i+2}}{h^2}. \quad (2.37)$$

- Atrasada:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{U_i - 2U_{i-1} + U_{i-2}}{h^2}. \quad (2.38)$$

- Centrada:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}. \quad (2.39)$$

2.2.2 Em duas dimensões

Para o caso bidimensional utiliza-se o raciocínio análogo, porém dessa vez serão utilizados quatro vizinhos, ao invés de apenas dois, como no caso unidimensional. De acordo com [5], tem-se, nesse caso, uma função $u(x, y)$ com $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pertencente à C^∞ , sendo x e y pontos interiores ao domínio Ω e $x + h_x$ e $y + h_y \in \Omega$. Pode-se escrever as aproximações para os quatro pontos vizinhos como

$$u(x + h_x, y) = u(x, y) + u_x(x, y)h_x + u_{xx}(x, y)\frac{h_x^2}{2} + \mathcal{O}(h_x^3), \quad (2.40)$$

$$u(x - h_x, y) = u(x, y) - u_x(x, y)h_x + u_{xx}(x, y)\frac{h_x^2}{2} + \mathcal{O}(h_x^3), \quad (2.41)$$

$$u(x, y + h_y) = u(x, y) + u_y(x, y)h_y + u_{yy}(x, y)\frac{h_y^2}{2} + \mathcal{O}(h_y^3), \quad (2.42)$$

$$u(x, y - h_y) = u(x, y) - u_y(x, y)h_y + u_{yy}(x, y)\frac{h_y^2}{2} + \mathcal{O}(h_y^3). \quad (2.43)$$

Os termos u_{xx} e u_{yy} representam as segundas derivadas as quais quer-se representar. Com algumas manipulações algébricas das equações (2.40) a (2.43), obtém-se as equações das derivadas de primeira e segunda ordem em duas dimensões. Para as primeiras derivadas tem-se

- Adiantadas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h_x}, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{h_y}. \quad (2.45)$$

- Atrasadas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h_x}, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{h_y}. \quad (2.47)$$

- Centradas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h_x}, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2h_y}. \quad (2.49)$$

Já para as segundas derivadas, tem-se:

- Adiantadas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i,j} - 2U_{i+1,j} + U_{i+2,j}}{(h_x)^2}, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j} - 2U_{i,j+1} + U_{i,j+2}}{(h_y)^2}. \quad (2.51)$$

- Atrasadas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i,j} - 2U_{i-1,j} + U_{i-2,j}}{(h_x)^2}, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j} - 2U_{i,j-1} + U_{i,j-2}}{(h_y)^2}. \quad (2.53)$$

- Centradas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{(h_x)^2}, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{(h_y)^2}. \quad (2.55)$$

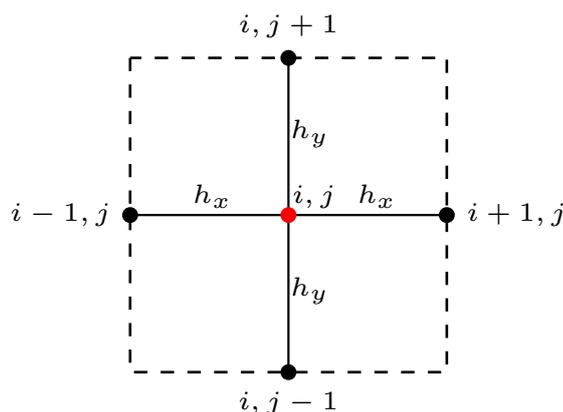


Figura 2.2: Malha 2D.

Nesse caso representa-se o domínio por dois índices, i e j . A Figura 2.2 mostra como é o aspecto de uma parte da malha em duas dimensões. Vale ressaltar que está sendo considerada uma malha uniforme, onde os espaçamentos entre os nós em x e y são iguais a h_x e h_y , respectivamente.

Capítulo 3

Esquemas de Diferenças Finitas para a Equação de Helmholtz

Nesse capítulo são apresentados os esquemas utilizados para resolução da equação de Helmholtz, tanto o já conhecido esquema centrado clássico que será utilizado para critérios de comparação, quanto os novos desenvolvidos. Em todos os casos, buscou-se resolver a equação de Helmholtz homogênea e não-homogênea com condições de contorno de Dirichlet (equação (2.5)).

O desenvolvimento desses novos esquemas de diferenças finitas possui como propósito a minimização e até mesmo eliminação do efeito da poluição do erro (seção 5.2.1) das soluções numéricas.

Todos são esquemas centrados de primeira ou segunda ordem de precisão, onde a aproximação do termo k^2u na equação de Helmholtz pode ser entendida, muitas vezes, como uma média da solução em torno do ponto central. A análise realizada nesse trabalho apenas considera malhas uniformes, onde o espaçamento da malha é representado por $h = \Delta x = \Delta y$. Tomando δ_x^2 e δ_y^2 como operadores de diferenças centradas de segunda ordem para a segunda derivada, tem-se para o caso unidimensional

$$\delta_x^2 U_i = \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}. \quad (3.1)$$

Analogamente para o caso bidimensional, tem-se:

$$\delta_x^2 U_{i,j} = \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2}, \quad (3.2)$$

$$\delta_y^2 U_{i,j} = \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2}. \quad (3.3)$$

Essas equações (3.1) – (3.3) serão utilizadas para simplificar a notação das expressões dos

métodos a seguir.

3.1 Caso Unidimensional

Para todos os esquemas, a derivada segunda foi aproximada com diferenças finitas centradas de segunda ordem de precisão, utilizando-se a equação (2.39). Cada esquema pode ser reescrito segundo o estêncil genérico:

$$\frac{1}{h^2} (AU_{i-1} + BU_i + CU_{i+1}) = f_i, \quad (3.4)$$

que representa uma equação matricial da forma $\mathbf{A}U = F$, onde A e C são os elementos das diagonais inferior e superior, respectivamente, B representa os elementos da diagonal principal da matriz \mathbf{A} , e F representa o vetor termo fonte.

- **Método de Diferenças Finitas Clássico (CC-1D)**

Neste esquema o segundo termo da equação de Helmholtz (2.5) é aproximado como $k^2u(x) \approx k^2U_i$. Isto resulta na equação matricial

$$\delta_x^2 U_i + k^2 U_i = f_i, \quad (3.5)$$

com $A = C = 1$ e $B = -2 + (kh)^2$.

- **Novo Esquema 1 (NE-1-1D)**

Neste esquema utilizou-se a aproximação $k^2u(x) \approx k^2 \left(\frac{U_{i-1} + U_{i+1}}{2} \right)$, resultando na equação matricial

$$\delta_x^2 U_i + k^2 \left(\frac{U_{i-1} + U_{i+1}}{2} \right) = f_i, \quad (3.6)$$

com $A = C = 1 + \frac{(kh)^2}{2}$ e $B = -2$.

- **Novo Esquema 2 (NE-2-1D)**

Este esquema consiste numa média dos esquemas **CC** e **NE-1** resultando na equação

$$\delta_x^2 U_i + k^2 \left(\frac{U_i + \frac{U_{i-1} + U_{i+1}}{2}}{2} \right) = f_i, \quad (3.7)$$

com $A = C = 1 + \frac{(kh)^2}{4}$ e $B = -2 + \frac{(kh)^2}{2}$.

- **Novo Esquema 3 (NE-3-1D)**

Nesse esquema o termo $k^2u(x)$ é aproximado pela média do ponto central e dos pontos anterior e posterior,

$$\delta_x^2 U_i + k^2 \left(\frac{U_{i-1} + U_i + U_{i+1}}{3} \right) = f_i, \quad (3.8)$$

com $A = C = 1 + \frac{(kh)^2}{3}$ e $B = -2 + \frac{(kh)^2}{3}$.

- **Novo Esquema 4 (NE-4-1D)**

Aqui tem-se o termo $k^2u(x)$ aproximado como uma média dos esquemas **CC** e **NE-3**.

$$\delta_x^2 U_i + k^2 \left(\frac{U_i + \frac{U_{i-1} + U_i + U_{i+1}}{3}}{2} \right) = f_i, \quad (3.9)$$

com $A = C = 1 + \frac{(kh)^2}{6}$ e $B = -2 + \frac{2(kh)^2}{3}$.

- **Novo Esquema 5 (NE-5-1D)**

Nesse esquema é inserido um parâmetro livre α , que será escolhido de modo a minimizar a dispersão de onda, ou seja, a diferença entre o número de onda exato k e o número de onda discreto k^h . Essa análise está descrita na Seção 3.4.

$$\delta_x^2 U_i + k^2 \left[\alpha U_i + (1 - \alpha) \left(\frac{U_{i+1} + U_{i-1}}{2} \right) \right] = f_i, \quad (3.10)$$

com $A = C = 1 + \frac{(1-\alpha)(kh)^2}{2}$ e $B = -2 + \alpha(kh)^2$.

- **Novo Esquema 6 (NE-6-1D)**

Neste esquema utilizou-se a aproximação $k^2u(x) \approx k^2 \left(U_i + \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2} \right)$, resultando na equação matricial

$$\delta_x^2 U_i + k^2 \left(U_i + \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2} \right) = f_i, \quad (3.11)$$

com $A = 1 - \frac{(kh)^2}{2}$, $C = 1 + \frac{(kh)^2}{2}$ e $B = -2 + (kh)^2$.

3.2 Caso Bidimensional

Analogamente, para todos os esquemas bidimensionais, as derivadas segundas foram aproximadas com diferenças finitas centradas de segunda ordem de precisão, utilizando as

equações (2.54) e (2.55). A equação do estêncil clássico de 5 pontos para cada esquema resulta numa equação matricial do tipo:

$$\frac{1}{h^2} (A_1 U_{i-1,j} + A_2 U_{i,j-1} + B U_{i,j} + C_1 U_{i+1,j} + C_2 U_{i,j+1}) = f_{i,j}. \quad (3.12)$$

- **Centrado Clássico (CC-2D)**

Tem-se a equação do estêncil:

$$\delta_x^2 U_{i,j} + \delta_y^2 U_{i,j} + k^2 U_{i,j} = f_{i,j}, \quad (3.13)$$

que pode ser escrita na forma da equação (3.12) com $A_1 = A_2 = C_1 = C_2 = 1$ e $B = -4 + (kh)^2$.

- **Novo Esquema 1 (NE-1-2D)**

$$\delta_x^2 U_{i,j} + \delta_y^2 U_{i,j} + k^2 \left(\frac{U_{i-1,j} + U_{i+1,j}}{4} + \frac{U_{i,j-1} + U_{i,j+1}}{4} \right) = f_{i,j}, \quad (3.14)$$

com $A_1 = A_2 = C_1 = C_2 = 1 + \frac{(kh)^2}{4}$ e $B = -4$.

- **Novo Esquema 2 (NE-2-2D)**

$$\delta_x^2 U_{i,j} + \delta_y^2 U_{i,j} + k^2 \left[\frac{\left(\frac{2U_{i,j} + U_{i-1,j} + U_{i+1,j}}{4} \right) + \left(\frac{2U_{i,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1}}{4} \right)}{2} \right] = f_{i,j}, \quad (3.15)$$

com $A_1 = A_2 = C_1 = C_2 = 1 + \frac{(kh)^2}{8}$ e $B = -4 + \frac{(kh)^2}{2}$.

- **Novo Esquema 3 (NE-3-2D)**

$$\delta_x^2 U_{i,j} + \delta_y^2 U_{i,j} + k^2 \left[\frac{\left(\frac{U_{i-1,j} + U_{i,j} + U_{i+1,j}}{3} \right) + \left(\frac{U_{i,j-1} + U_{i,j} + U_{i,j+1}}{3} \right)}{2} \right] = f_{i,j}, \quad (3.16)$$

com $A_1 = A_2 = C_1 = C_2 = 1 + \frac{(kh)^2}{6}$ e $B = -4 + \frac{(kh)^2}{3}$.

- **Novo Esquema 4 (NE-4-2D)**

$$\delta_x^2 U_{i,j} + \delta_y^2 U_{i,j} + k^2 \left[\frac{\left(\frac{U_{i-1,j} + 4U_{i,j} + U_{i+1,j}}{6} \right) + \left(\frac{U_{i,j-1} + 4U_{i,j} + U_{i,j+1}}{6} \right)}{2} \right] = f_{i,j}, \quad (3.17)$$

com $A_1 = A_2 = C_1 = C_2 = 1 + \frac{(kh)^2}{12}$ e $B = -4 + \frac{2(kh)^2}{3}$.

- **Novo Esquema 5 (NE-5-2D)**

$$\delta_x^2 U_{i,j} + \delta_y^2 U_{i,j} + k^2 \left[\alpha U_{i,j} + (1 - \alpha) \left(\frac{U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1}}{4} \right) \right] = f_{i,j}, \quad (3.18)$$

com $A_1 = A_2 = C_1 = C_2 = 1 + \frac{(1-\alpha)(kh)^2}{4}$ e $B = -4 + \alpha(kh)^2$.

- **Novo Esquema 6 (NE-6-2D)**

$$\delta_x^2 U_{i,j} + \delta_y^2 U_{i,j} + k^2 \left(U_{i,j} + \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{4} + \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{4} \right) = f_{i,j}, \quad (3.19)$$

com $A_1 = A_2 = 1 - \frac{(kh)^2}{4}$, $C_1 = C_2 = 1 + \frac{(kh)^2}{4}$ e $B = -4 + (kh)^2$.

- **Novo Esquema 7 (NE-7-2D)**

$$\delta_x^2 U_{i,j} + \delta_y^2 U_{i,j} + k^2 \left(U_{i,j} + \frac{U_{i-1,j} - U_{i+1,j}}{4} + \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{4} \right) = f_{i,j}, \quad (3.20)$$

com $A_1 = C_2 = 1 + \frac{(kh)^2}{4}$, $A_2 = C_1 = 1 - \frac{(kh)^2}{4}$ e $B = -4 + (kh)^2$.

- **Novo Esquema 8 (NE-8-2D)**

$$\delta_x^2 U_{i,j} + \delta_y^2 U_{i,j} + k^2 \left(U_{i,j} + \frac{U_{i-1,j} + U_{i+1,j}}{2} - \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{2} \right) = f_{i,j}, \quad (3.21)$$

com $A_1 = C_1 = 1 + \frac{(kh)^2}{2}$, $A_2 = C_2 = 1 - \frac{(kh)^2}{2}$ e $B = -4 + (kh)^2$.

3.3 Erro de Truncamento Local

O Erro de Truncamento Local (ETL) é obtido substituindo-se U_i pelos valores da solução exata $u(x_i)$ na equação discretizada (3.4). Em geral, a solução exata não irá satisfazer totalmente a equação e essa discrepância representará o erro de truncamento local, denotado por τ .

3.3.1 Em uma dimensão

Para o cálculo do ETL em uma dimensão, foram utilizadas as equações (3.22) e (3.23).

$$u(x - h) = u_{i-1} = u(x) - u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} - u'''(x)\frac{h^3}{6} + u^{(4)}(x)\frac{h^4}{24} + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.22)$$

$$u(x + h) = u_{i+1} = u(x) + u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} + u'''(x)\frac{h^3}{6} + u^{(4)}(x)\frac{h^4}{24} + \mathcal{O}(h^5). \quad (3.23)$$

Substituindo as equações (3.22) e (3.23) nas equações de cada esquema (3.5) – (3.11) e considerando $u(x_i) = u_i$ para propósitos de simplificação da notação, obtém-se:

- **CC-1D**

$$\tau_i = u_i^{(4)} \left(\frac{h^2}{12} \right) + \mathcal{O}(h^3), \quad (3.24)$$

- **NE-1-1D**

$$\tau_i = u_i'' \left(\frac{h^2}{12} k^2 \right) + u_i^{(4)} \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{24} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.25)$$

- **NE-2-1D**

$$\tau_i = u_i'' \left(\frac{h^2}{4} k^2 \right) + u_i^{(4)} \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{48} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.26)$$

- **NE-3-1D**

$$\tau_i = u_i'' \left(\frac{h^2}{3} k^2 \right) + u_i^{(4)} \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{36} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.27)$$

- **NE-4-1D**

$$\tau_i = u_i'' \left(\frac{h^2}{6} k^2 \right) + u_i^{(4)} \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{72} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.28)$$

- **NE-5-1D**

$$\tau_i = u_i^{(4)} \left(\frac{h^2}{12} \right) + (1 - \alpha) k^2 \left[u_i^{(2)} \left(\frac{h^2}{2} \right) + u_i^{(4)} \left(\frac{h^4}{24} \right) \right] + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.29)$$

- **NE-6-1D**

$$\tau_i = u_i'(hk^2) + u_i^{(4)} \left(\frac{h^2}{12} \right) + u_i''' \left(\frac{h^3}{6} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^4). \quad (3.30)$$

3.3.2 Em duas dimensões

Para simplificação da notação, considera-se $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$. Consideram-se também as notações,

$$u_{i,j}^{(nx)} = \frac{\partial^n u(x_i, y_j)}{\partial x^n}, \quad (3.31)$$

$$u_{i,j}^{(ny)} = \frac{\partial^n u(x_i, y_j)}{\partial y^n}. \quad (3.32)$$

No cálculo do ETL em duas dimensões, foram utilizadas as equações

$$u(x-h, y) = u_{i-1,j} = u_{i,j} - u_{i,j}^{(1x)}(h) + u_{i,j}^{(2x)} \left(\frac{h^2}{2} \right) - u_{i,j}^{(3x)} \left(\frac{h^3}{6} \right) + u_{i,j}^{(4x)} \left(\frac{h^4}{24} \right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.33)$$

$$u(x+h, y) = u_{i+1,j} = u_{i,j} + u_{i,j}^{(1x)}(h) + u_{i,j}^{(2x)} \left(\frac{h^2}{2} \right) + u_{i,j}^{(3x)} \left(\frac{h^3}{6} \right) + u_{i,j}^{(4x)} \left(\frac{h^4}{24} \right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.34)$$

$$u(x, y-h) = u_{i,j-1} = u_{i,j} - u_{i,j}^{(1y)}(h) + u_{i,j}^{(2y)}\left(\frac{h^2}{2}\right) - u_{i,j}^{(3y)}\left(\frac{h^3}{6}\right) + u_{i,j}^{(4y)}\left(\frac{h^4}{24}\right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.35)$$

$$u(x+h, y) = u_{i+1,j} = u_{i,j} + u_{i,j}^{(1y)}(h) + u_{i,j}^{(2y)}\left(\frac{h^2}{2}\right) + u_{i,j}^{(3y)}\left(\frac{h^3}{6}\right) + u_{i,j}^{(4y)}\left(\frac{h^4}{24}\right) + \mathcal{O}(h^5). \quad (3.36)$$

Analogamente ao que foi realizado no caso unidimensional, substitui-se as equações (3.33) a (3.36) na equações de cada esquema (3.13) – (3.21), obtendo

- **CC-2D**

$$\tau_{i,j} = (u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)})\left(\frac{h^2}{12}\right) + \mathcal{O}(h^3), \quad (3.37)$$

- **NE-1-2D**

$$\tau_{i,j} = \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{h^2}{4} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{48} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.38)$$

- **NE-2-2D**

$$\tau_{i,j} = \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{h^2}{8} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{96} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.39)$$

- **NE-3-2D**

$$\tau_{i,j} = \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{h^2}{3} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{36} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.40)$$

- **NE-4-2D**

$$\tau_{i,j} = \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{144} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.41)$$

- **NE-5-2D**

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} = & \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) + k^2(1-\alpha) \left\{ \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{h^2}{4} \right) \right. \\ & \left. + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^4}{48} \right) \right\} + \mathcal{O}(h^5), \end{aligned} \quad (3.42)$$

- **NE-6-2D**

$$\tau_{i,j} = \left[u_{i,j}^{(1x)} + u_{i,j}^{(1y)} \right] \left(\frac{h}{2} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(3x)} + u_{i,j}^{(3y)} \right] \left(\frac{h^3}{12} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.43)$$

- **NE-7-2D**

$$\tau_{i,j} = \left[-u_{i,j}^{(1x)} + u_{i,j}^{(1y)} \right] \left(\frac{h}{2} k^2 \right) + \left[-u_{i,j}^{(3x)} + u_{i,j}^{(3y)} \right] \left(\frac{h^3}{12} k^2 \right) \quad (3.44)$$

$$+ \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.45)$$

- **NE-8-2D**

$$\tau_{i,j} = \left[u_{i,j}^{(2x)} - u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{h^2}{2} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} - u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^4}{12} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5). \quad (3.46)$$

3.4 Análise de Dispersão

De acordo com [9], uma característica estreitamente relacionada ao efeito de poluição do erro é a existência de uma diferença entre o número de onda k da solução exata e o número de onda k^h da solução numérica ou aproximada. A diferença pode ser estimada através da análise de dispersão [13]. Esta diferença provoca a perda de fase da solução numérica e impacta o efeito de poluição do erro (como será visto no Capítulo 5, Seção 5.2.1). A análise consiste em considerar a equação de Helmholtz homogênea ($f = 0$) e supor soluções numéricas na forma de ondas planas que, substituídas na equação do estêncil para cada esquema, permitem obter uma expressão para k^h (número de onda discreto) em função de k [9].

3.4.1 Em uma dimensão e estêncil de 3 pontos

Considerando o problema unidimensional homogêneo

$$u'' + k^2 u = 0 \text{ em } (0, 1). \quad (3.47)$$

De acordo com [9], supõe-se que as condições de contorno e o número de onda k estejam bem definidos, a solução geral do problema de Helmholtz será da forma:

$$u(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}, \quad (3.48)$$

sendo c_1 e c_2 constantes definidas pelas condições de contorno.

Tomando uma discretização em malha uniforme, com espaçamento entre nós igual a

h e pontos nodais $x_i = ih$, então as equações associadas aos nós tem a forma:

$$AU_{i-1} + BU_i + CU_{i+1} = 0, \quad (3.49)$$

onde U_i são os valores da solução aproximada. Deve-se procurar soluções da forma,

$$U_i = e^{ik^h x_i}. \quad (3.50)$$

Substituindo a expressão (3.50) em (3.49), e dividindo-se por $e^{ik^h x_i}$ tem-se:

$$Ae^{-ik^h} + B + Ce^{ik^h} = 0. \quad (3.51)$$

Utilizando-se a identidade de Euler ($e^{iy} = \cos y + i \sin y$), tem-se a relação de dispersão,

$$[\cos(k^h h)(A + C) + B] + i \sin(k^h h)[-A + C] = 0 + i0. \quad (3.52)$$

De onde se pode escrever duas equações, uma representando a parte real (3.53) e outra representando parte imaginária (3.54),

$$\cos(k^h h)[A + C] + B = 0, \quad (3.53)$$

$$\sin(k^h h)[C - A] = 0, \quad (3.54)$$

Logo, desprezando-se a parte imaginária (equação 3.54), obtém-se

$$k^h = \frac{1}{h} \arccos\left(-\frac{B}{A + C}\right). \quad (3.55)$$

Substituindo-se o valor de A , B e C de cada esquema apresentado na seção 3.1 na equação (3.55) e realizando expansão em série de Taylor em torno de $kh = 0$, obtém-se para cada esquema uma expressão para $k^h - k$:

- **CC-1D**

$$k^h - k = \frac{1}{24}(k^3 h^2) + \frac{3}{640}(k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5), \quad (3.56)$$

- **NE-1-1D**

$$k^h - k = -\frac{5}{24}(k^3 h^2) + \frac{43}{640}(k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5), \quad (3.57)$$

- **NE-2-1D**

$$k^h - k = -\frac{1}{12}(k^3 h^2) + \frac{1}{80}(k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5), \quad (3.58)$$

- **NE-3-1D**

$$k^h - k = -\frac{1}{8}(k^3 h^2) + \frac{49}{1920}(k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5), \quad (3.59)$$

- **NE-4-1D**

$$k^h - k = \frac{1}{24}(k^3 h^2) + \frac{3}{640}(k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5), \quad (3.60)$$

- **NE-5-1D**

$$k^h - k = \frac{(-5 + 6\alpha)}{24}(k^3 h^2) + \frac{(60\alpha^2 - 100\alpha + 43)}{640}(k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5), \quad (3.61)$$

onde o parâmetro livre α pode ser obtido utilizando-se a equação (3.55) e tomando $k^h = k$, obtendo-se

$$\alpha = \frac{2}{(kh)^2} - \frac{\cos kh}{1 - \cos kh}. \quad (3.62)$$

Dessa maneira, substituindo-se esta expressão para α na equação (3.61) tem-se um método que apresenta dispersão de onda nula, eliminando assim o efeito de poluição do erro.

- **NE-6-1D**

$$k^h - k = \frac{1}{24}(k^3 h^2) + \frac{3}{640}(k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5). \quad (3.63)$$

3.4.2 Em duas dimensões e estêncil de 5 pontos

No caso bidimensional e estêncil com 5 pontos, as equações que estão associadas aos nós interiores (x_i, y_j) são da forma

$$A_1 U_{i-1,j} + A_2 U_{i,j-1} + B U_{i,j} + C_1 U_{i+1,j} + C_2 U_{i,j+1} = 0, \quad (3.64)$$

onde as ondas planas discretas

$$U_{i,j} = e^{\mathbf{i}k^h(x_i \cos \theta + y_j \sin \theta)}, \quad (3.65)$$

na direção θ e com número de onda discreto k^h , são as soluções a serem procuradas [9]. Substituindo-se a equação (3.65) em (3.64), obtém-se a equação não-linear que determina k^h em função de k e da direção da onda θ .

$$\begin{aligned} & B + A_1 [\cos(k^h h \cos \theta) - \mathbf{i} \sin(k^h h \cos \theta)] + A_2 [\cos(k^h h \sin \theta) - \mathbf{i} \sin(k^h h \sin \theta)] \\ & + C_1 [\cos(k^h h \cos \theta) + \mathbf{i} \sin(k^h h \cos \theta)] + C_2 [\cos(k^h h \sin \theta) + \mathbf{i} \sin(k^h h \sin \theta)] = 0 + 0\mathbf{i}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Após algumas manipulações algébricas, pode-se escrever duas equações, uma para a parte real (3.67) e outra para a parte imaginária (3.68).

$$[A_1 + C_1] \cos(k^h h \cos \theta) + [A_2 + C_2] \cos(k^h h \sin \theta) + B = 0. \quad (3.67)$$

$$[C_1 - A_1] \sin(k^h h \cos \theta) + [C_2 - A_2] \sin(k^h h \sin \theta) = 0. \quad (3.68)$$

Assim como no caso unidimensional, substitui-se os valores de A_1 , A_2 , C_1 , C_2 e B de cada esquema, porém nesse caso, explicitar k^h não é tão simples quanto no caso unidimensional. Para isso recorreu-se ao procedimento descrito e realizado em [9]. Como os coeficientes do estêncil são reais, substitui-se os valores para cada esquema na equação real (3.67), realizando-se a expansão

$$k^h h = \sum_{n=1}^{\infty} r_n (kh)^n, \quad (3.69)$$

transformando a equação (3.67) em uma equação da forma

$$F(kh) = 0. \quad (3.70)$$

Ainda de acordo com [9], realizando-se a expansão da equação (3.70) em torno de $kh = 0$, tem-se uma série resultante que deve ser identicamente nula em cada ordem de kh , portanto obtém-se equações envolvendo os coeficientes de r_n e determina-se tais r_n resolvendo-se essas equações. Para realizar os cálculos, recorreu-se ao auxílio do *software* Wolfram Mathematica¹. Através de um *script*, obteve-se a relação entre k^h e k para cada esquema.

- **CC-2D**

$$k^h - k = \frac{3 + \cos 4\theta}{96} (k^3 h^2) + \frac{235 + 162 \cos 4\theta + 35 \cos^2 4\theta}{92160} (k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5). \quad (3.71)$$

- **NE-1-2D**

$$k^h - k = \frac{-9 + \cos 4\theta}{96} (k^3 h^2) + \frac{1315 - 198 \cos 4\theta + 35 \cos^2 4\theta}{92160} (k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5). \quad (3.72)$$

- **NE-2-2D**

$$k^h - k = \frac{-3 + \cos 4\theta}{96} (k^3 h^2) + \frac{235 + 162 \cos 4\theta + 35 \cos^2 4\theta}{92160} (k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5). \quad (3.73)$$

- **NE-3-2D**

$$k^h - k = \frac{-5 + \cos 4\theta}{96} (k^3 h^2) + \frac{475 - 78 \cos 4\theta + 35 \cos^2 4\theta}{92160} (k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5). \quad (3.74)$$

¹<https://www.wolfram.com/mathematica>

- **NE-4-2D**

$$k^h - k = \frac{-1 + \cos 4\theta}{96}(k^3 h^2) + \frac{115 + 42 \cos 4\theta + 35 \cos^2 4\theta}{92160}(k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5). \quad (3.75)$$

- **NE-5-2D**

$$k^h - k = \frac{-9 + 12\alpha + \cos 4\theta}{96}(k^3 h^2) + \left(\frac{1315 - 3240\alpha + 2160\alpha^2}{92160} \right. \\ \left. \frac{-198 \cos 4\theta + 360\alpha \cos 4\theta + 35 \cos^2 4\theta}{92160} \right) (k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5). \quad (3.76)$$

Da mesma forma que foi feito para o caso unidimensional, procede-se para encontrar o parâmetro α no caso 2D. Utilizando-se a equação (3.67) e fazendo $k^k = k$ e resolvendo para α , obtém-se o valor do parâmetro que minimiza a dispersão. Essa dispersão será alcançada uma vez, ou seja, em um determinado ângulo de direção de onda θ_1 .

$$\alpha = \frac{-8 + (4 + k^2 h^2)(u + v)}{k^2 h^2(-2 + u + v)}, \quad (3.77)$$

onde

$$u = \cos(kh \cos \theta_1), \quad (3.78)$$

$$v = \cos(kh \sin \theta_1). \quad (3.79)$$

- **NE-6-2D**

$$k^h - k = \frac{3 + \cos 4\theta}{96}(k^3 h^2) + \frac{235 + 162 \cos 4\theta + 35 \cos^2 4\theta}{92160}(k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5). \quad (3.80)$$

- **NE-7-2D**

$$k^h - k = \frac{3 + \cos 4\theta}{96}(k^3 h^2) + \frac{235 + 162 \cos 4\theta + 35 \cos^2 4\theta}{92160}(k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5). \quad (3.81)$$

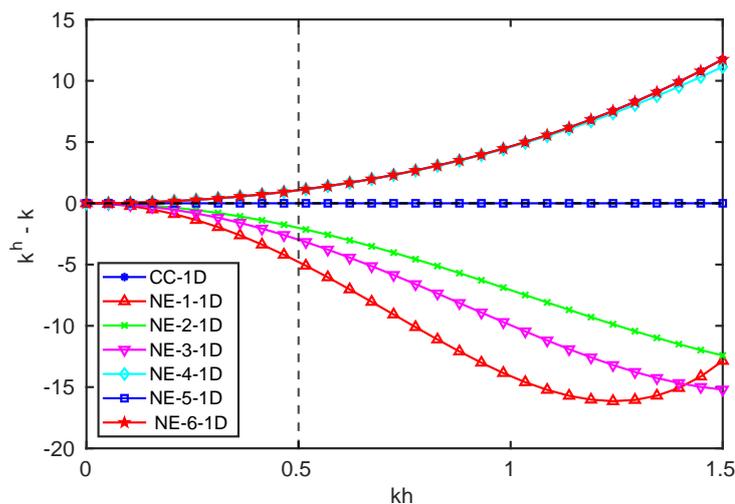
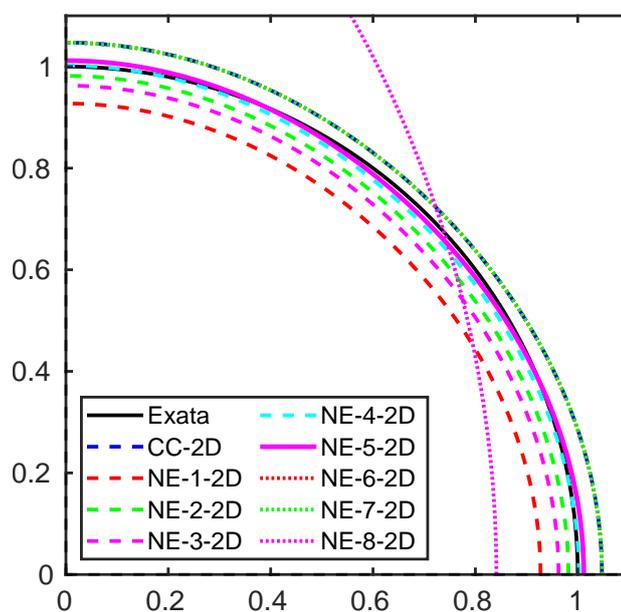
- **NE-8-2D**

$$k^h - k = \frac{3 + \cos 4\theta}{96}(k^3 h^2) + \left(\frac{235 - 1680 \cos 2\theta + 8640 \cos^2 2\theta}{92160} \right. \quad (3.82)$$

$$\left. \frac{+162 \cos 4\theta - 1200 \cos 2\theta \cos 4\theta + 35 \cos^2 4\theta}{92160} \right) (k^5 h^4) + \mathcal{O}(k^6 h^5). \quad (3.83)$$

Na Figura 3.1 pode-se observar que, no caso 1D, o método **NE-5-1D**, como dito anteriormente, foi capaz de eliminar totalmente a dispersão do número de onda, ou seja, conseguiu eliminar o efeito da poluição do erro.

No caso 2D, Figura 3.2, o método **NE-5-2D** intercepta a dispersão exata em dois

Figura 3.1: Dispersão 1D para $k = 100$.Figura 3.2: Relação de dispersão no caso 2D para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $kh = 1$.

pontos, ou seja, é capaz de anular a dispersão em duas direções de onda no primeiro quadrante, a saber $\theta_1 = \pi/8$ e $\theta_2 = 3\pi/8$.

3.4.3 Em duas dimensões e estêncil de 9 pontos

Até o momento, no presente trabalho, os estêncis com nove pontos ainda não foram utilizados, porém a análise de dispersão será de extrema importância para a teoria do Capítulo 4. Nesse caso, as equações associadas aos nós interiores (x_i, y_j) podem assumir duas formas, onde as equações (3.84) e (3.85) correspondem aos estêncis das Figuras 3.3(a) e 3.3(b), respectivamente. Esses estêncis serão chamados de **estêncil compacto**

e **estêncil em cruz**, facilitando a identificação futura.

$$A_1U_{i-1,j} + A_2U_{i,j-1} + A_3U_{i-1,j-1} + A_4U_{i+1,j-1} + BU_{i,j} \\ + C_1U_{i+1,j} + C_2U_{i,j+1} + C_3U_{i-1,j+1} + C_4U_{i+1,j+1} = 0. \quad (3.84)$$

$$\tilde{A}_1U_{i-1,j} + \tilde{A}_2U_{i,j-1} + \tilde{A}_3U_{i-2,j} + \tilde{A}_4U_{i,j-2} + \tilde{B}U_{i,j} \\ + \tilde{C}_1U_{i+1,j} + \tilde{C}_2U_{i,j+1} + \tilde{C}_3U_{i+2,j} + \tilde{C}_4U_{i,j+2} = 0. \quad (3.85)$$

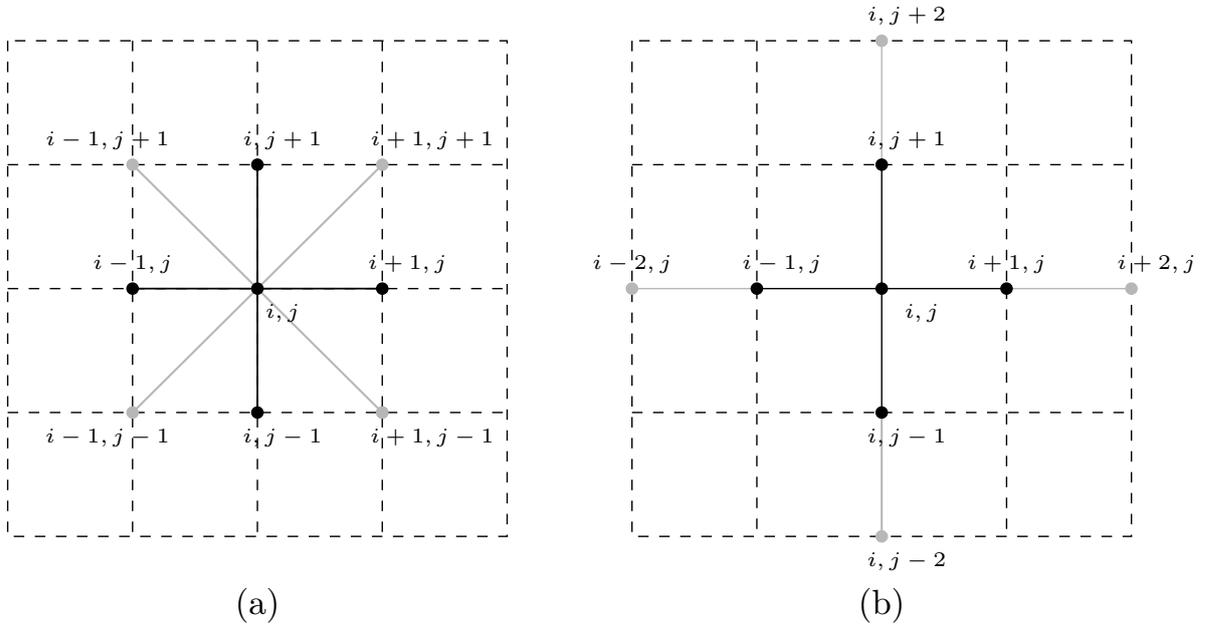


Figura 3.3: Dois estênceis centrados de 9 pontos: (a) **estêncil compacto** e (b) **estêncil em cruz**.

Utilizando-se o mesmo procedimento do caso anterior, substitui-se a equação das ondas planas discretas (3.65) nas equações (3.84) e (3.85), obtendo-se as equações não-lineares que determinam k^h em função de k e da direção de onda θ .

- **Estêncil Compacto:**

$$[A_1 + C_1] \cos(k^h h \cos \theta) + [A_2 + C_2] \cos(k^h h \sin \theta) + [A_3 + C_4][\cos(k^h h \cos \theta + k^h h \sin \theta)] \\ + [A_4 + C_3][\cos(k^h h \cos \theta - k^h h \sin \theta)] + B = 0. \quad (3.86)$$

$$[C_1 - A_1] \sin(k^h h \cos \theta) + [C_2 - A_2] \sin(k^h h \sin \theta) + [C_3 - A_4][\sin(k^h h \cos \theta + k^h h \sin \theta)] \\ + [C_4 - A_3][\sin(k^h h \cos \theta - k^h h \sin \theta)] = 0. \quad (3.87)$$

• **Estêncil em Cruz:**

$$[\tilde{A}_1 + \tilde{C}_1] \cos(k^h h \cos \theta) + [\tilde{A}_2 + \tilde{C}_2] \cos(k^h h \sin \theta) + [\tilde{A}_3 + \tilde{C}_3][\cos(2k^h h \cos \theta)] \\ + [\tilde{A}_4 + \tilde{C}_4][\cos(2k^h h \sin \theta)] + \tilde{B} = 0. \quad (3.88)$$

$$[\tilde{C}_1 - \tilde{A}_1] \sin(k^h h \cos \theta) + [\tilde{C}_2 - \tilde{A}_2] \sin(k^h h \sin \theta) + [\tilde{C}_3 - \tilde{A}_3][\sin(2k^h h \cos \theta)] \\ + [\tilde{C}_4 - \tilde{A}_4][\sin(2k^h h \sin \theta)] = 0. \quad (3.89)$$

Onde as equações (3.86) e (3.88) representam a parte real e (3.87) e (3.89) a parte imaginária.

3.5 Análise de Simetria no Caso Bidimensional

Sejam os estêncis de 5 pontos da Figura 3.4(a) e compacto de 9 pontos da Figura 3.4(b).

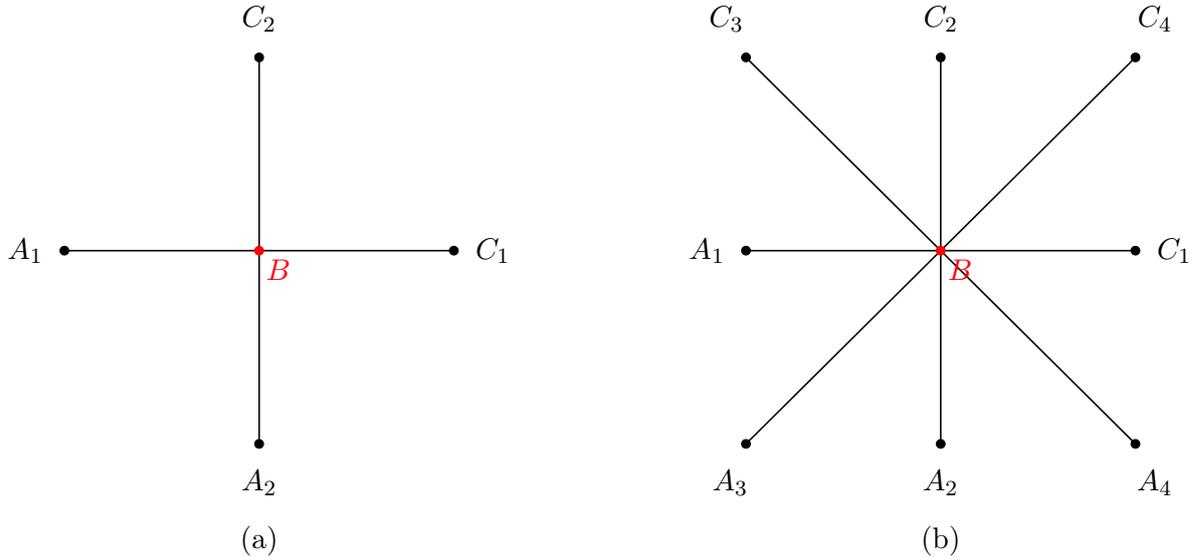


Figura 3.4: Estêncis centrados de 5 pontos (a) e compacto de 9 pontos (b).

A parte imaginária da equação de dispersão estabelece a restrição $C_1 = A_1$ e $C_2 = A_2$ pro estêncil da Figura 3.4(a) e $C_1 = A_1$, $C_2 = A_2$, $C_4 = A_3$ e $C_3 = A_4$ para o estêncil da Figura 3.4(b). Logo, obtém-se

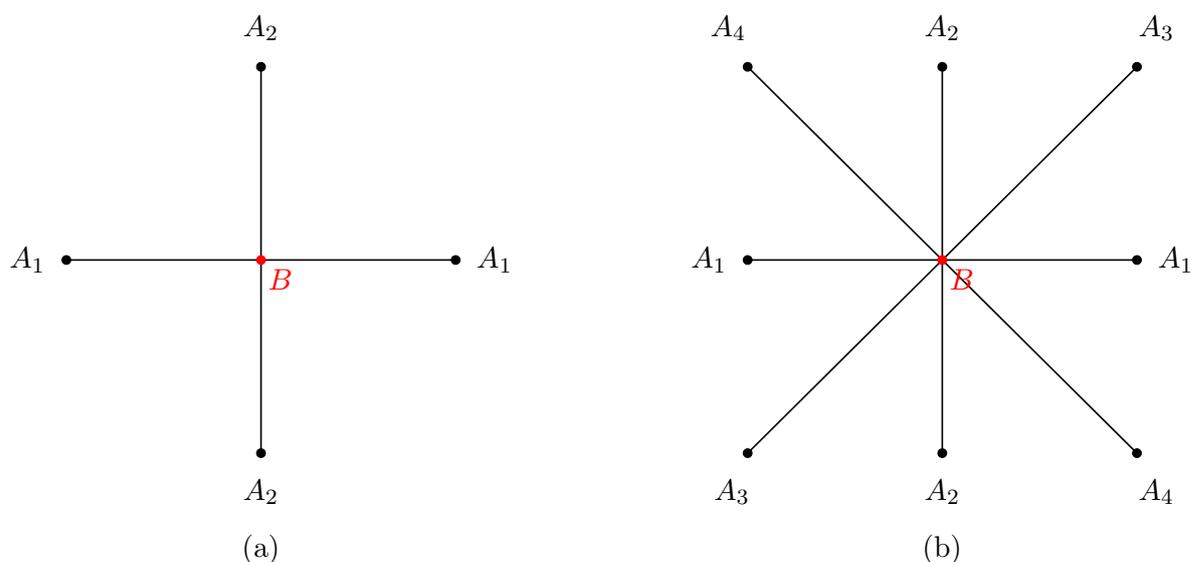


Figura 3.5: Estênceis da figura 3.4 após restrição estabelecida pela equação imaginária.

Observando a Figura 3.5(a) verifica-se que, a restrição da parte imaginária da relação de dispersão garante simetria do estêncil com respeito aos eixos Ox e Oy . Entretanto, a simetria do estêncil com respeito às retas $y = x$ e $y = -x$ é garantida se for exigido $A_2 = A_1$. Observando a Figura 3.5(b) verifica-se que, mesmo após as restrições impostas pela parte imaginária da equação de dispersão, este estêncil ainda não possui simetria em relação a Ox e Oy . Para isso é necessário impor outra restrição $A_4 = A_3$. E a simetria do estêncil com respeito às retas $y = x$ e $y = -x$ é garantida se for exigido $A_2 = A_1$.

Impondo-se essas restrições de simetria, obtêm-se os estênceis

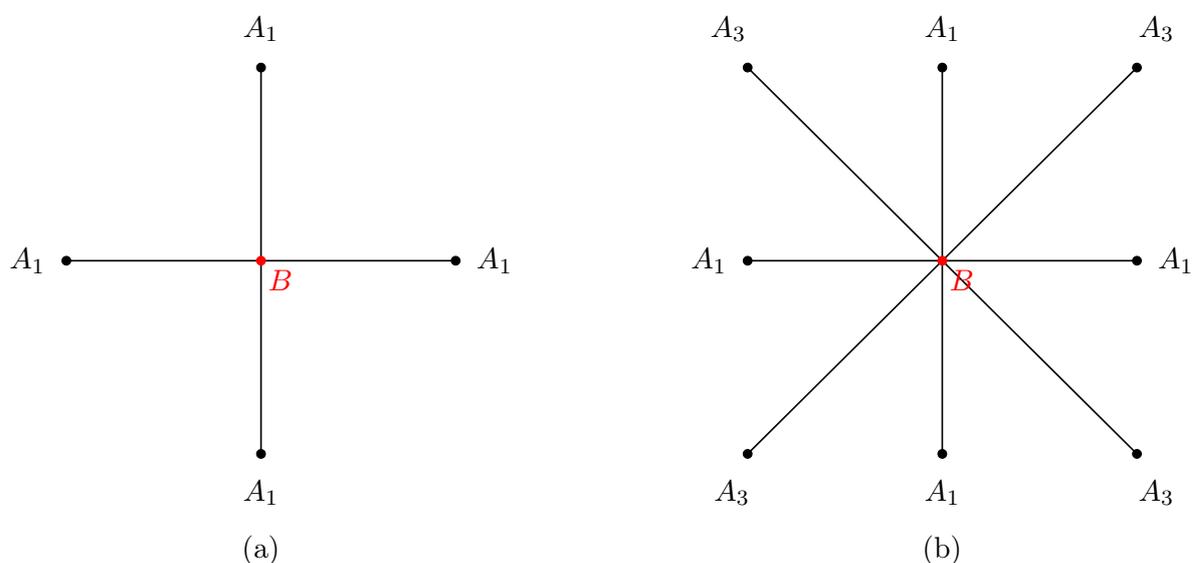


Figura 3.6: Estênceis após restrições de simetria.

Como pode ser notado nesta análise, a restrição da parte imaginária correspondente à análise de dispersão tem implicações geométricas para a simetria do estêncil.

Capítulo 4

Método Completo de Diferenças Finitas Centradas

Após experiências adquiridas com o desenvolvimento e estudo dos resultados dos métodos do Capítulo 3, percebeu-se que seria possível o desenvolvimento de um método completo e geral, com o qual fosse possível alcançar resultados que os métodos anteriores não conseguiriam, isto é, minimizar o efeito de poluição do erro no caso 2D, já que para o caso 1D havia-se obtido esse resultado com o Novo Esquema 5 (NE-5-1D).

Visto isso, o presente capítulo apresenta uma nova abordagem para o método de diferenças finitas. Esta nova abordagem é mais completa que as abordagens tradicionais, e quando aplicada à equação de Helmholtz sempre permite obter soluções numéricas com dispersão mínima.

Considere um esquema genérico qualquer de diferenças finitas com solução U^h pertencente a um espaço solução S_U^h . O número de nós da malha com graus de liberdade denota a dimensão desse espaço que é denotada por $\dim(S_U^h) = N^h$.

O interpolante u^h , que é definido como a solução exata da equação de Helmholtz avaliada nos nós da malha, está contido nesse espaço, o qual contém todos os vetores com dimensão N^h .

Visto o espaço solução U^h e o interpolante u^h , pode-se definir o erro global como $E_g = U^h - u^h$. Três propriedades caracterizam a qualidade da aproximação de um esquema de diferenças finitas: convergência, estabilidade e consistência [16]. Um esquema de diferenças finitas é dito convergente se $\|E_g\| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, onde $\|\cdot\|$ denota alguma norma em S_U^h . É bem conhecido que a convergência de um esquema é garantida se o mesmo é estável e consistente.

Seja o sistema linear de equações algébricas de um esquema, denotado por $\mathbf{M}U^h = F$. Diz-se que esse esquema é estável se $\forall h < h_0$ existe a matriz inversa \mathbf{M}^{-1} tal que $\|\mathbf{M}^{-1}\|_m < C$, onde C é uma constante que não depende de h , $h_0 > 0$ é um parâmetro específico de cada malha e $\|\cdot\|_m$ denota alguma norma de matriz.

Como já foi dito, para valores altos do número de onda k , os métodos de diferenças finitas atualmente conhecidos não são estáveis, apresentando o efeito de poluição do erro, mesmo quando se verifica a regra heurística (*rule of thumb*) $kh \approx 0.6$. Apenas em malhas que verificam $k^2h < 1$ é que observa-se o comportamento assintótico para o erro global. A região entre $kh < 1$ e $k^2h < 1$ é chamada de pré-assintótica.

Considere agora a equação correspondente a um nó interior arbitrário I do sistema $\mathbf{M}U^h = F$. Essa equação é determinada pelo tipo de estêncil escolhido e por qual aproximação de diferenças finitas é utilizada. Localmente, a nível de estêncil, as incógnitas dessa equação pertencem ao subespaço $S_U^L \subseteq S_U^h$ com dimensão $\dim(S_U^L) = L$.

A quantidade de pontos do estêncil L determina a dimensão do subespaço de aproximação local S_U^L , portanto, para cada nó central I do estêncil há uma componente I correspondente do vetor erro de truncamento local (ETL) $[e_t]_I = [\mathbf{M}u - F]_I$, onde u denota a solução exata.

Um conjunto de L vetores linearmente independentes forma uma base para esse subespaço de aproximação local S_U^L e qualquer vetor desse subespaço pode ser representado como uma combinação linear dos vetores dessa base. Essa é a primeira ideia chave dessa nova abordagem: criar um método de diferenças finitas capaz de representar qualquer elemento do subespaço de aproximação local S_U^L .

Em termos de diferenças finitas, se os vetores da base do subespaço S_U^L são escolhidos como os vetores geradores G_l da equação do estêncil, então essa nova abordagem permite representar a equação de qualquer estêncil como uma combinação linear dos vetores geradores G_l linearmente independentes.

$$E_{MCDFC} := \left\langle \sum_{l=1}^L \alpha_l G_l, U \right\rangle = \left(\sum_{l=1}^L \alpha_l \right) f_I, \quad (4.1)$$

onde α_l são os coeficientes da combinação linear, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno entre dois vetores e f_I representa o termo fonte.

Os coeficientes da combinação linear podem ser vistos como parâmetros livres a determinar considerando algum critério. Para o caso da equação de Helmholtz o critério usado será a minimização da dispersão [2, 11, 13].

Essa nova abordagem é chamada de Método Completo de Diferenças Finitas Centradas, ou simplesmente **MCDFC**. O termo completo indica que é usada a quantidade máxima de estêncéis necessários para ter uma representação completa de qualquer elemento de S_U^L , uma vez fixado um número de pontos L dos estêncéis. O termo centrada refere-se que apenas esquemas de diferenças finitas centradas foram utilizados para elaboração do método.

Em linhas gerais, esse novo método é simples e consiste de três passos básicos:

- **Primeiro passo:**

Escolhe-se um tipo de estêncil com L pontos e fixa-se seu subespaço de aproximação local S_U^L . Uma vez que fixou-se L , a máxima ordem de aproximação das derivadas é determinada;

- **Segundo passo:**

Escolhe-se L vetores base do subespaço S_U^L de maneira que sejam linearmente independentes. Esta base é formada pelos vetores geradores G_l correspondentes a equação de cada estêncil. Os vetores G_l são ditos linearmente independentes se o sistema $\mathbf{G}_{L \times L} X = 0$ possui como solução apenas $X = 0$, sendo as colunas da matriz $\mathbf{G}_{L \times L}$ formadas pelos vetores G_l e o vetor X formado pelos coeficientes da combinação linear α_l ;

- **Terceiro passo:**

Determinam-se os coeficientes da combinação linear definindo-se um critério que deverá ser verificado pela equação do estêncil. No caso da equação de Helmholtz o critério escolhido é o da minimização da dispersão de onda, já abordado no capítulo 3, seção 3.4.

Completados esse três passos, caso seja necessário aumentar a qualidade de aproximação do método, é necessário aumentar a dimensão do subespaço local S_U^L , aumentando o número de pontos L do estêncil.

Para o presente trabalho, foram utilizados estêncéis de 3, 5 e 9 pontos. Portanto, deve-se encontrar vetores geradores LI para esses 3 tipos de estêncil, de forma que se consiga formular um método para cada caso.

- **Caso unidimensional e estêncil de 3 pontos**

Para o caso 1D, o subespaço S_U^L tem dimensão $\dim(S_U^L) = L = 3$. Consideram-se fórmulas de diferenças finitas centradas tais que resultem em três equações do estêncil com vetores geradores linearmente independentes $G_1 = [g_{1,1}, g_{1,2}, g_{1,3}]$, $G_2 = [g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}]$ e $G_3 = [g_{3,1}, g_{3,2}, g_{3,3}]$, então a equação do MCDFC para este estêncil é dada por

$$\left\langle \sum_{l=1}^3 \alpha_l G_l, U^h \right\rangle := AU_{i-1} + BU_i + CU_{i+1} = \left(\sum_{l=1}^3 \alpha_l \right) f_i, \quad (4.2)$$

onde $A = \alpha_1 g_{1,1} + \alpha_2 g_{2,1} + \alpha_3 g_{3,1}$, $B = \alpha_1 g_{1,2} + \alpha_2 g_{2,2} + \alpha_3 g_{3,2}$ e $C = \alpha_1 g_{1,3} + \alpha_2 g_{2,3} + \alpha_3 g_{3,3}$.

- **Caso bidimensional e estêncil de 5 pontos**

No caso 2D e estêncil com cinco pontos, o subespaço S_U^L tem dimensão $\dim(S_U^L) = L = 5$. Considerando-se fórmulas de diferenças finitas que resultem em cinco equações do estêncil com os vetores geradores linearmente independentes $G_1 = [g_{1,1}, g_{1,2}, g_{1,3}, g_{1,4}, g_{1,5}]$, $G_2 = [g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}, g_{2,4}, g_{2,5}]$, $G_3 = [g_{3,1}, g_{3,2}, g_{3,3}, g_{3,4}, g_{3,5}]$, $G_4 = [g_{4,1}, g_{4,2}, g_{4,3}, g_{4,4}, g_{4,5}]$ e $G_5 = [g_{5,1}, g_{5,2}, g_{5,3}, g_{5,4}, g_{5,5}]$. Dessa maneira a equação de qualquer estêncil de cinco pontos pode ser gerada pelo MCDFC como

$$\left\langle \sum_{l=1}^5 \alpha_l G_l, U^h \right\rangle := A_1 U_{i-1,j} + A_2 U_{i,j-1} + BU_{i,j} + C_1 U_{i+1,j} + C_2 U_{i,j+1} = \left(\sum_{l=1}^5 \alpha_l \right) f_{i,j}, \quad (4.3)$$

com $A_1 = \sum_{l=1}^5 \alpha_l g_{l,1}$, $A_2 = \sum_{l=1}^5 \alpha_l g_{l,2}$, $B = \sum_{l=1}^5 \alpha_l g_{l,3}$, $C_1 = \sum_{l=1}^5 \alpha_l g_{l,4}$ e $C_2 = \sum_{l=1}^5 \alpha_l g_{l,5}$.

- **Caso bidimensional e estêncil de 9 pontos**

Para o caso 2D e estêncil com nove pontos, seguindo a mesma lógica dos casos anteriores, o subespaço S_U^L possui dimensão $\dim(S_U^L) = L = 9$. Considerando-se fórmulas de diferenças finitas centradas que resultem em nove equações do estêncil com os vetores linearmente independentes $G_1 = [g_{1,1}, \dots, g_{1,9}]$, $G_2 = [g_{2,1}, \dots, g_{2,9}]$, $G_3 = [g_{3,1}, \dots, g_{3,9}]$, $G_4 = [g_{4,1}, \dots, g_{4,9}]$, $G_5 = [g_{5,1}, \dots, g_{5,9}]$, $G_6 = [g_{6,1}, \dots, g_{6,9}]$, $G_7 = [g_{7,1}, \dots, g_{7,9}]$, $G_8 = [g_{8,1}, \dots, g_{8,9}]$ e $G_9 = [g_{9,1}, \dots, g_{9,9}]$. Dessa maneira, a equação de qualquer estêncil de nove pontos pode ser gerada pelo MCDFC a partir de dois possíveis estênceis centrados, ilustrados na Figura 3.3. As equações (4.4) e (4.5) correspondem aos estênceis das Figuras 3.3(a) (**estêncil compacto**) e 3.3(b)

(estêncil em cruz), respectivamente.

$$\left\langle \sum_{l=1}^9 \alpha_l G_l, U^h \right\rangle := A_1 U_{i-1,j} + A_2 U_{i,j-1} + A_3 U_{i-1,j-1} + A_4 U_{i+1,j-1} + B U_{i,j} \\ + C_1 U_{i+1,j} + C_2 U_{i,j+1} + C_3 U_{i-1,j+1} + C_4 U_{i+1,j+1} = \left(\sum_{l=1}^9 \alpha_l \right) f_{i,j}, \quad (4.4)$$

com $A_1 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,1}$, $A_2 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,2}$, $A_3 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,3}$, $A_4 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,4}$, $B = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,5}$, $C_1 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,6}$, $C_2 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,7}$, $C_3 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,8}$ e $C_4 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,9}$.

$$\left\langle \sum_{l=1}^9 \alpha_l G_l, U^h \right\rangle := \tilde{A}_1 U_{i-1,j} + \tilde{A}_2 U_{i,j-1} + \tilde{A}_3 U_{i-2,j} + \tilde{A}_4 U_{i,j-2} + \tilde{B} U_{i,j} \\ + \tilde{C}_1 U_{i+1,j} + \tilde{C}_2 U_{i,j+1} + \tilde{C}_3 U_{i+2,j} + \tilde{C}_4 U_{i,j+2} = \left(\sum_{l=1}^9 \alpha_l \right) \tilde{f}_{i,j}, \quad (4.5)$$

com $\tilde{A}_1 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,1}$, $\tilde{A}_2 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,2}$, $\tilde{A}_3 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,3}$, $\tilde{A}_4 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,4}$, $\tilde{B} = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,5}$, $\tilde{C}_1 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,6}$, $\tilde{C}_2 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,7}$, $\tilde{C}_3 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,8}$ e $\tilde{C}_4 = \sum_{l=1}^9 \alpha_l g_{l,9}$.

4.1 Determinação dos Vetores Geradores

Com a equação dos estênceis bem definida, o próximo passo é encontrar os vetores geradores linearmente independentes para cada um deles. Esses vetores podem ser encontrados usando diferentes aproximações para a derivada segunda e/ou para o segundo termo da equação de Helmholtz. A verificação da independência linear foi realizada através de um *script* simples feito em Matlab[®], onde se utilizou a função *solve*¹ para resolver o sistema linear $G_{L \times L} X = 0$.

4.1.1 Caso Unidimensional

Para o caso 1D, utiliza-se a equação (4.2). Necessita-se, portanto, encontrar as equações de três estênceis que possuam vetores geradores G_l linearmente independentes. Observando os esquemas que foram desenvolvidos no Capítulo 3, os escolhidos foram **CC-1D**, **NE-1-1D** e **NE-6-1D**.

¹<https://www.mathworks.com/help/symbolic/sym.solve.html>

Tem-se então os vetores geradores:

$$G_1 = \frac{1}{h^2} [1, -2 + (kh)^2, 1], \quad (4.6)$$

$$G_2 = \frac{1}{h^2} \left[1 + \frac{(kh)^2}{2}, -2, 1 + \frac{(kh)^2}{2} \right], \quad (4.7)$$

$$G_3 = \frac{1}{h^2} \left[1 - \frac{(kh)^2}{2}, -2 + (kh)^2, 1 + \frac{(kh)^2}{2} \right]. \quad (4.8)$$

Portanto, com os vetores geradores dados pelas equações (4.6) – (4.8), a equação (4.2) é capaz de gerar qualquer esquema com estêncil de três pontos e na Seção 4.2 será visto que nesse subespaço de aproximação local com dimensão $L = 3$, o MCDFC é capaz de eliminar totalmente o efeito de poluição do erro.

4.1.2 Caso Bidimensional

4.1.2.1 Estêncil de cinco pontos

No caso de estêncil com cinco pontos, utiliza-se a equação (4.3). Sejam então os vetores geradores

$$G_1 = \frac{1}{h^2} [1, 1, -4 + (kh)^2, 1, 1], \quad (4.9)$$

$$G_2 = \frac{1}{h^2} \left[1 + \frac{(kh)^2}{4}, 1 + \frac{(kh)^2}{4}, -4, 1 + \frac{(kh)^2}{4}, 1 + \frac{(kh)^2}{4} \right], \quad (4.10)$$

$$G_3 = \frac{1}{h^2} \left[1 - \frac{(kh)^2}{4}, 1 - \frac{(kh)^2}{4}, -4 + (kh)^2, 1 + \frac{(kh)^2}{4}, 1 + \frac{(kh)^2}{4} \right], \quad (4.11)$$

obtidos dos esquemas **CC-2D**, **NE-1-2D** e **NE-6-2D**, respectivamente.

Pode-se perceber que foram os mesmos esquemas utilizados para obter os 3 primeiros vetores geradores para o caso unidimensional (porém agora com dimensão 5), contudo para o caso 2D, a priori, mais dois vetores geradores LI são necessários. Recorreu-se então aos esquemas **NE-7-2D** e **NE-8-2D** representados por G_4 e G_5 , respectivamente.

$$G_4 = \frac{1}{h^2} \left[1 + \frac{(kh)^2}{4}, 1 - \frac{(kh)^2}{4}, -4 + (kh)^2, 1 - \frac{(kh)^2}{4}, 1 + \frac{(kh)^2}{4} \right]. \quad (4.12)$$

$$G_5 = \frac{1}{h^2} \left[1 + \frac{(kh)^2}{2}, 1 - \frac{(kh)^2}{2}, -4 + (kh)^2, 1 + \frac{(kh)^2}{2}, 1 - \frac{(kh)^2}{2} \right]. \quad (4.13)$$

Na análise de dispersão Seção 4.2 será visto que com esse subespaço de aproximação local com dimensão $L = 5$, o MCDFC é capaz de minimizar o efeito de poluição do erro, apresentando dispersão equivalente ao método GLS [11].

4.1.2.2 Estêncil de nove pontos

Para o caso 2D e estêncil com nove pontos, utiliza-se a equação (4.4), de acordo com o estêncil da Figura 3.3a. Dessa maneira, obteve-se três métodos, de acordo com o estêncil e a aproximação do operador Laplaciano utilizada.

- Estêncil (a) da Figura 3.3:
 - Estêncil Compacto com Laplaciano de 5 pontos, denotado por **MCDFC-9p-L5p**,
 - Estêncil Compacto com Laplaciano de 9 pontos, denotado por **MCDFC-9p-L9p**,
 - Estêncil em Cruz, denotado por **MCDFC-9p-CR**.

1. Estêncil Compacto com Laplaciano de 5 pontos

Considere o estêncil (a) da Figura 3.3, dado pela equação (4.4). Este estêncil pode ser decomposto em dois estênceis de cinco pontos [23], onde o Laplaciano para o estêncil inclinado é aproximado como descrito em [23].

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j-1} - 4U_{i,j} + U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j+1}}{2h^2}. \quad (4.14)$$

Os três primeiros vetores geradores são análogos ao do caso do estêncil com 5 pontos, porém agora possuem dimensão 9, logo

$$G_1 = \frac{1}{h^2} [1, 1, 0, 0, -4 + (kh)^2, 1, 1, 0, 0], \quad (4.15)$$

$$G_2 = \frac{1}{h^2} \left[1 + \frac{(kh)^2}{4}, 1 + \frac{(kh)^2}{4}, 0, 0, -4, 1 + \frac{(kh)^2}{4}, 1 + \frac{(kh)^2}{4}, 0, 0 \right], \quad (4.16)$$

$$G_3 = \frac{1}{h^2} \left[1 + \frac{(kh)^2}{4}, 1 - \frac{(kh)^2}{4}, 0, 0, -4 + (kh)^2, 1 + \frac{(kh)^2}{4}, 1 - \frac{(kh)^2}{4}, 0, 0 \right]. \quad (4.17)$$

O quarto e quinto vetores geradores são obtidos utilizando-se a equação (4.14) para aproximação do operador Laplaciano, ao invés do esquema centrado clássico. As aproximações do termo $k^2 u(x, y)$ utilizadas para o G_4 e G_5 foram, respectivamente.

$$k^2 u(x, y) \approx \frac{k^2}{2} \left[\frac{U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j-1}}{2} + \frac{U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j+1}}{2} \right],$$

$$k^2 u(x, y) \approx k^2 \left[U_{i,j} + \frac{U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j-1}}{2} - \frac{U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j+1}}{2} \right],$$

obtendo-se os vetores geradores

$$G_4 = \frac{1}{h^2} \left[0, 0, \frac{1}{2} + \frac{(kh)^2}{4}, \frac{1}{2} + \frac{(kh)^2}{4}, -2, 0, 0, \frac{1}{2} + \frac{(kh)^2}{4}, \frac{1}{2} + \frac{(kh)^2}{4} \right], \quad (4.18)$$

$$G_5 = \frac{1}{h^2} \left[0, 0, \frac{1}{2} - \frac{(kh)^2}{2}, \frac{1}{2} + \frac{(kh)^2}{2}, -2 + (kh)^2, 0, 0, \frac{1}{2} + \frac{(kh)^2}{2}, \frac{1}{2} - \frac{(kh)^2}{2} \right]. \quad (4.19)$$

Observação: Seriam necessários, a priori, mais quatro vetores geradores G_6, G_7, G_8 e G_9 , porém a análise de dispersão realizada na Seção 4.2 mostrará que eles, de fato, não serão necessários, devido a não atenderem aos critérios da parte imaginária da equação de dispersão.

2. Estêncil Compacto com Laplaciano de 9 pontos

Nesse caso, a aproximação do operador Laplaciano foi feita utilizando a equação (4.20) que encontra-se em [16, p. 64].

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{6h^2} (4U_{i-1,j} + 4U_{i+1,j} + 4U_{i,j-1} + 4U_{i,j+1} + U_{i-1,j-1} + U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j-1} + U_{i+1,j+1} - 20U_{i,j}). \quad (4.20)$$

Os vetores geradores G_1, G_2, G_3, G_4 e G_5 foram obtidos com as mesmas aproximações do termo $k^2 u(x, y)$ do método com Laplaciano de 5 pontos, diferenciando-se apenas pela discretização do Laplaciano.

$$G_1 = \frac{1}{h^2} \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{-10}{3} + (kh)^2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right], \quad (4.21)$$

$$G_2 = \frac{1}{h^2} \left[\frac{2}{3} + \frac{(kh)^2}{4}, \frac{2}{3} + \frac{(kh)^2}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{-10}{3}, \frac{2}{3} + \frac{(kh)^2}{4}, \frac{2}{3} + \frac{(kh)^2}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right], \quad (4.22)$$

$$G_3 = \frac{1}{h^2} \left[\frac{2}{3} + \frac{(kh)^2}{4}, \frac{2}{3} - \frac{(kh)^2}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{-10}{3} + (kh)^2, \frac{2}{3} + \frac{(kh)^2}{4}, \frac{2}{3} - \frac{(kh)^2}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right], \quad (4.23)$$

$$G_4 = \frac{1}{h^2} \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6} + \frac{(kh)^2}{4}, \frac{1}{6} + \frac{(kh)^2}{4}, \frac{-10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6} + \frac{(kh)^2}{4}, \frac{1}{6} + \frac{(kh)^2}{4} \right], \quad (4.24)$$

$$G_5 = \frac{1}{h^2} \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6} - \frac{(kh)^2}{2}, \frac{1}{6} + \frac{(kh)^2}{2}, \frac{-10}{3} + (kh)^2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6} + \frac{(kh)^2}{2}, \frac{1}{6} - \frac{(kh)^2}{2} \right]. \quad (4.25)$$

A mesma observação do método anterior vale também aqui: são necessários apenas cinco vetores geradores, devido a análise de dispersão.

3. Estêncil em Cruz

Considera-se o estêncil (b) da Figura 3.3 e a equação (4.5). Os três primeiros vetores geradores são os mesmos do estêncil compacto com Laplaciano de 5 pontos.

$$G_1 = \frac{1}{h^2} [1, 1, 0, 0, -4 + (kh)^2, 1, 1, 0, 0], \quad (4.26)$$

$$G_2 = \frac{1}{h^2} \left[1 + \frac{(kh)^2}{4}, 1 + \frac{(kh)^2}{4}, 0, 0, -4, 1 + \frac{(kh)^2}{4}, 1 + \frac{(kh)^2}{4}, 0, 0 \right], \quad (4.27)$$

$$G_3 = \frac{1}{h^2} \left[1 + \frac{(kh)^2}{4}, 1 - \frac{(kh)^2}{4}, 0, 0, -4 + (kh)^2, 1 + \frac{(kh)^2}{4}, 1 - \frac{(kh)^2}{4}, 0, 0 \right]. \quad (4.28)$$

Para os vetores geradores G_4 e G_5 foram utilizadas as seguintes aproximações para o termo $k^2u(x, y)$, respectivamente.

$$k^2u(x, y) \approx \frac{k^2}{2} \left[\frac{U_{i-2,j} + U_{i+2,j}}{2} + \frac{U_{i,j-2} + U_{i,j+2}}{2} \right],$$

$$k^2u(x, y) \approx k^2 \left[U_{i,j} + \frac{U_{i+2,j} + U_{i-2,j}}{2} - \frac{U_{i,j+2} + U_{i,j-2}}{2} \right],$$

obtendo-se os vetores geradores

$$G_4 = \frac{1}{h^2} \left[1, 1, \frac{(kh)^2}{4}, \frac{(kh)^2}{4}, -4, 1, 1, \frac{(kh)^2}{4}, \frac{(kh)^2}{4} \right], \quad (4.29)$$

$$G_5 = \frac{1}{h^2} \left[1, 1, \frac{(kh)^2}{2}, -\frac{(kh)^2}{2}, -4 + (kh)^2 + (kh)^2, 1, 1, \frac{(kh)^2}{2}, -\frac{(kh)^2}{2} \right]. \quad (4.30)$$

4.2 Análise de Dispersão e Determinação dos Parâmetros Livres

No caso da equação de Helmholtz, os parâmetros livres (ou coeficientes) α_l podem ser escolhidos através do critério de minimização da diferença entre o número de onda da solução exata k e o número de onda da solução numérica k^h . Esse critério pode ser obtido através da análise de dispersão, conforme abordado na Seção 3.4 do Capítulo 3. A princípio, os valores dos parâmetros livres α_l serão definidos. Logo após, são definidas as equações de dispersão para cada método, seguidos dos gráficos comparando o retardo de fase, ou seja, a diferença entre k e k^h em função da direção de onda θ .

Para a determinação dos parâmetros livres, como a relação de dispersão estabelece uma dependência entre eles, pode-se fixar um deles como sendo 1 ou igual a uma potência de kh . Para o presente trabalho, optou-se por fixar $\alpha_1 = 1$. Após isso, resolve-se o sistema

de equações de dispersão para os restantes $\alpha_2, \dots, \alpha_L$, fazendo $k^h = k$, onde a quantidade de equações do sistema é igual a quantidade de parâmetros que deseja-se determinar menos um, pois fixou-se um deles. Como exemplo, as equações do MCDFC-5p seriam

$$\begin{cases} B + [A_1 + C_1]u_1 + [A_2 + C_2]v_1 = 0, \\ \vdots \\ B + [A_1 + C_1]u_l + [A_2 + C_2]v_l = 0, \end{cases}$$

onde $u_l = \cos[kh \cos(\theta_l)]$, $v_l = \cos[kh \sin(\theta_l)]$, com $l = 1, \dots, L - 1$ e $L = \dim(S_U^L) = 5$.

Para obter-se os gráficos da dispersão de cada método, utiliza-se a definição de acordo com [12, p. 164]. Para o caso bidimensional a relação de dispersão da solução exata de uma onda plana $u = e^{(\xi_1 x + \xi_2 y)}$, com $\xi_1 = kh \cos \theta$ e $\xi_2 = kh \sin \theta$, pode ser expressa pela circunferência

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - k^2 h^2 = 0. \quad (4.31)$$

Dessa maneira para a solução exata, tomando-se $kh = 1$, tem-se a circunferência de raio unitário, que será usada como base para comparar a dispersão dos métodos em duas dimensões. Para cada método, com os valores dos parâmetros livres determinados, pode-se tomar valores para k , h e θ , obtendo-se uma equação implícita para a dispersão, no formato da equação (3.66) para o caso de 5 pontos, por exemplo. Os gráficos foram gerados no *software* Matlab através do uso da função *fimplicit*². Tomando-se $\xi_1 = kh \cos \theta$ e $\xi_2 = kh \sin \theta$, obtém-se,

$$[A_1 + C_1] \cos(\xi_1) + [A_2 + C_2] \cos(\xi_2) + B = 0. \quad (4.32)$$

De maneira análoga procedeu-se para os outros métodos.

Já para obter-se a expressão aproximada para $|k^h - k|$, utiliza-se do mesmo procedimento descrito na Seção 3.4

4.2.1 Consequências da análise de dispersão para malhas uniformes

A equação da parte imaginária na análise de dispersão para malhas uniformes implica no seguinte corolário para o MCDFC.

²<https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/fimplicit.html>

Corolário 1 *Seja uma malha uniforme com parâmetro h . Para cada nó interior central considere estênceis com 3 pontos no caso 1D, 5 pontos no caso 2D e 9 pontos no caso 2D. Sejam G_i os vetores geradores do MCDFC para os casos 1D e 2D. Se é satisfeita a equação da parte imaginária da análise de dispersão, então existem apenas*

- i) 2 vetores geradores LI no caso 1D,
- ii) 3 vetores geradores LI no caso 2D e estêncil de 5 pontos,
- iii) 5 vetores geradores LI no caso 2D e estêncil de 9 pontos.

Prova 1 *Item i) No caso 1D o MCDFC é determinado por três vetores geradores $G_1 = [A_1, B_1, C_1]$, $G_2 = [A_2, B_2, C_2]$ e $G_3 = [A_3, B_3, C_3]$, os quais são LI. Para malha uniforme a equação da parte imaginária da análise de dispersão (3.54) implica em $A = C$, logo $G_1 = [A_1, B_1, A_1]$, $G_2 = [A_2, B_2, A_2]$ e $G_3 = [A_3, B_3, A_3]$. Estes vetores são LI quando $\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 + \alpha_3 G_3 = 0$ somente se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Na forma matricial esta restrição é*

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De onde pode ser notado que esta matriz apenas possui duas linhas LI.

Item ii) No caso 2D e estêncil com cinco pontos o MCDFC é determinado por cinco vetores geradores

$$\begin{aligned} G_1 &= [A_{11}, A_{12}, B_1, C_{11}, C_{12}], \\ G_2 &= [A_{21}, A_{22}, B_2, C_{21}, C_{22}], \\ G_3 &= [A_{31}, A_{32}, B_3, C_{31}, C_{32}], \\ G_4 &= [A_{41}, A_{42}, B_4, C_{41}, C_{42}], \\ G_5 &= [A_{51}, A_{52}, B_5, C_{51}, C_{52}], \end{aligned}$$

os quais são LI. Para malha uniforme a equação da parte imaginária da análise de dispersão (3.68) implica em $A_{l1} = C_{l1}$ e $A_{l2} = C_{l2}$, logo $G_1 = [A_{11}, A_{12}, B_1, A_{11}, A_{12}]$, $G_2 = [A_{21}, A_{22}, B_2, A_{21}, A_{22}]$, $G_3 = [A_{31}, A_{32}, B_3, A_{31}, A_{32}]$, $G_4 = [A_{41}, A_{42}, B_4, A_{41}, A_{42}]$

e $G_5 = [A_{51}, A_{52}, B_5, A_{51}, A_{52}]$. Neste caso a restrição na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} & A_{51} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} & A_{52} \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} & A_{51} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} & A_{52} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De onde pode ser notado que esta matriz apenas possui três linhas LI.

Item iii) No caso 2D e estêncil com nove pontos, o método CCFD é determinado por nove vetores geradores

$$\begin{aligned} G_1 &= [A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, B_1, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}], \\ G_2 &= [A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24}, B_2, C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24}], \\ G_3 &= [A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}, B_3, C_{31}, C_{32}, C_{33}, C_{34}], \\ G_4 &= [A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}, B_4, C_{41}, C_{42}, C_{43}, C_{44}], \\ G_5 &= [A_{51}, A_{52}, A_{53}, A_{54}, B_5, C_{51}, C_{52}, C_{53}, C_{54}], \\ G_6 &= [A_{61}, A_{62}, A_{63}, A_{64}, B_6, C_{61}, C_{62}, C_{63}, C_{64}], \\ G_7 &= [A_{71}, A_{72}, A_{73}, A_{74}, B_7, C_{71}, C_{72}, C_{73}, C_{74}], \\ G_8 &= [A_{81}, A_{82}, A_{83}, A_{84}, B_8, C_{81}, C_{82}, C_{83}, C_{84}], \\ G_9 &= [A_{91}, A_{92}, A_{93}, A_{94}, B_9, C_{91}, C_{92}, C_{93}, C_{94}]. \end{aligned}$$

Para malha uniforme, a equação da parte imaginária da análise de dispersão (3.87) e (3.89) implica em $A_{l1} = C_{l1}$, $A_{l2} = C_{l2}$, $A_{l3} = C_{l3}$ e $A_{l4} = C_{l4}$. Portanto,

$$\begin{aligned} G_1 &= [A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, B_1, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}], \\ G_2 &= [A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24}, B_2, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24}], \\ G_3 &= [A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}, B_3, A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}], \\ G_4 &= [A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}, B_4, A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}], \\ G_5 &= [A_{51}, A_{52}, A_{53}, A_{54}, B_5, A_{51}, A_{52}, A_{53}, A_{54}], \\ G_6 &= [A_{61}, A_{62}, A_{63}, A_{64}, B_6, A_{61}, A_{62}, A_{63}, A_{64}], \\ G_7 &= [A_{71}, A_{72}, A_{73}, A_{74}, B_7, A_{71}, A_{72}, A_{73}, A_{74}], \\ G_8 &= [A_{81}, A_{82}, A_{83}, A_{84}, B_8, A_{81}, A_{82}, A_{83}, A_{84}], \\ G_9 &= [A_{91}, A_{92}, A_{93}, A_{94}, B_9, A_{91}, A_{92}, A_{93}, A_{94}], \end{aligned}$$

que na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} & A_{51} & A_{61} & A_{71} & A_{81} & A_{91} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} & A_{52} & A_{62} & A_{72} & A_{82} & A_{92} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} & A_{53} & A_{63} & A_{73} & A_{83} & A_{93} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{54} & A_{64} & A_{74} & A_{84} & A_{94} \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 & B_9 \\ A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} & A_{51} & A_{61} & A_{71} & A_{81} & A_{91} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} & A_{52} & A_{62} & A_{72} & A_{82} & A_{92} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} & A_{53} & A_{63} & A_{73} & A_{83} & A_{93} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{54} & A_{64} & A_{74} & A_{84} & A_{94} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De onde pode ser notado que esta matriz apenas possui cinco linhas LI. \square

4.2.2 Caso unidimensional e estêncil de três pontos

Para o caso unidimensional, utiliza-se a equação (3.55), reproduzida abaixo.

$$k^h = \frac{1}{h} \arccos \left(-\frac{B}{A+C} \right).$$

Para o MCDFC, os valores A , B e C são obtidos utilizando-se a equação (4.2).

Desenvolvendo-a, tem-se

$$A = \frac{1}{h^2} \left[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \frac{(kh)^2}{2} (\alpha_2 - \alpha_3) \right], \quad (4.33)$$

$$B = \frac{1}{h^2} \left[-2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (kh)^2 (\alpha_1 + \alpha_3) \right], \quad (4.34)$$

$$C = \frac{1}{h^2} \left[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \frac{(kh)^2}{2} (\alpha_2 + \alpha_3) \right]. \quad (4.35)$$

Substituindo esses valores na equação (3.55) e tomando $k^h = k$, determina-se os parâmetros livres que satisfazem a relação de dispersão.

$$\alpha_2 = (1 + \alpha_3) \frac{2 - 2 \cos(kh) - (kh)^2}{\cos(kh) [2 + (kh)^2] - 2}, \quad (4.36)$$

onde $\alpha_1 = 1$, pois, como já foi dito, a equação de dispersão estabelece uma relação entre os coeficientes, sendo possível fazer a escolha de um deles. O vetor gerador G_3 não satisfaz a parte imaginária da equação de dispersão (3.54) e deve ser desconsiderado tomando-se

$\alpha_3 = 0$. Portanto, a equação (4.36) se reduz a

$$\alpha_2 = \frac{2 - 2 \cos(kh) - (kh)^2}{\cos(kh) [2 + (kh)^2] - 2}. \quad (4.37)$$

Substituindo-se a equação (4.37) nas expressões para A , B e C nas equações (4.33), (4.34) e (4.35), tem-se as expressões que definem o estêncil 1D gerado pelo MCDFC, cuja solução numérica é a mesma do interpolante.

$$AU_{i-i} + BU_i + CU_{i+1} = f_i, \quad (4.38)$$

com

$$A = -\frac{h^2 k^4}{-4 + 2[2 + (kh)^2] \cos(kh)}, \quad (4.39)$$

$$B = \frac{h^2 k^4 \cos(kh)}{-2 + [2 + (kh)^2] \cos(kh)}, \quad (4.40)$$

$$C = -\frac{h^2 k^4}{-4 + 2[2 + (kh)^2] \cos(kh)}. \quad (4.41)$$

4.2.3 Caso bidimensional e estêncil de cinco pontos

Para o caso bidimensional e estêncil com cinco pontos, utiliza-se a equação (3.67).

$$[A_1 + C_1] \cos(k^h h \cos \theta) + [A_2 + C_2] \cos(k^h h \sin \theta) + B = 0.$$

As expressões de A_1 , A_2 , B , C_1 e C_2 são obtidas da mesma maneira do caso unidimensional porém utilizando-se a equação (4.3).

$$A_1 = \frac{1}{h^2} \left[\alpha_1 + \left(1 + \frac{(kh)^2}{4} \right) (\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5) + \left(1 - \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_3 \right], \quad (4.42)$$

$$A_2 = \frac{1}{h^2} \left[\alpha_1 + \left(1 - \frac{(kh)^2}{4} \right) (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + \left(1 + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_2 \right], \quad (4.43)$$

$$B = \frac{1}{h^2} [-4\alpha_2 + (-4 + (kh)^2)(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)], \quad (4.44)$$

$$C_1 = \frac{1}{h^2} \left[\alpha_1 + \left(1 + \frac{(kh)^2}{4} \right) (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5) + \left(1 - \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_4 \right], \quad (4.45)$$

$$C_2 = \frac{1}{h^2} \left[\alpha_1 + \left(1 + \frac{(kh)^2}{4} \right) (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \left(1 - \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_5 \right]. \quad (4.46)$$

De forma semelhante ao caso 1D, os coeficientes podem ser determinados de modo a minimizar a dispersão $|k^h - k|$. Substituindo-se os valores na equação (3.67), e aplicando a mesma metodologia para encontrar as equações de dispersão da Seção 3.4, obtém-se a

relação entre k^h e k .

Aqui também pode-se fixar um coeficiente, pelos mesmos motivos já apresentados, logo toma-se $\alpha_1 = 1$. Os vetores geradores G_3 e G_4 não satisfazem a parte imaginária da equação (3.66), portanto devem ser desconsiderados tomando-se $\alpha_3 = 0$ e $\alpha_4 = 0$.

Para o caso não-simétrico, os coeficientes α_2 e α_5 devem ser determinados para minimizar $|k^h - k|$. No caso 2D, o mínimo absoluto $k^h = k$ não pode ser alcançado para qualquer direção θ da onda plana. Este mínimo será alcançado a mesma quantidade de vezes que parâmetros α_l disponíveis. Escolhendo as direções $\theta_1 = \pi/8$ e $\theta_2 = 3\pi/8$ para a onda plana, é possível obter

$$\alpha_2 = \frac{-1}{\chi^{5p}} [8(u_2 - u_1 + v_1 - v_2 + u_1v_2 - u_2v_1) + 2k^2h^2(u_1 - u_2 + v_2 - v_1)], \quad (4.47)$$

$$\alpha_5 = -\frac{-1}{\chi^{5p}} [k^2h^2(u_2 - u_1 - v_1 + v_2)], \quad (4.48)$$

com u_1, u_2, v_1, v_2 e χ^{5p} definidos por

$$u_1 = \cos(kh \cos \theta_1), \quad (4.49)$$

$$u_2 = \cos(kh \cos \theta_2), \quad (4.50)$$

$$v_1 = \cos(kh \sin \theta_1), \quad (4.51)$$

$$v_2 = \cos(kh \sin \theta_2), \quad (4.52)$$

$$\chi^{5p} = 8(u_2 - u_1 + v_1 - v_2 + u_1v_2 - u_2v_1) + k^2h^2(u_2 - u_1 + v_2 - v_1 + 2u_1v_2 - 2u_2v_1). \quad (4.53)$$

Portanto o MDFC-5p é capaz de gerar um estêncil cuja solução numérica coincide com o interpolante apenas quando $\theta = \theta_1$ ou $\theta = \theta_2$.

$$\text{MCDFC-5p: } k^h - k = \frac{\gamma_1^{5p} k^3 h^2 + \gamma_2^{5p} k^5 h^4 + \gamma_3^{5p} k^7 h^6}{82575360(1 + \alpha_2 + \alpha_5)^3} + \mathcal{O}(k^9 h^8), \quad (4.54)$$

onde

$$\begin{aligned}\gamma_1^{5p} = & -2580480(-1 + 3\alpha_2 - \alpha_5)(1 + \alpha_2 + \alpha_5)^2 - 20643840\alpha_5(1 + \alpha_2 + \alpha_5)^2 \cos(2\theta) \\ & + 860160(1 + \alpha_2 + \alpha_5)^3 \cos(4\theta),\end{aligned}\quad (4.55)$$

$$\begin{aligned}\gamma_2^{5p} = & 2240(1 + \alpha_2 + \alpha_5)[101 + 533\alpha_2^2 - 230\alpha_2(1 + \alpha_5) + \alpha_5(202 + 1829\alpha_5)] \\ & + 107520\alpha_5(1 + \alpha_2 + \alpha_5)[53\alpha_2 - 19(1 + \alpha_5)] \cos(2\theta) \\ & - 16128(1 + \alpha_2 + \alpha_5)[-9 + 11\alpha_2^2 + 2\alpha_2(1 + \alpha_5) - 3\alpha_5(6 + 83\alpha_5)] \cos(4\theta) \\ & - 537600\alpha_5(1 + \alpha_2 + \alpha_5)^2 \cos(6\theta) + 15680(1 + \alpha_2 + \alpha_5)^3 \cos(8\theta),\end{aligned}\quad (4.56)$$

$$\begin{aligned}\gamma_3^{5p} = & 14[-15339\alpha_2^3 + 7283\alpha_2^2(1 + \alpha_5) + (1 + \alpha_5)(1961 + \alpha_5(3922 + 42761\alpha_5)) \\ & + \alpha_2(4217 + \alpha_5(8434 + 136217\alpha_5))] - 336\alpha_5[993 + 4393\alpha_2^2 - 1814\alpha_2(1 + \alpha_5) \\ & + 3\alpha_5(662 + 2731\alpha_5)] \cos(2\theta) \\ & + 35[997\alpha_2^3 - 177\alpha_2^2(1 + \alpha_5) - 15\alpha_2(31 + \alpha_5(62 + 3103\alpha_5)) \\ & + (1 + \alpha_5)(709 + \alpha_5(1418 + 23749\alpha_5))] \cos(4\theta) \\ & - 168\alpha_5[789 - 1211\alpha_2^2 - 422\alpha_2(1 + \alpha_5) + 3\alpha_5(526 + 1863\alpha_5)] \cos(6\theta) \\ & - 2[1 + \alpha_2 + \alpha_5](-2473 + 2427\alpha_2^2 - 46\alpha_2(1 + \alpha_5) - \alpha_5(4946 + 120073\alpha_5)) \cos(8\theta) \\ & - 17640\alpha_5[(1 + \alpha_2 + \alpha_5)^2 \cos(10\theta)] + 385(1 + \alpha_2 + \alpha_5)^3 \cos(12\theta).\end{aligned}\quad (4.57)$$

Já quando vale-se da simetria, o vetor gerador G_5 que compõe a base do subespaço S_U^L não atende aos requisitos de simetria para malhas uniformes, portanto pode-se considerar $\alpha_5 = 0$, devendo-se encontrar apenas um parâmetro

$$\alpha_2 = -\frac{2(-4 + k^2h^2 + 2u_1 + 2v_1)}{-8 + 4u_1 + k^2h^2u_1 + 4v_1 + k^2h^2v_1},\quad (4.58)$$

onde u_1 e v_1 são dados, respectivamente, pelas equações (4.49) e (4.51).

Portanto, tem-se a equação de dispersão

$$\text{MCDFC-5p: } k^h - k = \frac{\gamma_1^{5ps} k^3 h^2}{96(1 + \alpha_2)} + \frac{\gamma_2^{5ps} k^5 h^4}{184320(1 + \alpha_2)^2} + \frac{\gamma_3^{5ps} k^7 h^6}{82575360(1 + \alpha_2)^3} + \mathcal{O}(k^9 h^8),\quad (4.59)$$

onde

$$\gamma_1^{5ps} = 3 - 9\alpha_2 + \cos(4\theta) + \alpha_2 \cos(4\theta),\quad (4.60)$$

$$\gamma_2^{5ps} = -36(-9 + 2\alpha_2 + 11\alpha_2^2) \cos(4\theta) + 5[101 - 230\alpha_2 + 533\alpha_2^2 + 7(1 + \alpha_2)^2 \cos(8\theta)], \quad (4.61)$$

$$\gamma_3^{5ps} = 35(709 - 465\alpha_2 - 177\alpha_2^2 + 997\alpha_2^3) \cos(4\theta) - 2(1 + \alpha_2)^2(-2473 + 2427\alpha_2) \cos(8\theta) + 7[3922 - 8434\alpha_2 + 14566\alpha_2^2 - 30678\alpha_2^3 + 55(1 + \alpha_2)^3 \cos(12\theta)]. \quad (4.62)$$

Obteve-se também a equação de dispersão implícita, utilizada para gerar o gráfico da Figura 4.2.

$$28733.56643(\cos \xi_1) + 28733.56643(\cos \xi_2) - 43973.70629 = 0. \quad (4.63)$$

Cabe ressaltar que ambos os casos, não-simétrico e simétrico, produzem a mesma equação de dispersão (4.63).

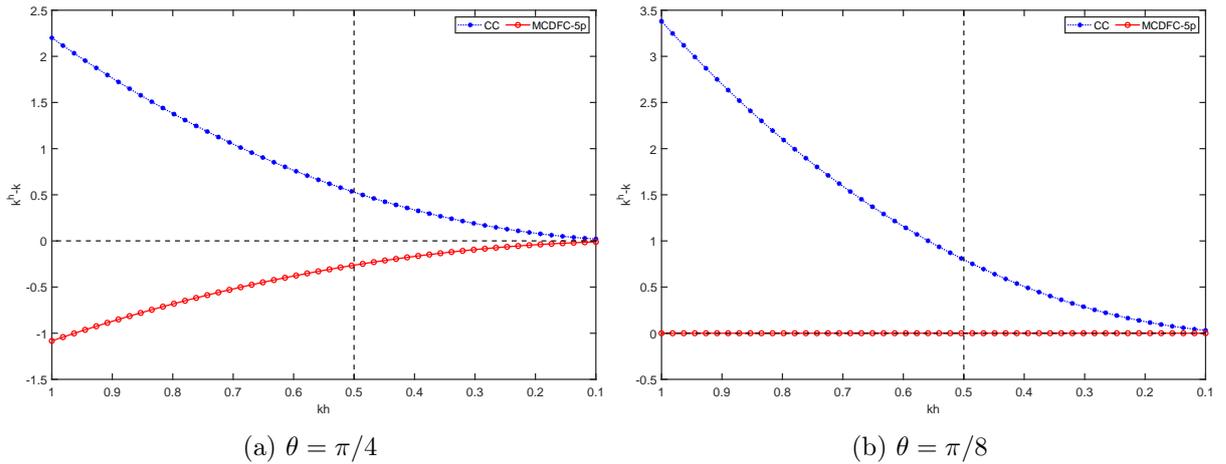


Figura 4.1: Comparativo da dispersão dos métodos CC e MCDFC-5p para dois ângulos diferentes e $k = 100$.

Como visto, para o estêncil de 5 pontos, os valores de $\theta_1 = \pi/8$ e $\theta_2 = 3\pi/8$, são os que geram o menor erro na relação de dispersão $\forall \theta$. Isso pode ser visto nas Figuras 4.1b e 4.2. A Figura 4.1 apresenta um comparativo da dispersão ($k^h - k$) do MCDFC-5p com o método CC. Para $\theta = \pi/4$ (Figura 4.1a), mesmo não sendo a direção que o MCDFC-5p entrega a dispersão mínima, percebe-se que ela ainda assim é menor do que a dispersão do método CC. Assim como no método GLS [11], o MCDFC-5p apresenta dispersão nula em dois ângulos do primeiro quadrante porém utilizando apenas 5 pontos, contra um estêncil de 9 pontos do GLS.

Todavia, com um estêncil de cinco pontos verificou-se que não seria possível obter

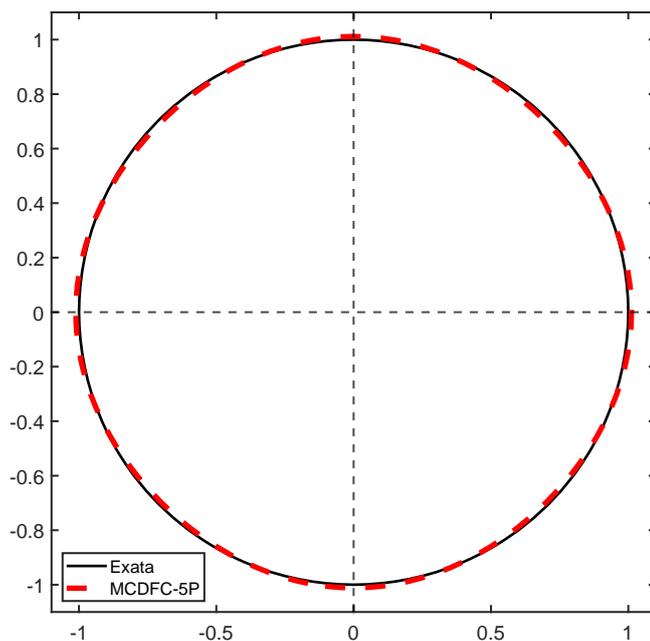


Figura 4.2: Relação de Dispersão do MCDFC-5p para $k = 100$, $kh = 1$ em função da direção θ da onda.

resultados como os do método QSFEM [2], que apresenta dispersão nula em quatro ângulos no primeiro quadrante (dezesseis considerando-se os quatro quadrantes) e mínima nas demais direções. Dessa maneira, recorreu-se aos estênceis com nove pontos ($L = 9$), ilustrados na Figura 3.3 e abordados na Seção 4.2.4.

Observação: Cabe informar que todas as análises de dispersão, cálculo do erro de truncamento local, implementação computacional e resultados numéricos obtidos foram realizados utilizando o estêncil da Figura 3.3(a) (compacto), ficando para trabalhos futuros as análises pro estêncil da Figura 3.3(b) (cruz).

4.2.4 Caso bidimensional e estêncil de nove pontos

Até aqui os parâmetros livres (α_l) foram explicitamente inseridos no presente trabalho, porém, para os estênceis com nove pontos, nos casos não-simétricos, as expressões são demasiadamente extensas para serem inseridas no texto e serão suprimidas. As expressões para os casos simétricos estão presentes pois são mais reduzidas.

4.2.4.1 Estêncil compacto e Laplaciano com 5 pontos

Considerando-se o estêncil compacto de nove pontos da equação (3.84), são obtidas as equações da parte real (3.86) e imaginária (3.87) para a relação de dispersão.

No caso do MCDFC-9p-L5p, para determinar as expressões de $A_1, A_2, A_3, A_4, B, C_1, C_2, C_3$ e C_4 , utiliza-se a equação (4.4), onde obtém-se

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{h^2} \left[\alpha_1 + \left(1 + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_2 + \left(1 + \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_3 \right], \\
A_2 &= \frac{1}{h^2} \left[\alpha_1 + \left(1 + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_2 + \left(1 - \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_3 \right], \\
A_3 &= \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_5 \right], \\
A_4 &= \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_4 + \left(\frac{1}{2} + \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_5 \right], \\
B &= \frac{1}{h^2} \left[(-4 + (kh)^2)(\alpha_1 + \alpha_3) - 2(2\alpha_2 + \alpha_4) + (-2 + (kh)^2)\alpha_5 \right], \\
C_1 &= \frac{1}{h^2} \left[\alpha_1 + \left(1 + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_2 + \left(1 + \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_3 \right], \\
C_2 &= \frac{1}{h^2} \left[\alpha_1 + \left(1 + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_2 + \left(1 - \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_3 \right], \\
C_3 &= \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_4 + \left(\frac{1}{2} + \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_5 \right], \\
C_4 &= \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_5 \right].
\end{aligned}$$

Para o caso não-simétrico, deve-se determinar quatro parâmetros que minimizam $|k^h - k|$. Com isso, a dispersão mínima será alcançada a mesma quantidade de vezes que parâmetros α_i . Escolhendo as direções $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e θ_4 para a onda plana, obtém-se quatro parâmetros livres, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ e α_5 , fixando-se $\alpha_1 = 1$. Portanto, nesse caso, o MCDFC é capaz de gerar um estêncil cuja solução numérica coincide com o interpolante quando $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/4, \theta_3 = \pi/2$ ou $\theta_4 = 3\pi/4$.

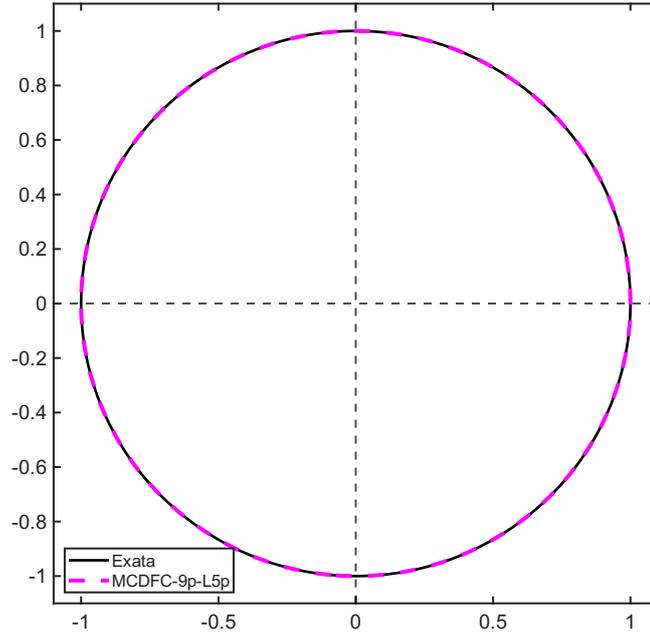


Figura 4.3: Relação de dispersão para $k = 100$, $kh = 1$ em função da direção θ com $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/4$, $\theta_3 = \pi/2$ e $\theta_4 = 3\pi/4$.

No caso simétrico, os vetores geradores G_3 e G_5 não atendem aos critérios de simetria, logo, pode-se tomar $\alpha_3 = \alpha_5 = 0$. Com isso, é necessário escolher apenas duas direções que minimizam a dispersão, $\theta_1 = \pi/16$ e $\theta_2 = 3\pi/16$, obtendo-se a mesma dispersão do caso não-simétrico. Visto isso, apenas dois parâmetros α_l devem ser determinados

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{\chi^{CO}} \left[8(-u_1 + u_2 - v_1 + v_2 + 2u_1v_1 - 2u_2v_2 - u_1u_2v_1 + u_1u_2v_2 - u_1v_1v_2 + u_2v_1v_2) + 4k^2h^2(u_1v_1 - u_2v_2 - u_1u_2v_1 + u_1u_2v_2 - u_1v_1v_2 + u_2v_1v_2) + 2k^4h^4(-u_1v_1 + u_2v_2) \right], \quad (4.64)$$

$$\alpha_4 = \frac{\alpha_1}{\chi^{CO}} \left[k^4h^4(u_1 - u_2 + v_1 - v_2) \right], \quad (4.65)$$

onde

$$\chi^{CO} = \chi_1^{CO} + \chi_2^{CO} + \chi_3^{CO},$$

com

$$\chi_1^{CO} = 8(u_1 - u_2 + v_1 - v_2 - 2u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_1u_2v_1 - u_1u_2v_2 + u_1v_1v_2 - u_2v_1v_2),$$

$$\chi_2^{CO} = 2k^2h^2(u_1 - u_2 + v_1 - v_2 - 4u_1v_1 + 4u_2v_2 + 3u_1u_2v_1 - 3u_1u_2v_2 + 3u_1v_1v_2 - 3u_2v_1v_2),$$

$$\chi_3^{CO} = k^4h^4(u_1u_2v_1 - u_1u_2v_2 + u_1v_1v_2u_2v_1v_2).$$

A equação de dispersão do MCDFC-9p-L5p é

$$k^h - k = \frac{\gamma_1^{CO} k^3 h^2}{96(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)} + \frac{\gamma_2^{CO} k^5 h^4}{184320(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)^2} \quad (4.66)$$

$$+ \frac{\gamma_3^{CO} k^7 h^6}{82575360(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)^3} + \mathcal{O}(k^9 h^8), \quad (4.67)$$

com

$$\begin{aligned} \gamma_1^{CO} &= \alpha_1(3 + \cos 4\theta) + \alpha_2(-9 + \cos 4\theta) + \alpha_4(-18 - 2 \cos 4\theta), \\ \gamma_2^{CO} &= 505 + 324 \cos 4\theta + 35 \cos 8\theta + \alpha_1(140 - 4032 \cos 4\theta - 140 \cos 8\theta) \\ &\quad + \alpha_2(-1150 - 72 \cos 4\theta + 70 \cos 8\theta) + \alpha_2^2(2665 - 396 \cos 4\theta + 35 \cos 8\theta) \\ &\quad + \alpha_2 \alpha_4(11660 - 1152 \cos 4\theta - 140 \cos 8\theta) + \alpha_4^2(10660 + 1584 \cos 4\theta + 140 \cos 8\theta), \\ \gamma_3^{CO} &= \alpha_1^3(27454 + 24815 \cos 4\theta + 4946 \cos 8\theta + 385 \cos 12\theta) \\ &\quad + \alpha_1^2[\alpha_4(-39340 - 199290 \cos 4\theta - 70100 \cos 8\theta - 2310 \cos 12\theta) \\ &\quad + \alpha_2(-59038 - 16275 \cos 4\theta + 5038 \cos 8\theta + 1155 \cos 12\theta)] \\ &\quad + \alpha_1[\alpha_2 \alpha_4(-181720 + 770700 \cos 4\theta - 77480 \cos 8\theta - 4620 \cos 12\theta) \\ &\quad + \alpha_2^2(101962 - 6195 \cos 4\theta - 4762 \cos 8\theta + 1155 \cos 12\theta) \\ &\quad + \alpha_4^2(-532952 + 1204980 \cos 4\theta + 141272 \cos 8\theta + 4620 \cos 12\theta) \\ &\quad + \alpha_2^3(-214746 + 34895 \cos 4\theta - 4854 \cos 8\theta + 385 \cos 12\theta) \\ &\quad + \alpha_2^2 \alpha_4(-1553580 + 365190 \cos 4\theta - 7380 \cos 8\theta - 2310 \cos 12\theta) \\ &\quad + \alpha_2 \alpha_4^2(-2986872 + 277620 \cos 4\theta + 55032 \cos 8\theta + 4620 \cos 12\theta) \\ &\quad + \alpha_4^3(-1717968 - 279160 \cos 4\theta - 38832 \cos 8\theta - 3080 \cos 12\theta). \end{aligned}$$

Obteve-se também a equação de dispersão implícita, utilizada para gerar o gráfico da Figura 4.3.

$$\begin{aligned} 15852.66304(\cos \xi_1) + 15852.66304(\cos \xi_2) + 4169.02583[\cos(\xi_1 - \xi_2)] \\ + 4169.02583[\cos(\xi_1 + \xi_2)] - 28922.96198 = 0. \quad (4.68) \end{aligned}$$

4.2.4.2 Estêncil compacto e Laplaciano com 9 pontos

Nesse caso, como a aproximação do operador Laplaciano foi realizada de forma diferente, as expressões para $A_1, A_2, A_3, A_4, B, C_1, C_2, C_3$ e C_4 sofreram alterações, sendo as

seguintes

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{2}{3}(\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5) + \left(\frac{2}{3} + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_3 \right], \\
A_2 &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{2}{3}(\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5) + \left(\frac{2}{3} + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_3 \right], \\
A_3 &= \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_4 + \left(\frac{1}{6} - \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_5 \right], \\
A_4 &= \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_4 + \left(\frac{1}{6} + \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_5 \right], \\
B &= \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{-10}{3} + (kh)^2 \right) (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5) - \frac{10}{3} (\alpha_2 + \alpha_4) \right], \\
C_1 &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{2}{3}(\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5) + \left(\frac{2}{3} + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_3 \right], \\
C_2 &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{2}{3}(\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5) + \left(\frac{2}{3} + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_3 \right], \\
C_3 &= \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_4 + \left(\frac{1}{6} + \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_5 \right], \\
C_4 &= \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{(kh)^2}{4} \right) \alpha_4 + \left(\frac{1}{6} - \frac{(kh)^2}{2} \right) \alpha_5 \right].
\end{aligned}$$

Para o caso não-simétrico, deve-se determinar quatro parâmetros que minimizem $|k^h - k|$. Com isso a dispersão mínima será alcançada a mesma quantidade de vezes que parâmetros α_l . Escolhendo as direções $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e θ_4 para a onda plana, obtém-se os quatro parâmetros livres.

Portanto, nesse caso, o MCDFC é capaz de gerar um estêncil cuja solução numérica coincide com o interpolante quando $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/4$, $\theta_3 = \pi/2$ ou $\theta_4 = 3\pi/4$.

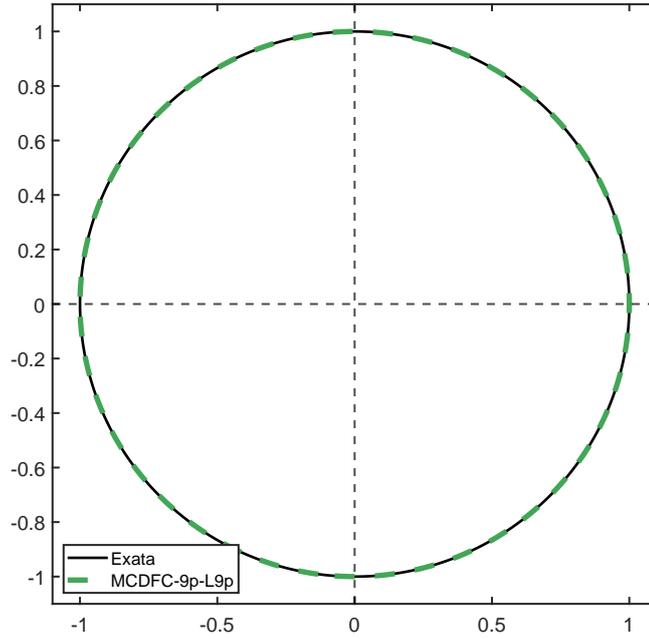


Figura 4.4: Relação de dispersão para $k = 100$, $kh = 1$ em função da direção θ com $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/4$, $\theta_3 = \pi/2$ e $\theta_4 = 3\pi/4$.

Para o caso simétrico, a dispersão obtida foi a mesma do caso não-simétrico, porém os ângulos que a minimizam são $\theta_1 = \pi/16$ e $\theta_2 = 3\pi/16$. Os vetores geradores G_3 e G_5 não atendem aos critérios de simetria, logo pode-se tomar $\alpha_3 = \alpha_5 = 0$,

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{\chi^{L9p}} [8(-u_1 + u_2 - v_1 + v_2 + 2u_1v_1 - 2u_2v_2 - u_1u_2v_1 + u_1u_2v_2 - u_1v_1v_2 + u_2v_1v_2) + 6k^2h^2(-u_1v_1 - u_2v_2)], \quad (4.69)$$

$$\alpha_4 = \frac{\alpha_1}{\chi^{L9p}} [2(-u_1 + u_2 - v_1 + v_2 + 2u_1v_1 - 2u_2v_2 - u_1u_2v_1 + u_1u_2v_2 - u_1v_1v_2 + u_2v_1v_2) + 3k^2h^2(-u_1 - u_2 + v_1 - v_2)], \quad (4.70)$$

onde

$$\chi^{L9p} = \chi_1^{L9p} + \chi_2^{L9p},$$

com

$$\chi_1^{L9p} = 10(u_1 - u_2 + v_1 - v_2 - 2u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_1u_2v_1 - u_1u_2v_2 + u_1v_1v_2 - u_2v_1v_2),$$

$$\chi_2^{L9p} = 3k^2h^2(u_1u_2v_1 - u_1u_2v_2 + u_1v_1v_2 - u_2v_1v_2).$$

A equação de dispersão do MCDFC-9p-L9p é

$$k^h - k = \frac{\gamma_1^{L9p} k^3 h^2}{24(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)} + \frac{\gamma_2^{L9p} k^5 h^4}{5760(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)^2} \quad (4.71)$$

$$+ \frac{\gamma_3^{L9p} k^7 h^6}{774144(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)^3} + \mathcal{O}(k^9 h^8), \quad (4.72)$$

com

$$\gamma_1^{L9p} = (\alpha_1 - 2\alpha_2 - 5\alpha_4),$$

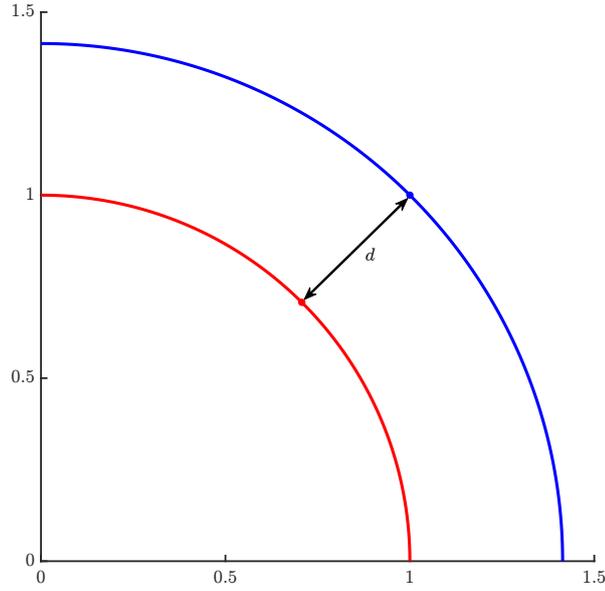
$$\gamma_2^{L9p} = \alpha_1^2(25 + 2\cos 4\theta) + \alpha_1(\alpha_4(-70 - 56\cos 4\theta) + \alpha_2(-55 + 19\cos 4\theta)) + \alpha_2^2(55 + 17\cos 4\theta) \\ + \alpha_2\alpha_4(365 - 41\cos 4\theta) + \alpha_4^2(445 - 58\cos 4\theta),$$

$$\gamma_3^{L9p} = \alpha_2^3(-805 - 924\cos 4\theta + \cos 8\theta) + \alpha_1^3(455 + 84\cos 4\theta + \cos 8\theta) + \\ \alpha_4^3(-27265 + 8148\cos 4\theta + \cos 8\theta) + \alpha_2^2\alpha_4(-11235 + 3\cos 8\theta) + \\ \alpha_2\alpha_4^2(-33915 + 9072\cos 4\theta + 3\cos 8\theta) + \\ \alpha_1^2[\alpha_4(-1155 - 1764\cos 4\theta + 3\cos 8\theta) + \alpha_2(-1155 + 504\cos 4\theta + 3\cos 8\theta)] + \\ \alpha_1[\alpha_2^2(1365 - 504\cos 4\theta + 3\cos 8\theta) + \alpha_4^2(1365 + 6300\cos 4\theta + 3\cos 8\theta) + \\ \alpha_2\alpha_4(5250 - 504\cos 4\theta + 6\cos 8\theta)].$$

Obteve-se também a equação de dispersão implícita, utilizada para gerar o gráfico da Figura 4.4.

$$19462.52919(\cos \xi_1) + 19462.52919(\cos \xi_2) + 5118.36953[\cos(\xi_1 - \xi_2)] \\ + 5118.36953[\cos(\xi_1 + \xi_2)] - 35509.07497 = 0. \quad (4.73)$$

A Tabela 4.1 mostra a distância radial (d) entre $k^h h$ e kh para os métodos completos desenvolvidos e o QSFEM [2] para um valor de referência $kh = 1$, ou seja, a dispersão entre o número de onda exato k e o numérico k^h . A Figura 4.5 ilustra de forma genérica o significado dos dados dessa tabela.

Figura 4.5: Distância radial (d) entre duas curvas genéricas.

θ	MCDFC-5p	MCDFC-9p-L5p	MCDFC-9p-L9p	QSFEM
0	0.0117298949	$0.1494546213 \times 10^{-5}$	$0.1494546930 \times 10^{-5}$	$0.1494546931 \times 10^{-5}$
$\pi/16$	0.0081922269	$0.1554312234 \times 10^{-14}$	$0.2331468351 \times 10^{-14}$	0
$\pi/8$	0	$0.1493378764 \times 10^{-5}$	$0.1493378041 \times 10^{-5}$	$0.1493378038 \times 10^{-5}$
$3\pi/16$	0.0077434086	$0.1554312234 \times 10^{-14}$	$0.1998401444 \times 10^{-14}$	0
$\pi/4$	0.0108307550	$0.1492280677 \times 10^{-5}$	$0.1492281406 \times 10^{-5}$	$0.1492281407 \times 10^{-5}$
$5\pi/16$	0.0077434086	$0.1998401444 \times 10^{-14}$	$0.2331468351 \times 10^{-14}$	0
$3\pi/8$	0	$0.1493378764 \times 10^{-5}$	$0.1493378041 \times 10^{-5}$	$0.1493378038 \times 10^{-5}$
$7\pi/16$	0.0081922269	$0.1776356839 \times 10^{-14}$	$0.1998401444 \times 10^{-14}$	0
$\pi/2$	0.0117298948	$0.1494546212 \times 10^{-5}$	$0.1494546929 \times 10^{-5}$	$0.1494546931 \times 10^{-5}$

Tabela 4.1: Dispersão de cada método em função da direção de onda.

Pela Tabela 4.1 pode-se concluir que o MCDFC-5p de fato apresenta dispersão numericamente nula para os dois ângulos já mencionados $\theta_1 = \pi/8$ e $\theta_2 = 3\pi/8$. Verifica-se também que o MCDFC-5p, nas outras direções, não consegue obter o mesmo resultado dos demais. Comparando os métodos completos de 9 pontos (MCDFC-9p-L5p e MCDFC-9p-L9p) com o QSFEM, verifica-se que possuem dispersões muito próximas em todas as direções de onda. Nos quatro ângulos onde a dispersão se anula no QSFEM, nos métodos completos aparecem números muito pequenos que seriam zero caso o computador tivesse precisão infinita, porém nos métodos completos, como os parâmetros são extensos e muitos cálculos são executados, há o efeito de *roundoff* [21].

4.3 Erro de Truncamento Local

O erro de truncamento local (ETL) foi calculado para os vetores geradores da mesma maneira que foi realizado na Seção 3.3.

4.3.1 Caso unidimensional e estêncil de três pontos

Usando a notação $u_i^{(n)} = \frac{d^n u(x_i)}{dx^n}$ e $f_i^{(n)} = \frac{d^n f(x_i)}{dx^n}$, obteve-se

$$\mathbf{G1:} \quad \tau_i = \frac{f_i^{(2)} - k^2 u_i^{(2)}}{12} h^2 + \mathcal{O}(h^3), \quad (4.74)$$

$$\mathbf{G2:} \quad \tau_i = \frac{f_i^{(2)}}{12} h^2 + \frac{f_i^{(2)} - k^2 u_i^{(2)}}{24} k^2 h^4 + \mathcal{O}(h^5), \quad (4.75)$$

$$\mathbf{G3:} \quad \tau_i = k^2 u_i^{(1)} h + \frac{f_i^{(2)} - k^2 u_i^{(2)}}{12} h^2 + \frac{f_i^{(1)} - k^2 u_i^{(1)}}{6} k^2 h^3 + \mathcal{O}(h^4). \quad (4.76)$$

Já o ETL do **MCDFC-1D** é dado por

$$\tau_i(\alpha_l) = \left(f_i^{(2)} - k^2 u_i^{(2)} \right) \frac{h^2}{12} + \alpha_2 \left[f_i^{(2)} \frac{h^2}{12} + \left(f_i^{(2)} - k^2 u_i^{(2)} \right) k^2 \frac{h^4}{24} \right] + \mathcal{O}(h^5). \quad (4.77)$$

Deve ser notado que os esquemas gerados pelos vetores G_1 , G_2 e o MCDFC-1D são de segunda ordem de aproximação. Porém, o esquema gerado pelo vetor G_3 é de primeira ordem de precisão.

4.3.2 Caso bidimensional e estêncil de cinco pontos

No caso 2D e estêncil de cinco pontos, obteve-se

$$\mathbf{G1:} \quad \tau_{i,j} = \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) + \mathcal{O}(h^3), \quad (4.78)$$

$$\mathbf{G2:} \quad \tau_{i,j} = \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{h^2}{4} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{48} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G3:} \quad \tau_{i,j} = & \left[u_{i,j}^{(1x)} + u_{i,j}^{(1y)} \right] \left(\frac{h}{2} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) \\ & + \left[u_{i,j}^{(3x)} + u_{i,j}^{(3y)} \right] \left(\frac{h^3}{12} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^4), \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G4:} \quad \tau_{i,j} = & \left[-u_{i,j}^{(1x)} + u_{i,j}^{(1y)} \right] \left(\frac{h}{2} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) \\ & + \left[u_{i,j}^{(3x)} + u_{i,j}^{(3y)} \right] \left(\frac{h^3}{12} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^4), \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G5:} \quad \tau_{i,j} = & \left[u_{i,j}^{(2x)} - u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{h^2}{2} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) \\ & + \left[u_{i,j}^{(4x)} - u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^4}{12} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \end{aligned} \quad (4.82)$$

MCDFC-5p:

$$\begin{aligned} \tau_{i,j}(\alpha_l) = & \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) \\ & + \alpha_2 \left\{ \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{48} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{4} k^2 \right) \right\} \\ & + \alpha_5 \left\{ \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} - u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^4}{24} k^2 \right) \right. \\ & \left. + \left[u_{i,j}^{(2x)} - u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{h^2}{2} k^2 \right) \right\} + \mathcal{O}(h^5). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Deve ser notado que os esquemas gerados pelos vetores G_1 , G_2 , G_5 e o MCDFC são de segunda ordem de aproximação. Porém, os esquemas gerados pelos vetores G_3 e G_4 são de primeira ordem de precisão.

4.3.3 Caso bidimensional e estêncil de nove pontos

4.3.3.1 Estêncil Compacto e Laplaciano com 5 pontos

Os três primeiros vetores geradores (G_1 , G_2 e G_3) possuem o mesmo ETL que os três primeiros geradores do estêncil de 5 pontos (equações 4.78, 4.79 e 4.80). Os ETL dos vetores G_4 e G_5 são

$$\begin{aligned} \mathbf{G4:} \quad \tau_{i,j} = & \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} + \frac{k^2 h^4}{24} \right) + \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{k^2 h^2}{4} \right) \\ & + u_{i,j}^{(2x,2y)} \left(\frac{h^2}{12} + \frac{k^2 h^4}{4} \right) + \mathcal{O}(h^5), \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\mathbf{G5}: \tau_{i,j} = \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} - \frac{k^2 h^4}{3} \right) - 2u_{i,j}^{(1x,1y)}(k^2 h^2) + u_{i,j}^{(2x,2y)} \left(\frac{h^2}{12} \right) + \mathcal{O}(h^5). \quad (4.85)$$

Para o MCDFC-9p-L5p, o erro de truncamento em função dos parâmetros α_l pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \tau_{i,j}(\alpha_l) = & \alpha_1 \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) \\ & + \alpha_2 \left\{ \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} + \frac{k^2 h^4}{48} \right) + \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \frac{k^2 h^4}{4} \right\} \\ & + \alpha_3 \left\{ \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} - u_{i,j}^{(4y)} \right] \frac{k^2 h^4}{48} + \left[u_{i,j}^{(2x)} - u_{i,j}^{(2y)} \right] \frac{k^2 h^4}{4} \right\} \\ & + \alpha_4 \left\{ \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} + \frac{k^2 h^4}{24} \right) + \left[u_{i,j}^{(2x,2y)} \right] \left(\frac{h^2}{2} + \frac{k^2 h^2}{4} \right) \right. \\ & \left. + \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{k^2 h^2}{2} \right) \right\} \\ & + \alpha_5 \left\{ \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} - \frac{k^2 h^4}{6} \right) - \left[u_{i,j}^{(2x,2y)} \right] \left(\frac{h^2}{2} \right) - u_{i,j}^{(1x,1y)}(k^2 h^2) \right\} + \mathcal{O}(h^5). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Aqui nota-se que os esquemas gerados pelos vetores G_1, G_2, G_4, G_5 e o MCDFC são de segunda ordem de aproximação. Apenas o esquema gerado pelo vetor G_3 é de primeira ordem de precisão.

4.3.3.2 Estêncil Compacto e Laplaciano com 9 Pontos

No caso do estêncil compacto e Laplaciano com 9 pontos, tem-se

$$\mathbf{G1:} \quad \tau_{i,j} = \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) + \left[u_{i,j}^{(2x,2y)} \right] \left(\frac{h^2}{6} \right) \mathcal{O}(h^3), \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G2:} \quad \tau_{i,j} &= \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{h^2}{4} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{48} k^2 \right) \\ &+ \left(\frac{h^2}{6} \right) + \mathcal{O}(h^5), \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G3:} \quad \tau_{i,j} &= \left[u_{i,j}^{(2x)} - u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{h^2}{2} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) \\ &+ \left[u_{i,j}^{(4x)} - u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^4}{24} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G4:} \quad \tau_{i,j} &= \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{24} k^2 \right) + \left[u_{i,j}^{(2x,2y)} \right] \left(\frac{h^2}{6} + \frac{h^4}{4} k^2 \right) \\ &+ \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{h^2}{2} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5), \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G5:} \quad \tau_{i,j} &= \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) + \left[u_{i,j}^{(2x,2y)} \right] \left(\frac{h^2}{6} \right) \\ &- \left[2u_{i,j}^{(1x,1y)} k^2 h^2 \right] - \left[u_{i,j}^{(3x,1y)} + u_{i,j}^{(1x,3y)} \right] \left(\frac{h^4}{3} k^2 \right) + \mathcal{O}(h^5). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Para o MCDFC-9p-L9p, o erro de truncamento em função dos parâmetros α_l pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \tau_{i,j}(\alpha_l) &= \\ &\alpha_1 \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) \\ &+ \alpha_2 \left\{ \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} + \frac{k^2 h^4}{48} \right) + \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \frac{k^2 h^2}{4} + \left[u_{i,j}^{(2x,2x)} \right] \left(\frac{h^2}{6} \right) \right\} \\ &+ \alpha_3 \left\{ \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{k^2 h^2}{2} \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} - u_{i,j}^{(4y)} \right] \frac{k^2 h^4}{24} \right. \\ &+ \left. \left[u_{i,j}^{(2x)} - u_{i,j}^{(2y)} \right] \frac{k^2 h^4}{4} + \left[u_{i,j}^{(2x,2x)} \right] \left(\frac{h^2}{6} \right) \right\} \\ &+ \alpha_4 \left\{ \left[u_{i,j}^{(2x)} + u_{i,j}^{(2y)} \right] \left(\frac{k^2 h^2}{2} \right) + \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} + \frac{k^2 h^4}{24} \right) \right. \\ &+ \left. \left[u_{i,j}^{(2x,2y)} \right] \left(\frac{h^2}{6} + \frac{k^2 h^4}{4} \right) \right\} \\ &+ \alpha_5 \left\{ \left[u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)} \right] \left(\frac{h^2}{12} \right) - \left[u_{i,j}^{(3x,y)} + u_{i,j}^{(x,3y)} \right] \left(\frac{k^2 h^4}{3} \right) - u_{i,j}^{(1x,1y)} (2k^2 h^2) \right\} + \mathcal{O}(h^5). \end{aligned} \quad (4.92)$$

Verifica-se que todos os esquemas gerados pelos vetores G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 e o MCDFC são de segunda ordem de aproximação.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Os resultados numéricos foram obtidos para os casos homogêneo e não-homogêneo da equação de Helmholtz, sempre considerando condições de contorno de Dirichlet e malhas uniformes.

- **Unidimensional,**

- Método Centrado Clássico,
- MCDFC-1D.

- **Bidimensional**

- Método Centrado Clássico,
- MCDFC-5p,
- MCDFC-9p-L5p,
- MCDFC-9p-L9p.

5.1 Implementação Computacional

Para a implementação computacional, optou-se pela utilização do *software* Matlab[®] [15], rodando no sistema operacional Pop!OS¹ 22.04 LTS, uma distribuição Linux baseada no Ubuntu 22.04 LTS. O computador utilizado para as simulações numéricas possui a seguinte configuração:

¹Mais informações em: <https://pop.system76.com/>

- Processador AMD Ryzen 7 4800H com 8 núcleos e 16 *threads*. Clock base: 2.9GHz. Clock máximo: 4.2GHz;
- 16GB de memória RAM DDR4 - 3200MHz;
- Placa de vídeo Nvidia GeForce[®] GTX 1650 Ti 4GB;
- Disco de estado sólido com velocidade de leitura de 3500MB/s e escrita 1500MB/s.

Inicialmente, tanto para o caso unidimensional quanto para o bidimensional, os códigos implementados apresentavam tempo de execução excessivamente alto, quando a malha era refinada. Como tinha-se a necessidade de utilizar malhas cada vez mais refinadas, buscou-se entender o motivo do alto tempo de execução. Como é sabido, os métodos de diferenças finitas geram um sistema linear, onde a matriz que representa tal sistema é esparsa, ou seja, possui grande quantidade de elementos nulos.

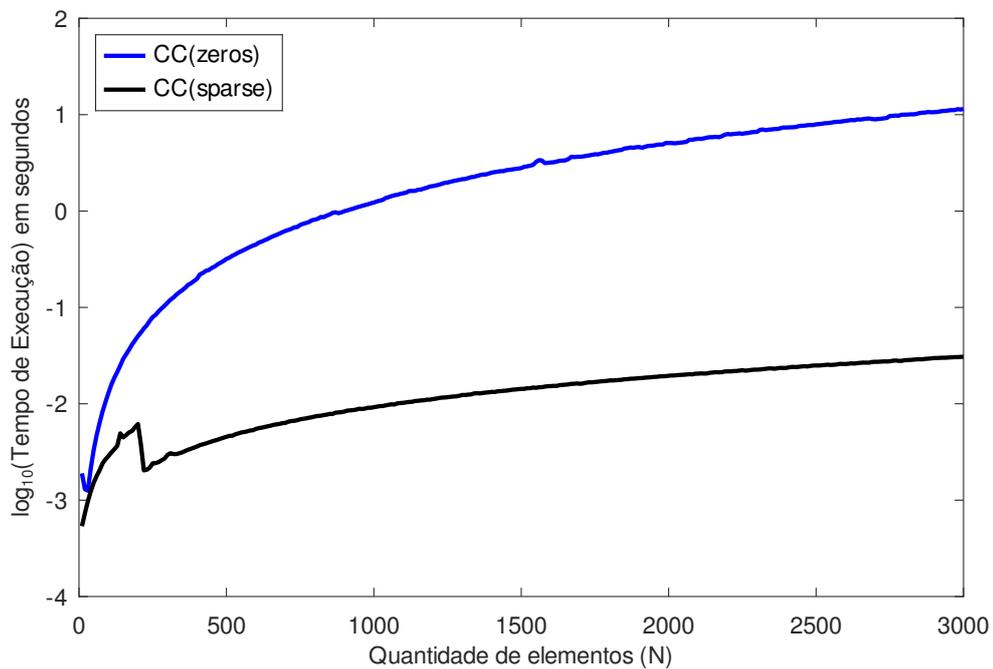


Figura 5.1: Tempo de execução para o problema 1D utilizando-se o método CC com $k = 20$ e N variando de 10 a 3000 elementos em intervalos de 10.

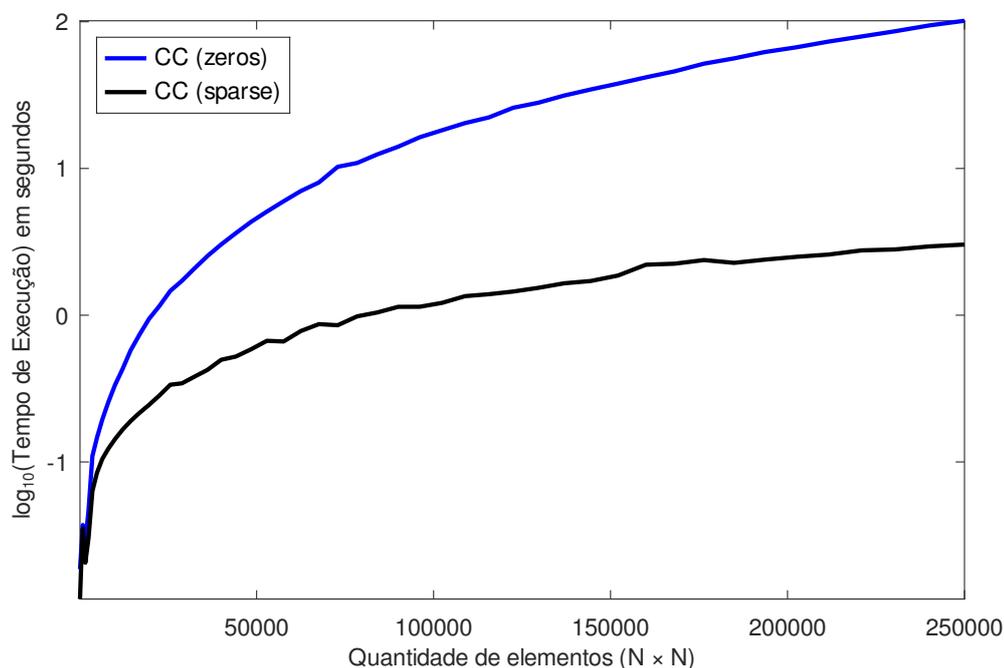


Figura 5.2: Tempo de execução para o problema 2D utilizando-se o método CC com $k = 20$ e malha variando de 10×10 a 500×500 elementos em intervalos de 10×10 .

Nas primeiras implementações a matriz esparsa estava sendo armazenada como uma matriz cheia, ou seja, os elementos nulos também ocupavam espaço em memória e eram utilizados quando o *software* realizava os cálculos, o que aumentava consideravelmente o tempo de execução. Quando passou-se a utilizar funções próprias do Matlab[®] para armazenamento dessas matrizes, como a função *spdiags*², obteve-se um resultado muito superior em relação ao tempo de processamento tanto para o caso 1D quanto para 2D, como pode-se perceber nos gráficos das Figuras 5.1 e 5.2. Com o uso dessa função, o *software* não faz a alocação dos elementos nulos da matriz, economizando memória e consegue também otimizar os cálculos realizados na resolução do sistema linear, diminuindo o tempo necessário para a completa execução. Em tempo, todos os algoritmos estão presentes no Apêndice A.

²<https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/spdiags.html>

5.2 Análise Unidimensional

Nessa seção, a princípio são trazidos resultados do método CC, que mostram o efeito de poluição do erro conforme aumenta-se o número de onda, mesmo mantendo uma resolução da malha constante. Em seguida são exibidos os resultados do MCDFC-1D seguidos da análise comparativa do erro relativo dos métodos CC e MCDFC-1D.

5.2.1 Efeito de Poluição do Erro

Na Seção 3.4 dissertou-se sobre a diferença do número de onda discreto k^h em relação ao número de onda exato k . De acordo com [9], esse fator torna-se crucial para o controle do erro de forma que não se pode esperar que apenas o uso da regra heurística (*rule of thumb* – $kh \approx 0.6$ constante) seja suficiente.

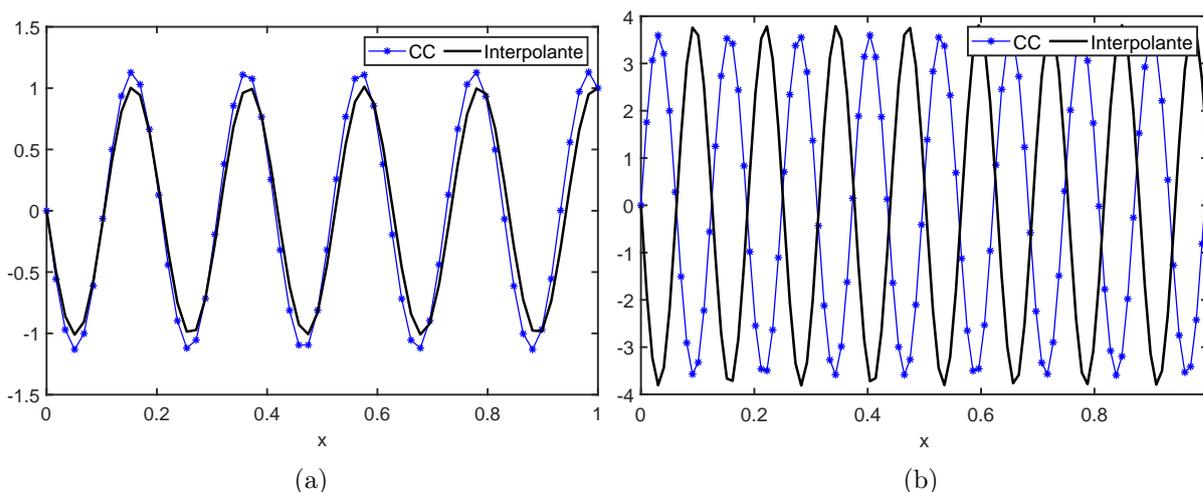


Figura 5.3: Soluções em 1D utilizando o método centrado clássico para $k = 30$ (a) e $k = 60$ (b) com resolução da malha constante ($kh = 0.5$).

Na Figura 5.3 observa-se que, para kh constante, com o aumento do valor de k aparecem alterações na fase da solução numérica, quando comparada com o interpolante, comportamento típico quando se tem o efeito de poluição do erro. Seria esperado que, com o refinamento da malha, a solução numérica se aproximasse cada vez mais do interpolante, porém conforme se aumenta o valor de k não é isso que se verifica. Chagas [5] diz que dado um número de onda qualquer, não se pode garantir que o refinamento da malha diminua o erro em quaisquer normas. Para valores pequenos de k , consegue-se reduzir bastante a poluição do erro apenas refinando-se a malha, porém para altos valores

de k a malha teria que ser excessivamente refinada para obter-se bons resultados, sendo necessária uma grande quantidade de recursos computacionais [4].

A Figura 5.4 mostra um exemplo unidimensional de como a malha deve se refinada para que se tenha uma melhor aproximação da solução exata. Vale lembrar que esse é apenas o caso unidimensional e o valor de $k = 200$ é relativamente baixo. A necessidade de maiores recursos computacionais obviamente se intensifica no caso bidimensional e para maiores valores de k .

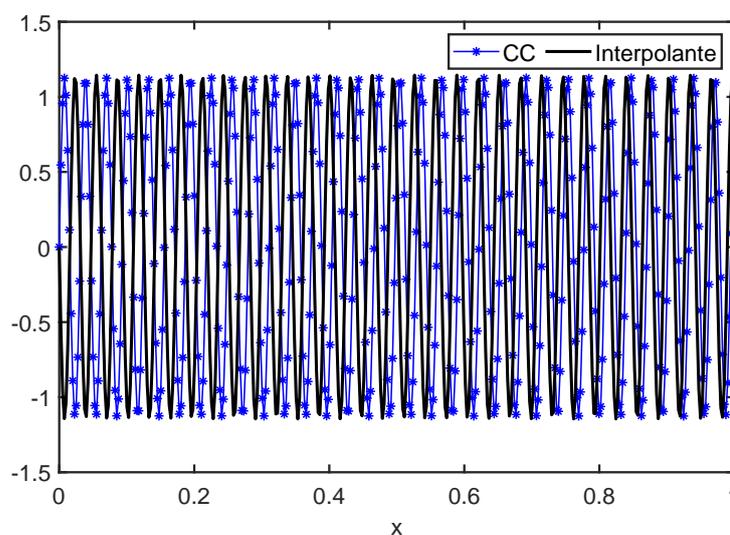
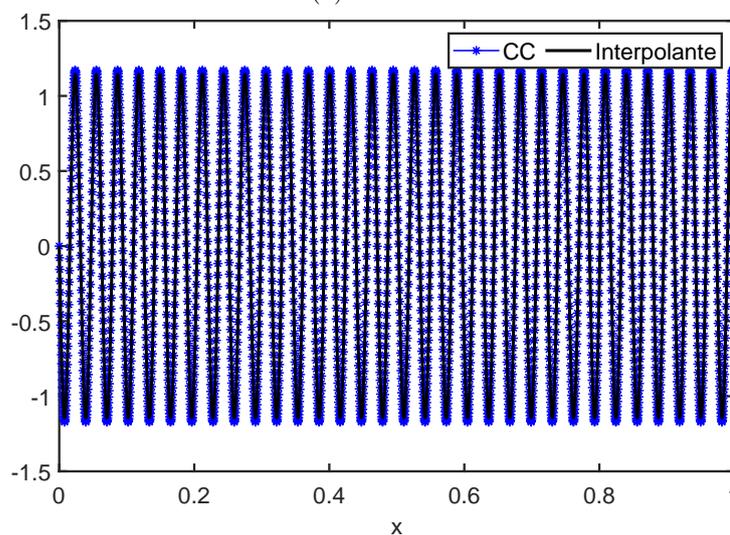
(a) $N = 400$ (b) $N = 3000$

Figura 5.4: Soluções em 1D para $N = 400$ (a) e $N = 3000$ (b) com o valor do número de onda fixo $k = 200$.

Já quando se utiliza o MCDFC em uma dimensão, como visto no Capítulo 4, consegue-se obter o mesmo resultado do interpolante para qualquer número de onda k , ou seja,

elimina-se totalmente o efeito de poluição do erro, assim como é conseguido no método GLS [11]. A Figura 5.5 mostra os resultados numéricos obtidos com os mesmo parâmetros das Figura 5.3.

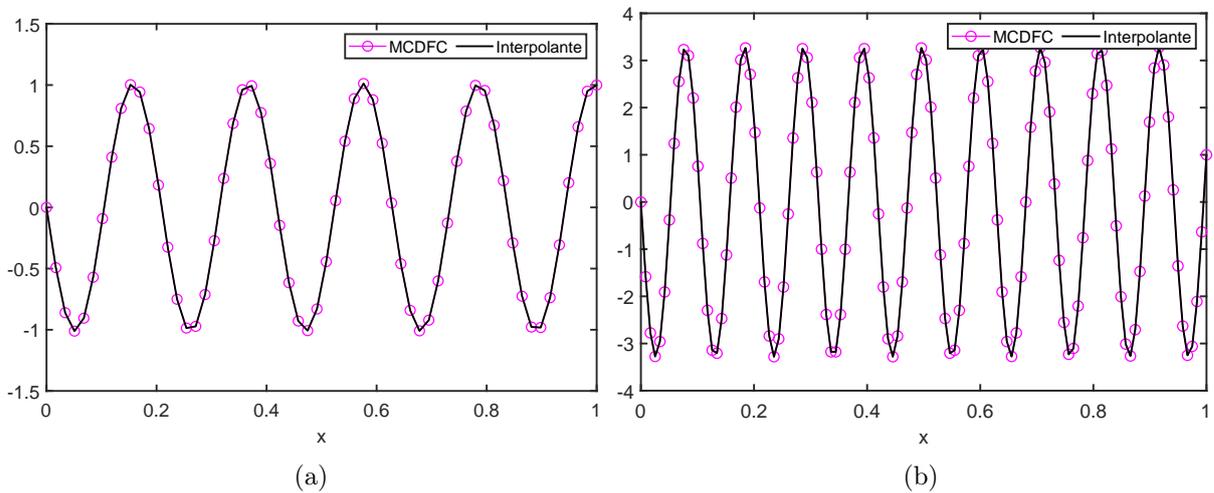


Figura 5.5: Soluções em 1D utilizando o MCDFC para $k = 30$ (a) e $k = 60$ (b) com resolução da malha constante ($kh = 0.5$).

A seguir são apresentados os resultados numéricos, inicialmente para o caso homogêneo e logo após para o caso não-homogêneo, sempre comparando os resultados do MCDFC-1D com o método centrado clássico (CC).

• Caso Homogêneo

Nesse caso a solução exata da equação de Helmholtz (2.6) é conhecida e dada pela equação (2.13).

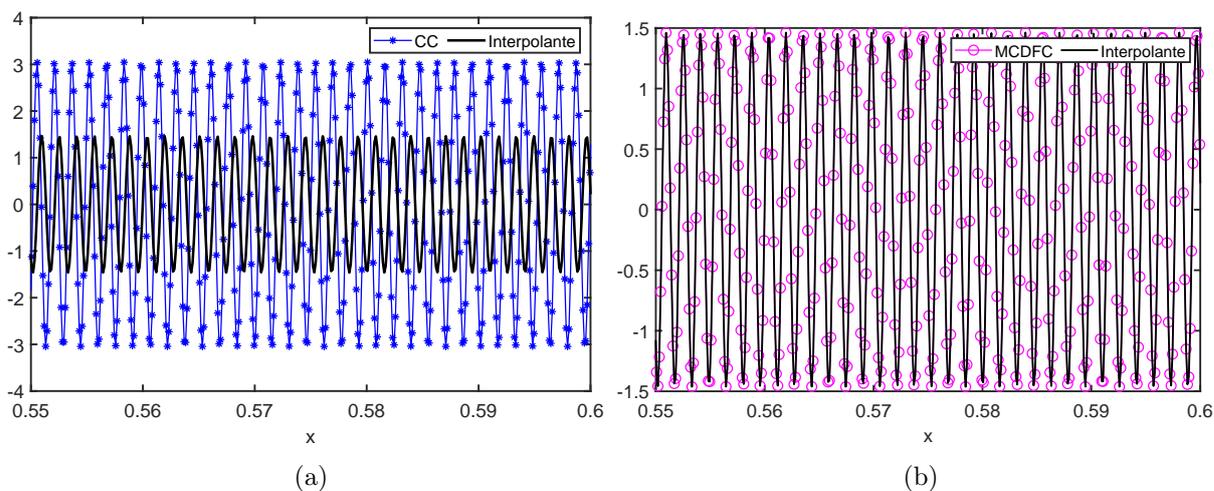


Figura 5.6: Comparativo das soluções no caso unidimensional homogêneo com $k = 4000$, $kh = 0.5$ e $0.55 \leq x \leq 0.60$: método **CC** (a) e **MCDFC** (b).

Fica visualmente nítido pela Figura 5.6 que o MCDFC-1D consegue resultados muito melhores do que o método CC. Até mesmo para valores teoricamente baixos de k o método CC apresenta perda de fase em sua solução numérica, como é visto na Figura 5.7.

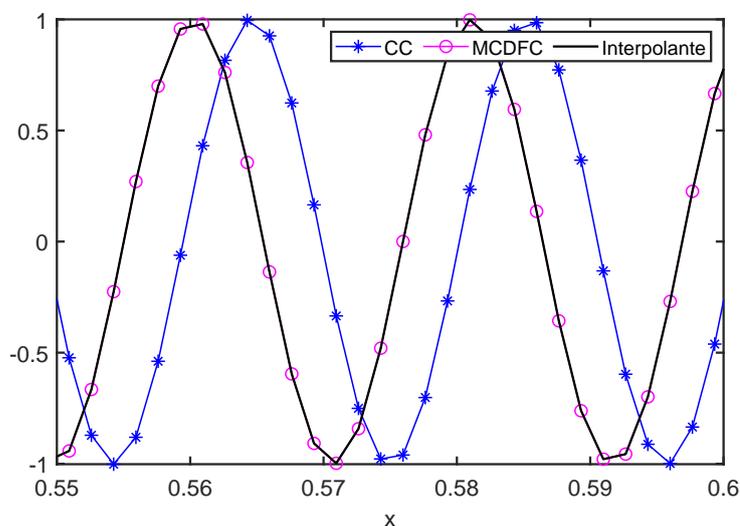


Figura 5.7: Soluções numéricas comparando os métodos CC e MCDFC-1D para $k = 300$ e $kh = 0.5$.

• Caso Não-Homogêneo

Nesse caso, é inserido um termo fonte $f(x) = 2 + (kx)^2$ na equação de Helmholtz, obtendo-se:

$$u''(x) + k^2u = 2 + (kx)^2. \quad (5.1)$$

A solução exata para esse caso é dada por [1]

$$u(x) = x^2 + \cos(kx). \quad (5.2)$$

Assim como no caso homogêneo, a Figura 5.8 mostra que o MCDFC-1D consegue eliminar totalmente a poluição do erro, obtendo resultados iguais aos do interpolante.

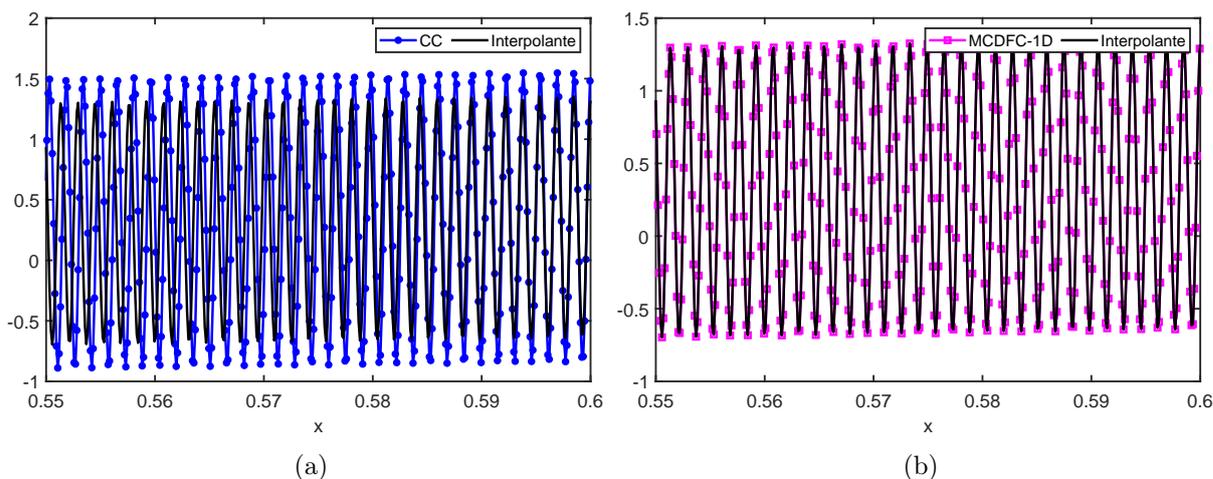


Figura 5.8: Comparativo das soluções no caso unidimensional não-homogêneo com $k = 4000$, $kh = 0.5$ e $0.55 \leq x \leq 0.60$: método **CC** (a) e **MCDFC** (b).

5.2.2 Análise do Erro

Os resultados numéricos fornecem apenas um indicativo visual da qualidade da aproximação da solução numérica. Contudo, para observar o efeito de poluição do erro é necessário que sejam computados os erros relativos de cada método conforme a malha vai sendo refinada. O esperado seria que o erro fosse diminuindo com o refinamento, se não existisse o efeito de poluição. Para o cálculo do erro relativo utilizou-se a função *norm*³ do Matlab[®] [15] com o parâmetro 2, que retorna a norma L^2 de um vetor. Sendo U o vetor solução da solução numérica e u a solução exata, o cálculo do erro relativo (ER) foi dado por

$$\mathbf{ER} = \frac{\|U - u\|_2}{\|u\|_2}. \quad (5.3)$$

³<https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/norm.html?lang=en>

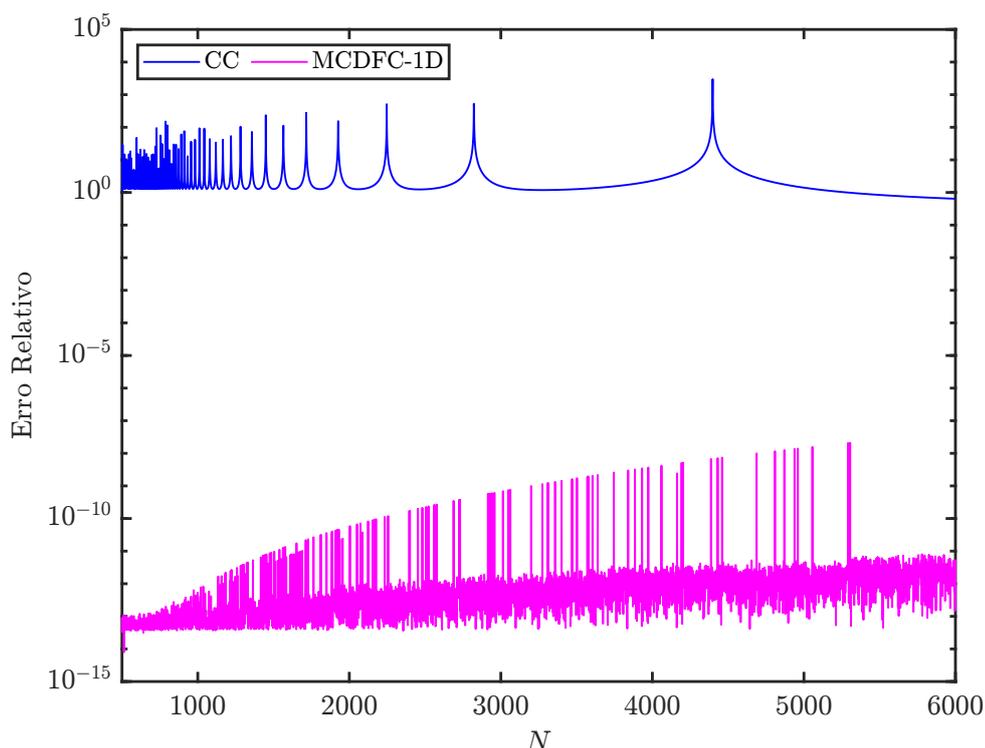


Figura 5.9: Erro relativo na norma L^2 dos métodos centrado clássico (CC) e MCDFC-1D para o caso homogêneo com $500 \leq N \leq 6000$ e $k = 1000$.

Na Figura 5.9 pode-se observar que o erro do MCDFC-1D é cerca de 13 ordens de grandeza menor do que o do método CC. Os picos que podem ser percebidos são devidos ao efeito de poluição do erro e ressonância numérica que também são impactados pelo efeito de *roundoff*, devido a quantidade de cálculos que são realizados [21]. Contudo, no presente trabalho, não foi realizada a análise de ressonância numérica, sendo necessário um estudo mais detalhado para identificar a causa de cada pico.

5.3 Análise Bidimensional

Foram realizadas as mesmas análises do caso unidimensional, porém no caso 2D tem-se um parâmetro a mais, a direção da onda θ . Com isso, para o caso homogêneo são apresentados os resultados numéricos para apenas uma onda plana e logo em seguida são apresentados os resultados para uma combinação de três ondas planas superpostas. Logo após, os resultados da análise do erro relativo e do comportamento do erro de acordo com a direção da onda são exibidos.

5.3.1 Efeito de Poluição do Erro

No caso bidimensional é esperado o mesmo efeito de poluição do caso unidimensional, porém em maiores proporções. Como dito, pode-se ter superposição de ondas planas como solução do problema homogêneo e essas variadas direções interferem na solução aproximada [5].

Iniciando pela investigação dos resultados do método centrado clássico, pode-se ver na Figura 5.10 que há perda de fase da solução numérica em relação ao interpolante.

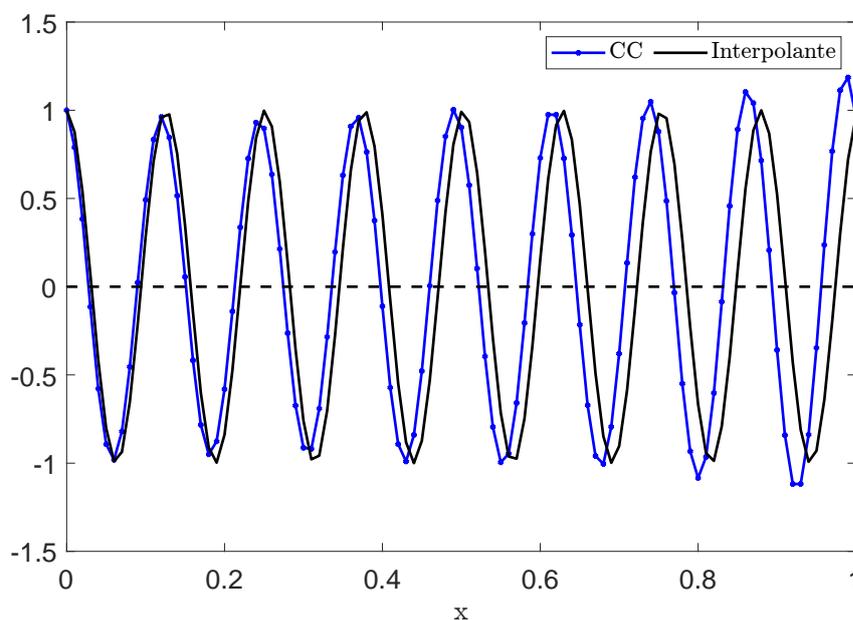


Figura 5.10: Solução numérica obtida pelo método centrado clássico para o caso homogêneo e condições de contorno de Dirichlet com $k = 50$, corte em $y = 0.5$, $\theta = 0$ e malha 100×100 ($kh = 0.5$).

Com o aumento do número de onda, é esperado uma maior distância entre o resultado numérico e o resultado entregue pelo interpolante por conta da potencialização do efeito de poluição do erro. Isso pode ser visto na Figura 5.11.

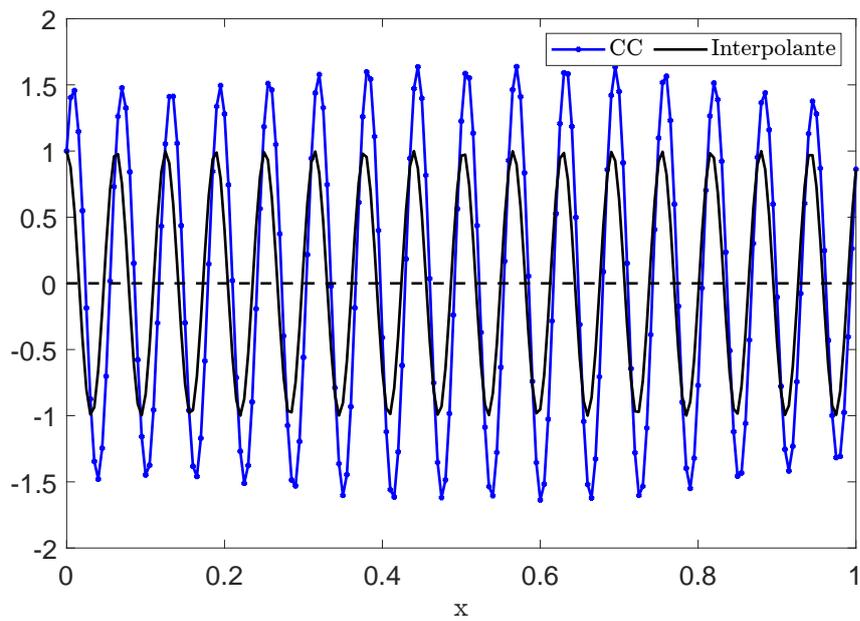


Figura 5.11: Solução numérica obtida pelo método centrado clássico com $k = 100$, corte em $y = 0.5$, $\theta = 0$ e malha 200×200 ($kh = 0.5$).

Nesse caso houve uma pequena perda de fase porém o que mais percebe-se é a perda de amplitude mais pronunciada em relação ao interpolante.

5.3.1.1 Estêncil de 5 pontos

Para o MCDFC-5P, como foi visto na Seção 4.2.3, o método entrega o interpolante em determinadas direções da onda ($\theta_1 = \pi/8$ e $\theta_2 = 3\pi/8$) e dispersão minimizada nas outras direções. Para $\theta = 0$ obteve-se o resultado da Figura 5.12.

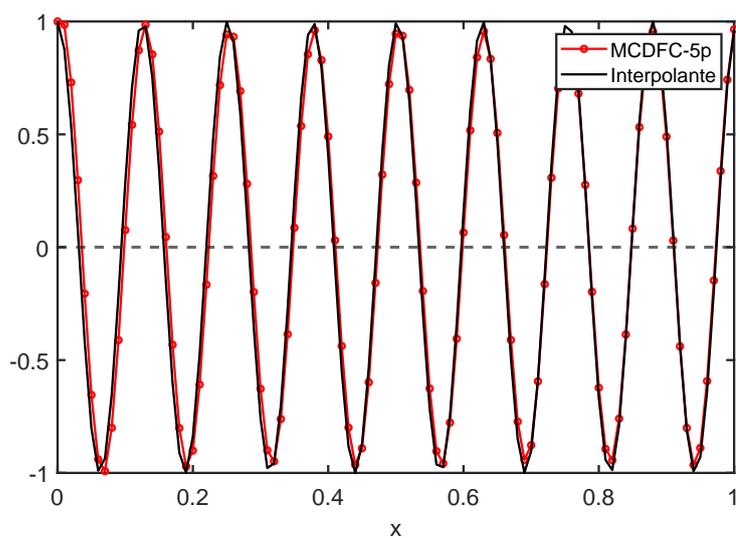


Figura 5.12: Solução numérica obtida pelo MCDFC-5P com $k = 50$, corte em $y = 0.5$, $\theta = 0$ e malha 100×100 ($kh = 0.5$).

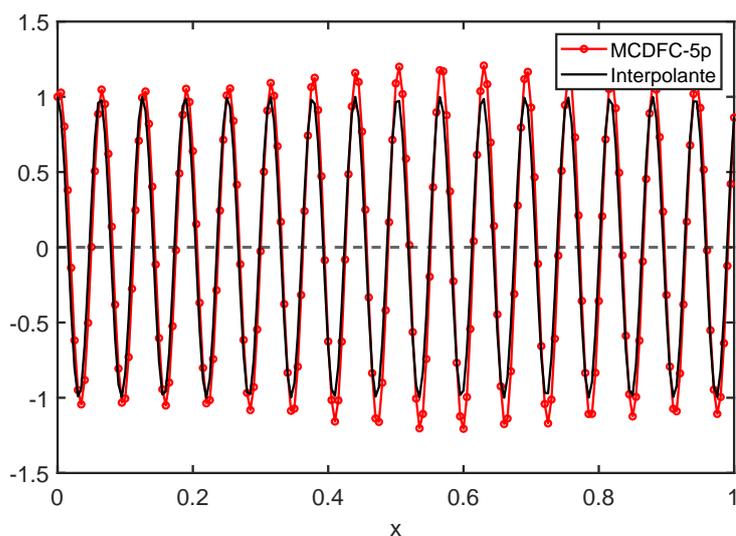


Figura 5.13: Solução numérica obtida pelo MCDFC-5P com $k = 100$, corte em $y = 0.5$, $\theta = 0$ e malha 200×200 ($kh = 0.5$).

Quando compara-se os resultados do MCDFC-5P nas Figuras 5.12 e 5.13 com os do método Centrado Clássico (Figuras 5.10 e 5.11) nota-se que o MCDFC-5P consegue entregar resultados mais próximos do interpolante em ambos os casos ($k = 50$ e $k = 100$).

Conforme foi dito, considerando o primeiro quadrante e uma onda plana na direção θ , a solução do MCDFC-5P coincide com o interpolante se $\theta = \pi/8$ ou $\theta = 3\pi/8$ (as duas direções θ_1 e θ_2). A Figura 5.14 mostra esse resultado com $\theta = \pi/8$.

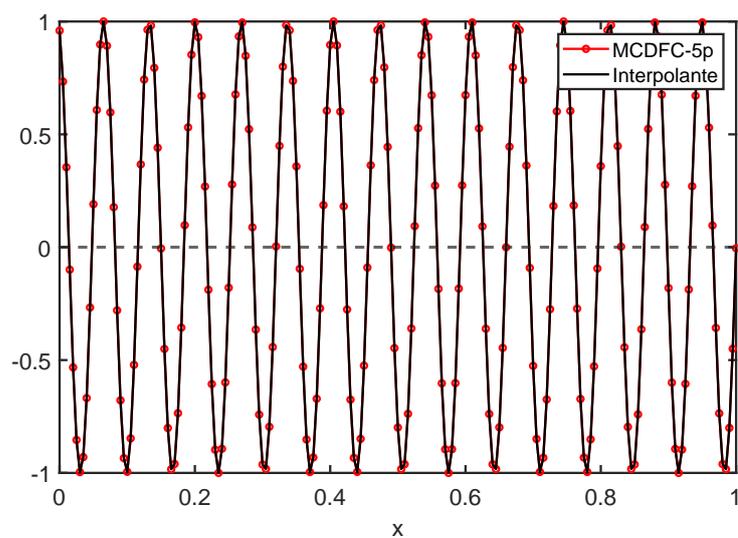


Figura 5.14: Solução numérica obtida pelo MCDFC-5P com $k = 100$, corte em $y = 0.5$, $\theta = \pi/8$ e malha 200×200 ($kh = 0.5$).

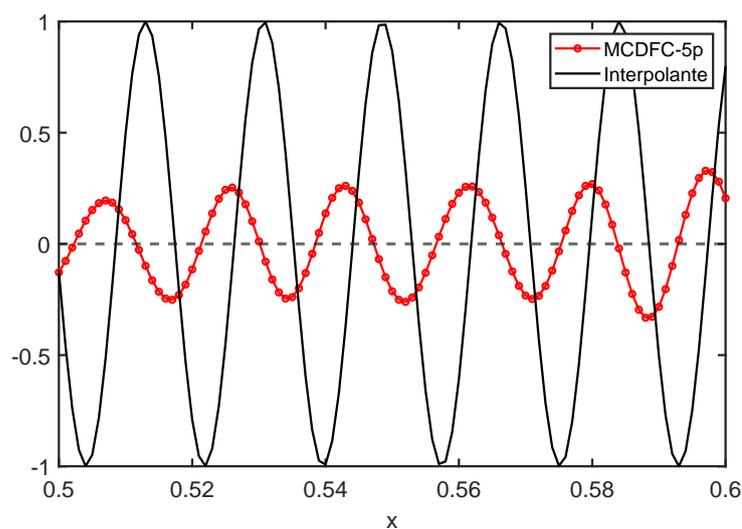


Figura 5.15: Solução numérica obtida pelo MCDFC-5P com $k = 500$, corte em $y = 0.5$, $\theta = \pi/4$ e malha 1000×1000 ($kh = 0.5$).

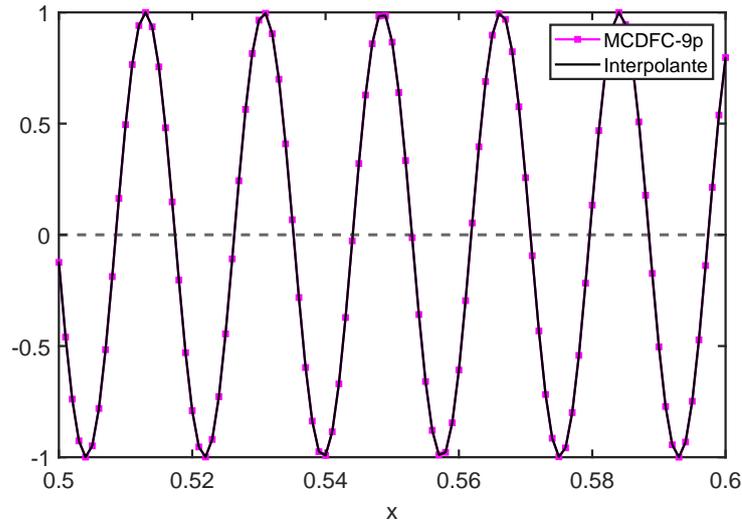


Figura 5.16: Solução numérica obtida pelo MCDFC-9P-L5p com $k = 500$, corte em $y = 0.5$, $\theta = \pi/4$ e malha 1000×1000 ($kh = 0.5$).

Apesar de o MCDFC-5P ter obtido bons resultados, observa-se na Figura 5.15 que quando aumenta-se o número de onda e escolhe-se uma direção diferente daquelas que minimizam a dispersão (as duas direções θ_1 e θ_2), a solução numérica fica bem distante do interpolante. Visto isso, com o intuito de obter melhores resultados, recorreu-se então a um aumento do número de pontos do estêncil, gerando o MCDFC-9p que possui um estêncil de nove pontos. Com esse método, os resultados foram muito satisfatórios. A Figura 5.16 mostra o resultado numérico com os mesmos parâmetros da Figura 5.15.

A seguir são apresentados os resultados numéricos, inicialmente para o caso homogêneo e em seguida para o caso não homogêneo, para os dois métodos completos (MCDFC-9p-L5p e MCDFC-9p-L9p). No caso homogêneo (equação 2.14) a solução exata é dada pela sobreposição de n ondas planas propagando-se em diferentes direções [8]

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n \cos(k(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i)). \quad (5.4)$$

Já para o caso não-homogêneo, adiciona-se um termo fonte $f(x, y) = 4 + k^2(x^2 + y^2)$ cuja solução exata é dada por

$$u(x, y) = x^2 + y^2 + \sin[k(x \cos \theta + y \sin \theta)]. \quad (5.5)$$

5.3.1.2 Estêncil Compacto e Laplaciano com 5 pontos

- Caso Homogêneo

Como visto na Seção 4.2 do Capítulo 4, o MCDFC-9P apresenta dispersão mínima em qualquer ângulo e entrega o interpolante em 16 direções (quatro por quadrante). Esse resultado pode ser visto na Figuras 5.17a e 5.17b onde são obtidos excelentes resultados para direção de onda plana $\theta = 0$ quando comparado aos resultados dos métodos anteriores.

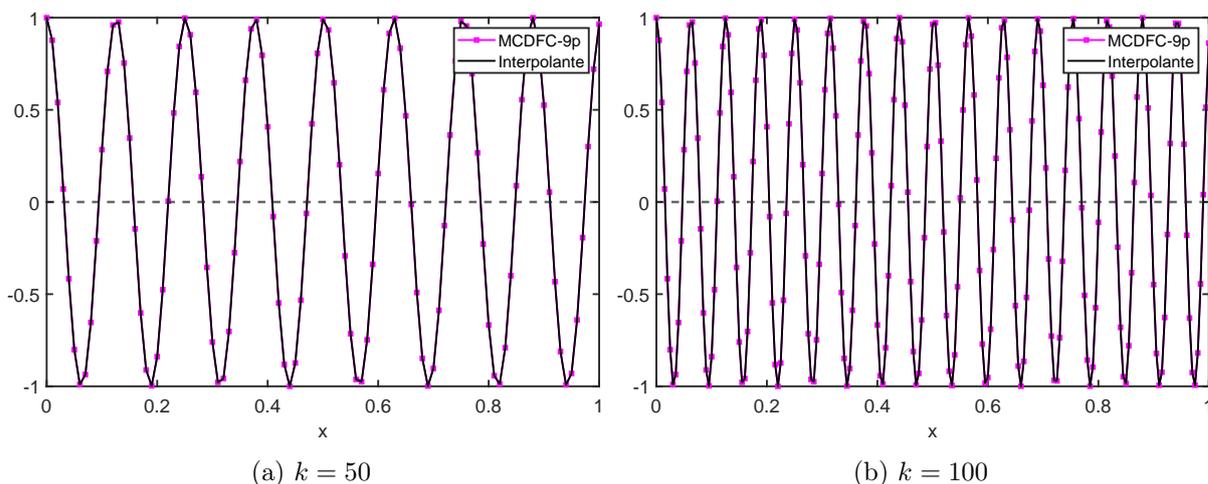


Figura 5.17: Soluções numéricas utilizando o MCDFC-9P-L5p mantendo-se $kh = 0.5$, $\theta = 0$ e corte em $y = 0.5$.

O MCDFC-9P-L5p é capaz de obter resultados muito próximos do interpolante até mesmo para altos valores de k .

Tomando-se $k = 500$, $\theta = 0$ e mantendo-se $kh = 0.5$, observa-se na Figura 5.18 que os resultados ainda continuam muito satisfatórios.

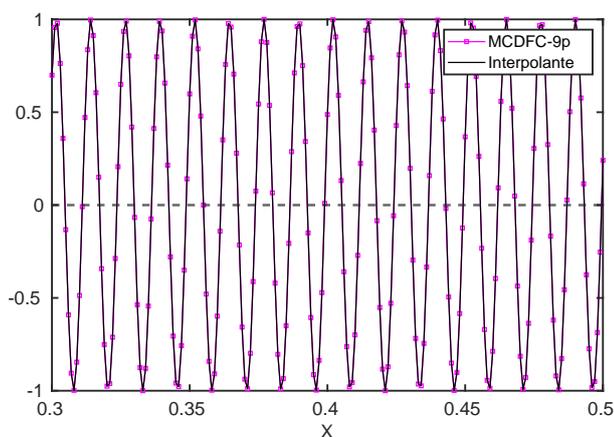


Figura 5.18: Solução numérica obtida pelo MCDFC-9P com $k = 500$, x variando de 0.3 a 0.5, corte em $y = 0.5$, $\theta = 0$ e malha 1000×1000 ($kh = 0.5$).

Na sequência, com o intuito de avaliar a qualidade do método, obteve-se os resultados

para malhas cada vez mais grosseiras, com kh : 0.5, 1 e 2, tomando-se $k = 1000$.

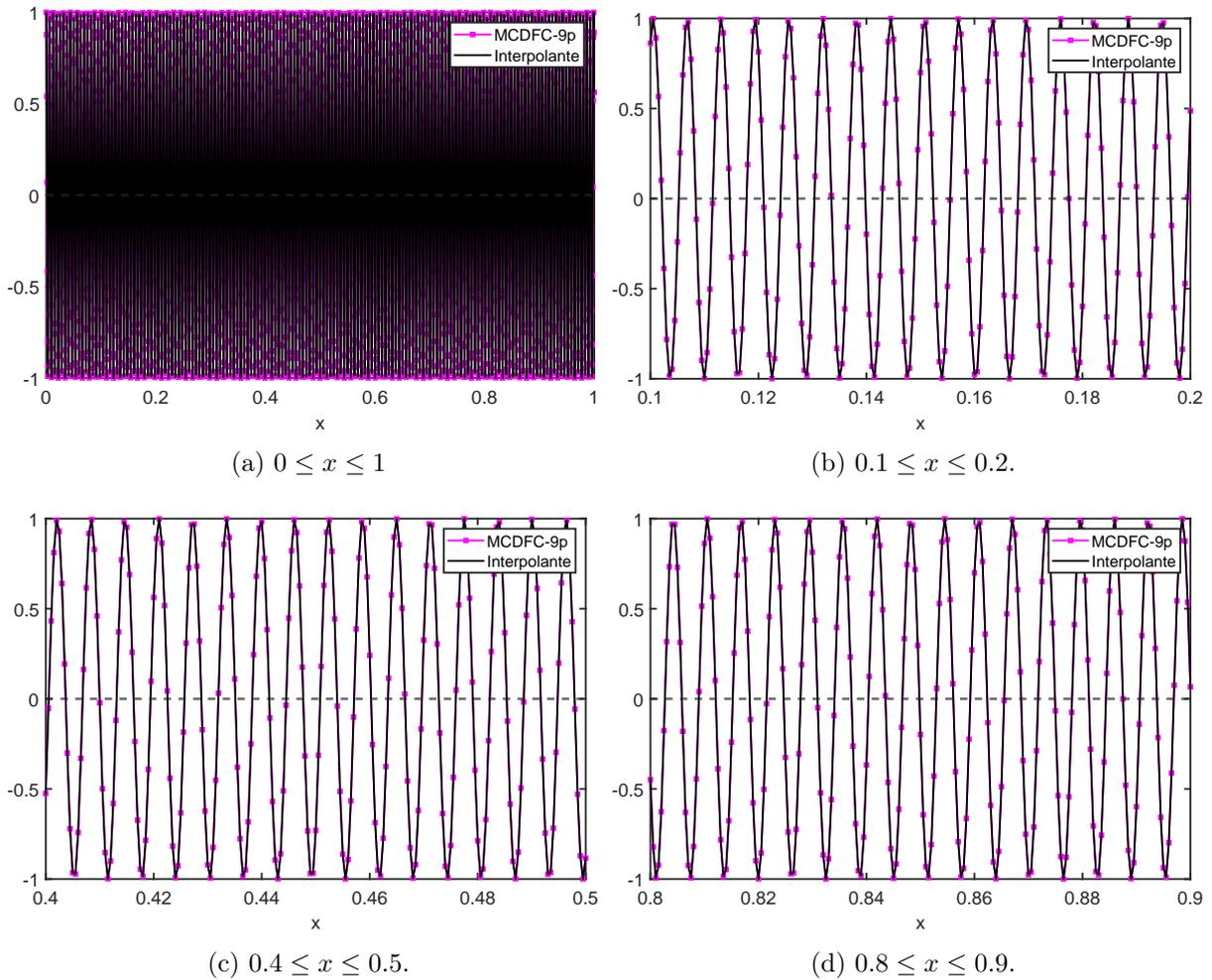


Figura 5.19: Soluções em 2D para $k = 1000$ com $kh = 0.5$, $\theta = 0$, utilizando o MCDFC-9P-L5p e zoom em diferentes regiões para melhor visualização (b), (c) e (d).

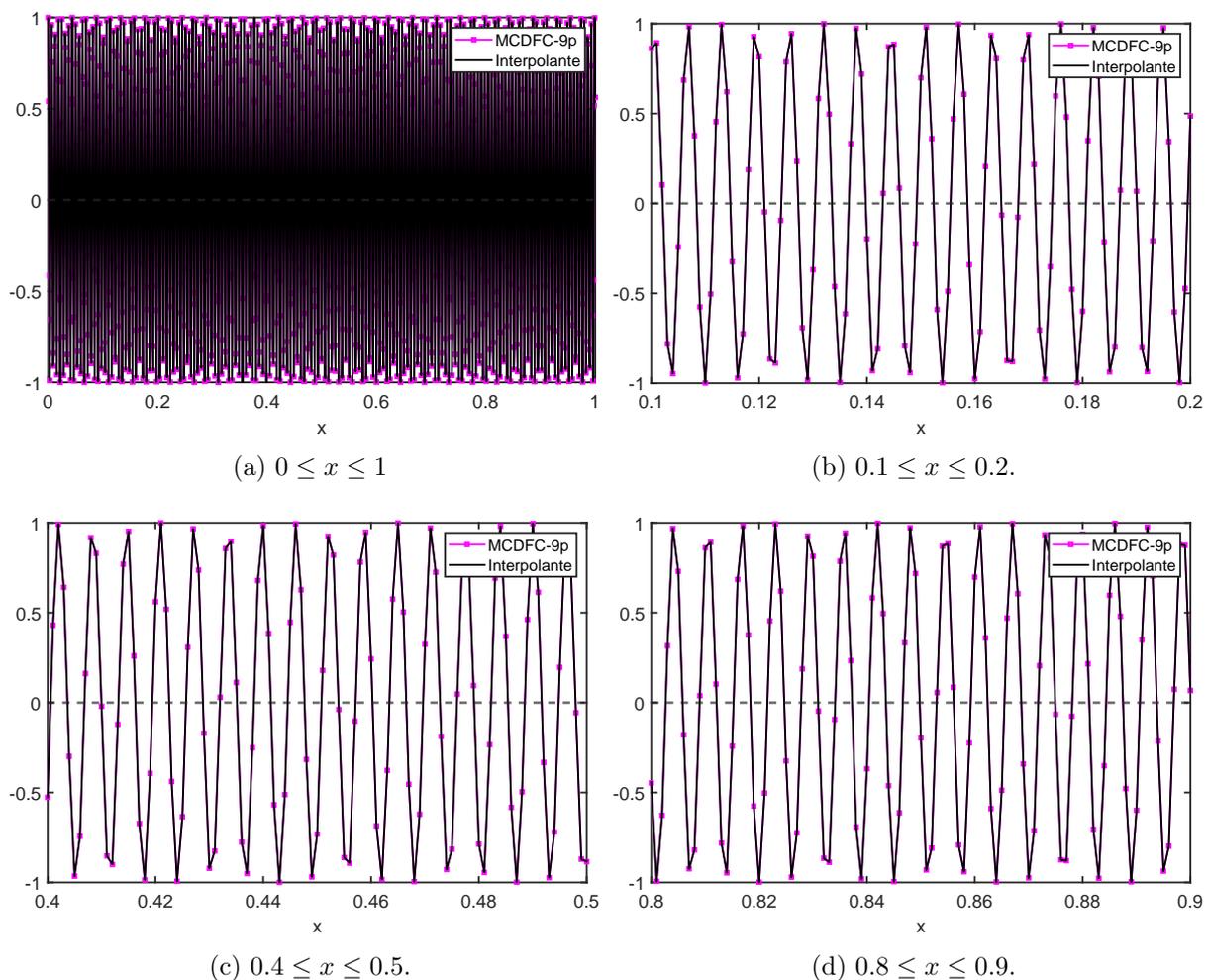


Figura 5.20: Soluções em 2D para $k = 1000$ com $kh = 1$, utilizando o MCDFC-9P-L5p e zoom em diferentes regiões para melhor visualização (b), (c) e (d).

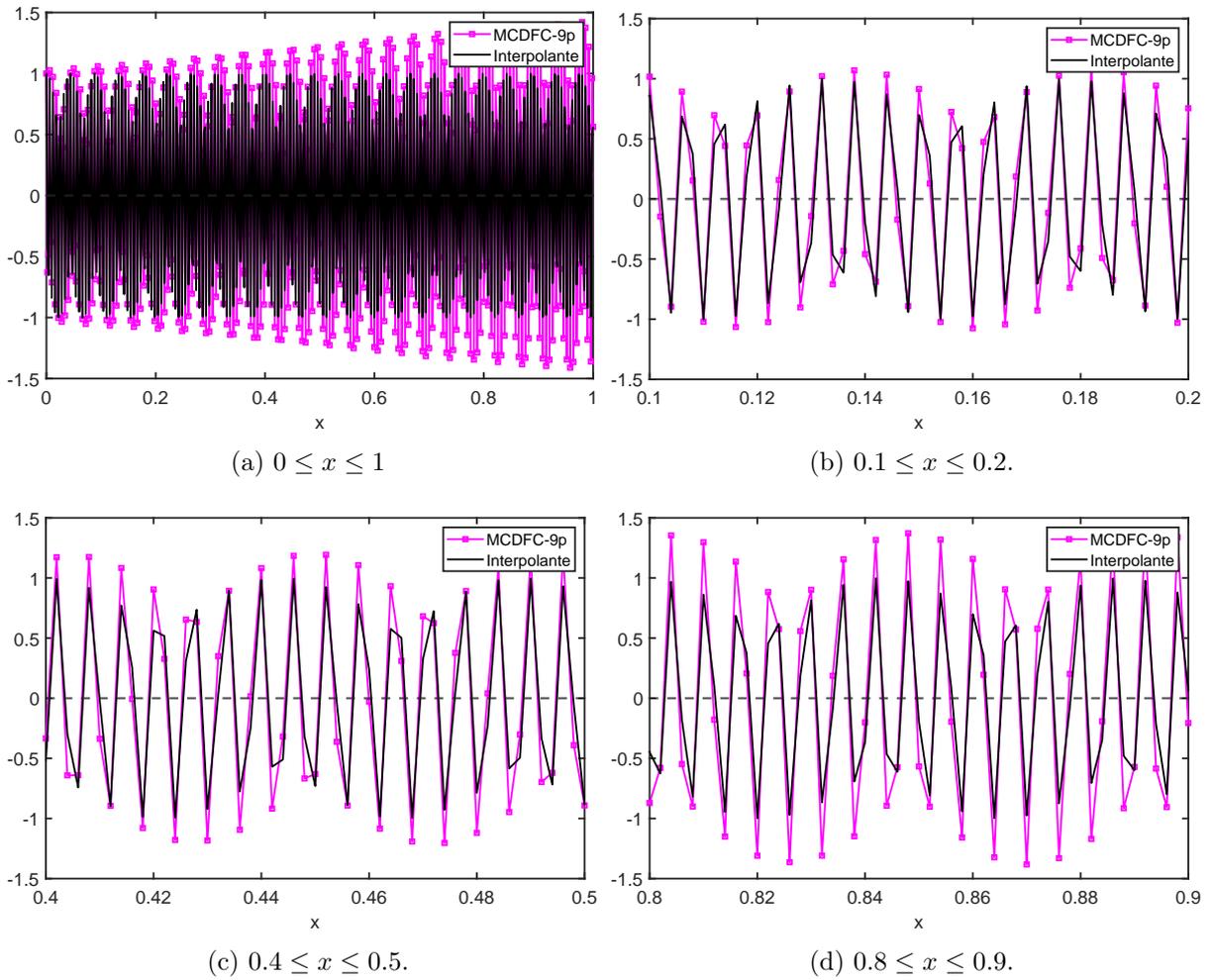


Figura 5.21: Soluções em 2D para $k = 1000$ com $kh = 2$, $\theta = 0$, utilizando o MCDFC-9p-L5p e zoom em diferentes regiões para melhor visualização (b), (c) e (d).

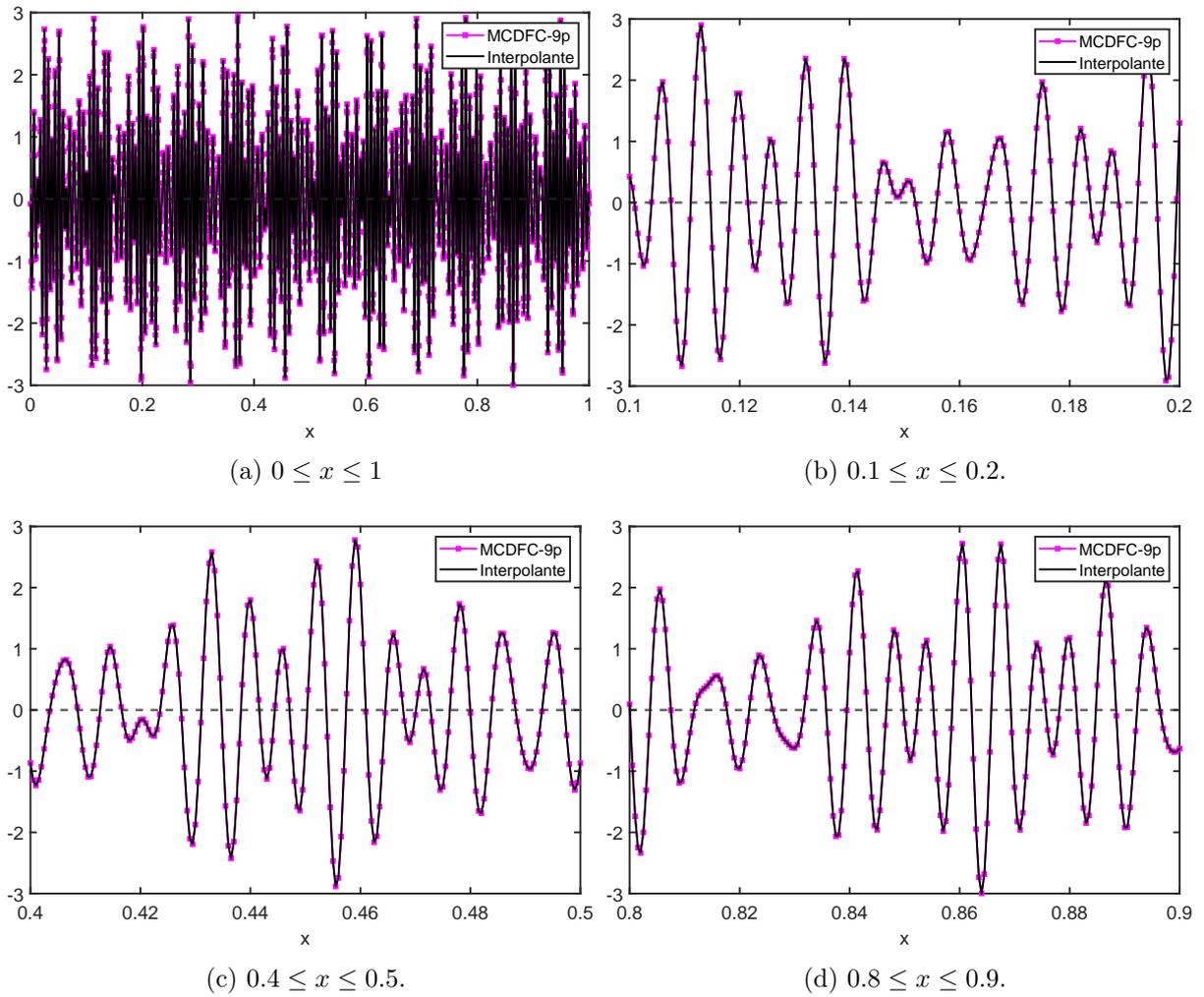


Figura 5.22: Soluções em 2D para $k = 1000$, $kh = 0.5$ com sobreposição de três ondas ($\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/4, \theta_3 = \pi/8$), utilizando o MCDFC-9p-L5p e zoom em diferentes regiões para melhor visualização (b), (c) e (d).

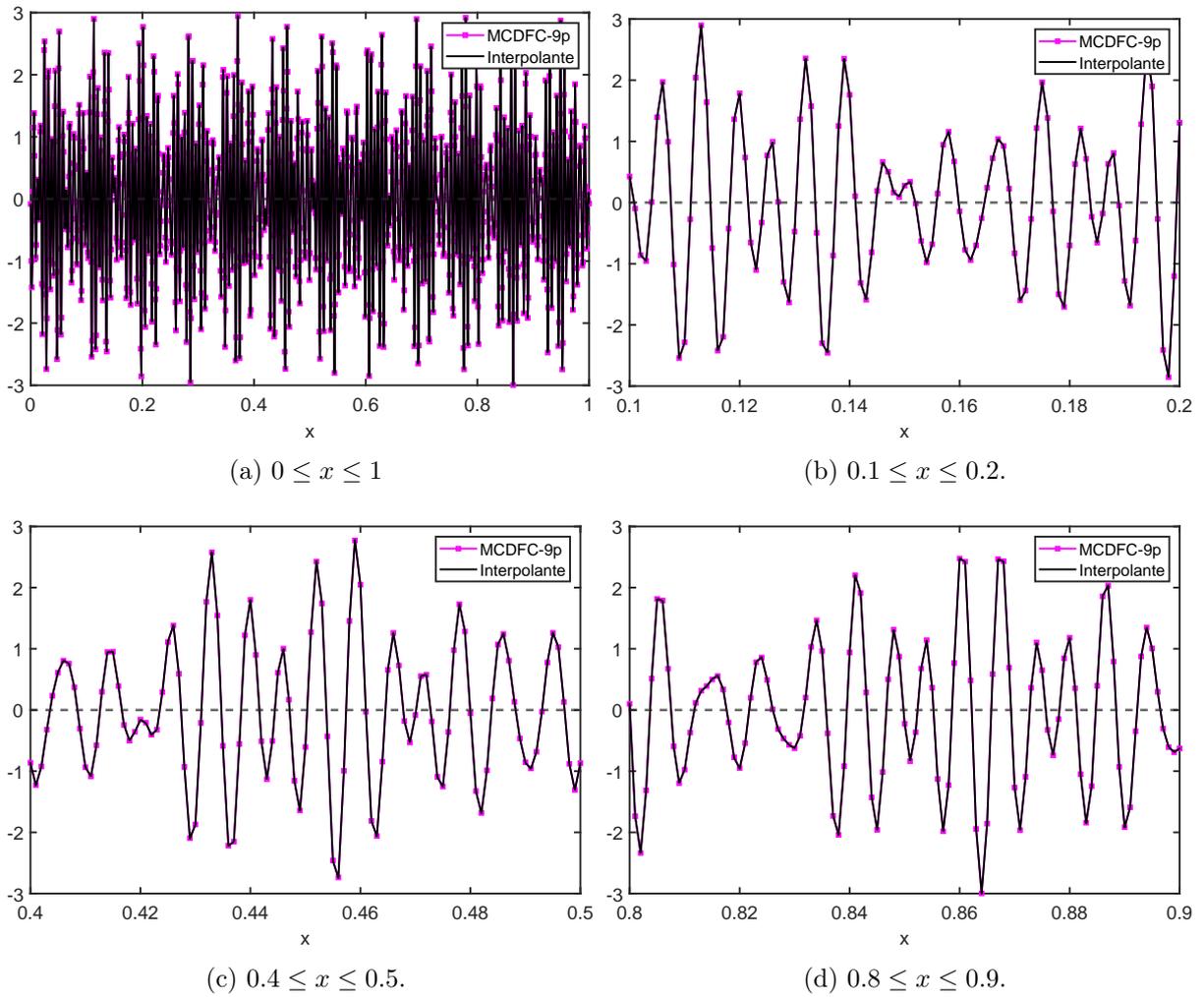


Figura 5.23: Soluções em 2D para $k = 1000$, $kh = 1$ com sobreposição de três ondas ($\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/4, \theta_3 = \pi/8$), utilizando o MCDFC-9p-L5p e zoom em diferentes regiões para melhor visualização (b), (c) e (d).

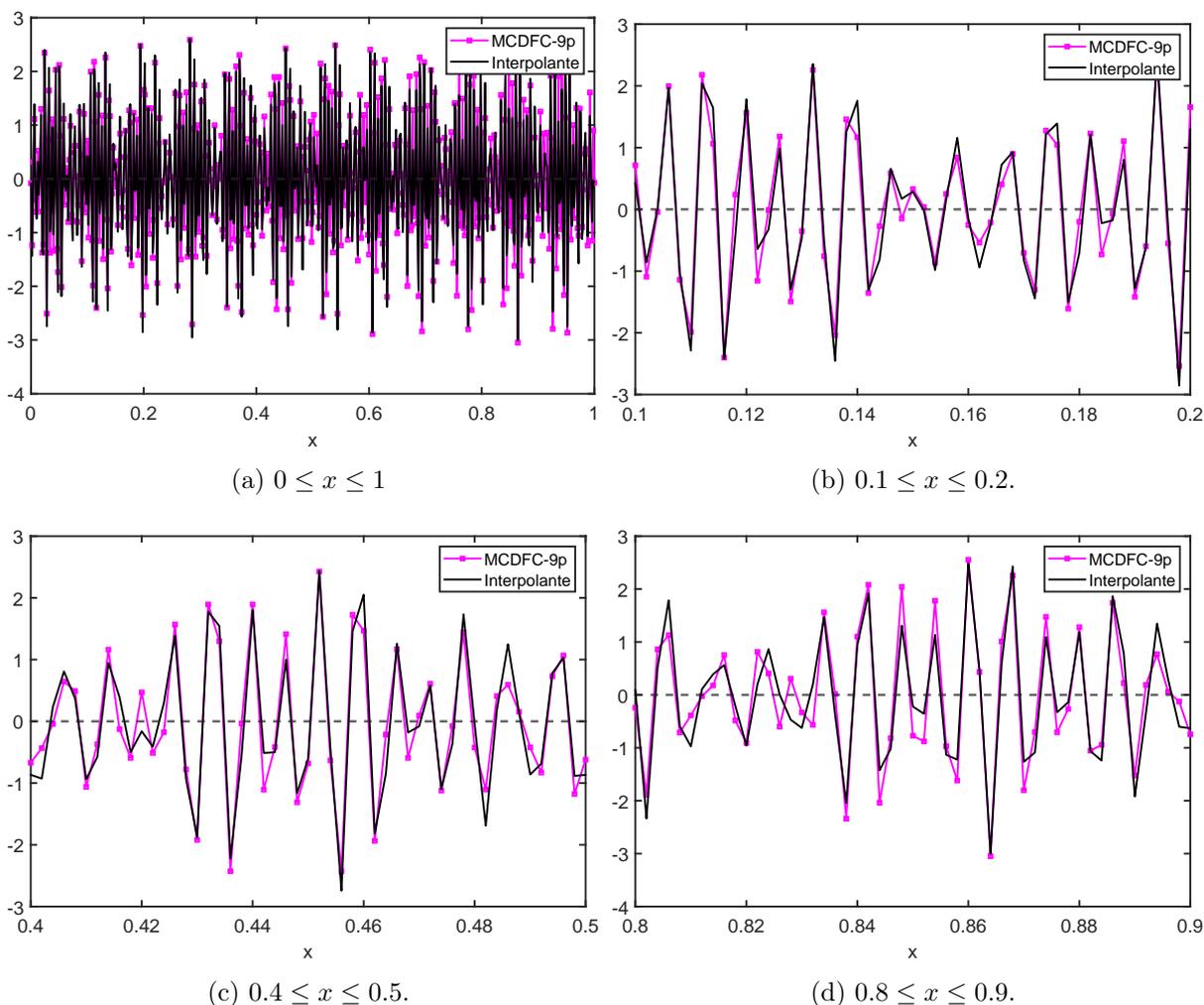


Figura 5.24: Soluções em 2D para $k = 1000$, $kh = 2$ com sobreposição de três ondas ($\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/4, \theta_3 = \pi/8$), utilizando o MCDFC-9p-L5p e zoom em diferentes regiões para melhor visualização (b), (c) e (d).

Pode-se perceber que para malhas com $kh = 0.5$, ou seja, respeitando a regra do dedão, o MCDFC-9p-L5p obtém resultados visualmente muito próximos do interpolante. Resultados muito bons são obtidos para malhas mais grossas também, como no caso $kh = 1$. Uma pequena perda de qualidade do resultado só é visualmente percebida quando utiliza-se uma malha muito grosseira, $kh = 2$, porém os resultados ainda são bastante satisfatórios. Os resultados numéricos com superposição de ondas, Figuras 5.22, 5.23 e 5.24 valem-se dos mesmos comentários.

- **Caso Não-Homogêneo**

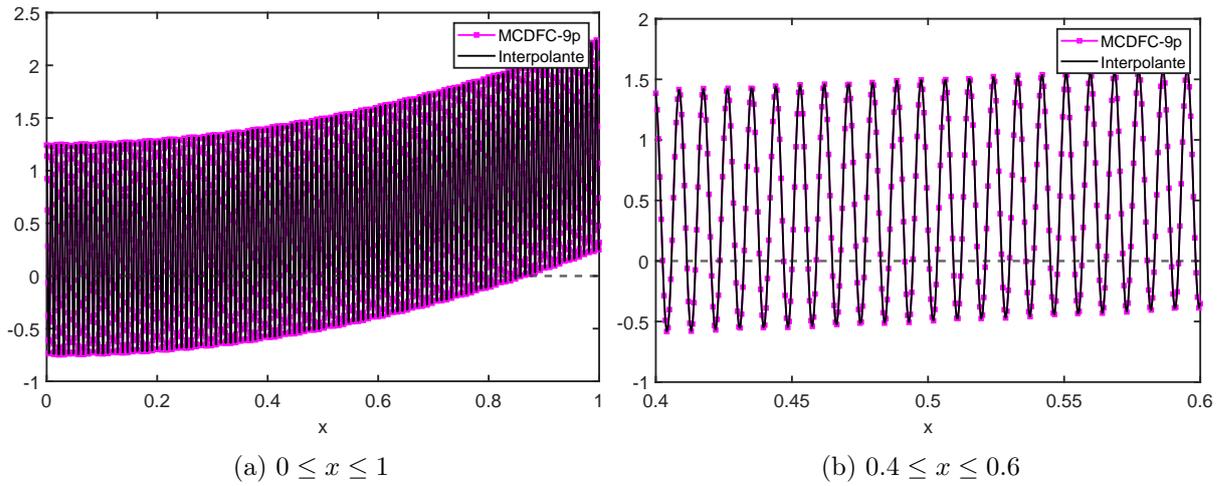


Figura 5.25: Soluções numéricas do caso não-homogêneo utilizando o MCDFC-9p-L5p com $k = 1000$, $kh = 0.5$, $\theta = \pi/4$ e corte em $y = 0.5$.

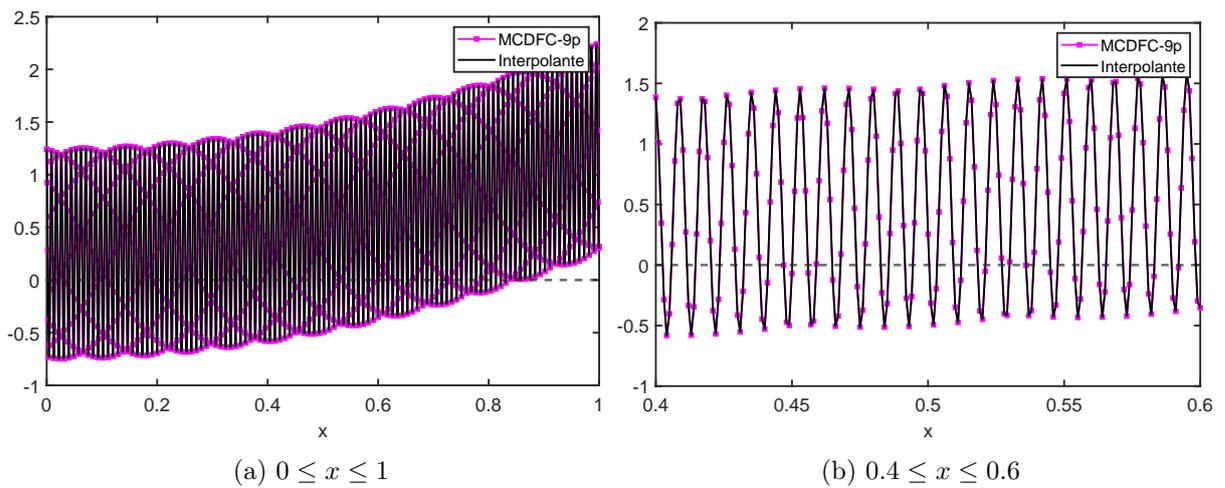


Figura 5.26: Soluções numéricas do caso não-homogêneo utilizando o MCDFC-9P-L5p com $k = 1000$, $kh = 1$, $\theta = \pi/4$ e corte em $y = 0.5$.

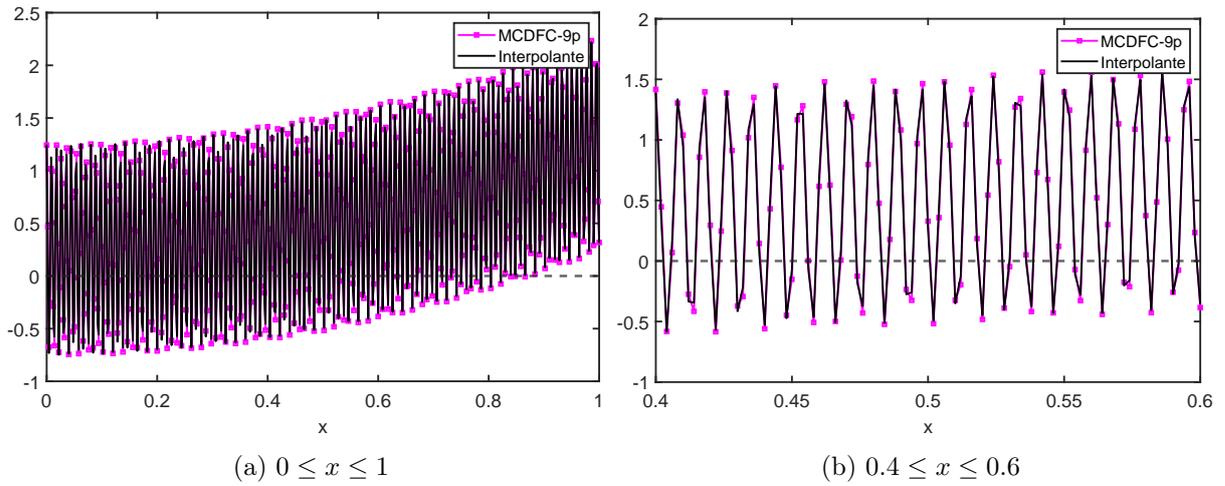


Figura 5.27: Soluções numéricas do caso não-homogêneo utilizando o MCDFC-9P-L5p com $k = 1000$, $kh = 2$, $\theta = \pi/4$ e corte em $y = 0.5$.

5.3.1.3 Estêncil Compacto e Laplaciano com 9 pontos

Os mesmos resultados numéricos foram gerados para o método completo utilizando-se Laplaciano com 9 pontos.

- **Caso Homogêneo**

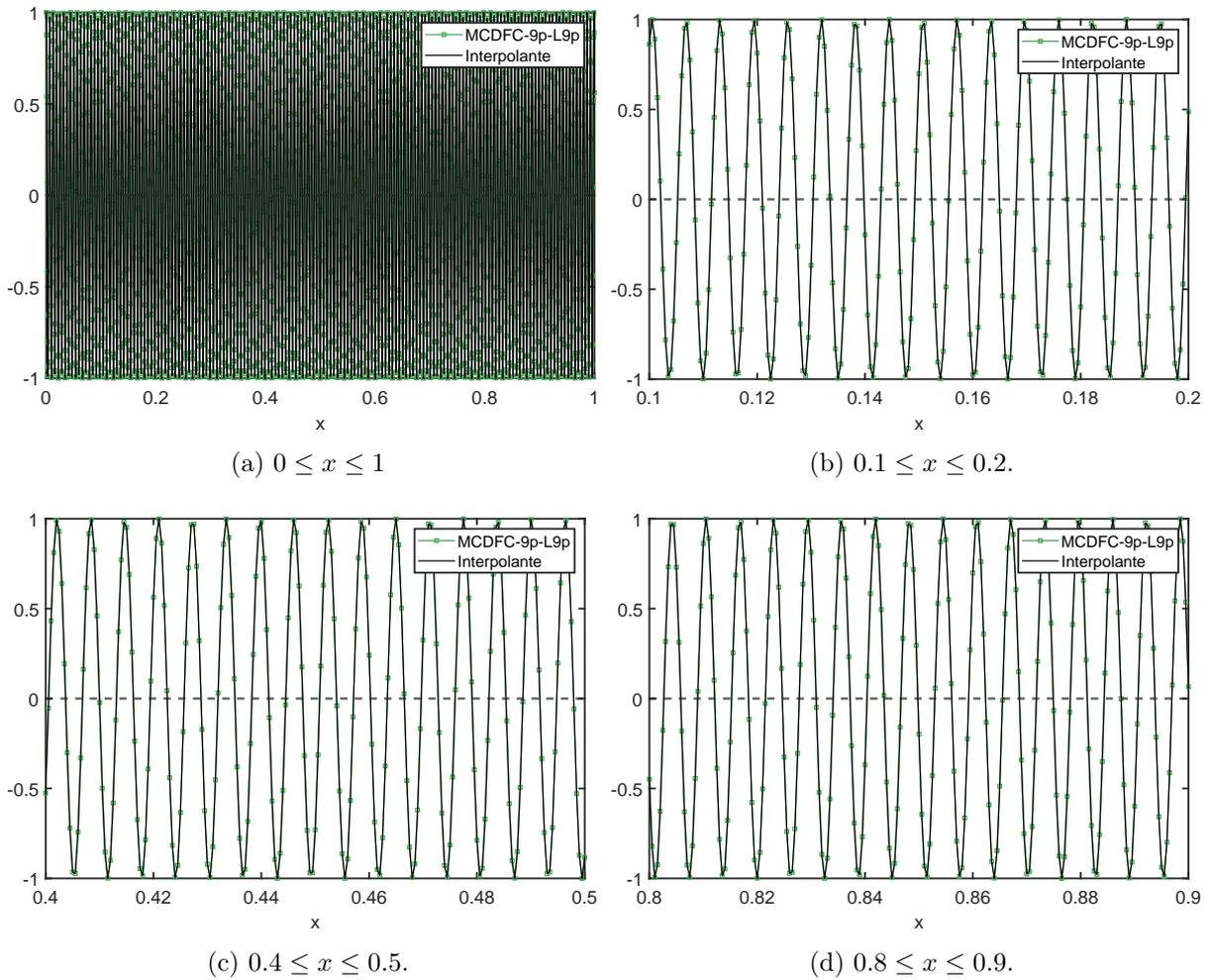


Figura 5.28: Soluções em 2D para $k = 1000$, $kh = 0.5$, $\theta = 0$, utilizando o MCDFC-9P com Laplaciano de 9 pontos (L9p) e zoom em diferentes regiões para melhor visualização em (b), (c) e (d).

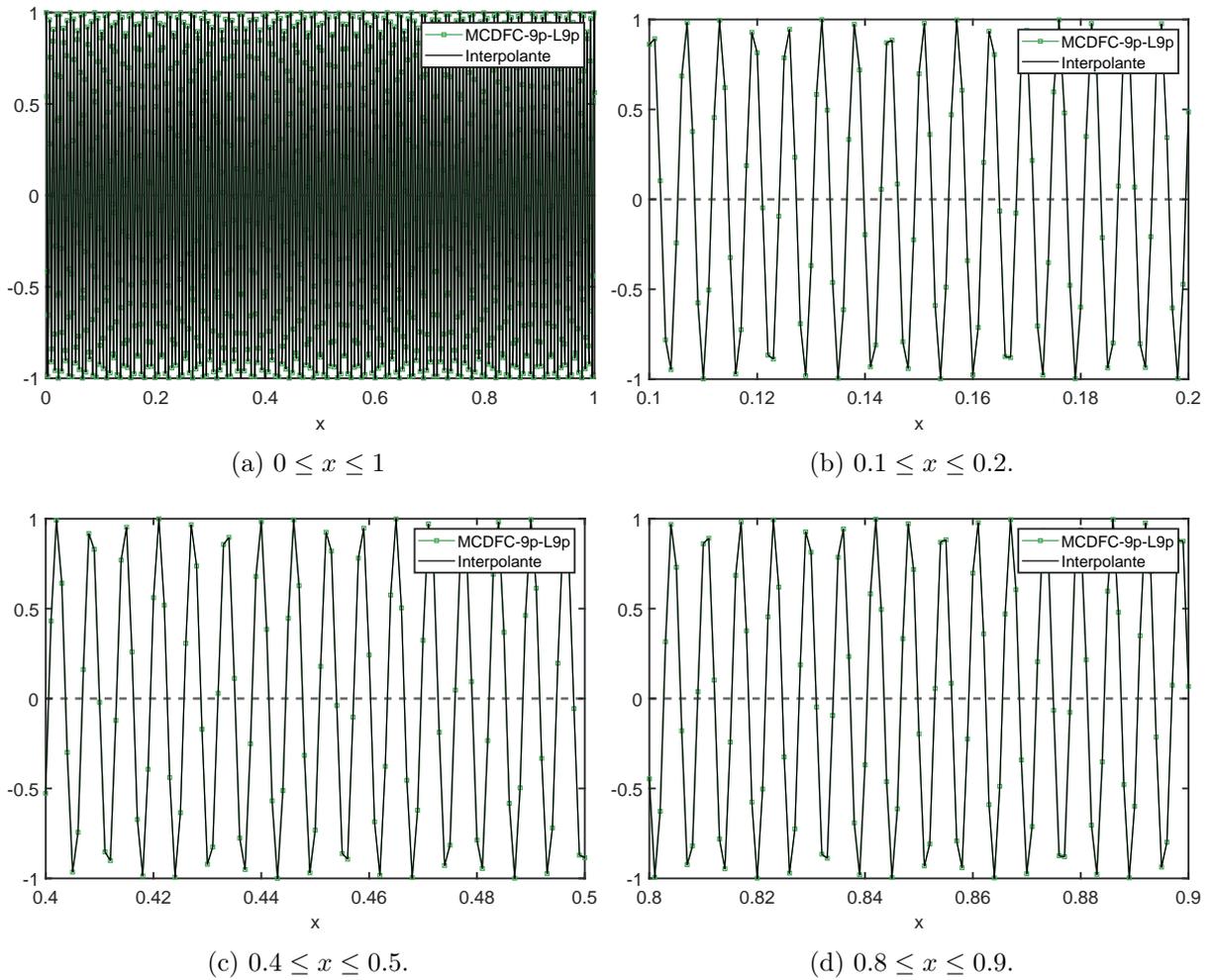


Figura 5.29: Soluções em 2D para $k = 1000$, $kh = 1$, $\theta = 0$, utilizando o MCDFC-9P com Laplaciano de 9 pontos (L9p) e zoom em diferentes regiões para melhor visualização em (b), (c) e (d).

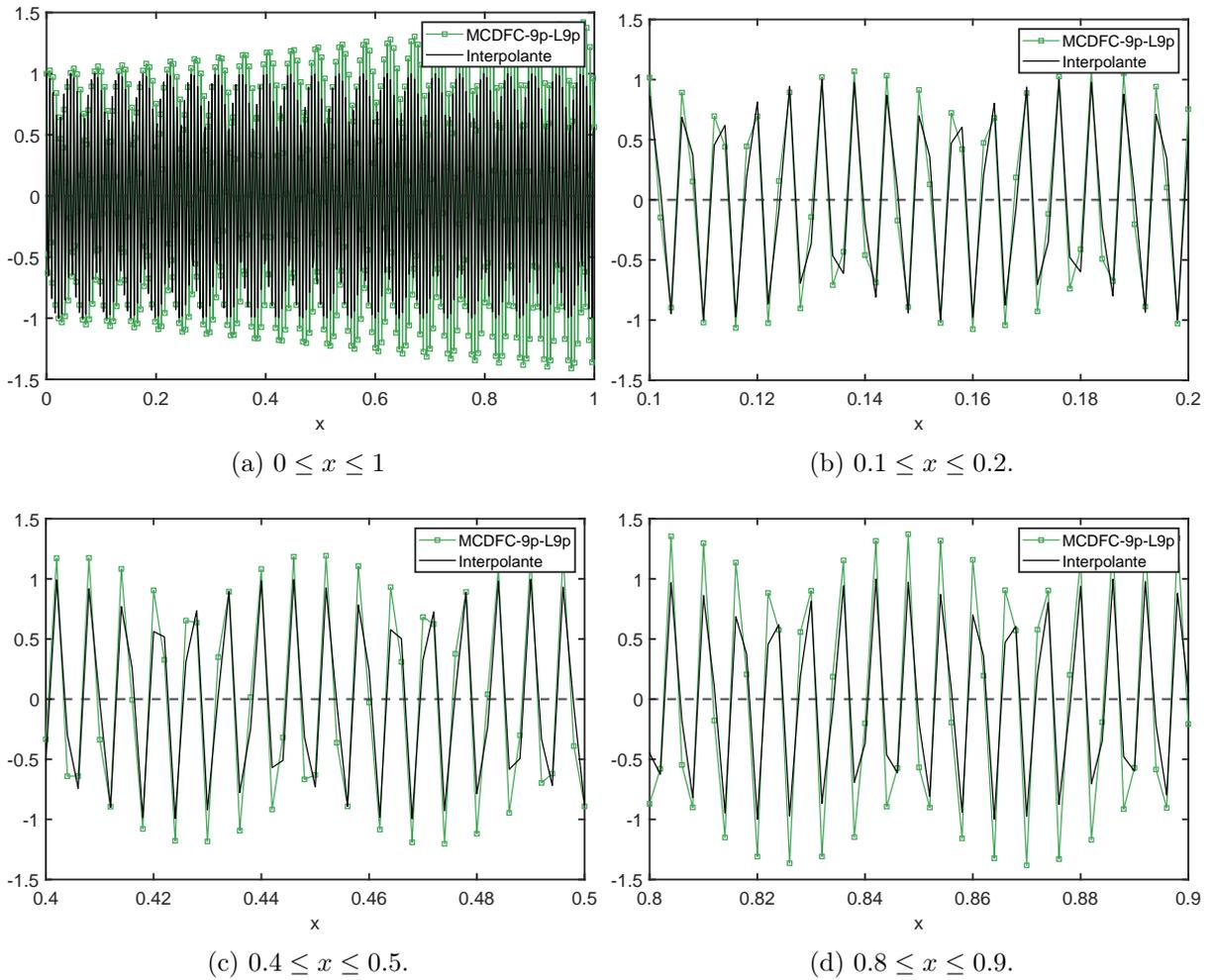


Figura 5.30: Soluções em 2D para $k = 1000$, $kh = 2$, $\theta = 0$, utilizando o MCDFC-9P com Laplaciano de 9 pontos (L9p) e zoom em diferentes regiões para melhor visualização em (b), (c) e (d).

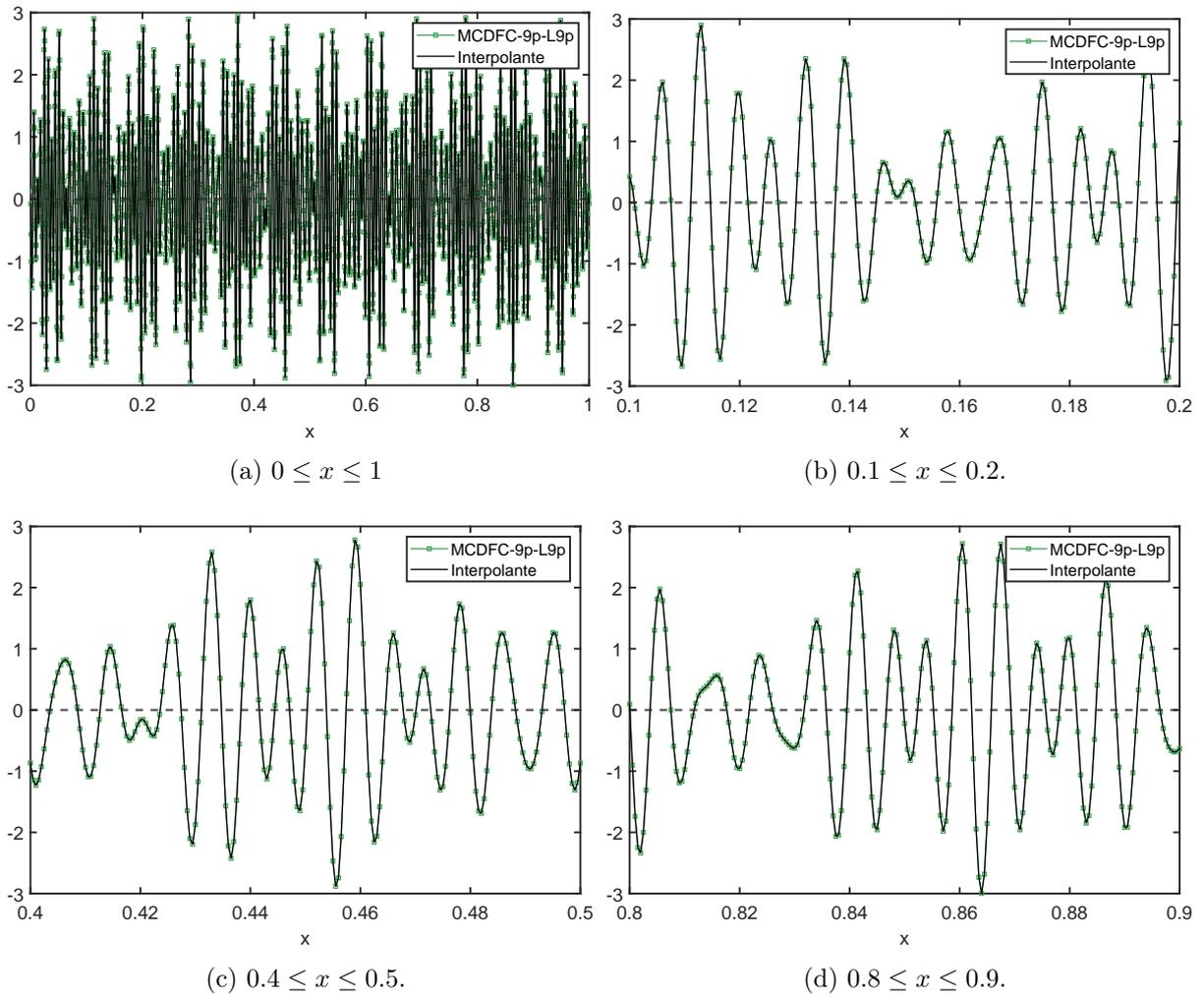


Figura 5.31: Soluções em 2D para $k = 1000$, $kh = 0.5$ com sobreposição de três ondas ($\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/4, \theta_3 = \pi/8$), utilizando o MCDFC-9P-L9p e zoom em diferentes regiões para melhor visualização em (b), (c) e (d).

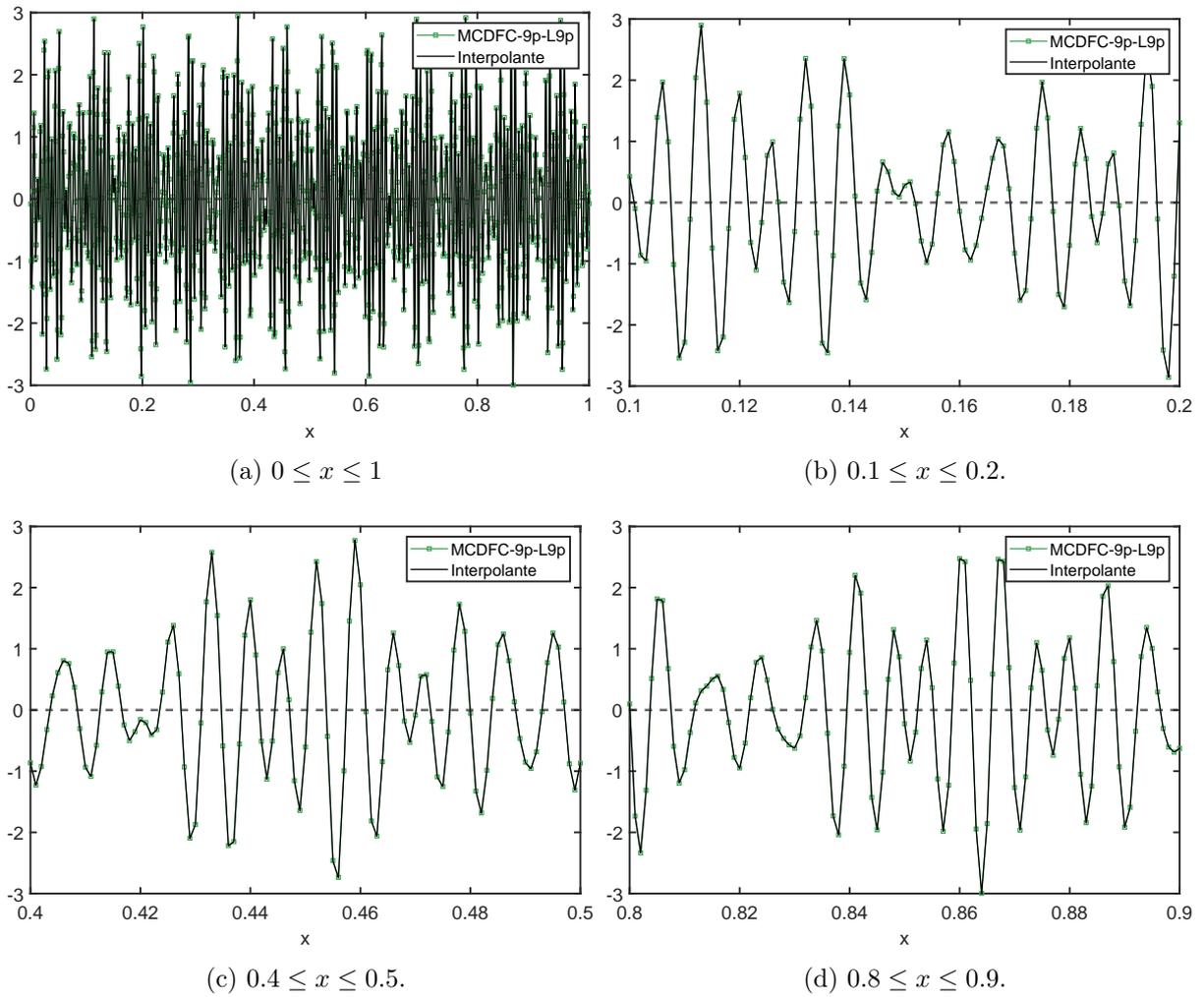


Figura 5.32: Soluções em 2D para $k = 1000$, $kh = 1$ com sobreposição de três ondas ($\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/4, \theta_3 = \pi/8$), utilizando o MCDFC-9P-L9p e zoom em diferentes regiões para melhor visualização em (b), (c) e (d).

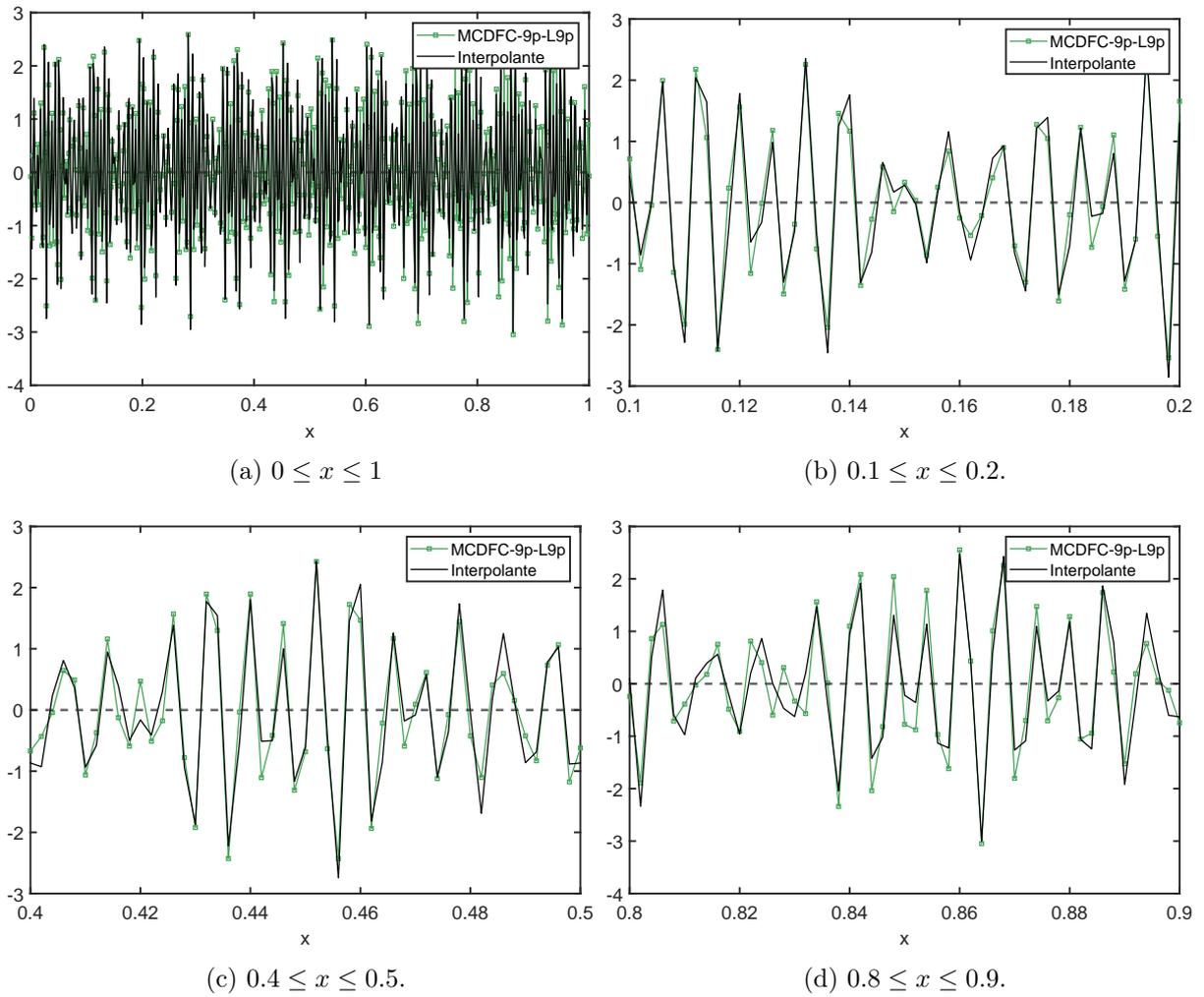


Figura 5.33: Soluções em 2D para $k = 1000$, $kh = 2$ com sobreposição de três ondas ($\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/4, \theta_3 = \pi/8$), utilizando o MCDFC-9P-L9p e zoom em diferentes regiões para melhor visualização em (b), (c) e (d).

- **Caso Não-Homogêneo**

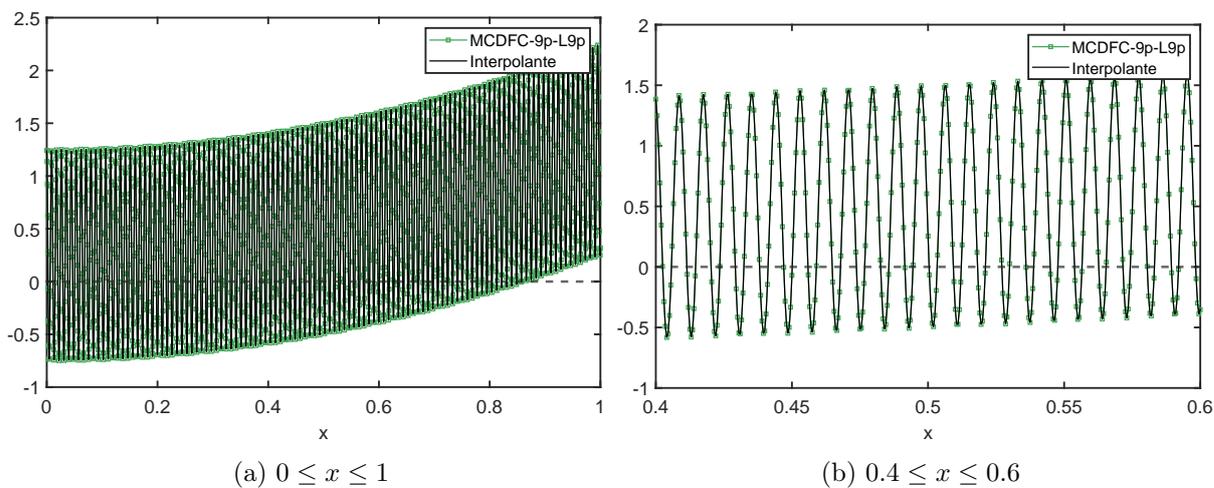


Figura 5.34: Soluções numéricas do caso não-homogêneo utilizando o MCDFC-9p-L9p com $k = 1000$, $kh = 0.5$, $\theta = \pi/4$ e corte em $y = 0.5$.

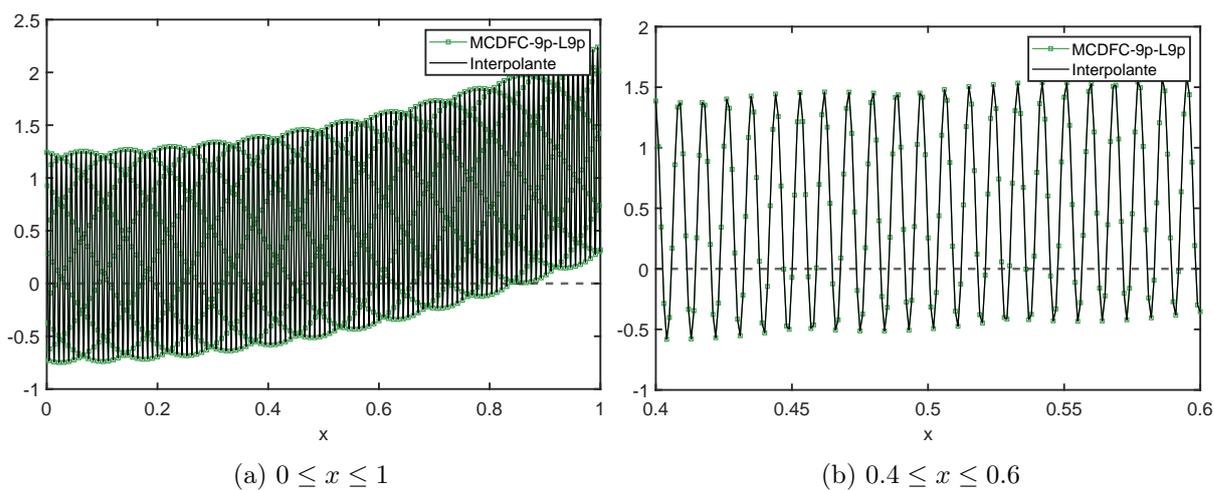


Figura 5.35: Soluções numéricas do caso não-homogêneo utilizando o MCDFC-9p-L9p com $k = 1000$, $kh = 1$, $\theta = \pi/4$ e corte em $y = 0.5$.

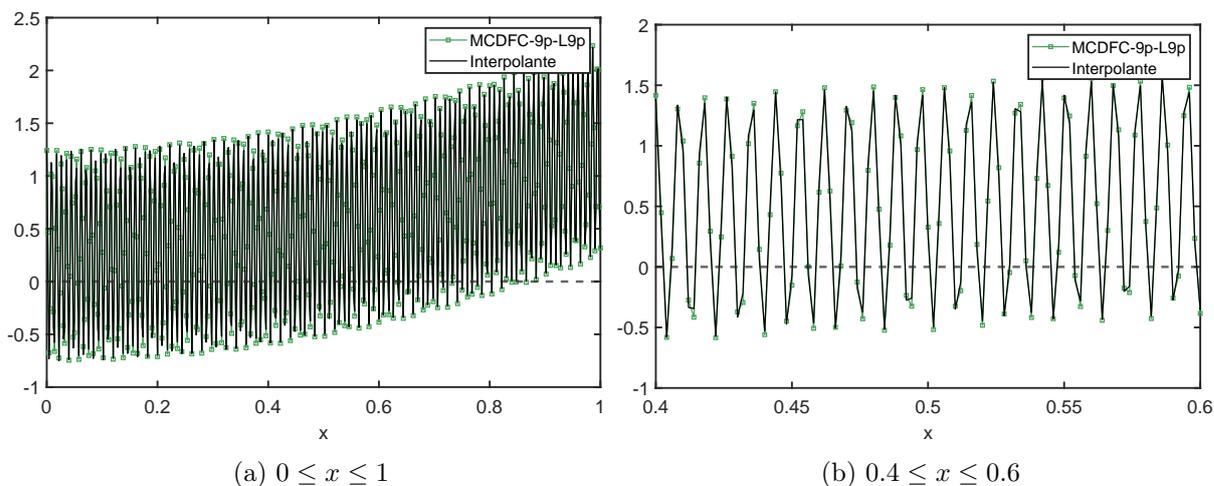


Figura 5.36: Soluções numéricas do caso não-homogêneo utilizando o MCDFC-9p-L9p com $k = 1000$, $kh = 2$, $\theta = \pi/4$ e corte em $y = 0.5$.

Pelos resultados numéricos apresentados, percebe-se que, visualmente os métodos completos com estêncil de 9 pontos entregam excelentes aproximações do interpolante, até mesmo pra malhas mais grosseiras, porém, como dito no caso unidimensional, eles fornecem apenas uma ideia visual dos resultados dos métodos. Ressalta-se a semelhança dos resultados entregues pelos MCDFC-9p-L5p e MCDFC-9p-L9p. Uma análise mais detalhada e consistente que pode ser feita para verificar suas convergências e compará-los é a análise do erro, que será realizada em sequência.

5.3.2 Análise do Erro

Para a análise do erro em 2D, realizou-se o mesmo cálculo para o caso 1D, onde o erro relativo é dado pela equação (5.3).

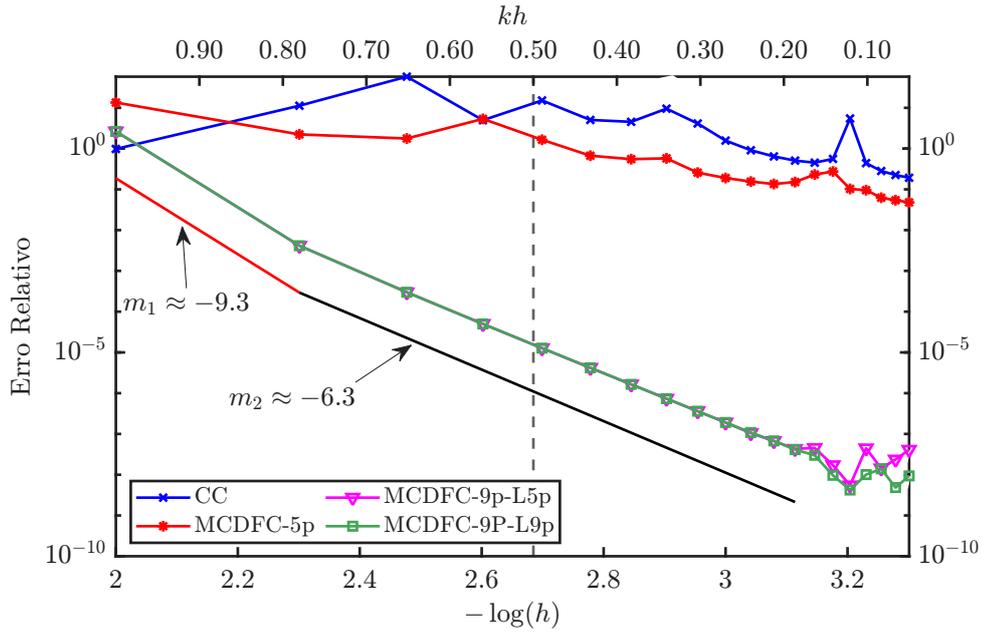


Figura 5.37: Erro relativo na norma L^2 dos métodos implementados com malha $100 \times 100 \leq N \leq 2000 \times 2000$, $k = 300$ e $\theta = 0$.

Na Figura 5.37 para direção de onda $\theta = 0$, pode-se observar que o método CC e o MCDFC-5p apresentam comportamentos do erro próximos, apresentando picos característicos do efeito de poluição do erro e atingindo o início da convergência assintótica somente quando $kh \approx 0.1$, ou seja, uma malha bastante refinada. Já os métodos com estêncil de 9 pontos (L5p e L9p) apresentaram comportamento do erro bastante semelhante entre si e muito melhores do que os dois anteriores. Não são vistos picos devido a poluição do erro. Percebe-se uma região pré-assintótica (linha vermelha) em kh ligeiramente inferior a 0.8, com coeficiente angular $m_1 \approx -9.3$, seguida da região de convergência assintótica (linha preta) com coeficiente angular $m_2 \approx -6.3$. Tomando-se um valor de $kh = 0.5$ (linha vertical tracejada), observa-se que os métodos com 9 pontos apresentam erro cerca de 5 ordens de grandeza (10^{-5}) menor do que o MCDFC-5p. Quando a malha está bastante refinada, com $kh \approx 0.15$, os métodos de 9 pontos começam a apresentar diferenças em seus comportamentos devido a efeitos de *roundoff*, pois devido a diferença de formulação, possuem uma quantidade de cálculos diferentes a serem realizados pelo computador, sendo afetados de maneiras diferentes. Mais detalhes do efeito *roundoff* podem ser vistos em [21].

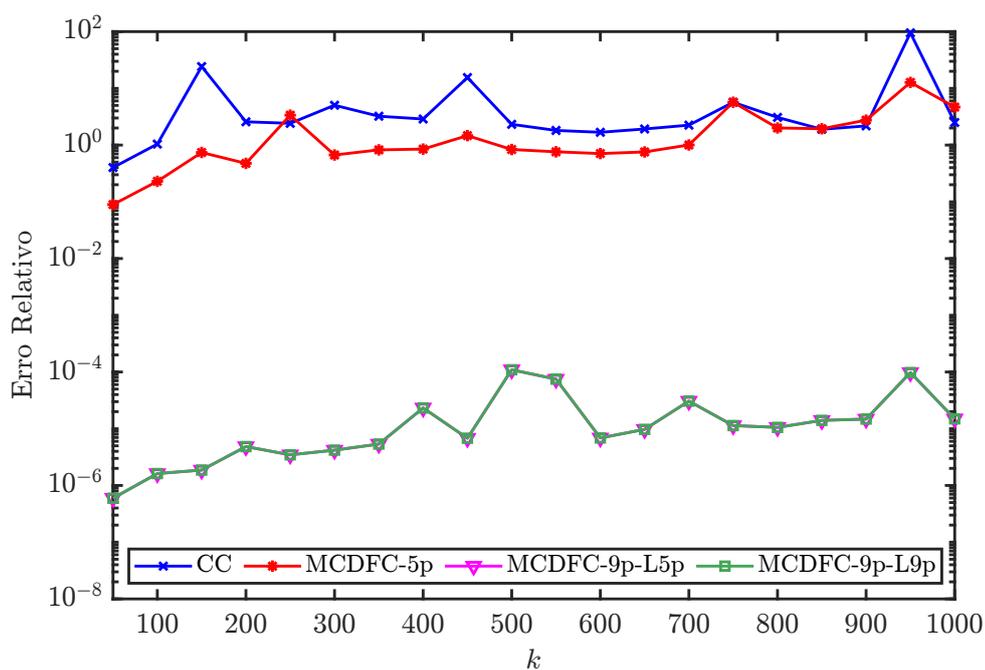


Figura 5.38: Erro relativo na norma L^2 dos métodos implementados mantendo-se $kh = 0.5$, $\theta = 0$ e $50 \leq k \leq 1000$.

A Figura 5.38 mostra que, mantendo-se um valor de kh constante, os métodos completos com estêncil de 9 pontos apresentam pouca oscilação do erro relativo e resultados muito melhores do que os demais. Pode-se perceber, novamente, a equivalência dos resultados apresentados entre eles, com uma curva praticamente superposta a outra.

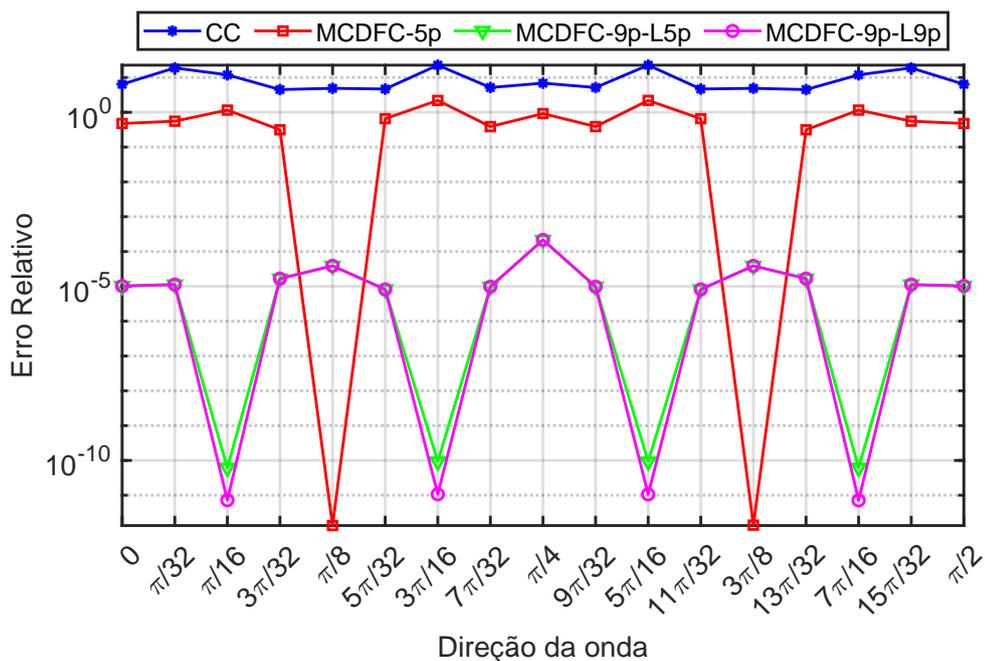


Figura 5.39: Erro relativo para o caso 2D homogêneo em função da direção da onda, para $k = 200$, $kh = 0.5$, considerando uma onda plana variando: $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Na Figura 5.39 observa-se que o método CC apresenta erro com pouca variação em relação a direção da onda, apesar de grande magnitude, variando em torno de 10^1 . O MCDFC-5p, como já foi comentado, apresenta erro praticamente nulo em duas direções de onda (no primeiro quadrante), porém em outras direções, os resultados ficam aquém dos métodos com estêncil de 9 pontos. Esses atingem erros muito baixos, próximos da precisão do computador em 4 direções de onda (primeiro quadrante), como já foi comentado: $\theta_1 = \pi/16$, $\theta_2 = 3\pi/16$, $\theta_3 = 5\pi/16$ e $\theta_4 = 7\pi/16$. Nas outras direções, apresentam resultados melhores do que os métodos CC e MCDFC-5p, exceto nas direções $\pi/8$ e $3\pi/8$ onde o MCDFC-5p apresenta erro de menor magnitude. Percebe-se também, assim como no gráfico comparativo dos erros (Figura 5.37) que os métodos com estêncil de 9 pontos apresentam equivalência.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

6.1 Conclusões

Novos métodos de diferenças finitas centradas para a equação de Helmholtz foram apresentados. Alguns foram desenvolvidos apenas modificando-se o termo k^2u , principalmente no caso 1D. No caso 1D o esquema NE-5-1D consegue eliminar a poluição do erro. Com as experiências obtidas com esses métodos, procedeu-se para o desenvolvimento do Método Completo de Diferenças Finitas Centradas, que é capaz de minimizar a relação de dispersão para qualquer estêncil em malhas uniformes. Isto é, a mesma nova abordagem gera um método com dispersão mínima para qualquer dimensão. Também, no caso unidimensional, consegue-se eliminar totalmente o efeito de poluição do erro com esta nova abordagem. No caso bidimensional e estêncil de 5 pontos, a dispersão é eliminada totalmente nas direções $\theta = \theta_1 = \pi/8$ e $\theta = \theta_2 = \pi/4$, obtendo-se assim relação de dispersão equivalente ao GLS, porém com estêncil menor, já que para formulação do GLS utiliza-se estêncil de 9 pontos. Dois métodos com estêncil de 9 pontos foram desenvolvidos com a nova abordagem. Estas duas versões do MCDFC apenas se diferenciam na aproximação do operador Laplaciano (Δ). Ambos métodos apresentaram relação de dispersão equivalente ao método QSFEM, ou seja, nula nas direções $\theta = \theta_1 = \pi/16$ e $\theta = \theta_1 + \pi/8$ e mínima nas demais direções, com excelentes resultados numéricos mesmo para malhas mais grossas.

Pela primeira vez na análise de dispersão surgem duas restrições: parte real e parte imaginária. A parte imaginária impõe restrições que o estêncil deve verificar. Também, foi realizada uma análise de simetria do estêncil. Foi constatado que a restrição da parte imaginária guarda relação geométrica com a análise de simetria. Por fim, para cada esquema realizou-se as análises de dispersão, o cálculo do ETL e análise experimental do

erro global. Os resultados numéricos mostram o bom desempenho da nova abordagem.

6.2 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros recomenda-se:

- Desenvolvimento e implementação computacional do método com estêncil da Figura 3.3b;
- Utilização de condições de contorno do tipo complexo (*Neumann* ou *Robin*);
- Extensão para o caso tridimensional de todos os métodos completos;
- Extensão para malhas não uniformes (1D, 2D e 3D);
- Aplicação desta nova abordagem para outras EDP como os problemas difusivos-convectivos com convecção dominante;
- Aplicação desta nova abordagem em outros métodos numéricos que envolvem matrizes esparsas como o MEF e o método de volumes finitos.

Referências

- [1] ALVAREZ, G. B., LOULA, A. F. D., DO CARMO, E. G. D., ROCHINHA, F. A. A discontinuous finite element formulation for Helmholtz equation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 195, 33-36 (2006), 4018–4035.
- [2] BABUŠKA, I., IHLENBURG, F., PAIK, E. T., SAUTER, S. A. A Generalized Finite Element Method for solving the Helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 128 (1995), 325–359.
- [3] BABUŠKA, I. M., SAUTER, S. A. Is the Pollution Effect of the FEM Avoidable for the Helmholtz Equation Considering High Wave Numbers? SIAM Journal on Numerical Analysis 34, 6 (1997), 2392–2423.
- [4] BIAZAR, J., ASAYESH, R. An efficient high-order compact finite difference method for the Helmholtz equation. Computational Methods for Differential Equations 8, 3 (2020).
- [5] CHAGAS, B. Métodos de elementos finitos e diferenças finitas para a equação de helmholtz. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional), Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia - Universidade Federal Fluminense, 2013.
- [6] CORRÊA, C. Métodos de diferenças finitas e volumes finitos para problemas convectivos difusivos. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional), Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência - Universidade Federal Fluminense, 2013.
- [7] DE PAULA JÚNIOR, O. R. O Número de Euler e suas Aplicações. Dissertação (Mestrado, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, 2020).
- [8] DUTRA DO CARMO, E. G., ALVAREZ, G. B., LOULA, A. F. D., ROCHINHA, F. A. A nearly optimal Galerkin projected residual finite element method for Helmholtz problem. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 197, 13-16 (2008), 1362–1375.
- [9] FERNANDES, D. T. Métodos de Elementos Finitos e Diferenças Finitas para o Problema de Helmholtz. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional), Laboratório Nacional de Computação Científica, Brasil, 2009.
- [10] FERNANDES, D. T., LOULA, A. F. D. Quasi optimal finite difference method for Helmholtz problem on unstructured grids. International Journal for Numerical Methods in Engineering (2009), 1244–1281.

- [11] HARARI, I., HUGHES, T. J. Galerkin/least-squares finite element methods for the reduced wave equation with non-reflecting boundary conditions in unbounded domains. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 98, 3 (1992), 411–454.
- [12] IHLENBURG, F. Finite element analysis of acoustic scattering. Springer, 1998.
- [13] IHLENBURG, F., BABUŠKA, I. Dispersion analysis and error estimation of Galerkin finite element methods for the Helmholtz equation. International Journal for Numerical Methods in Engineering 38, 22 (1995), 3745–3774.
- [14] IHLENBURG, F., BABUŠKA, I. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number Part I: The h-version of the FEM. Computers & Mathematics with Applications 30, 9 (1995), 9–37.
- [15] INC., T. M. Matlab version: 23.2.0 (R2023b) Update 6, 2023.
- [16] LEVEQUE, R. J. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [17] LOULA, A. F. D., ALVAREZ, G. B., DO CARMO, E. G., ROCHINHA, F. A. A discontinuous finite element method at element level for Helmholtz equation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 196, 4-6 (2007), 867–878.
- [18] PLETCHER, R. H., TANNEHILL, J. C., ANDERSON, D. Computational fluid mechanics and heat transfer. CRC Press, 2012.
- [19] ROCHINHA, F. A., ALVAREZ, G. B., DO CARMO, E. G., LOULA, A. F. D. A locally discontinuous enriched finite element formulation for acoustics. Commun. Numer. Meth. Engng. 23 (2007), 623–637.
- [20] SINGER, I., TURKEL, E. High-order finite difference methods for the Helmholtz equation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 163, 1-4 (1998), 343–358.
- [21] STROUBOULIS, T., BABUŠKA, I., HIDAJAT, R. The generalized finite element method for Helmholtz equation: Theory, computation, and open problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 195, 37-40 (2006), 4711–4731.
- [22] SUTMANN, G. Compact finite difference schemes of sixth order for the helmholtz equation. Journal of Computational and Applied Mathematics 203 (2007), 15–31.
- [23] VICHNEVETSKY, R., BOWLES, J. B. Fourier Analysis of Numerical Approximations of Hyperbolic Equations. SIAM, 1982.
- [24] WU, T. A dispersion minimizing compact finite difference scheme for the 2D Helmholtz equation. Journal of Computational and Applied Mathematics 311 (2017), 497–512.
- [25] WU, T., XU, R. An optimal compact sixth-order finite difference scheme for the Helmholtz equation. Computers & Mathematics with Applications 75, 7 (2018), 2520–2537.

APÊNDICE A – Códigos Computacionais

A.1 Códigos dos métodos em uma dimensão

Caso Homogêneo Unidimensional

```

1  %{
2
3  Resolucao da Equacao de HelmHoltz Homogenea 1D
4  Utilizando o Metodo Completo de Diferencas Finitas Centradas
5  Autor: Helder da Fonseca Nunes
6  Universidade Federal Fluminense - EEIMVR
7  Fevereiro/2024
8  %}
9
10 %% Limpando as variaveis
11 clc; clear all; close all;
12
13 %% Definindo a malha e parametros de entrada
14 N = 600 ; % tamanho da malha
15 k = 300; % comprimento de onda
16 x0 = 0; % inicio do intervalo
17 xf = 1; % fim do intervalo
18 h = (xf-x0)/(N-1); % espacamento entre nos da malha
19 x = x0:h:xf; % dominio de solucao
20
21 %% Condicoes de contorno e termo fonte
22 fonte = 0;
23 cond_0 = 0;
24 cond_n = 1;
25 %% Inicializacoes da matriz A e vetor solucao
26
27 dim_A = N-2;
28 matriz_A = spalloc(dim_A,dim_A,3*dim_A);
29 vec_b = spalloc(dim_A,1,dim_A);

```

```

30 vec_solucão = zeros(1,N);
31 vec_solucão(1) = cond_0;
32 vec_solucão(N) = cond_n;
33
34 %% Definindo valores das diagonais do MCDFC-1D
35 dp = ((h^2)*(k^4)*cos(k*h))/(-2+(2+k^2*h^2)*cos(k*h));
36
37 di = -((h^2*k^4)/(-4 + (2*(2+(k*h)^2)*cos(k*h))));
38
39 ds = -((h^2*k^4)/(-4 + (2*(2+(k*h)^2)*cos(k*h))));
40 %% Preenchendo a matriz do sistema linear e vetor fonte
41 tic;
42 for i=1:dim_A-1
43     matriz_A(i,i) = dp; % elementos da diag principal
44     matriz_A(i,i+1) = ds; % elementos da diag acima
45     matriz_A(i+1,i) = di; % elementos da diag abaixo
46 end
47     matriz_A(dim_A,dim_A) = dp;
48
49 %Preenchimento do vetor b
50     vec_b(1) = fonte - cond_0*di;
51     vec_b(dim_A) = fonte - cond_n*ds;
52     for i=2:dim_A-1
53         vec_b(i) = fonte;
54     end
55
56     fim_matriz = toc; % tempo para preenchimento da matriz e vetor fonte
57     fprintf("Tempo total de preenchimento do sistema = %.3g..." + ...
58           "segundos \n",fim_matriz);
59
60 %% Resolvendo o sistema linear matriz_A*vec_solucão = vec_b
61     tic;
62     vec_solucão(2:N-1) = matriz_A\vec_b;
63     fim_solucão = toc; % tempo para resolução do sistema linear
64     fprintf("Tempo total de resolução do sistema = %.3g..." + ...
65           " segundos \n",fim_solucão)
66
67 %% Calculo da solução exata
68     sol_exata = (cond_0*sin(k - (k*x)) + cond_n*(sin(k*x)))/(sin(k));
69
70 %% Calculo do erro com a norma l2
71     erro = norm(abs(vec_solucão-sol_exata))/norm(abs(sol_exata));
72

```

```

73 fprintf("O erro segundo a norma l2 foi de: %.15f \n\n",erro);
74
75 %% Graficos
76 grafico1 = figure(1);
77
78 plot(x,vec_solucao, "mo-", "markersize",8, "Linewidth",1);
79 xlabel('x',"fontsize",20);
80 hold on
81 plot(x,sol_exata,"k-","Linewidth",1.5);
82 legenda ="MCDFC-1D";
83 legenda(1,end+1) = "Interpolante";
84 legenda1 = legend(legenda,"fontsize", 12,"location","northeast",...
85     "numcolumns",3);
86 hold off;

```

Caso Não-Homogêneo Unidimensional

```

1  %{
2
3  Resolucao da Equacao de HelmHoltz Nao-Homogenea 1D
4  Utilizando o Metodo Completo de Diferencas Finitas Centradas
5  Autor: Helder da Fonseca Nunes
6  Universidade Federal Fluminense - EEIMVR
7  Fevereiro/2024
8
9  %}
10
11 %% Limpando as variaveis
12 clc; clear all; close all;
13
14 %% Definindo a malha e parametros de entrada
15 N = 1000 ; % tamanho da malha
16 k = 500;% comprimento de onda
17 x0 = 0; % inicio do intervalo
18 xf = 1; %fim do intervalo
19 h = (xf-x0)/(N-1); % espacamento entre nos da malha
20 x = [x0:h:xf]; % dominio de solucao
21
22 %% Definindo o valor do parametro do metodo completo
23 num_a2 = 2-2*cos(k*h) -(k*h)^2;
24 den_a2 = cos(k*h)*(2+(k*h)^2) -2;
25
26 a2 = num_a2/den_a2; %alfa2

```

```
27
28 %% Condições de contorno e termo fonte
29 xf = x(2:N-1);
30 fonte = (2 + (k^2 * xf.^2))*(1+a2);
31 cond_0 = 1;
32 cond_n = 1 + cos(k);
33
34 %% Inicializações
35 dim_A = N-2;
36 matriz_A = spalloc(dim_A,dim_A,3*dim_A);
37 vec_b = spalloc(dim_A,1,dim_A);
38 vec_solucao = zeros(1,N);
39 vec_solucao(1) = cond_0;
40 vec_solucao(N) = cond_n;
41
42
43 %% Definindo valores das diagonais
44 diag_principal = ((h^2)*(k^4)*cos(k*h))/(-2+(2+k^2*h^2)*cos(k*h));
45
46 diag_inferior = -((h^2*k^4)/(-4 + (2*(2+(k*h)^2)*cos(k*h))));
47
48 diag_superior = -((h^2*k^4)/(-4 + (2*(2+(k*h)^2)*cos(k*h))));
49 %% Preenchendo a matriz do sistema linear e vetor fonte
50 for i=1:dim_A-1
51     matriz_A(i,i) = diag_principal; % elementos da diag principal
52     matriz_A(i,i+1) = diag_superior; % elementos da diag acima
53     matriz_A(i+1,i) = diag_inferior; % elementos da diag abaixo
54 end
55
56 matriz_A(dim_A,dim_A) = diag_principal;
57
58 %Preenchimento do vetor b
59 vec_b(1) = fonte(1) - cond_0*diag_inferior;
60 vec_b(dim_A) = fonte(dim_A) - cond_n*diag_superior;
61 for i=2:dim_A-1
62     vec_b(i) = fonte(i);
63 end
64
65 %% Resolvendo o sistema linear matriz_A*vec_solucao = vec_b
66 vec_solucao(2:N-1) = matriz_A\vec_b;
67
68 %Solução exata
69 sol_exata = x.^2 + cos(k.*x);
```

```

70
71 %% Calculo do erro com a norma l2
72 erro = norm(abs(sol_exata - vec_solucao))/norm(sol_exata);
73 fprintf("O erro segundo a norma l2 foi de: %.15f \n\n",erro);
74
75 %% Graficos
76 fig1 = figure(1);
77 grafico = plot(x,vec_solucao,"mo-",x,sol_exata,"k-","Linewidth",2);
78 legenda = legend("MCDFC-1D", "Interpolante", "numcolumns",2);
79 xlabel("x");

```

A.2 Códigos dos métodos em duas dimensões

Caso Homogêneo Bidimensional - MCDFC-5P

```

1  %{
2
3  Resolucao da Equacao de HelmHoltz Homogenea 2D
4  Utilizando Estencil de 5 pontos - Metodo CCFD
5  Autor: Helder da Fonseca Nunes
6  Universidade Federal Fluminense - EEIMVR
7  fev/2024
8
9  ##### CASO SIMETRICO #####
10 %}
11
12 %% LIMPANDO AS VARIÁVEIS
13 clear variables; close all; clc;
14
15 %% Definindo o dominio de solucao
16 Lx = 1 ; Ly = 1;
17
18 tic; %inicio do calculo do tempo de execucao
19
20 Nx=1000; Ny=1000; %numero de intervalos nas direcoes x e y
21 nx=Nx+1; ny=Ny+1; %numero de pontos do grid nas direcoes x e y
22 dx=Lx/Nx; dy=Ly/Ny; %dimensao do grid em x,y
23 x=0:dx:Lx;
24 y=0:dy:Ly;
25 k = 500; %numero de onda
26 angulos = [pi/8]; %angulos de direcao da onda
27 kh = k*dx

```

```

28 t1 = pi/8; %angulo 1
29
30 %% VARIAVEIS AUXILIARES
31 khq = (k*dx)^2;
32 u1 = cos(k*dx*cos(t1));
33 v1 = cos(k*dx*sin(t1));
34 numA = dx^2*k^4;
35 denAs = -16 + 8*u1 + 2*khq*u1 + 8*v1 + 2*khq*v1;
36
37 numB = dx^2*k^4*(u1+v1);
38 denB = -8 + 4*u1 + khq*u1 + 4*v1 + khq*v1;
39
40 %% DEFININDO AS DIAGONAIS
41 A1 = -(numA/denAs); %(-nx)
42 A2 = A1; %(-1)
43 B = numB/denB; %(0)
44 C1 = A1; %(nx)
45 C2 = A1; %(+1)
46 e = ones(nx*ny,1);
47
48 %% Definindo o index de cada linha da matriz e preenchendo a matriz
49 idx=unique([1:nx,... %topo
50             1:nx:1+(ny-1)*nx,... %esquerda
51             1+(ny-1)*nx:nx*ny,...%baixo
52             nx:nx:nx*ny...%direita
53             ]);
54
55 diagonals = [e*A1 e*A2 e*B e*C2 e*C1];
56 A = spdiags(diagonals,[-nx -1 0 1 nx], nx*ny, nx*ny);
57 I=speye(nx*ny);
58 A(idx,:)=I(idx,:);
59
60 b=zeros(nx,ny); %linhas interiores iguais a zero
61
62 %% Preenchendo o vetor b
63 for ang=1:length(angulos)
64     b(:,1)= b(:,1) + cos(k*(x(:).*cos(angulos(ang)))...
65             + y(1).*sin(angulos(ang)))); %baixo
66
67     b(1,2:ny-1)= b(1,2:ny-1) + cos(k*(x(1).*cos(angulos(ang)))...
68             + y(2:ny-1).*sin(angulos(ang)))); %esquerda
69
70     b(:,ny)= b(:,ny) + cos(k*(x(:).*cos(angulos(ang)))...

```

```
71         + y(ny).*sin(angulos(ang)))); %topo
72
73     b(nx,2:ny-1)= b(nx,2:ny-1) + cos(k*(x(nx).*cos(angulos(ang))...
74         + y(2:ny-1).*sin(angulos(ang)))); %direita
75 end
76
77 b=reshape(b,nx*ny,1);
78
79 U=A\b; %calculando a solucao numerica
80 U_matrix=reshape(U,nx,ny); %transformando o vetor em uma matriz de
    solucoes
81
82 %% Calculo da solucao exata
83 [X,Y] = meshgrid(x,y); %malha de solucoes
84 exata_x = 0;
85 exata_y = 0;
86 exata=0;
87 for ang=1:length(angulos)
88     exata = exata + cos(k*(X.*cos(angulos(ang))...
89         + Y.*sin(angulos(ang)))); %calculo da solucao exata
90 end
91     exata = exata';
92
93 %calculo da solucao exata em x=0.5 e y=0.5
94 x_corte = 0.5;
95 y_corte = 0.5;
96
97 idx_corteX = find(x==x_corte);
98 idx_corteY = find(y==y_corte);
99
100 exata_x_fixo = exata(idx_corteX,:);
101 exata_y_fixo = exata(:,idx_corteY);
102 U_y = zeros(nx,1);
103 U_x = zeros(ny,1);
104 U_x_fixo = U_matrix(idx_corteX,:);
105 U_y_fixo = U_matrix(:,idx_corteY);
106
107 %% Calculo do erro
108 exata_vet = reshape(exata,[nx*ny,1]);
109 error = norm(abs(U-exata_vet))/norm(exata_vet);
110
111 fprintf("O erro foi de %.6f \n", error);
112
```

```

113 fim = toc;
114
115 %% Plotagem dos graficos
116 grafico_x_fixo = figure(1);
117 plot(y,U_x_fixo,'ro-',y,exata_x_fixo,'k-', 'markersize',4,'LineWidth'
    ,1.5);
118 xlabel("y",'fontsize',15);
119 hold on;
120 yline(0,'--', 'LineWidth',2);
121 hold off;
122 legendax = legend("MCDFC-5p","Interpolante");
123
124 grafico_y_fixo = figure(2);
125 plot(x,U_y_fixo,'ro-',x,exata_y_fixo,'k-', 'markersize',4,'LineWidth'
    ,1.5);
126 xlabel("x",'fontsize',15);
127 hold on;
128 yline(0,'--', 'LineWidth',2);
129 hold off;
130 legenday = legend("MCDFC-5p","Interpolante");

```

Caso Homogêneo Bidimensional - MCDFC-9p-L5p

```

1  %{
2
3  Resolucao da Equacao de HelmHoltz Homogenea 2D
4  Utilizando Estencil de 9 pontos e Laplaciano de 5 pontos
5  Autor: Helder da Fonseca Nunes
6  Universidade Federal Fluminense - EEIMVR
7  fev/2024
8
9  #####
10 Laplaciano 5P para G1 G2 e G3
11 Laplaciano 5P rotacionado para G4 e G5
12
13 CASO SIMETRICO
14
15 #####
16 %}
17
18 %% LIMPANDO AS VARIÁVEIS
19 clc; clear variables; close all; clc;
20

```

```

21 %% DEFININDO O DOMIMIO DE SOLUCAO
22 Lx = 1 ; Ly = 1;
23 tic; %inicio do calculo do tempo de execucao
24 Nx=1000; Ny=1000; %numero de intervalos nas direcoes x e y
25 nx=Nx+1; ny=Ny+1; %numero de pontos do grid nas direcoes x e y
26 dx=Lx/Nx; dy=Ly/Ny; %dimensao do grid em x,y
27 x=0:dx:Lx; %intervalo em x
28 y=0:dy:Ly; %intervalo em y
29 k = 1000; %numero de onda
30 angulos = [0 pi/4 pi/8]; %angulos de direcao das ondas
31 t1 = pi/16; %angulo 1
32 t2 = (3*pi)/16; %angulo 2
33
34 %% Variaveis auxiliares
35 kh = k*dx
36 khq = (k*dx)^2;
37 khqq = (k^4)*(dx^2);
38
39 %-----
40 u1 = cos(k*dx*cos(t1));
41 u2 = cos(k*dx*cos(t2));
42 v1 = cos(k*dx*sin(t1));
43 v2 = cos(k*dx*sin(t2));
44 %-----
45
46 numA1A2 = (2*k^4*dx^2*u1*v1) + (k^6*dx^4*u1*v1) - (2*k^4*dx^2*u2*v2)...
47 - (k^6*dx^4*u2*v2);
48
49 denA1A2 = 16*u1 + ((4*dx^2*k^2)*u1) - (16*u2) - (4*dx^2*k^2*u2)...
50 + (16*v1) + (4*dx^2*k^2)*v1 - (32*u1*v1) - ((16*dx^2*k^2)*u1*v1)...
51 + (16*u1*u2*v1) + (12*dx^2*k^2)*u1*u2*v1 + ((2*dx^4*k^4)*u1*u2*v1)
...
52 - (16*v2) - (4*dx^2*k^2*v2) + (32*u2*v2) + ((16*dx^2*k^2)*u2*v2)...
53 - (16*u1*u2*v2) - (12*dx^2*k^2*u1*u2*v2) - (2*dx^4*k^4*u1*u2*v2)...
54 + (16*u1*v1*v2) + (12*dx^2*k^2*u1*v1*v2) + (2*dx^4*k^4*u1*v1*v2)...
55 - (16*u2*v1*v2) - (12*dx^2*k^2*u2*v1*v2) - (2*dx^4*k^4*u2*v1*v2);
56
57 numA3A4 = (2*dx^2*k^4*u1)+(dx^4*k^6*u1) - (2*dx^2*k^4*u2) - (dx^4*k^6*u2)...
58 + (2*dx^2*k^4*v1)+(dx^4*k^6*v1) - (2*dx^2*k^4*v2) - (dx^4*k^6*v2);
59
60 denA3A4 = 32*u1 + ((8*dx^2*k^2)*u1) - (32*u2) - (8*dx^2*k^2*u2)...
61 + (32*v1) + (8*dx^2*k^2)*v1 - (64*u1*v1) - ((32*dx^2*k^2)*u1*v1)...
62 + (32*u1*u2*v1) + (24*dx^2*k^2)*u1*u2*v1 + ((4*dx^4*k^4)*u1*u2*v1)

```

```

...
63 - (32*v2) - (8*dx^2*k^2*v2) + (64*u2*v2) + ((32*dx^2*k^2)*u2*v2)...
64 - (32*u1*u2*v2) - (24*dx^2*k^2*u1*u2*v2) - (4*dx^4*k^4*u1*u2*v2)...
65 + (32*u1*v1*v2) + (24*dx^2*k^2*u1*v1*v2) + (4*dx^4*k^4*u1*v1*v2)...
66 - (32*u2*v1*v2) - (24*dx^2*k^2*u2*v1*v2) - (4*dx^4*k^4*u2*v1*v2);
67
68 numB = (2*dx^2*k^4*u1*u2*v1) + (dx^4*k^6*u1*u2*v1)...
69 - (2*dx^2*k^4*u1*u2*v2) - (dx^4*k^6*u1*u2*v2)...
70 + (2*dx^2*k^4*u1*v1*v2) + (dx^4*k^6*u1*v1*v2)...
71 - (2*dx^2*k^4*u2*v1*v2) - (dx^4*k^6*u2*v1*v2);
72
73 denB = 8*u1 + ((2*dx^2*k^2)*u1) - (8*u2) - (2*dx^2*k^2*u2)...
74 + (8*v1) + (2*dx^2*k^2)*v1 - (16*u1*v1) - ((8*dx^2*k^2)*u1*v1)...
75 + (8*u1*u2*v1) + (6*dx^2*k^2)*u1*u2*v1 + ((dx^4*k^4)*u1*u2*v1)...
76 - (8*v2) - (2*dx^2*k^2*v2) + (16*u2*v2) + ((8*dx^2*k^2)*u2*v2)...
77 - (8*u1*u2*v2) - (6*dx^2*k^2*u1*u2*v2) - (dx^4*k^4*u1*u2*v2)...
78 + (8*u1*v1*v2) + (6*dx^2*k^2*u1*v1*v2) + (dx^4*k^4*u1*v1*v2)...
79 - (8*u2*v1*v2) - (6*dx^2*k^2*u2*v1*v2) - (dx^4*k^4*u2*v1*v2);
80
81
82 %% DIAGONAIS - MCDFC_9P_L5P -
83
84 B = numB/denB ; %(0)
85 A1 = -numA1A2/denA1A2; %(-nx)
86 A2 = A1; %(-1)
87 A3 = numA3A4/denA3A4; %(-nx-1)
88 A4 = A3; %(-nx+1)
89 C1 = A1; %(nx)
90 C2 = A1; %(1)
91 C3 = A3; %(nx-1)
92 C4 = A3; %(nx+1)
93
94 %% Construcao da matriz=
95 e = ones(nx*ny,1);
96
97 % definindo os indices das condicoes de contorno
98 idx=unique([1:nx,... %topo
99             1:nx:1+(ny-1)*nx,... %esquerda
100            1+(ny-1)*nx:nx*ny,...%baixo
101            nx:nx:nx*ny...%direita
102            ]);
103
104 %diagonais da matriz

```

```

105 diagonals = [e*A1 e*A2 e*A3 e*A4 e*B e*C1 e*C2 e*C3 e*C4];
106
107 %construcao da matriz esparsa
108 A = spdiags(diagonals,[-nx -1 -nx-1 -nx+1 0 nx 1 nx-1 nx+1], nx*ny, nx*
    ny);
109 I=speye(nx*ny);
110
111 % atribuindo as condicoes de contorno
112 A(idx,:)=I(idx,:);
113
114 %% Construcao do vetor fonte
115 b=zeros(nx,ny); %linhas interiores iguais a zero
116 for ang=1:length(angulos)
117     b(:,1)= b(:,1) + cos(k*(x(:).*cos(angulos(ang)))...
118         + y(1).*sin(angulos(ang)))); %baixo
119
120     b(1,2:ny-1)= b(1,2:ny-1) + cos(k*(x(1).*cos(angulos(ang)))...
121         + y(2:ny-1).*sin(angulos(ang)))); %esquerda
122
123     b(:,ny)= b(:,ny) + cos(k*(x(:).*cos(angulos(ang)))...
124         + y(ny).*sin(angulos(ang)))); %topo
125
126     b(nx,2:ny-1)= b(nx,2:ny-1) + cos(k*(x(nx).*cos(angulos(ang)))...
127         + y(2:ny-1).*sin(angulos(ang)))); %direita
128 end
129 b=reshape(b,nx*ny,1); %transformando em vetor linha
130
131 %% Calculando a solucao numerica
132 U=A\b; %calculando a solucao numerica
133 U_matrix=reshape(U,nx,ny); %transformando o vetor em uma matriz de
    solucoes
134
135 %% Calculo da solucao exata
136 [X,Y] = meshgrid(x,y); %malha de solucoes
137 exata = 0;
138
139 for ang = 1:length(angulos)
140     exata = exata + cos(k*(X.*cos(angulos(ang)) + Y.*sin(angulos(ang))))';
141 end
142
143 %calculo da solucao exata em x=0.5 e y=0.5
144 x_corte = 0.5;
145 y_corte = 0.5;

```

```

146
147 idx_corteX = find(x==x_corte);
148 idx_corteY = find(y==y_corte);
149
150 exata_x_fixo = exata(idx_corteX,:);
151 exata_y_fixo = exata(:,idx_corteY);
152
153 U_y = zeros(nx,1);
154 U_x = zeros(ny,1);
155
156 U_x_fixo = U_matrix(idx_corteX,:);
157 U_y_fixo = U_matrix(:,idx_corteY);
158
159 %% Calculo do erro
160
161 exata_vet = reshape(exata,[nx*ny,1]);
162 erro = norm(abs(U-exata_vet))/norm(exata_vet);
163 fprintf("O erro foi de %.15f \n", erro);
164
165 %=====
166 fim = toc;
167 fprintf("O tempo total de execucao foi de %.3f segundos \n", fim);
168 disp("-----")
    ;
169 %% Plotagem dos graficos
170
171 grafico_x_fixo = figure(1);
172 plot(y,U_x_fixo,'ms-',y,exata_x_fixo,'k-', 'markersize',4,'LineWidth',
    1.5);
173 xlabel("y", 'fontsize', 15);
174 yline(0, '--', 'LineWidth', 2);
175 legendax = legend("MCDFC-9p", "Interpolante");
176
177 grafico_y_fixo = figure(2);
178 plot(x,U_y_fixo,'ms-',y,exata_y_fixo,'k-', 'markersize',4,'LineWidth',
    1.5);
179 xlabel("x", 'fontsize', 15);
180 yline(0, '--', 'LineWidth', 2);
181 legenday = legend("MCDFC-9p", "Interpolante");

```

Caso Homogêneo Bidimensional - MCDFC-9p-L9p

```
1 %{
```

```

2
3   Resolucao da Equacao de HelmHoltz Homogenea 2D
4   Utilizando Estencil de 9 pontos
5   Autor: Helder da Fonseca Nunes
6   Universidade Federal Fluminense - EEIMVR
7   FEV/2024
8
9   #####
10  CASO SIMETRICO
11  #####
12  %}
13
14
15  %% LIMPANDO AS VARIAVEIS
16
17  clc; clear variables; close all;
18
19  %% DEFININDO O DOMINIO DE SOLUCAO
20  Lx = 1 ; Ly = 1;
21  tic; %inicio do calculo do tempo de execucao
22  Nx=500; Ny=500; % numero de intervalos nas direcoes x e y
23  nx=Nx+1; ny=Ny+1; % numero de pontos do grid nas direcoes x e y
24  dx=Lx/Nx; dy=Ly/Ny; % dimensao do grid em x,y
25  x=0:dx:Lx; % intervalo em x
26  y=0:dy:Ly; % intervalo em y
27  k = 1000; %numero de onda
28  angulos = [0 pi/4 pi/8]; %angulos de direcao das ondas
29  t1 = pi/16; %angulo 1
30  t2 = (3*pi)/16; %angulo 2
31
32  %% VARIAVEIS AUXILIARES
33  kh = k*dx
34  khq = (k*dx)^2;
35  khqq = (k^4)*(dx^2);
36
37  %-----
38  u1 = cos(k*dx*cos(t1));
39  u2 = cos(k*dx*cos(t2));
40  v1 = cos(k*dx*sin(t1));
41  v2 = cos(k*dx*sin(t2));
42  %-----
43
44  denA1_A2 = 20*(v1-v2) -2*u2*(10+(-20+(10+3*khq)*v1)*v2)...

```

```

45     +u1*(20-2*(10+3*khq)*u2*v2+v1*(-40+(20+6*khq)*u2+20*v2+6*khq*v2));
46
47 denA3_A4 = 40*(v1-v2)-4*u2*(10+(-20+(10+3*khq)*v1)*v2)...
48     +4*u1*(10-(10+3*khq)*u2*v2+v1*(-20+(10+3*khq)*u2+10*v2+3*khq*v2));
49
50 denB = 10*(v1-v2)-u2*(10+(-20+(10+3*khq)*v1)*v2)+u1*(10-(10+3*khq)*u2*v2
    ...
51 +v1*(-20+(10+3*khq)*u2+10*v2+3*khq*v2));
52 %-----
53 %% DEFININDO AS DIAGONAIS
54
55 B =(3*khqq)*(u1*u2*(v1-v2)+u1*v1*v2 - u2*v1*v2)/denB; %(0)
56 A1 = -(3*khqq*(u1*v1-u2*v2))/denA1_A2; %(-nx)
57 A2 = -(3*khqq*(u1*v1-u2*v2))/denA1_A2; %(-1)
58 A3 = (3*khqq*(u1-u2+v1-v2))/denA3_A4; %(-nx-1)
59 A4 = (3*khqq*(u1-u2+v1-v2))/denA3_A4; %(-nx+1)
60 C1 = -(3*khqq*(u1*v1-u2*v2))/denA1_A2 ; %(nx)
61 C2 = -(3*khqq*(u1*v1-u2*v2))/denA1_A2 ; %(1)
62 C3 = (3*khqq*(u1-u2+v1-v2))/denA3_A4; %(nx-1)
63 C4 = (3*khqq*(u1-u2+v1-v2))/denA3_A4; %(nx+1)
64
65 %% Construcao da matriz
66 e = ones(nx*ny,1); % matriz auxiliar
67
68 % definindo os indices das condicoes de contorno
69 idx=unique([1:nx,... %topo
70             1:nx:1+(ny-1)*nx,... %esquerda
71             1+(ny-1)*nx:nx*ny,...%baixo
72             nx:nx:nx*ny...%direita
73             ]);
74
75 % diagonais da matriz
76 diagonals = [e*A1 e*A2 e*A3 e*A4 e*B e*C1 e*C2 e*C3 e*C4];
77
78 % construcao da matriz esparsa
79 A = spdiags(diagonals,[-nx -1 -nx-1 -nx+1 0 nx 1 nx-1 nx+1], nx*ny, nx*
    ny);
80 I=speye(nx*ny);
81
82 % atribuindo as condicoes de contorno
83 A(idx,:)=I(idx,:);
84
85 %% Construcao do vetor fonte

```

```
=====  
86 b=zeros(nx,ny); %elementos interiores iguais a zero  
87  
88 for ang=1:length(angulos)  
89     b(:,1)= b(:,1) + cos(k*(x(:).*cos(angulos(ang)))...  
90         + y(1).*sin(angulos(ang)))); %baixo  
91  
92     b(1,2:ny-1)= b(1,2:ny-1) + cos(k*(x(1).*cos(angulos(ang)))...  
93         + y(2:ny-1).*sin(angulos(ang)))); %esquerda  
94  
95     b(:,ny)= b(:,ny) + cos(k*(x(:).*cos(angulos(ang)))...  
96         + y(ny).*sin(angulos(ang)))); %topo  
97  
98     b(nx,2:ny-1)= b(nx,2:ny-1) + cos(k*(x(nx).*cos(angulos(ang)))...  
99         + y(2:ny-1).*sin(angulos(ang)))); %direita  
100 end  
101  
102 b=reshape(b,nx*ny,1); %transformando num vetor linha  
103  
104 %% Calculando a solucao numerica  
105 U=A\b; %calculando a solucao numerica  
106 U_matrix=reshape(U,nx,ny); %transformando o vetor em uma matriz de  
    solucoes  
107  
108 %% Calculo da solucao exata  
109 [X,Y] = meshgrid(x,y); %malha de solucoes  
110 exata = 0;  
111 for ang = 1:length(angulos)  
112     exata = exata + cos(k*(X.*cos(angulos(ang)) + Y.*sin(angulos(ang))));  
113 end  
114  
115 exata = exata';  
116  
117 %calculo da solucao exata em x=0.5 e y=0.5  
118 x_corte = 0.5;  
119 y_corte = 0.5;  
120  
121 idx_corteX = find(x==x_corte);  
122 idx_corteY = find(y==y_corte);  
123  
124 exata_x_fixo = exata(idx_corteX,:);  
125 exata_y_fixo = exata(:,idx_corteY);  
126
```

```
127 U_y = zeros(nx,1);
128 U_x = zeros(ny,1);
129
130 U_x_fixo = U_matrix(idx_corteX,:);
131 U_y_fixo = U_matrix(:,idx_corteY);
132
133
134 %% Calculo do erro
135 exata_vet = reshape(exata,[nx*ny,1]);
136 erro_rel = norm(abs(U-exata_vet))/norm(exata_vet);
137 fprintf("O erro relativo foi de %.15f \n", erro_rel);
138
139 fim = toc;
140 fprintf("O tempo total de execucao foi de %.3f segundos \n", fim);
141 disp("-----")
    ;
142 %% Plotagem dos graficos
143 grafico_x_fixo = figure(1);
144 plot(y,U_x_fixo,...
145     Color='#43A657',...
146     marker='square',...
147     markersize = 4,...
148     LineStyle='-',...
149     LineWidth=1);
150
151     hold on;
152
153 plot(y,exata_x_fixo,...
154     Color='k',...
155     marker='none',...
156     LineWidth=1,...
157     LineStyle='-');
158
159 xlabel("y", 'fontsize', 15);
160 yline(0, '--', 'LineWidth', 2);
161 legendaX = legend("MCDFC-9p-L9P", "Interpolante");
162
163 grafico_y_fixo = figure(2);
164
165 plot(x,U_y_fixo,...
166     Color='#43A657',...
167     marker='square',...
168     markersize = 4,...
```

```

169     LineStyle='-',...
170     LineWidth=1);
171
172     hold on;
173
174 plot(x,exata_y_fixo,...
175     Color='k',...
176     marker='none',...
177     LineWidth=1,...
178     LineStyle='-');
179
180 xlabel("x", 'fontsize',15);
181 ylabel("y", 'fontsize',15);
182 legendaY = legend("MCDFC-9p-L9p","Interpolante");

```

Caso Não-Homogêneo Bidimensional - MCDFC-9p-L5p

```

1  %{
2
3  Resolucao da Equacao de HelmHoltz Nao-Homogenea 2D
4  Utilizando Estencil de 9 pontos
5  Autor: Helder da Fonseca Nunes
6  Universidade Federal Fluminense - EEIMVR
7  FEV/2024
8
9  #####
10 Laplaciano 5P para G1 G2 e G3
11 Laplaciano 5P rotacionado para G4 e G5
12 #####
13 %}
14
15 %%=====INICIO
16     =====
17 %Definindo o dominio de solucao - quadrado de lado unitario
18 clc; clear variables; close all;
19 %clc;
20 Lx = 1 ; Ly = 1;
21 tic; %inicio do calculo do tempo de execucao
22 Nx=1000; Ny=1000; %numero de intervalos nas direcoes x e y
23 nx=Nx+1; ny=Ny+1; %numero de pontos do grid nas direcoes x e y
24 dx=Lx/Nx; dy=Ly/Ny; %dimensao do grid em x,y
25 x=0:dx:Lx; %intervalo em x

```

```

26 y=0:dy:Ly; %intervalo em y
27 k = 1000; %numero de onda
28 ang = pi/4; %angulos de direcao das ondas
29 t1 = pi/16; %angulo 1
30 t2 = (3*pi)/16; %angulo 2
31
32 %% Variaveis auxiliares
33 kh = k*dx
34 khq = (k*dx)^2;
35 khqq = (k^4)*(dx^2);
36
37 %-----
38 u1 = cos(k*dx*cos(t1));
39 u2 = cos(k*dx*cos(t2));
40 v1 = cos(k*dx*sin(t1));
41 v2 = cos(k*dx*sin(t2));
42 %-----
43
44 numA1A2 = (2*k^4*dx^2*u1*v1) + (k^6*dx^4*u1*v1) - (2*k^4*dx^2*u2*v2)...
45 -(k^6*dx^4*u2*v2);
46
47 denA1A2 = 16*u1 + ((4*dx^2*k^2)*u1) - (16*u2) - (4*dx^2*k^2*u2)...
48 + (16*v1) + (4*dx^2*k^2)*v1 - (32*u1*v1) - ((16*dx^2*k^2)*u1*v1)...
49 + (16*u1*u2*v1) + (12*dx^2*k^2)*u1*u2*v1 + ((2*dx^4*k^4)*u1*u2*v1)
...
50 - (16*v2) - (4*dx^2*k^2*v2) + (32*u2*v2) + ((16*dx^2*k^2)*u2*v2)...
51 - (16*u1*u2*v2) - (12*dx^2*k^2*u1*u2*v2) - (2*dx^4*k^4*u1*u2*v2)...
52 + (16*u1*v1*v2) + (12*dx^2*k^2*u1*v1*v2) + (2*dx^4*k^4*u1*v1*v2)...
53 - (16*u2*v1*v2) - (12*dx^2*k^2*u2*v1*v2) - (2*dx^4*k^4*u2*v1*v2);
54
55 numA3A4 = (2*dx^2*k^4*u1)+(dx^4*k^6*u1) - (2*dx^2*k^4*u2) - (dx^4*k^6*u2)...
56 +(2*dx^2*k^4*v1)+(dx^4*k^6*v1) - (2*dx^2*k^4*v2) - (dx^4*k^6*v2);
57
58 denA3A4 = 32*u1 + ((8*dx^2*k^2)*u1) - (32*u2) - (8*dx^2*k^2*u2)...
59 + (32*v1) + (8*dx^2*k^2)*v1 - (64*u1*v1) - ((32*dx^2*k^2)*u1*v1)...
60 + (32*u1*u2*v1) + (24*dx^2*k^2)*u1*u2*v1 + ((4*dx^4*k^4)*u1*u2*v1)
...
61 - (32*v2) - (8*dx^2*k^2*v2) + (64*u2*v2) + ((32*dx^2*k^2)*u2*v2)...
62 - (32*u1*u2*v2) - (24*dx^2*k^2*u1*u2*v2) - (4*dx^4*k^4*u1*u2*v2)...
63 + (32*u1*v1*v2) + (24*dx^2*k^2*u1*v1*v2) + (4*dx^4*k^4*u1*v1*v2)...
64 - (32*u2*v1*v2) - (24*dx^2*k^2*u2*v1*v2) - (4*dx^4*k^4*u2*v1*v2);
65
66 numB = (2*dx^2*k^4*u1*u2*v1) + (dx^4*k^6*u1*u2*v1)...

```

```

67     - (2*dx^2*k^4*u1*u2*v2) - (dx^4*k^6*u1*u2*v2)...
68     + (2*dx^2*k^4*u1*v1*v2) + (dx^4*k^6*u1*v1*v2)...
69     - (2*dx^2*k^4*u2*v1*v2) - (dx^4*k^6*u2*v1*v2);
70
71 denB = 8*u1 + ((2*dx^2*k^2)*u1) - (8*u2) - (2*dx^2*k^2*u2)...
72     + (8*v1) + (2*dx^2*k^2)*v1 - (16*u1*v1) - ((8*dx^2*k^2)*u1*v1)...
73     + (8*u1*u2*v1) + (6*dx^2*k^2)*u1*u2*v1 + ((dx^4*k^4)*u1*u2*v1)...
74     - (8*v2) - (2*dx^2*k^2*v2) + (16*u2*v2) + ((8*dx^2*k^2)*u2*v2)...
75     - (8*u1*u2*v2) - (6*dx^2*k^2*u1*u2*v2) - (dx^4*k^4*u1*u2*v2)...
76     + (8*u1*v1*v2) + (6*dx^2*k^2*u1*v1*v2) + (dx^4*k^4*u1*v1*v2)...
77     - (8*u2*v1*v2) - (6*dx^2*k^2*u2*v1*v2) - (dx^4*k^4*u2*v1*v2);
78
79 %% Parametros do metodo completo
80 %alfa1
81 a1 = 1;
82
83 %alfa2
84 num_a2 = 8*u1-8*u2+8*v1-16*u1*v1+8*u1*u2*v1-8*v2+16*u2*v2-8*u1*u2*v2...
85     +8*u1*v1*v2 - 8*u2*v1*v2+khq*(-4*u1*v1+4*u1*u2*v1+4*u2*v2-...
86     4*u1*u2*v2+4*u1*v1*v2-4*u2*v1*v2) + (k^4*dx^4)*(2*u1*v1-2*u2*v2);
87
88 den_a2 = 8*u1-8*u2+8*v1-16*u1*v1+8*u1*u2*v1-8*v2+16*u2*v2-8*u1*u2*v2...
89     +8*u1*v1*v2-8*u2*v1*v2+khq*(2*u1-2*u2+2*v1-8*u1*v1+6*u1*u2*v1-2*v2
90     ...
91     +8*u2*v2-6*u1*u2*v2+6*u1*v1*v2-6*u2*v1*v2)+(k^4*dx^4)*(u1*u2*v1-...
92     u1*u2*v2+u1*v1*v2-u2*v1*v2);
93 a2 = -(num_a2/den_a2);
94
95 %alfa4
96 num_a4 = k^4*dx^4*(-u1+u2-v1+v2);
97 den_a4 = den_a2;
98 a4 = -(num_a4/den_a4);
99
100 %% MCDFC Laplaciano Normal 9P -
101 B = numB/denB ; %(0)
102 A1 = -numA1A2/denA1A2; %(-nx)
103 A2 = A1; %(-1)
104 A3 = numA3A4/denA3A4; %(-nx-1)
105 A4 = A3; %(-nx+1)
106 C1 = A1; %(nx)
107 C2 = A1; %(1)
108 C3 = A3; %(nx-1)

```

```

109 C4 = A3; %(nx+1)
110
111 %% Construcao da matriz=====
112 e = ones(nx*ny,1);
113
114 % definindo os indices das condicoes de contorno
115 idx=unique([1:nx,... %topo
116             1:nx:1+(ny-1)*nx,... %esquerda
117             1+(ny-1)*nx:nx*ny,...%baixo
118             nx:nx:nx*ny...%direita
119             ]);
120
121 %diagonais da matriz
122 diagonals = [e*A1 e*A2 e*A3 e*A4 e*B e*C1 e*C2 e*C3 e*C4];
123
124 %construcao da matriz esparsa
125 A = spdiags(diagonals,[-nx -1 -nx-1 -nx+1 0 nx 1 nx-1 nx+1], nx*ny, nx*
126             ny);
127
128 % atribuindo as condicoes de contorno
129 A(idx,:)=I(idx,:);
130
131 %% Construcao do vetor fonte
132     =====
133 % Termo fonte
134 fonte = zeros(length(x),length(y));
135 b = zeros(length(x),length(y));
136 for i=1:nx
137     for j=1:ny
138         fonte(i,j) = ((4 + (k^2.*(x(i)^2 + y(j)^2))))*(a1+a2+a4);
139         b(i,j) = x(i)^2 + y(j)^2 + sin(k*(x(i)*cos(ang)+(y(j)*sin(ang)))
140     );
141     end
142 end
143 b(2:nx-1,2:ny-1) = fonte(2:nx-1,2:ny-1);
144
145 b=reshape(b,nx*ny,1); %transformando em vetor linha
146
147 %% Calculando a solucao numerica
148

```

```
149 U=A\b; %calculando a solucao numerica
150 U_matrix=reshape(U,nx,ny); %transformando o vetor em uma matriz de
    solucoes
151
152 %% Calculo da solucao exata
153
154 [X,Y] = meshgrid(x,y); %malha de solucoes
155 exata_x=0;
156 exata_y=0;
157
158 exata = X.^2 + Y.^2 + sin(k*((X.*cos(ang)) + (Y.*sin(ang)))); %calculo
    da solucao exata
159 exata=exata';
160
161 %calculo da solucao exata em x=0.5 e y=0.5
162 x_corte = 0.5;
163 y_corte = 0.5;
164
165 idx_corteX = find(x==x_corte);
166 idx_corteY = find(y==y_corte);
167
168 exata_x_fixo = exata(idx_corteX,:);
169 exata_y_fixo = exata(:,idx_corteY);
170
171 U_y = zeros(nx,1);
172 U_x = zeros(ny,1);
173
174 U_x_fixo = U_matrix(idx_corteX,:);
175 U_y_fixo = U_matrix(:,idx_corteY);
176
177 %% Calculo do erro
178
179 exata_vet = reshape(exata,[nx*ny,1]);
180 erro_rel = norm(abs(U-exata_vet))/norm(exata_vet);
181 fprintf("O erro foi de %.15f \n", erro_rel);
182
183 %=====
184 fim = toc;
185 fprintf("O tempo total de execucao foi de %.3f segundos \n", fim);
186 disp("-----")
    ;
187 %% Plotagem dos graficos=====
188
```

```

189 grafico_x_fixo = figure(1);
190 plot(y,U_x_fixo,'ms-',y,exata_x_fixo,'k-', 'markersize',4,'LineWidth'
    ,1.5);
191 xlabel("y",'fontsize',15);
192 yline(0,'--','LineWidth',2);
193 legendax = legend("MCDFC-9p","Interpolante");
194
195 grafico_y_fixo = figure(2);
196 plot(x,U_y_fixo,'ms-',y,exata_y_fixo,'k-', 'markersize',4,'LineWidth'
    ,1.5);
197 xlabel("x",'fontsize',15);
198 yline(0,'--','LineWidth',2);
199 legenday = legend("MCDFC-9p","Interpolante");

```

Caso Não-Homogêneo Bidimensional - MCDFC-9p-L9p

```

1  %{
2
3  Resolucao da Equacao de HelmHoltz Nao-Homogenea 2D
4  Utilizando Estencil de 9 pontos
5  Autor: Helder da Fonseca Nunes
6  Universidade Federal Fluminense - EEIMVR
7  FEV/2024
8
9  #####
10 Discretizacao usando laplaciano de 9P do LeVeque
11 em todos os vetores geradores e termo k2u rotacionado
12 no G4 e G5
13 #####
14 %}
15
16 %===== INICIO =====
17
18 clc; clear variables; close all;
19
20 %Definindo o dominio de solucao - quadrado de lado unitario
21 Lx = 1 ; Ly = 1;
22 tic; %inicio do calculo do tempo de execucao
23 Nx=500; Ny=500; % numero de intervalos nas direcoes x e y
24 nx=Nx+1; ny=Ny+1; % numero de pontos do grid nas direcoes x e y
25 dx=Lx/Nx; dy=Ly/Ny; % dimensao do grid em x,y
26 x=0:dx:Lx; % intervalo em x
27 y=0:dy:Ly; % intervalo em y

```

```

28 k = 100; %numero de onda
29 ang = pi/4; %angulos de direcao das ondas
30 t1 = pi/16; %angulo 1
31 t2 = (3*pi)/16; %angulo 2
32
33 %% Variaveis auxiliares
34 kh = k*dx
35 khq = (k*dx)^2;
36 khqq = (k^4)*(dx^2);
37
38 %-----
39 u1 = cos(k*dx*cos(t1));
40 u2 = cos(k*dx*cos(t2));
41 v1 = cos(k*dx*sin(t1));
42 v2 = cos(k*dx*sin(t2));
43 %-----
44
45 denA1_A2 = 20*(v1-v2) -2*u2*(10+(-20+(10+3*khq)*v1)*v2)...
46           +u1*(20-2*(10+3*khq)*u2*v2+v1*(-40+(20+6*khq)*u2+20*v2+6*khq*v2));
47
48 denA3_A4 = 40*(v1-v2) -4*u2*(10+(-20+(10+3*khq)*v1)*v2)...
49           +4*u1*(10-(10+3*khq)*u2*v2+v1*(-20+(10+3*khq)*u2+10*v2+3*khq*v2));
50
51 denB = 10*(v1-v2) -u2*(10+(-20+(10+3*khq)*v1)*v2)+u1*(10-(10+3*khq)*u2*v2
52       ...
53       +v1*(-20+(10+3*khq)*u2+10*v2+3*khq*v2));
54 %% Parametros do metodo
55 %alfa1
56 a1 = 1;
57
58 %alfa2
59 num_a2 = 8*u1-8*u2+8*v1-16*u1*v1+8*u1*u2*v1-8*v2+16*u2*v2-8*u1*u2*v2...
60         +8*u1*v1*v2-8*u2*v1*v2 + khq*(6*u1*v1-6*u2*v2);
61
62 den_a2 = 10*u1-10*u2+10*v1-20*u1*v1+10*u1*u2*v1-10*v2+20*u2*v2...
63         -10*u1*u2*v2+10*u1*v1*v2-10*u2*v1*v2+khq*(3*u1*u2*v1-3*u1*u2*v2...
64         +3*u1*v1*v2-3*u2*v1*v2);
65
66 a2 = -(num_a2/den_a2);
67
68 %alfa4
69 num_a4 = 2*u1-2*u2+2*v1-4*u1*v1+2*u1*u2*v1-2*v2+4*u2*v2-2*u1*u2*v2...

```

```

70     +2*u1*v1*v2-2*u2*v1*v2+khq*(-3*u1+3*u2-3*v1+3*v2);
71
72 den_a4 = den_a2;
73
74 a4 = -(num_a4/den_a4);
75 %-----
76 %% MCDFC Leveque 9P -
77
78 B =(3*khqq)*(u1*u2*(v1-v2)+u1*v1*v2 - u2*v1*v2)/denB; %(0)
79 A1 = -(3*khqq*(u1*v1-u2*v2))/denA1_A2; %(-nx)
80 A2 = -(3*khqq*(u1*v1-u2*v2))/denA1_A2; %(-1)
81 A3 = (3*khqq*(u1-u2+v1-v2))/denA3_A4; %(-nx-1)
82 A4 = (3*khqq*(u1-u2+v1-v2))/denA3_A4; %(-nx+1)
83 C1 = -(3*khqq*(u1*v1-u2*v2))/denA1_A2 ; %(nx)
84 C2 = -(3*khqq*(u1*v1-u2*v2))/denA1_A2 ; %(1)
85 C3 = (3*khqq*(u1-u2+v1-v2))/denA3_A4; %(nx-1)
86 C4 = (3*khqq*(u1-u2+v1-v2))/denA3_A4; %(nx+1)
87
88 %% Construcao da matriz=====
89 e = ones(nx*ny,1); % matriz auxiliar
90
91 % definindo os indices das condicoes de contorno
92 idx=[1:nx,... %topo
93      1:nx:1+(ny-1)*nx,... %esquerda
94      1+(ny-1)*nx:nx*ny,...%baixo
95      nx:nx:nx*ny...%direita
96      ];
97
98 % diagonais da matriz
99 diagonals = [e*A1 e*A2 e*A3 e*A4 e*B e*C1 e*C2 e*C3 e*C4];
100
101 % construcao da matriz esparsa
102 A = spdiags(diagonals,[-nx -1 -nx-1 -nx+1 0 nx 1 nx-1 nx+1], nx*ny, nx*
103            ny);
104
105 I=speye(nx*ny);
106
107 % atribuindo as condicoes de contorno
108 A(idx,:)=I(idx,:);
109 idf = idx; %renomeando a variavel p/ posterior utilizacao
110
111 %% Construcao do vetor fonte=====
112 % Termo fonte
113 fonte = zeros(length(x),length(y));

```

```

112 b = zeros(length(x),length(y));
113 for i=1:nx
114     for j=1:ny
115         fonte(i,j) = ((4 + (k^2.*(x(i)^2 + y(j)^2))))*(a1+a2+a4);
116
117         b(i,j) = x(i)^2 + y(j)^2 + sin(k*(x(i)*cos(ang)...
118             +(y(j)*sin(ang)))));
119     end
120 end
121
122 b(2:nx-1,2:ny-1) = fonte(2:nx-1,2:ny-1);
123 b=reshape(b,nx*ny,1); %transformando num vetor linha
124
125 %% Calculando a solucao numerica=====
126
127 U=A\b; %calculando a solucao numerica
128 U_matrix=reshape(U,nx,ny); %transformando o vetor em uma matriz de
129 % solucoes
130
131 %% Calculo da solucao exata=====
132 [X,Y] = meshgrid(x,y); %malha de solucoes
133 exata = 0;
134 exata_x=0;
135 exata_y=0;
136
137 exata = X.^2 + Y.^2 + sin(k*((X.*cos(ang)) + (Y.*sin(ang)))); %calculo
138 % da solucao exata
139 exata=exata';
140
141 %calculo da solucao exata em x=0.5 e y=0.5
142 x_corte = 0.5;
143 y_corte = 0.5;
144 idx_corteX = find(x==x_corte);
145 idx_corteY = find(y==y_corte);
146 exata_x_fixo = exata(idx_corteX,:);
147 exata_y_fixo = exata(:,idx_corteY);
148 U_y = zeros(nx,1);
149 U_x = zeros(ny,1);
150 U_x_fixo = U_matrix(idx_corteX,:);
151 U_y_fixo = U_matrix(:,idx_corteY);
152
153 %% Calculo do erro
154 exata_vet = reshape(exata,[nx*ny,1]);

```

```
155 erro_rel = norm(abs(U-exata_vet))/norm(exata_vet);
156 fprintf("O erro relativo foi de %.15f \n", erro_rel);
157 %=====
158 fim = toc;
159 fprintf("O tempo total de execucao foi de %.3f segundos \n", fim);
160 disp("-----")
    ;
161 %% Plotagem dos graficos=====
162 grafico_x_fixo = figure(1);
163 plot(y,U_x_fixo,...
164     Color='#43A657',...
165     marker='square',...
166     markersize = 4,...
167     LineStyle='-',...
168     LineWidth=1);
169 hold on;
170 plot(y,exata_x_fixo,...
171     Color='k',...
172     marker='none',...
173     LineWidth=1,...
174     LineStyle='--');
175 xlabel("y", 'fontsize',15);
176 yline(0, '--', 'LineWidth', 2);
177 legendaX = legend("MCDFC-9p-L9P", "Interpolante");
178
179 grafico_y_fixo = figure(2);
180 plot(x,U_y_fixo,...
181     Color='#43A657',...
182     marker='square',...
183     markersize = 4,...
184     LineStyle='-',...
185     LineWidth=1);
186 hold on;
187 ,exata_y_fixo,...
188     Color='k',...
189     marker='none',...
190     LineWidth=1,...
191     LineStyle='--');
192
193 xlabel("x", 'fontsize',15);
194 yline(0, '--', 'LineWidth', 2);
195 legendaY = legend("MCDFC-9p-L9p", "Interpolante");
```