

Universidade Federal Fluminense

SERGIO CORDERO CALVIMONTES

Homogeneização Computacional para o  
Cálculo de Propriedades Efetivas em  
Compósitos Viscoelásticos Lineares

VOLTA REDONDA

2024

SERGIO CORDERO CALVIMONTES

# Homogeneização Computacional para o Cálculo de Propriedades Efetivas em Compósitos Viscoelásticos Lineares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Orientador:

Reinaldo Rodríguez Ramos

Coorientador:

Panters Rodríguez Bermúdez  
Jorge Alberto Rodríguez Durán

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

VOLTA REDONDA

2024

Ficha catalográfica automática - SDC/BEM  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

C794h Cordero Calvimontes, Sergio  
Homogeneização computacional para o cálculo de  
propriedades efetivas em compósitos viscoelásticos lineares  
/ Sergio Cordero Calvimontes. - 2024.  
140 f.: il.

Orientador: Reinaldo Rodríguez Ramos.  
Coorientador: Panters Rodríguez Bermúdez.  
Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,  
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta  
Redonda, Volta Redonda, 2024.

1. Homogeneização assintótica. 2. Viscoelasticidade  
linear. 3. Compósitos laminados. 4. Estrutura periódica. 5.  
Produção intelectual. I. Rodríguez Ramos, Reinaldo,  
orientador. II. Rodríguez Bermúdez, Panters, coorientador.  
III. Universidade Federal Fluminense. Escola de Engenharia  
Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda. IV. Título.

CDD - XXX

# Homogeneização Computacional para o Cálculo de Propriedades Efetivas em Compósitos Viscoelásticos Lineares

Sergio Cordero Calvimontes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada por:



---

Prof. Reinaldo Rodríguez Ramos, D.Sc. / MCCT-UFF

(Presidente)

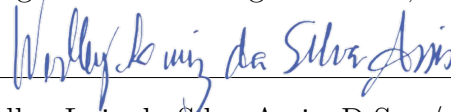
Jorge Alberto  
Rodriguez

Duran:05228163719

---

Prof. Jorge Alberto Rodríguez Duran, D.Sc. / UFF

Digitally signed by Jorge Alberto  
Rodriguez Duran:05228163719  
Date: 2024.10.24 08:27:36 -03'00'



---

Prof. Wesley Luiz da Silva Assis, D.Sc. / MCCT-UFF



---

Prof. José António Otero Hernández, D.Sc. / ITESM-CEM



---

Prof. Ricardo de Medeiros, D.Sc. / PPGEM-UDESC

Volta Redonda, 18 de Outubro de 2024.

# Resumo

Este estudo propõe uma ferramenta computacional para o cálculo de propriedades efetivas de meios heterogêneos, baseada no método de homogeneização assintótica em duas escalas: global e local. A escala global considera a perspectiva macroscópica de um corpo de prova de material compósito, enquanto a escala local foca em um volume representativo microscópico com características periódicas, descrevendo o comportamento micromecânico do material. O foco está em sólidos quase rígidos com comportamento viscoelástico modelados por uma lei constitutiva linear entre tensões e deformações. O desenvolvimento ocorre em duas etapas. Primeiramente, é deduzida uma expressão para calcular as propriedades homogeneizadas de um meio heterogêneo globalmente isotrópico utilizando o método de homogeneização assintótica. Diferente do método tradicional, esta expressão é obtida sem a necessidade de resolver explicitamente o problema local, que depende da microestrutura do volume representativo. Esta abordagem serve para apresentar a estratégia de simplificação da complexidade algorítmica. Além disso, a expressão deduzida é aplicada em exemplos unidimensionais na seção de resultados. Na segunda etapa, é deduzida uma expressão adaptada para o cálculo de propriedades em meios estratificados. Esta abordagem facilita a implementação computacional e apresenta três características principais: 1. Manipulação vetorizada de dados; 2. Reconfiguração automática das operações com base na direção de simetria axial escolhida; e 3. Suporte para fases anisotrópicas como argumentos de entrada. No entanto, essa abordagem é limitada a meios transversalmente isotrópicos do ponto de vista macroscópico. Na etapa de comparação com resultados da literatura, são apresentados critérios e condições que levantam questionamentos sobre a equivalência entre implementações que utilizam homogeneização diretamente no domínio temporal, como a abordagem proposta, e aquelas que se baseiam no princípio de correspondência elástico-viscoelástico via transformadas integrais. Conclui-se que o método de homogeneização assintótica pode ser implementado para calcular propriedades homogeneizadas em meios viscoelásticos diretamente no domínio temporal. O programa e as funções auxiliares desenvolvidas fornecem uma base teórica para futuros desenvolvimentos que envolvam casos mais complexos.

# Abstract

This study proposes a computational tool for calculating effective properties of heterogeneous media based on the asymptotic homogenization method across two scales: global and local. The global scale considers the macroscopic perspective of a composite material specimen, while the local scale focuses on a representative microscopic volume with periodic characteristics, capturing the micromechanical behavior of the material. The focus is on nearly rigid solids with viscoelastic behavior, modeled by a linear constitutive law between stresses and strains. The development is carried out in two stages. In the first stage, an expression is derived for calculating the homogenized properties of a globally isotropic heterogeneous medium using the asymptotic homogenization method. Unlike traditional methods, this expression is obtained without explicitly solving the local problem, which depends on the microstructure of the representative volume. This approach aims to simplify algorithmic complexity. Additionally, the derived expression is applied to one-dimensional examples in the results section. In the second stage, an adapted expression is derived for calculating properties in layered media. This approach facilitates computational implementation and exhibits three main features: (1) Vectorized data manipulation; (2) Automatic reconfiguration of operations based on the chosen axial symmetry direction; and (3) Support for anisotropic phases as input arguments. However, this approach is limited to macroscopically transversely isotropic media. In the comparison with results from the literature, criteria and conditions are presented that raise questions about the equivalence between implementations using homogenization directly in the time domain, as in the proposed approach, and those based on the elastic-viscoelastic correspondence principle via integral transforms. It is concluded that the asymptotic homogenization method can be implemented to calculate homogenized properties in viscoelastic media directly in the time domain. The developed program and auxiliary functions provide a theoretical foundation for future developments involving more complex cases.

# Palavras-chave

1. Homogeneização assintótica
2. Viscoelasticidade linear
3. Compósitos laminados
4. Estrutura periódica
5. Função Lambda

# Glossário

|        |   |  |
|--------|---|--|
| BLAS   | : | <i>Basic Linear Algebra Subprograms</i>                      |
| CII    | : | Convolução Inversa Implícita                                 |
| DED    | : | Decadência exponencial de Dischinger                         |
| EEIMVR | : | Escola de Engenharia Industrial Metalúrgica de Volta Redonda |
| EDP    | : | Equação Diferencial Parcial                                  |
| ICP    | : | Integração por Compatibilidade Periódica                     |
| LAPACK | : | <i>Linear Algebra PACKage</i>                                |
| MEF    | : | Método de Elementos Finitos                                  |
| MH     | : | Método de Homogeneização                                     |
| MHA    | : | Método de Homogeneização Assintótica                         |
| MCCT   | : | Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia              |
| MM     | : | Método Micromecânico   |
| MSP    | : | Média Sobre o Período  |
| MV     | : | Método Variacional   |
| NaN    | : | <i>Not a Number</i>  |
| RLB    | : | <i>Reuss Lower Bound</i>                                     |
| SLS    | : | <i>Standard Linear Solid</i>                                 |
| SBR    | : | <i>Scott Blair-Rabotnov</i> (o kernel)                       |
| TNL    | : | <i>Termos Não-Lineares</i>                                   |
| UFF    | : | Universidade Federal Fluminense                              |
| VUB    | : | <i>Voigt Upper Bound</i>                                     |



# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>   | <b>10</b> |
| 1.1      | Estado da arte . . . . .                                    | 12        |
| 1.2      | Motivação . . . . .   | 18        |
| 1.3      | Objetivos . . . . .   | 19        |
| <b>2</b> | <b>Fundamental teórico</b>                                  | <b>21</b> |
| 2.1      | Definições em contexto . . . . .                            | 21        |
| 2.2      | Equações para um meio viscoelástico linear . . . . .        | 22        |
| 2.3      | Método de homogeneização assintótica . . . . .              | 25        |
| 2.3.1    | Expansão assintótica . . . . .                              | 26        |
| 2.3.2    | Problema local . . . . .                                    | 27        |
| 2.3.3    | Aproximação de primeira ordem . . . . .                     | 29        |
| 2.3.4    | Propriedade homogeneizada — domínio do tempo . . . . .      | 30        |
| 2.3.5    | Equação homogeneizada . . . . .                             | 30        |
| 2.4      | Vantagens e desvantagens do MHA . . . . .                   | 31        |
| 2.5      | Aplicação do MHA . . . . .                                  | 33        |
| 2.5.1    | Homogeneização em compósitos estratificados . . . . .       | 33        |
| 2.5.1.1  | Problema local em um caso de simetria axial . . . . .       | 35        |
| 2.5.1.2  | Coefficiente efetivo em um caso de simetria axial . . . . . | 37        |
| 2.6      | Kernels viscoelásticos . . . . .                            | 40        |
| 2.6.1    | Sólido Linear Padrão, kernel Zener . . . . .                | 40        |
| 2.6.2    | Decadência exponencial de Dischinger . . . . .              | 41        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.6.3    | Núcleo de Scott Blair e Rabotnov . . . . .                           | 42        |
| <b>3</b> | <b>Metodologia</b>   | <b>45</b> |
| 3.1      | Considerações preliminares . . . . .                                 | 47        |
| 3.2      | Definição dos operadores . . . . .                                   | 48        |
| 3.3      | Manipulação algébrica baseada no MHA . . . . .                       | 52        |
| 3.3.1    | Expansão assintótica . . . . .                                       | 53        |
| 3.3.2    | Aproximação de primeira ordem . . . . .                              | 54        |
| 3.3.2.1  | Primeiro termo da expansão . . . . .                                 | 55        |
| 3.3.2.2  | Problema local . . . . .   | 56        |
| 3.3.2.3  | Coeficientes efetivos — Propriedade homogeneizada . . . . .          | 60        |
| 3.3.2.4  | Equação homogeneizada . . . . .                                      | 62        |
| 3.4      | Implementação . . . . .  | 62        |
| 3.4.1    | Simplificações importantes . . . . .                                 | 63        |
| 3.4.2    | Compósito estratificado . . . . .                                    | 65        |
| 3.4.3    | Algoritmo computacional . . . . .                                    | 68        |
| 3.4.3.1  | Exemplo do algoritmo computacional . . . . .                         | 69        |
| 3.4.3.2  | Algoritmos auxiliares . . . . .                                      | 74        |
| <b>4</b> | <b>Resultados</b>  | <b>77</b> |
| 4.1      | Compósitos bifásicos unidimensionais . . . . .                       | 78        |
| 4.1.1    | Caso 1: Fase elástica e fase viscosa . . . . .                       | 78        |
| 4.1.2    | Caso 2: Kernel Zener em ambas as fases . . . . .                     | 81        |
| 4.1.3    | Caso 3: Núcleo de Scott Blair e Rabotnov em ambas as fases . . . . . | 85        |
| 4.1.4    | Caso 4: Kernel Zener com três fases . . . . .                        | 89        |
| 4.2      | Compósitos bifásicos estratificados . . . . .                        | 91        |
| 4.2.1    | Caso 1: Fase elástica e fase com kernel de Dischinger . . . . .      | 92        |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>5</b> | <b>Conclusões e trabalhos futuros</b>  | <b>98</b>  |
| 5.1      | Conclusões gerais . . . . .  | 98         |
| 5.2      | Conclusões específicas . . . . .   | 99         |
| 5.3      | Trabalhos futuros . . . . .  | 101        |
|          | <b>Referências</b>   | <b>102</b> |
|          | <b>Apêndice A</b>  | <b>114</b> |
| A.1      | Princípio de Correspondência . . . . .   | 114        |
| A.1.1    | Homogeneização como um operador . . . . .                                      | 114        |
| A.1.2    | Propriedade homogeneizada — domínio de Laplace-Carson . . . . .                | 116        |
|          | <b>Apêndice B</b>  | <b>117</b> |
| B.1      | Exemplo didático do algoritmo computacional . . . . .                          | 117        |
| B.1.1    | Instruções modelo para criação de figuras . . . . .                            | 117        |
| B.1.2    | Kernel fracionário de Scott Blair e Rabotnov . . . . .                         | 117        |
| B.1.3    | Função Mittag-Leffler . . . . .  | 118        |
| B.1.4    | Função de Laplace, e inversa, no ambiente simbólico . . . . .                  | 119        |
| B.2      | Caso <i>1D</i> 1: Fase elástica e fase viscosa . . . . .                       | 120        |
| B.2.1    | Programa 1: . . . . .  | 120        |
| B.3      | Caso <i>1D</i> 2: Kernel Zener em ambas as fases . . . . .                     | 122        |
| B.3.1    | Programa 2: . . . . .  | 122        |
| B.4      | Caso <i>1D</i> 3: Núcleo de Scott Blair e Rabotnov em ambas as fases . . . . . | 124        |
| B.4.1    | Programa 3: . . . . .  | 124        |
| B.5      | Caso <i>1D</i> 4: Kernel Zener com três fases . . . . .                        | 126        |
| B.5.1    | Programa 4: . . . . .  | 126        |
| B.6      | Caso estratificado 1: Fase elástica e fase com kernel de Dischinger . . . . .  | 129        |
| B.6.1    | Programa 5: . . . . .  | 129        |

# Capítulo 1

## Introdução

Weber e Kohlrausch, em 1835 e 1847, respectivamente, conduziram os primeiros estudos empíricos sobre viscoelasticidade [87]. Naquela época, os pesquisadores alemães se referiam aos fenômenos viscoelásticos como “efeito pós-elástico” [21, 23]. Em 1876 Boltzmann introduziu um modelo matemático inovador e não empírico, o *princípio da superposição* [22], que se ajusta aos dados experimentais com precisão [58](p.17). Com os avanços técnicos, o termo “elasticidade retardada” começou a ser utilizado para descrever o comportamento viscoelástico [87]. Nesse contexto, Volterra propôs uma abordagem mais descritiva através de equações integro-diferenciais [149]; essas equações foram usadas por vários autores e formaram a base para o conceito de “comportamento hereditário”, mais tarde conhecido como “teoria endocrônica”. A partir da década de 1960, esse conceito central passou a ser reconhecido como o *efeito o princípio de memória* [68] (p.310).

A motivação para a elaboração de livros-texto na década de 1970, segundo [58], surge do crescimento exponencial no uso de polímeros, o que estabeleceu uma base teórica para prever os fenômenos associados à viscoelasticidade. As equações constitutivas que mensuram as propriedades viscoelásticas começaram a ser chamadas de *kernels* [68, 17, 59, 61, 119], e foram aplicadas nas integrais de Riemann-Stieltjes juntamente com o *princípio de correspondência* elástico-viscoelástico [70, 71, 72, 95] envolvendo transformadas integrais [61, 14]. Posteriores avanços na área incluem análise variacional [34] e termodinâmica [56], ambos aplicados a problemas reológicos [91].

Paralelamente, na década de 1970, no contexto de materiais compósitos, foram aplicadas técnicas de homogeneização [120] desenvolvidas por Bakhvalov para problemas com propriedades em micro escala, conforme documentado em [136] (Cap.5-6) e posteriormente em [9]. Esses métodos foram aplicados a estruturas micro-periódicas [36] e apresentadas em livros-texto por [118, 35], utilizando o Método de Homogeneização Assintótica (MHA).

Os avanços no início do século XXI no campo da ciência dos materiais compósitos incluem o desenvolvimento de bases teóricas para cálculos computacionais e métodos numéricos [102], além da aplicação de métodos estocásticos na engenharia e em processos [80]. Destacam-se também a programação multi-paradigma voltada para a manipulação vetorizada de dados [150] e abordagens que consideram múltiplas escalas espaciais aninhadas [97, 100]. Mais recentemente, aplicações do Cálculo fracionário [156] ganharam relevância no projeto de kernels. Esses e outros avanços estão na interseção entre a ciência dos materiais e a ciência da computação, que é o segmento científico deste trabalho.

As propriedades das substâncias estão definidas pelos seus constituintes [27, 116, 30]. Essa afirmação pode ser abordada tanto de forma axiomática quanto empírica, ou ainda por meio do desenvolvimento de ferramentas analíticas que definam a conexão entre os componentes fundamentais de um material e seu comportamento. Neste contexto, uma metodologia de homogeneização (à princípio não necessariamente assintótica e nem computacional) procura estabelecer uma relação matemática rigorosa entre as propriedades das substâncias constituintes, levando em consideração uma escala local para determinar o comportamento global. Embora essa metodologia seja independente da natureza física dos fenômenos em estudo, o escopo deste trabalho está delimitado ao contexto mecânico, especificamente em materiais compostos por pelo menos uma substância com comportamento viscoelástico expresso por uma relação linear em relação ao tempo e ao espaço.

O MHA propõe propriedades homogêneas que representam um meio fundamentalmente heterogêneo e periódico, possibilitando a formulação de um problema assintoticamente equivalente ao problema original. Essa ferramenta analítica pode ser aplicada recursivamente ou por partes, levando em conta as escalas de cada subsistema aninhado conforme a microestrutura do material, e proporciona resultados mais precisos à medida que a diferença entre as escalas se torna mais pronunciada [9, 36, 35]. Adicionalmente, sob uma perspectiva holística, a aplicação do MHA normalmente envolve duas etapas consecutivas: o cálculo das propriedades homogêneas e a solução do problema homogeneizado. O escopo deste trabalho está limitado apenas à primeira etapa, **focando no cálculo das propriedades materiais efetivas de um meio viscoelástico heterogêneo**, sem determinar a dinâmica do material, para o qual seria necessário fornecer as solicitações mecânicas correspondentes (campo de deslocamentos e distribuição de carga).

A abordagem computacional amplia a capacidade de processamento de informação do método, permitindo lidar com problemas relativamente mais intrincados. Neste sentido, este trabalho propõe uma versão computacional do MHA no contexto especificado.

## 1.1 Estado da arte

O contexto bibliográfico deste trabalho é filtrado por cinco características principais:

- O *método de homogeneização* utilizado para abordar o problema heterogêneo;
- O *domínio da variável transitória*, excluindo casos com propriedades constantes;
- As *condições de simulação*, que definem a configuração específica do método;
- A *microestrutura* do compósito, que define a configuração específica do material;
- O *modelo matemático do kernel*, delimitando o escopo para casos viscoelásticos.

Esta seção apresenta uma breve análise dessas características para posicionar o presente estudo, destacando sua importância científica, no contexto de publicações relevantes.

Com relação à metodologia, a literatura científica oferece uma ampla gama de estudos sobre caracterização experimental, modelagem e simulação de materiais compósitos. Contudo, para lidar com a complexidade das estruturas heterogêneas, surgem diferentes abordagens, todas baseadas na idealização de regiões relativamente pequenas que codificam a informação necessária para definir e prever as propriedades do material. Entre os principais paradigmas, destacam-se os métodos de células ou volumes representativos, como por exemplo o MHA, e os métodos de discretização espacial, como o Método de Elementos Finitos (MEF). Embora independentes, ambos os paradigmas compartilham metodologias mais fundamentais como os Métodos Micromecânicos (MM), Métodos Variacionais (MV), Métodos de Homogeneização (MH) e diversas técnicas numéricas.

No contexto da viscoelasticidade, segundo [147, 127], há duas abordagens metodológicas principais com relação à variável transitória: a aplicação direta no domínio do tempo ou o uso de equações transformadas para o regime elástico linear via correspondência elástico-viscoelástica. Essas abordagens detalhadas na inter-relação conceitual de funções viscoelásticas conforme discutido por [24] (p.227), [84] (p.101) e [66], com destaque para as transformadas integrais de Fourier e de Laplace-Carson, que segundo [88] é uma versão adaptada da transformada de Laplace compatível com as unidades físicas do problema.

Quanto às condições de simulação, os estudos sobre materiais compósitos abordam a caracterização, modelagem e simulação em diferentes cenários, levando em conta a direcionalidade e transitoriedade das propriedades materiais, as interfaces entre substâncias, a geometria da célula representativa, e o cálculo das dinâmicas envolvidas. A Tabela (1.1) apresenta publicações que atendem a essas condições, filtrando metodologias que aplicam homogeneização, como células representativas ou discretização espacial, e em compósitos com pelo menos uma substância viscoelástica analisável por uma variável transitória.

| Autores | Ano  | Métodos |     |        |        |               | Variável |                |         | Condições de simulação |                  |                   |                |                    |               |                  |                 |                    |
|---------|------|---------|-----|--------|--------|---------------|----------|----------------|---------|------------------------|------------------|-------------------|----------------|--------------------|---------------|------------------|-----------------|--------------------|
|         |      | MH-MM   | MHA | VM-MEF | Outros | Experimentais | Tempo    | Laplace-Carson | Fourier | Fase isotrópica        | Contato perfeito | Fase de interface | Envelhecimento | Proporção variável | Célula cúbica | Célula hexagonal | Célula romboide | Coord. curvilíneas |
| [154]   | 1990 | •       |     |        |        | •             | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [11]    | 1994 | •       |     |        | •      |               | •        |                | •       |                        |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [107]   | 1995 | •       |     | •      |        | •             |          | •              | •       |                        |                  |                   |                |                    |               | •                |                 |                    |
| [157]   | 1995 | •       |     | •      |        |               | •        |                | •       |                        | •                |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [25]    | 1998 | •       |     | •      | •      | •             | •        |                | •       |                        |                  |                   |                |                    | •             | •                |                 |                    |
| [158]   | 1998 |         | •   | •      |        |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [101]   | 1999 |         |     | •      |        |               | •        | •              | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             | •                |                 | •                  |
| [60]    | 2001 | •       |     | •      | •      |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    |               | •                |                 |                    |
| [93]    | 2003 | •       |     |        | •      |               | •        |                | •       | •                      |                  | •                 |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [90]    | 2004 |         | •   |        | •      |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [99]    | 2004 | •       |     |        |        |               | •        | •              | •       | •                      | •                |                   |                |                    | •             |                  |                 | •                  |
| [88]    | 2006 | •       |     |        | •      |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [83]    | 2007 |         |     | •      | •      |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [82]    | 2008 | •       |     | •      | •      |               | •        |                | •       | •                      | •                |                   |                |                    | •             |                  |                 | •                  |
| [106]   | 2008 | •       |     | •      |        |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 | •                  |
| [137]   | 2009 | •       | •   |        |        |               | •        |                | •       | •                      |                  | •                 | •              |                    | •             |                  |                 |                    |
| [126]   | 2009 |         |     | •      |        |               |          | •              | •       | •                      |                  | •                 |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [1]     | 2009 | •       |     | •      |        |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 | •                  |
| [147]   | 2011 | •       |     | •      |        |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 | •                  |
| [6]     | 2011 |         | •   |        | •      |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [98]    | 2012 | •       |     | •      |        |               | •        |                | •       | •                      |                  | •                 |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [135]   | 2013 | •       |     | •      | •      |               | •        |                | •       | •                      |                  | •                 |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [26]    | 2013 | •       |     | •      | •      |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 | •                  |
| [28]    | 2013 |         |     | •      | •      |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    |               | •                |                 |                    |
| [30]    | 2014 | •       |     | •      | •      |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [143]   | 2015 |         |     | •      |        |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [46]    | 2016 | •       |     | •      |        |               | •        | •              | •       | •                      | •                |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [151]   | 2016 | •       |     | •      |        | •             | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             | •                | •               | •                  |
| [42]    | 2017 |         | •   |        |        |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [146]   | 2017 | •       |     | •      |        |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [89]    | 2018 |         | •   | •      |        |               |          | •              | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [44]    | 2018 |         | •   | •      |        |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [18]    | 2018 |         |     | •      | •      |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    |               | •                | •               |                    |
| [41]    | 2019 |         | •   | •      |        |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 | •                  |
| [45]    | 2020 | •       | •   |        |        |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |
| [112]   | 2020 |         | •   | •      | •      |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             | •                |                 |                    |
| [127]   | 2020 |         | •   |        | •      |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             | •                |                 |                    |
| [43]    | 2022 |         | •   |        |        |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 | •                  |
| [111]   | 2023 |         | •   |        | •      |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    |               | •                |                 |                    |
| [122]   | 2023 |         | •   |        | •      |               | •        |                | •       | •                      |                  |                   |                |                    | •             |                  |                 |                    |

\*Considera a dinâmica (inclui a configuração estática) do comportamento do material, calculando campo de deslocamento e carga, ou, equivalentemente, distribuição de tensões e deformações.

Tabela 1.1: Publicações relevantes para o contexto do estudo, em ordem cronológica, de acordo com as metodologias, as variáveis transitórias e as condições de simulação.

É importante destacar que a Tabela (1.1) contém subgrupos de métodos que merecem especificação. No entanto, as abreviações utilizadas não estão padronizadas para o português e não aparecem no Glossário, pois os métodos serão mencionados apenas no contexto desta tabela nesta seção. Cada subgrupo contempla os seguintes métodos:

— O subgrupo MH-MM abrange metodologias de célula (*Representative Volume Element*, RVE) [70, 142, 147], de média (*Finite-Volume Direct Averaging Micromechanics*, FVDAM) [30], e de homogeneização (*Locally Exact Homogenization Theory*, LEHT). Para aproximar a inversão numérica de transformadas integrais [51, 5], o subgrupo inclui o Esquema Auto-Consistente (*Self Consistent Scheme*, SCS) [85, 154, 76], introduzido por [81] e [74], e desenvolvido em [85], a sua versão generalizada (*Generalized Self Consistent Scheme*, GSCS). Também inclui o método da célula (*Method of Cell*, MOC) [2, 113, 3, 152, 153], a versão generalizada (*Generalized Method of Cell*, GMC) [113], de alta fidelidade (*High-Fidelity Generalized Method of Cell*, HFGMC) e recursiva [10]. Por fim, inclui o método Mori-Tanaka [139, 15], introduzido por [104] e desenvolvido por [25].

— O subgrupo VM-FEM engloba métodos de variáveis internas, incluindo o método da colocação (*Collocation Method*, CM) [126] e algoritmos para transformadas integrais inversas [75]. Também inclui o método variacional (*Variational Asymptotic Method*, VAM) [16] e a versão de célula unitária (*Variational Asymptotic Method for Unit Cell Homogenization*, VAMUCH) [143], além de versões comerciais de análise por MEF (*Finite Element Analysis*, FEA) como: COMSOL Multiphysics® [37] (com LiveLink™ para compatibilidade com MATLAB® [145]), ANSYS® [8], Code-Aster™ [53] e ABAQUS™ [47].

— O subgrupo Outros inclui o método de Ponte Castañeda [29], de Translação [63], de Cherkaev–Gibiansky [64], de Hashin [73, 103], e de homogeneização de Maxwell [140]. Além disso, inclui as cotas de Hashin-Shtrikman-Walpole [31] e Gibiansky-Milton [62].

— O subgrupo de metodologias Experimentais inclui a utilização de equipamentos reológicos, como um viscosímetro, associado a um sistema de controle predefinido.

Os estudos com diversas metodologias, como mostra a Tabela (1.1), comparam os métodos de maneira objetiva. Nesse cenário, note que o MHA é proeminente na última década, particularmente em publicações que empregam ferramentas de computação. Entretanto, a ciência dos materiais tem ganhado destaque na comunidade científica através do ambiente computacional, principalmente na modelagem matemática para previsão de propriedades materiais. Essa estratégia diminui o custo e a necessidade de avaliações experimentais [25, 90, 30, 88] e, no caso da viscoelasticidade, possibilita contornar ensaios mecânicos que podem demorar dias, ou até anos, para serem finalizados [147].



Por outro lado, na Tabela (1.1), a maioria dos algoritmos implementa o princípio de correspondência. No entanto, os métodos de inversão de transformadas integrais são limitados, especialmente as abordagens simbólicas nativas de entornos de computação científica como MATLAB® [145] ou GNU Octave [52] (e.g. `ilaplace`, `ifourier`). Embora existam diversas metodologias numéricas alternativas para a inversão de transformadas integrais, algumas das quais estão listadas no grupo de métodos da Tabela (1.1), essas aproximações não são adequadas para formulações projetadas para computação eficiente [126, 83]. Consequentemente, de acordo com [127, 90, 92, 86, 147], o principal desafio no contexto da previsão de propriedades homogêneas em materiais compósitos reside na inversão necessária para obter a solução viscoelástica dos kernels no domínio temporal.

Ainda na Tabela (1.1), note que os métodos com formulação variacional, especialmente o MEF, são uma metodologia de referência importante. Segundo [135], uma metodologia alternativa, quando otimizada, pode ser significativamente mais eficiente que o MEF, especialmente para problemas que requerem discretizações espaciais com malhas muito finas. Sob essa perspectiva, é amplamente reconhecido que métodos de discretização espacial podem rapidamente se tornar algoritmos intratáveis, especialmente em problemas com propriedades materiais que variam em microescala espacial. Esses problemas são frequentemente descritos como “rapidamente oscilantes” por diversos autores [159, 9, 124, 117] (“rapidamente”, neste contexto, refere-se à variação espacial e não temporal). Em contrapartida, seguindo o paradigma dos métodos de célula (ou volume) representativa, no contexto específico do MHA aplicado à descrição quantitativa de meios heterogêneos, o problema é transformado em um problema equivalente com propriedades materiais homogêneas, reduzindo dramaticamente a complexidade algorítmica [116]. Contudo, embora uma versão computacional do MHA permite a análise de problemas heterogêneos complexos, a modelagem matemática de microestruturas intrincadas ainda é um desafio [127, 45], exigindo técnicas eficientes para automatizar a manipulação de informações.

Este trabalho propõe **deduzir e implementar uma expressão matemática computacionalmente eficiente para cálculo de propriedades homogeneizadas** com base no MHA aplicado a meios compósitos viscoelásticos. No entanto, para garantir a compatibilidade dos resultados e permitir comparações consistentes com previsões de outros autores, o presente estudo não aborda problemáticas relacionadas a substâncias de interface (contato imperfeito), envelhecimento (*aging* ou *ageing*, do inglês), substâncias com proporção variável (fração volumétrica transitória) e nem determinação da dinâmica do material. Este conjunto de especificações permite filtrar as publicações da Tabela (1.1), permitindo considerar características adicionais como mostra a Tabela (1.2).

| Autores | Ano  | Método |     | Domínio | Volume   |              | Estrutura    |           |               |                     |                     | Kernel              |           |        |           |             |             |
|---------|------|--------|-----|---------|----------|--------------|--------------|-----------|---------------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------|--------|-----------|-------------|-------------|
|         |      | Outros | MHA |         | Temporal | Transformado | Quadrangular | Hexagonal | Estratificada | Fibras prismáticas* | Fibras cilíndricas* | Inclusões esféricas | Aleatória | Outros | Reológico | Exponencial | Fracionário |
| [154]   | 1990 | •      |     |         | •        | •            |              |           | •             |                     |                     |                     | •         | •      |           |             |             |
| [11]    | 1994 | •      |     |         | •        | •            |              |           | •             |                     |                     |                     |           | •      |           |             |             |
| [158]   | 1998 | •      | •   |         | •        | •            |              |           | •             |                     |                     |                     | •         |        |           |             | •           |
| [60]    | 2001 | •      |     |         | •        |              | •            |           | •             |                     |                     |                     | •         |        |           |             | •           |
| [93]    | 2003 | •      |     |         | •        | •            |              | •         |               |                     |                     |                     |           | •      |           |             |             |
| [90]    | 2004 |        | •   |         | •        | •            |              | •         |               |                     |                     |                     | •         |        |           |             |             |
| [88]    | 2006 | •      |     |         | •        | •            |              |           | •             |                     | •                   |                     | •         | •      |           |             |             |
| [106]   | 2008 | •      |     | •       | •        | •            |              |           | •             |                     |                     |                     | •         |        |           |             | •           |
| [147]   | 2011 | •      |     | •       |          | •            |              |           |               |                     | •                   | •                   | •         |        |           |             |             |
| [26]    | 2013 | •      |     |         | •        | •            |              |           |               |                     |                     |                     | •         |        |           |             | •           |
| [28]    | 2013 | •      |     |         | •        |              | •            |           | •             |                     |                     |                     | •         |        |           |             |             |
| [30]    | 2014 | •      |     | •       |          | •            |              |           | •             |                     |                     |                     | •         |        |           |             | •           |
| [143]   | 2015 | •      |     | •       |          | •            |              |           | •             |                     |                     |                     |           |        |           |             | •           |
| [151]   | 2016 | •      |     |         | •        | •            | •            |           | •             |                     |                     |                     | •         | •      |           |             |             |
| [42]    | 2017 |        | •   |         | •        | •            |              | •         |               |                     |                     |                     | •         |        | •         |             |             |
| [146]   | 2017 | •      |     |         | •        | •            |              |           | •             | •                   |                     | •                   | •         |        |           |             |             |
| [44]    | 2018 | •      | •   |         | •        | •            |              | •         | •             |                     |                     |                     | •         |        | •         | •           | •           |
| [18]    | 2018 | •      |     | •       |          |              | •            |           | •             |                     |                     | •                   | •         |        |           |             | •           |
| [45]    | 2020 | •      | •   |         | •        | •            |              |           | •             | •                   | •                   |                     | •         |        |           |             | •           |
| [112]   | 2020 | •      | •   |         | •        | •            | •            |           | •             |                     |                     |                     |           |        |           |             | •           |
| [127]   | 2020 | •      | •   |         | •        | •            | •            |           | •             |                     |                     |                     | •         |        | •         |             |             |
| [43]    | 2022 |        | •   |         | •        | •            |              | •         |               |                     |                     |                     | •         |        |           |             | •           |
| [111]   | 2023 | •      | •   |         | •        |              | •            |           | •             |                     |                     |                     | •         |        | •         |             |             |
| [122]   | 2023 | •      | •   |         | •        | •            |              | •         |               |                     |                     |                     | •         |        |           |             |             |

\*Matriz reforçada por fibras longas ou curtas seguindo uma única direção preferencial.

Tabela 1.2: Publicações relevantes para o contexto do estudo, em ordem cronológica e seguindo a delimitação do escopo, de acordo com as metodologias, o domínio da variável transitória, o tipo e a estrutura do volume representativo.

Na Tabela (1.2), os subgrupos MH-MM, VM-FEM, Experimentais e Outros métodos da Tabela (1.1) são unificados em um único subgrupo. De modo similar, os subgrupos Laplace, Laplace-Carson e Fourier são combinados no subgrupo Domínio Transformado. Quanto às condições de simulação, os subgrupos remanescentes da Tabela (1.1) incluem a geometria romboide, considerado como mais fundamental em células hexagonais conforme descrito por [18] e implementado por [28, 111], e a geometria quadrangular, uma generalização das células cúbicas. As condições de simulação que assumem substâncias isotrópicas e contato perfeito não são descartadas, mas apenas ocultadas na Tabela (1.2).

Para os subgrupos de estrutura e modelo de kernel, seguem considerações adicionais:

— A estrutura das fases dentro da célula representativa pode ser considerada como uma microestrutura, embora isso seja relativo ao aninhamento de escalas. Por exemplo, [43] desenvolve o MHA em três escalas. Por outro lado, a estrutura estratificada refere-se a compósitos laminados com uma única direção de simetria axial. As estruturas de fibras (prismáticas ou cilíndricas) consideram arranjos regulares, enquanto a estrutura com inclusões esféricas idealiza partículas idênticas ou não, com simetria axial ou não. A estrutura aleatória refere-se a uma substância matriz com fibras ou partículas sem uma direção preferencial (*random oriented*, do inglês). Finalmente, a classe de estruturas em Outros inclui inclusões do tipo partícula, retangulares, arranjos trançados (*braided composites*, do inglês), treliça octeto (*octet-truss lattice*, do inglês) ou substâncias porosas.

— Com relação a equação constitutiva dos kernels, de acordo com a Tabela (1.2), as publicações correspondentes utilizam apenas quatro tipos de modelos matemáticos visco-elásticos, todos independentes da temperatura. O modelo reológico contempla diversos tipos de arranjos mola-amortecedor incluindo um (puramente elástico ou puramente viscoso), dois (por exemplo, modelo Kelvin [34] (p.20), Kelvin-Voigt [83, 6] ou Maxwell [34] (p.17) ), três (por exemplo, modelo Zener [38] (p.28) ) e quatro (por exemplo, modelo Burgers [59] (p.58)) parâmetros. O modelo exponencial abrange a lei da potência (*Power Law* [33] (p.154), do inglês) e a decadência exponencial sem envelhecimento de Dischinger [38] (p.78). O modelo fracionário refere-se exclusivamente ao núcleo de Scott Blair e Rabotnov [140] (p.14), que por simplicidade as vezes é chamado de “SBR”. Por último, o modelo reológico generalizado é implementado por séries de Prony [49](p.52) ajustadas experimentalmente. A teoria básica dos kernels usados é detalhada na Seção (2.6).

Utilizando as Tabelas (1.1) e (1.2), é possível obter uma definição clara do contexto do presente estudo. Alternativamente, uma descrição mais exaustiva e completa do estado da arte, tanto do ponto de vista histórico quanto metodológico, pode ser encontrada em [133]; embora esse trabalho seja do ano 2016, ele apresenta contribuições analíticas, semi-analíticas e computacionais relevantes no contexto de homogeneização e deformações finitas em meios heterogêneos, não se limitando apenas a materiais viscoelásticos.

A relevância científica deste estudo não reside na implementação simplificada e eficiente do MHA para o cenário descrito na Tabela (1.2), mas sim nas comparações de resultados ao abordar um problema heterogêneo viscoelástico linear. Utilizando um volume quadrangular e diferentes estruturas e modelos de kernel, o estudo analisa implementações tanto no domínio do tempo quanto no transformado, **destacando problemas conceituais na aplicação do princípio de correspondência em materiais compósitos.**

## 1.2 Motivação

A maioria dos materiais, se não todos, apresenta estruturas heterogêneas em alguma escala de observação, e suas propriedades são influenciadas por essas microestruturas [133, 27], que variam em morfologia, fração volumétrica e constituintes, entre outros. A interação entre os constituintes, propriedades transitórias, condições de contato dissipativas ou imperfeitas, como o descolamento entre interfaces, danos na matriz, inclusões e arranjos de fase irregulares, entre muitas outras variações, aumentam a complexidade dos algoritmos utilizados para prever as propriedades e comportamento dos materiais. Essas complexidades não podem ser tratadas exclusivamente por métodos analíticos.

Neste sentido, para a previsão quantitativa das propriedades e do comportamento de materiais compósitos, é imperativo o uso de metodologias compatíveis com técnicas de computação. No contexto da viscoelasticidade, interfaces dissipativas e envelhecimento são exemplo de condições de simulação que, por definição, impedem a implementação de metodologias baseadas no princípio de correspondência. Isso significa que a maioria dos métodos citados nas Tabelas (1.1) e (1.2) não pode ser aplicada diretamente considerando estas condições realistas. A abordagem no domínio do tempo deve ser aperfeiçoada.

Programas comerciais baseados em métodos variacionais, como o FEM, são robustos e eficazes no domínio temporal para várias aplicações. No entanto, em compósitos com propriedades periódicas, a eficiência computacional desses métodos diminui significativamente conforme a célula periódica se torna menor. Portanto, este trabalho se justifica pela necessidade de uma ferramenta computacional adaptada para aplicar a homogeneização, que mantém a precisão em células menores otimizando o uso de recursos.

Paralelamente, [43] apresenta uma ampla lista de aplicações do MHA no contexto viscoelástico. Em [55], são estudados processos envolvendo materiais compósitos. Já [134] aborda problemas práticos na modelagem da viscoelasticidade em análise estrutural. Diversos autores, por exemplo [146], apresentam aplicações e processos relevantes:

- Manufatura: Indústria aeroespacial, automotiva, petróleo e gás, transporte;
- Biotecnologia e biomateriais: Tecidos, cartilagens, tendões, córnea, pele e osso;
- Eletrônica: Dispositivos piezoelétricos como transdutores, sensores, e atuadores;
- Metalurgia: Simulação multi-escala, revestimentos, projeto de materiais.

Esta lista, embora resumida, oferece uma visão holística de trabalhos significativos e de referência para o desenvolvimento de novos materiais e tecnologias.

## 1.3 Objetivos

A formulação proposta envolve um sistema de equações aninhadas, combinando as equações de conservação, as relações constitutivas de um meio viscoelástico, as equações cinemáticas e as expressões obtidas pelo Método de Homogeneização Assintótica (MHA).

As suposições adotadas consideram uma célula representativa periódica, com fases localmente uniformes e isotrópicas, além de deformações locais que são assintoticamente pequenas e evoluem lentamente em comparação com as deformações globais. Essas simplificações reduzem a complexidade algorítmica, mas também limitam o escopo de aplicação.

O **objetivo principal** pode ser resumido da seguinte forma:

— Desenvolver uma ferramenta computacional otimizada para calcular propriedades efetivas de materiais compósitos estratificados, com fases isotrópicas, incluindo pelo menos uma fase com comportamento viscoelástico linear, utilizando uma adaptação do MHA.

Os **objetivos específicos** estão estruturados da seguinte forma:

1. Apresentar uma **breve definição dos conceitos** *material compósito*, *propriedade efetiva* e *otimização computacional* de acordo com o contexto de interesse.
2. Compendiar as **equações para um meio viscoelástico linear**, destacando sucintamente o vínculo matemático com as convoluções e as transformadas integrais.
3. Resumir a **teoria básica do MHA**, apresentando apenas os fundamentos, pois a aplicação é apresentada na metodologia. Assim, para isto é necessário:
  - (a) Apontar e explicar a sequência de etapas para a aplicação do MHA;
  - (b) Destacar as vantagens e desvantagens do MHA, citando as delimitações aplicadas ao escopo e suas consequências no algoritmo computacional;
  - (c) Aplicar o MHA em um exemplo conceitual, no contexto de materiais compósitos estratificados, visando introduzir os operadores que são utilizados na descrição do algoritmo computacional no capítulo associado à metodologia:
    - i. Exemplificar o MHA no caso de um compósito estratificado, mostrando a expressão matemática do *problema local* e dos *coeficientes efetivos*;
    - ii. Explicitar a expressão matemática que permite o cálculo de propriedades homogeneizadas considerando fases isotrópicas viscoelásticas lineares.

4. Apresentar a teoria base de **modelos matemáticos de kernels** viscoelásticos.
5. Definir a **expressão matemática** para cálculo de propriedades homogeneizadas utilizando os fundamentos do MHA no contexto da viscoelasticidade linear:
  - (a) Detalhar as condições preliminares e paradigma do algoritmo.
  - (b) Definir os operadores que são utilizados na manipulação algébrica;
  - (c) Desenvolver a expressão matemática para calcular a propriedade homogeneizada utilizando os operadores definidos anteriormente, mostrando as etapas da manipulação algébrica conforme as etapas do MHA.
6. **Implementar computacionalmente** a expressão matemática de homogeneização:
  - (a) Reduzir a complexidade algorítmica do problema:
    - i. Explicar a consequência de uma aproximação de primeira ordem na formulação do MHA e do uso de fases isotrópicas localmente uniformes;
    - ii. Demonstrar a equivalência entre a expressão matemática proposta (obtida na manipulação algébrica) e a expressão conhecida na literatura para calcular propriedades efetivas em estruturas com simetria axial (laminas).
  - (b) Escrever o código utilizando uma linguagem de programação multi-paradigma, explicando passo a passo a implementação do programa principal e dos kernels.
7. Calcular as propriedades homogeneizadas usando exemplos concretos que permitam uma comparação objetiva com publicações da Tabela (2); comentar os resultados.

Os primeiros quatro objetivos específicos são apresentados em formato de fundamental teórico no Capítulo (2), com conteúdo predominantemente desenvolvido por outros autores. O quarto objetivo específico é retomado sob a perspectiva computacional no Capítulo (3) utilizando uma linguagem de programação compatível com funções lambda.

Os quinto e sexto objetivos específicos são abordados no Capítulo (3) nas Seções (3.3) e (3.4), respectivamente. Este conteúdo resume as contribuições desenvolvidas pelo autor.

O sétimo objetivo específico é tratado no Capítulo (4), onde são apresentados exemplos em compósitos bifásicos nas configurações unidimensional (Seção (4.1)) e estratificada (Seção (4.2)). Já no Capítulo (5), são compiladas as conclusões e trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Fundamental teórico

### 2.1 Definições em contexto

*Esta seção atende aos requisitos do objetivo específico 1.*

O MCCT é um programa de pós-graduação multidisciplinar. Portanto, é razoável considerar uma breve desambiguação linguística de três conceitos importantes:

— Um **material compósito** combina dois ou mais componentes distintos, resultando em propriedades diferentes dos constituintes individuais, com o objetivo de obter um material com propriedades especializadas. Esta união de componentes, chamada de *arquitetura de materiais* [55], é essencial na ciência de materiais [27]. No caso mais primitivo, um compósito consiste em uma matriz (polímero, liga metálica ou cerâmica) e um reforço (treliças, fibras ou partículas). Os componentes são denominados “espécies” na termodinâmica e química [105] ou “fases” na mecânica e metalurgia [161].

— Uma **propriedade efetiva** quantifica uma propriedade homogênea de um meio heterogêneo (e.g. material compósito). Esse processo, chamado de homogeneização, pode ser entendido como a codificação das características do material heterogêneo em uma única propriedade representativa. No contexto elétrico ou eletrônico, o termo “eficaz” é utilizado para descrever o comportamento de grandezas transitórias, enquanto “equivalente” refere-se à própria propriedade material homogênea (e.g. impedância equivalente, teorema Thevenin e Norton). Na mecânica aplicada, termos como “aparente” e “global” (*Overall properties*, do inglês) são usados, embora não sejam sinônimos de “efetivo”.

— A **otimização computacional** busca reduzir a complexidade algorítmica por meio de simplificações, mudanças de paradigmas (como estruturas de dados ou técnicas de manipulação em nível de software e hardware) ou pela modificação direta do algoritmo.

## 2.2 Equações para um meio viscoelástico linear

*Esta seção atende aos requisitos do objetivo específico 2.*

O sistema de equações utiliza a descrição Lagrangiana [96] (Cap.4). Identificam-se expressões de conservação, cinemática, constitutiva e de kernel, juntamente com definições de condições de contorno, iniciais e de contato. A notação indicial é utilizada para assegurar uma escrita matemática compatível com a literatura; no entanto, o somatório não se aplica aos argumentos das funções:  $f(x_i) \neq f(x_1 + x_2 + \dots)$ . O problema está definido em um domínio espacial  $x_i \in \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  e domínio temporal  $t, \tau \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$ .

Devido à natureza quasiestática do problema, considerando um referencial inercial, utiliza-se a versão não dissipativa da equação de conservação do momento, descrevendo a divergência da distribuição de tensões em um meio contínuo ideal sem termos inerciais, onde é adotada de agora em diante a notação indicial enxuta,  $\frac{\partial}{\partial x_i}(\bullet)_i = \partial_i^x(\bullet)_i$ .

$$\partial_j^x \sigma_{ij}(x_i, t) = -F_i(x_i, t), \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(u_l(x_i, t)), \quad (2.1)$$

As variáveis  $\sigma_{ij}$ ,  $u_l$  e  $F_i$  representam, respectivamente, o tensor de tensões, o vetor de deslocamento e o vetor de força. Note que  $F_i$  é a distribuição de carga mecânica por unidade de volume sobre o corpo de prova (ou expressa por unidade de massa ou concentração); um sinal negativo nesse termo indica consumo de trabalho, ou seja, a deformação absorve trabalho mecânico. Embora a Equação (2.1) não inclua termos inerciais ou de dissipação de energia, as condições iniciais do problema seguem o comportamento de um problema de marcha, transitório devido à viscoelasticidade. Considerando um deslocamento inicial  $V_l(x_i)$  como uma função vetorial arbitrária, a condição inicial é:

$$u_l(x_i, 0) = V_l(x_i), \quad \forall x_i \in \Sigma_u. \quad (2.2)$$

As condições de contorno estão definidas na fronteira do domínio espacial  $\partial\Sigma$ . A região de engaste,  $\Sigma_u \subset \Sigma$ , é definida como um problema de Dirichlet, considerando que uma extremidade (na origem,  $x_i = 0$ ) é fixa enquanto a outra extremidade do corpo de prova permanece sob carregamento. A região  $\Sigma_F \subset \Sigma$  está associada com um campo de forças superficiais aplicadas em dita região, simulando uma variante similar ao ensaio de tração, como mostra a Figura (2.1) na Seção 2.3. As condições de contorno, onde  $n_j$  representa os cossenos diretores da normal à superfície de carregamento  $\Sigma_u$ , são:

$$u_l(0, t) = V_l(0) = 0 \in \Sigma_u, \quad \sigma_{ij}(u_l(0, t))n_j = S_i(t) \in \Sigma_F, \quad \forall t \geq 0 \in \Omega. \quad (2.3)$$



Para simplicidade e compatibilidade com exemplos da literatura, os comprimentos representativos do corpo de prova pertencem a um domínio normalizado. Os tensores de tensão  $\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}, t)$  e de deformação  $\varepsilon_{kl}(u_i, t)$  estão relacionados por meio de fenômenos de relaxamento ou fluência (equações constitutivas), considerando as limitações das expressões viscoelásticas lineares para fluidos [34]. Para comportamento semelhante ao de sólidos, assume-se um campo de deslocamento suave  $|\partial^t u_l(x_i, t)| < u_l(x_i, t)$ , onde  $\frac{\partial}{\partial t}(\bullet) = \partial^t(\bullet)$ , e tanto o tensor de tensão quanto o de deformação são simétricos [132].

Como explica [19] (p.72), se a distribuição de deformação é finita, a Equação (2.1) se aplica a um meio contínuo incompressível, assim, usando a notação  $\frac{\partial}{\partial x_i}(\bullet)_i = \partial_i^x(\bullet)_i$ :

$$\varepsilon_{kl}(u_l) = \frac{1}{2} (\partial_k^x u_l + \partial_l^x u_k). \quad (2.4)$$

O critério para identificar deformações em materiais predominantemente sólidos é dado por  $|\partial^t \varepsilon_{kl}(\bullet)| \ll \varepsilon_{kl}(\bullet)$  [19]. Adota-se a simplificação  $\varepsilon_{kl} \approx \partial_k^x u_l$ , seguindo a definição de deformação de engenharia, aplicável para pequenas deformações em sólidos quase rígidos [38]. Essa abordagem alinha a teoria apresentada com os exemplos de referência do MHA utilizados nos resultados [40, 41, 93] no Capítulo (4), e impõe restrições ao conjunto de dados ao se considerar materiais viscoelásticos predominantemente sólidos.

A presente descrição diverge intencionalmente da abordagem diferencial do princípio da superposição de Boltzmann [21] para modelagem de equações constitutivas viscoelásticas. Em vez disso, combina a forma integral de Volterra [149], uma abordagem mais sofisticada que pode descrever sistemas onde perturbações, propriedades materiais e comportamento do sistema podem não ser representados apenas por funções contínuas.

Este modelo integro-diferencial é amplamente citado por sua eficácia em caracterizar as propriedades viscoelásticas dos materiais através da integral de Riemann-Stieltjes:

$$\sigma_{ij}(x_i, t) = \int_{(x_i, 0)}^{(x_i, t)} R_{ijkl}(x_i, t - \tau) d\varepsilon_{kl}(x_i, t), \quad (2.5)$$

$$\sigma_{ij}(x_i, t) = \int_0^t R_{ijkl}(x_i, t - \tau) \partial^\tau (\varepsilon_{kl}(x_i, \tau)) d\tau. \quad (2.6)$$

O módulo elástico  $R_{ijkl}^0$  (módulo de Young) serve como condição inicial para o módulo de relaxamento  $R_{ijkl}$  [34] (o sobrescrito “0” indica o valor em  $t = 0$ ). No cenário sem envelhecimento, ou seja, independente do tempo, o módulo de relaxamento permanece constante, com  $\partial^t R_{ijkl} = 0$ , onde  $\frac{\partial}{\partial t}(\bullet) = \partial^t(\bullet)$ . No entanto, seus núcleos (chamados de kernels) evoluem internamente com o tempo, conforme descrito por [84] (Cap.2) e [19] (pp.352-356) sob os nomes de “variáveis” internas e “coordenadas”, respectivamente.

Em [120] é proposta uma mudança na notação, a qual passa a ser utilizada no presente estudo:  $R_{ijkl}^0(x_i) \equiv R_{ijkl}(x_i, 0)$ . A Equação (2.6), na forma  $\sigma_{ij} = \mathcal{R}(R_{ijkl}, \varepsilon_{kl})$ , é utilizada para fenômenos de relaxamento. Uma versão análoga é aplicada no caso de fenômenos de fluência, que dependendo do contexto pode ser chamado de módulo de conformidade ou compliância, tomando a forma  $\varepsilon_{kl} = \mathcal{J}(J_{ijkl}, \sigma_{kl})$ , onde  $J_{ijkl}$  representa o módulo de fluência. Note que a notação adotada permite que  $J_{ijkl}^0(x_i) \equiv J_{ijkl}(x_i, 0)$ . Neste contexto os operadores  $\mathcal{R}(\bullet)$  e  $\mathcal{J}(\bullet)$  são relações constitutivas viscoelásticas; perceba que no domínio do tempo não é possível operar  $\mathcal{R}(\bullet) \neq (\mathcal{J}(\bullet))^{-1}$ , ou vice-versa, diretamente.

O **princípio de correspondência** estabelece a **equivalência entre um problema viscoelástico no domínio do tempo e um problema elástico em um domínio transformado** [32] (p.85) [69] (p.42); porém, não se aplica se  $R_{ijkl}(x_i, t)$  ou  $J_{ijkl}(x_i, t)$  estiverem envelhecendo (funções de  $\tau$ ), se  $F_i$  for não-conservativo, ou se as condições de contorno forem transitórias [50] (p.ix) [17] (pp.17-18) [59] (pp.16-17) [61] (pp.177-178).

Técnicas de inversão de propriedades permitem calcular  $R_{ijkl}(x_i, t)$  a partir de  $J_{ijkl}(x_i, t)$  e vice-versa [68]. No domínio transformado, conforme introduzido nas Tabelas (1.1) e (1.2), onde  $s \in \mathbb{C}$  é a variável transitória no espaço de Laplace ou Laplace-Carson, a convolução é simplificada para um produto algébrico, utilizando expressões de inversão como  $\hat{R}_{ijkl}(x_i, s)\hat{J}_{ijkl}(x_i, s) = s^{-1}$  [69, 32]. Uma vantagem das transformadas integrais é simplificar as equações no domínio transformado. No entanto, a transformação inversa para o domínio temporal,  $t \in \mathbb{R}$ , é um desafio significativo [69, 96]. Conforme [158], a escolha do domínio de Laplace-Carson  $\mathcal{L}_C(\bullet)$  em vez de Laplace  $\mathcal{L}(\bullet)$  se dá apenas pelas diferenças nas unidades físicas, como comentado brevemente na Seção (A.1.2).

Levando em conta a Equação (2.4) (materiais viscoelásticos semelhantes a sólidos) no contexto exclusivo de um ensaio de relaxamento, a Equação (2.1) resulta em:

$$\partial_j \int_0^t R_{ijkl}(x_i, t - \tau) \partial^\tau (\partial_k^x u_l(x_i, \tau)) d\tau = -F_i, \quad (2.7)$$

$$\partial_j [R_{ijkl}(x_i, t) * \partial_k^x u_l(x_i, t)] = -F_i, \quad (2.8)$$

$$\partial_j [\hat{R}_{ijkl}(x_i, s) \partial_k^x \hat{u}_l(x_i, s)] = -\hat{F}_i, \quad (2.9)$$

onde a expressão da Equação (2.7) pode ser reescrita no formato de uma convolução, usando o símbolo “\*”, como mostra a Equação (2.8). Usando o princípio de correspondência, as Equações (2.7)-(2.8) podem ser transformadas para um produto tensorial como mostra a Equação (2.9); onde o símbolo “^” é uma transformada integral, por exemplo  $\mathcal{L}_C(\bullet)$ .

## 2.3 Método de homogeneização assintótica

*Esta seção atende aos requisitos dos objetivos específicos 3 e 3a.*

A definição das regiões de interface  $\Sigma_u$  e  $\Sigma_F$  é válida para materiais homogêneos ou compósitos, pois inclui as superfícies externa (o contorno  $\partial\Sigma$ ) e internas (interfaces entre substâncias e entre células), do corpo de prova. No contexto de materiais compostos, é necessário definir as condições de contato, também conhecidas como condições de continuidade, de conjugação [9] (p.2), referentes às distribuições de deslocamento ( $u_l$ ) e carga ( $F_i$ ) entre os constituintes da amostra. O compósito é idealizado como um corpo de prova carregado mecanicamente, afetando todos os seus componentes internos.

Esta descrição não explora detalhadamente as diferenças técnicas ou implicações matemáticas entre fases. Em vez disso, simplesmente considera os constituintes materiais do corpo de prova como regiões separadas dentro do domínio  $\Sigma$ , com diferentes propriedades mecânicas. A Figura (2.1) ilustra as diversas fases e interfaces envolvidas no problema.

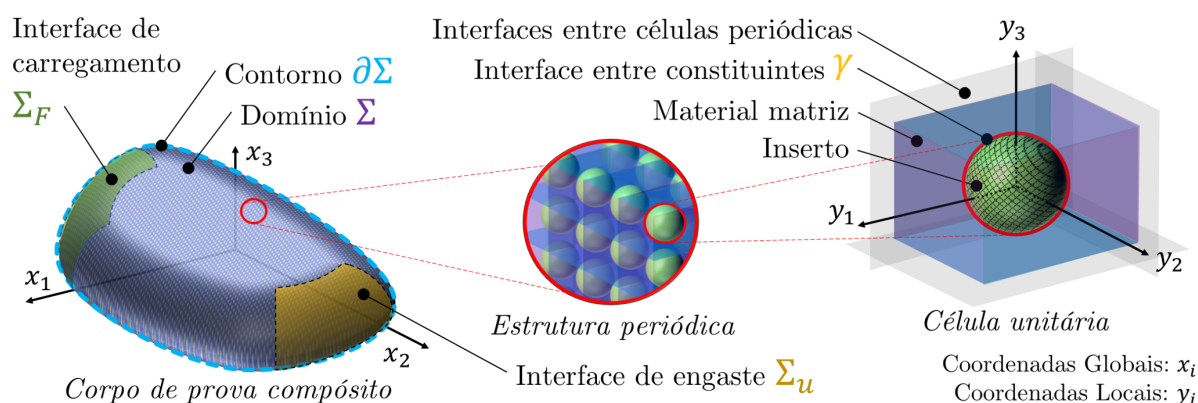


Figura 2.1: Domínio  $\Sigma$  com contorno  $\partial\Sigma$ , que delimita um corpo de prova bifásico. As interfaces  $\Sigma_u$  e  $\Sigma_F$ , arbitrárias, estão associadas às distribuições de engaste (condições de Dirichlet) e de carga (solicitação mecânica). Também ilustra-se a estrutura periódica do compósito, do tipo de inclusão esférica, e a interface  $\gamma$  entre o inserto e a matriz. A escolha da origem das coordenadas locais  $y_i$  é arbitrária e não afeta a aplicação do MHA.

O MHA propõe uma aproximação para a Equação (2.1) utilizando uma série assintótica de potências em um parâmetro geométrico  $\epsilon$ . Esse parâmetro é a razão entre a coordenada global normalizada ( $x_i \propto L_i$ , tamanho característico do espécime composto) e a coordenada microestrutural normalizada ( $y_i \propto \ell_i$ , tamanho característico das estruturas periódicas) do subdomínio periódico [9] (Cap.2), denominado célula. Na implementação computacional do Capítulo (3) o  $\ell_i$  é interpretado como  $\ell_i = dL_i = \Delta L_i > 0$ .

### 2.3.1 Expansão assintótica

A relação entre as coordenadas globais  $(x_i)$  e as coordenadas locais  $(y_i)$ , também conhecidas como variáveis “lentas” e “rápidas” [120], respectivamente, é dada no contexto cartesiano por  $y_i = x_i \epsilon^{-1}$ , onde  $\epsilon$  é uma métrica constante,  $\epsilon \leq \Delta L_i$ , que permite:

$$u_l(x_i, t) = u_l^{[0]}(x_i, y_i, t) + \epsilon u_l^{[1]}(x_i, y_i, t) + \epsilon^2 u_l^{[2]}(x_i, y_i, t) + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m u_l^{[m]}(x_i, y_i, t), \quad (2.10)$$

onde o símbolo “ $^{[m]}$ ” define a associação com o  $m$ -ésimo termo da expansão.

Também, embora fora do escopo, é possível definir uma série assintótica para os tensores de tensão  $\sigma_{ij}$  e deformação  $\varepsilon_{kl}$ , bem como para as condições de contorno e contato [9]. Alguns autores usam a notação  $f^\epsilon(x_i, t) \equiv f(y_i, t)$  para destacar que uma função arbitrária  $f$  é  $\epsilon$ -periódica podendo ser expressa em termos da variável local  $y_i$ , sem referência às variáveis globais  $x_i$  [36] (p.7):  $R_{ijkl}(x_i, t) = R_{ijkl}^\epsilon(t) = R_{ijkl}(y_i, t)$ . Este conceito é utilizado no desenvolvimento do algoritmo numérico, embora a notação com “ $\epsilon$ ” não seja adotada. Ao considerar  $\epsilon$  como um parâmetro geométrico constante e espacialmente uniforme (ou seja, a estrutura global é deformável mas as proporções periódicas permanecem constantes), é possível aplicar a regra da cadeia (onde  $d_j^x$  é a derivada total) bi-escala,

$$d_j^x(u_i(x_i, t)) = \partial_j^x(u_i(x_i, t)) + \epsilon^{-1} \partial_j^y(u_i(x_i, t)), \quad (2.11)$$

na expansão em série de potências da Equação (2.10), permitindo a derivação de um problema com relação a  $x_i$  e  $y_i$ . Este procedimento, amplamente desenvolvido em problemas descritos por equações diferenciais parciais na física matemática [9] (Cap.4), não é detalhado aqui, mas é abordado no desenvolvimento do algoritmo numérico do Capítulo (3), uma vez que são necessárias adaptações para o caso viscoelástico.

Ao combinar a Equação (2.7) com a Equação (2.11) é possível utilizar um operador diferencial para simplificar a notação, conforme é mostrado em [110] (p.29) e a seguir:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \epsilon^m L_{xx}(u_l^{[m]}) + \epsilon^{m-1} (L_{yx}(u_l^{[m]}) + L_{xy}(u_l^{[m]})) + \epsilon^{m-2} L_{yy}(u_l^{[m]}) \right] = -F_i, \quad (2.12)$$

$$L_{\alpha\beta}(\bullet) = \begin{cases} \partial_j^\alpha [R_{ijkl}(y_i, 0) (\partial_k^\beta(\bullet)_l)] & \text{Problema elástico;} \\ \partial_j^\alpha \left[ \int_0^t R_{ijkl}(y_i, t - \tau) \partial^\tau (\partial_k^\beta(\bullet)_l) d\tau \right] & \text{Problema viscoelástico,} \end{cases} \quad (2.13)$$

onde  $u_l^{[m]} = u_l^{[m]}(x_i, y_i, t)$  é o  $m$ -ésimo termo da expansão assintótica, e  $L_{\alpha\beta}(\bullet)$  é o operador que abstrai o problema bi-escala correspondente. As variáveis  $\alpha$  e  $\beta$  são usadas de forma intercambiável para representar  $x$  ou  $y$ . Este é um procedimento comum no MHA.

### 2.3.2 Problema local

Pode-se demonstrar que o primeiro termo da Equação (2.10), para  $m = 0$ , é independente das variáveis locais [9] (pp.23-24). Assim, temos  $u_i^{[0]}(x_i, y_i, t) = u_i^{[0]}(x_i, t)$ . Esse resultado é obtido por meio de um lema pré-estabelecido que fornece uma condição necessária e suficiente para resolver problemas envolvendo a combinação de termos na Equação (2.12) dentro de uma região periódica [9] (p.19). Uma consequência desse lema é que a média de qualquer função periódica sobre o comprimento da célula representativa deve ser zero. Esse entendimento é amplamente documentado e aplicado na formulação de problemas de homogeneização. É conhecido que, para uma aproximação de qualquer ordem, na Equação (2.10), o termo  $u_i^{[m]}$  é necessário para calcular o termo  $u_i^{[m+1]}$ .

Dessa forma, no procedimento associado a problemas elásticos e difusivos (como transferência de calor), o  $m$ -ésimo problema local pode ser formulado da seguinte maneira [9]:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left[ R_{ijkl} \frac{\partial^{m+1}}{\partial y_l^{m+1}} \left( \chi_{rsk}^{[m+1]} + \chi_{rk}^{[m]} y_s \right) \right] = 0, \quad (2.14)$$

$$R_{ijkl} = R_{ijkl}(y_i, t) = R_{ijkl}(y_i \pm 1, t), \quad (2.15)$$

$$\chi^{[m]} = \chi^{[m]}(y_i, t) = \chi^{[m]}(y_i \pm 1, t). \quad (2.16)$$

No contexto da viscoelasticidade, semelhante à Equação (2.13), o termo  $R_{ijkl}$  passa a ser um operador integral, como mostra a Equação (2.24). Por tanto, o problema local viscoelástico, no contexto do relaxamento, pode ser reformulado da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left[ \int_0^t R_{ijkl} \partial^\tau \left( \frac{\partial^{m+1}}{\partial y_l^{m+1}} \left( \chi_{rsk}^{[m+1]} + \chi_{rk}^{[m]} y_s \right) \right) d\tau \right] = 0, \quad (2.17)$$

com as mesmas condições de periodicidade mostradas na Equações (2.15) e (2.16).

Note que, para evitar sobrecarregar a notação, a versão compacta da notação indicial ( $\partial_i^\xi \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ ) não foi utilizada nas Equações (2.14) e (2.17). Os tensores  $\chi^{[m]}$  seguem a notação de [35] (p.194), utilizando o símbolo “ $\chi$ ” em vez de “ $N$ ”, como é comum em várias fontes bibliográficas. Este tensor representa a solução dos problemas locais periódicos no  $m$ -ésimo nível da expansão, sendo interpretado como um corretor de ordem  $m$  [36, 35]. Note que como consequência desta formulação,  $\chi^{[m]}$  é uma função  $\epsilon$ -periódica.

Contudo, como está detalhado na Seção (2.3.3), é comum no MHA utilizar o problema local em  $m = 0$  como base para todas as aproximações de ordem maior. Desta forma, as Equações (2.14) e (2.17) podem ser modificadas para sua versão mais simples:

$$\partial_j^y \left[ R_{ijkl} \partial_l^y \left( \chi_{rsk}^{[1]} + \chi_{rk}^{[0]} y_s \right) \right] = 0, \quad R_{ijkl} = R_{ijkl}(y_i, 0), \quad (2.18)$$

$$\partial_j^y \left[ \int_0^t R_{ijkl} \partial^\tau \left( \partial_l^y \left( \chi_{rsk}^{[1]} + \chi_{rk}^{[0]} y_s \right) \right) d\tau \right] = 0, \quad R_{ijkl} = R_{ijkl}(y_i, t), \quad (2.19)$$

onde, em ambos os casos, elástico e viscoelástico, é possível distribuir o operador  $\partial_k^y(\bullet)$ :

$$\partial_j^y \left[ R_{ijkl} \partial_l^y \chi_{rsk}^{[1]} + R_{ijkl} \partial_l^y \left( \chi_{rk}^{[0]} y_s \right) \right] = 0, \quad (2.20)$$

$$\partial_j^y \left[ \int_0^t R_{ijkl} \partial^\tau \left( \partial_l^y \chi_{rsk}^{[1]} + \partial_l^y \left( \chi_{rk}^{[0]} y_s \right) \right) d\tau \right] = 0. \quad (2.21)$$

O corretor de ordem zero é uma matriz identidade [9], ou seja, pode ser substituído pelo delta de Kronecker preservando índices:  $\chi_{rk}^{[0]} = \delta_{rk}$ . Se não for utilizado outro corretor, o superíndice do corretor de primeira ordem “[1]” é omitido. Fazendo isto, note que é possível aplicar a igualdade  $\partial_l^y(y_s) = \delta_{sl}$  nas Equações (2.20) e (2.21), para o caso elástico e viscoelástico, respectivamente, e distribuir o operador  $\partial^\tau$  no caso viscoelástico.

$$\partial_j^y \left[ R_{ijkl} \partial_l^y \chi_{rsk} + R_{ijkl} \delta_{rk} \delta_{sl} \right] = 0, \quad (2.22)$$

$$\partial_j^y \left[ \int_0^t R_{ijkl} \partial^\tau \left( \partial_l^y \chi_{rsk} \right) d\tau + \int_0^t R_{ijkl} \partial^\tau \left( \delta_{rk} \delta_{sl} \right) d\tau \right] = 0. \quad (2.23)$$

A Equação (2.22), do caso elástico, acostuma ser encontrada na literatura sob o formato  $\partial_j^y \left[ R_{ijkl} \partial_l^y \chi_{rsk} + R_{ijrs} \right] = 0$ , e a Equação (2.23), do caso viscoelástico, sob um formato parecido, porém, aplicando um operador integral na seguinte maneira:

$$\mathcal{R}_{ijkl}(\bullet) = \int_0^t R_{ijkl} \partial^\tau(\bullet) d\tau, \quad (2.24)$$

$$\partial_j^y \left[ \mathcal{R}_{ijkl} \left( \partial_l^y \chi_{rsk} \right) + \mathcal{R}_{ijrs}(1) \right] = 0. \quad (2.25)$$

Finalmente, as condições de contato são as condições de contorno do problema local descrito nas Equações (2.14)-(2.16) ou (2.23)-(2.25). O modelo matemático na interface entre problemas locais pode considerar descontinuidades (ou seja, propriedades “por partes” ou com gradientes diferentes) e transitoriedades (contornos móveis ou dissipação de energia). A notação utilizada para representar as condições de contacto é a seguinte:

$$u_i^{[m]}(x_i, y_i \pm 0, t - \tau) = \left[ u_i^{[m]} \right] \Big|_{y_i \pm 0}, \quad (2.26)$$

$$n_j R_{ijkl}(y_i \pm 0) \partial_k^\beta(\bullet)_l = \left[ R_{ijkl} \partial_k^\beta(\bullet)_l \right] \Big|_{y_i \pm 0}, \quad (2.27)$$

$$n_j \int_0^t R_{ijkl}(y_i \pm 0, t - \tau) \partial^\tau \partial_k^\beta(\bullet)_l d\tau = \left[ \int_0^t R_{ijkl} \partial^\tau \partial_k^\beta(\bullet)_l d\tau \right] \Big|_{y_i \pm 0}. \quad (2.28)$$

A notação  $\llbracket \bullet \rrbracket \Big|_{y_i \pm 0}$ , utilizada por [9] (pp. 1-2), representa a diferença entre os valores dos limites à direita e à esquerda de uma função em um ponto  $y_i$  dentro da célula periódica. Alternativamente, seguindo uma notação mais usual (e.g. [45, 43]) sobre  $u_i^{[m]}(x_i, y_i, t)$ :

$$\llbracket u_i^{[m]} \rrbracket = 0, \quad \llbracket R_{ijkl} \partial_k^\beta (u_i^{[m]}) \rrbracket = 0, \quad \llbracket \int_0^t R_{ijkl} \partial^\tau \partial_k^\beta (u_i^{[m]}) d\tau \rrbracket = 0, \quad (2.29)$$

que significa contato perfeito na interface,  $\gamma$ , entre as fases, como mostra a Figura (2.1).

### 2.3.3 Aproximação de primeira ordem

A Equação (2.10) pode ser delimitada em  $0 \leq m \leq M \ll \infty$ , onde  $M + 1$  é a quantidade de termos usados na expansão assintótica. De acordo com [118] (pp.21-23), a solução da Equação (2.1) pode ser aproximada considerando apenas os termos associados com os coeficientes  $1$ ,  $\epsilon^{-1}$  e  $\epsilon^{-2}$  da Equação (2.12), o que é similar a fazer  $M = 2$ .

Em um contexto geral, a expansão assintótica da Equação (2.10) pode ser reformulada de acordo com [35] (p.132) utilizando a seguinte expressão:

$$u_i \approx \sum_{m=0}^{M=2} \left[ \epsilon^m \chi_{lh_0 h_1 \dots h_m}^{[m]} \frac{\partial^m u_{h_0}^{[0]}}{\partial x_{h_1 \dots h_m}} \right] = \underbrace{\chi_{lh_0}^{[0]} u_{h_0}^{[0]}}_{u_i^{[0]}(x_i, t)} + \epsilon \underbrace{\chi_{lh_0 h_1}^{[1]} \frac{\partial u_{h_0}^{[1]}}{\partial x_{h_1}}}_{u_i^{[1]}(x_i, y_i, t)} + \epsilon^2 \underbrace{\chi_{lh_0 h_1 h_2}^{[2]} \frac{\partial^2 u_{h_0}^{[2]}}{\partial x_{h_1 h_2}}}_{u_i^{[2]}(x_i, y_i, t)}, \quad (2.30)$$

onde o corretor de ordem zero é dado pelo delta de Kronecker:  $\chi_{lh_0}^{[0]} = \delta_{lh_0}$ . Cada novo termo na expansão introduz um índice adicional, aumentando progressivamente a ordem dos tensores  $\chi^{[m]}$ . Assim, maior precisão requer o cálculo de corretores de ordem  $m + 1$ , o que acarreta uma complexidade algorítmica que cresce de acordo com uma função fatorial de  $M$ . A partir da Equação (2.30), é possível expressar explicitamente a relação recursiva que conecta a solução dos problemas locais,  $\chi^{[m]}$ , com os deslocamentos  $u_i^{[m]}$  correspondentes. Neste contexto, normalmente é considerada uma aproximação assintótica de primeira ordem ( $M = 1$ ), que oferece boa precisão, já que o erro estimado é da ordem de  $\mathcal{O}(\epsilon)$ , com  $\epsilon \rightarrow 0$ . Assim, seguindo o procedimento padrão, o corretor de primeira ordem,  $\chi^{[1]}$ , é necessário para reconstruir o deslocamento global, conforme a seguinte expressão:

$$M = 1, \quad \text{então} \quad u_i(x_i, t) = \delta_{lh} u_h^{[0]} + \chi_{lkh}^{[1]} \partial_k^x u_h^{[0]} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (2.31)$$

onde o erro da aproximação é representado pelo termo  $\mathcal{O}(\epsilon^M)$ , cujo desenvolvimento pode ser encontrado em [9] (Cap.2). Note que no caso de uma aproximação de primeira ordem, havendo apenas um único corretor (conhecido como “função local”), se faz:  $\chi_{lkh}^{[1]} = \chi_{lkh}$ .



### 2.3.4 Propriedade homogeneizada — domínio do tempo

No domínio temporal, a Equação (2.7) é reconfigurada para utilizar um tensor propriedade  $P_{ijkl}^H(t)$ , seja  $R_{ijkl}^H(t)$  para relaxamento ou  $J_{ijkl}^H(t)$  para fluência, que pode ser expresso no formato de convolução conforme mostrado na Equação (2.8). O superscrito “ $H$ ” significa “propriedade homogeneizada” e é usado assim em todo o documento:

$$P_{ijkl}^H(t) * (\bullet)_{kl} = \int_0^t P_{ijkl}^H(t - \tau) \partial^\tau (\bullet)_{kl} d\tau, \quad (2.32)$$

$$P_{ijkl}^H(t) = \left\langle P_{ijkl}(y_i, t) + P_{ijrs}(y_i, t) \partial_l^y \chi_{rsk}(y_i, t) \right\rangle, \quad (2.33)$$

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{\|Y_i\|_L} \int_{Y_i} (\bullet) dy_i, \quad \|Y_i\|_L = \left( \sum_{i=1}^3 |y_i|^p \right)^{1/p}, \quad (2.34)$$

onde os símbolos “ $*(\bullet)$ ” abstraem o operador convolução sobre  $\varepsilon_{kl}(u_l, t)$ . A Equação (2.33), sem o uso de operadores integrais de convolução, é deduzida na literatura [9, 36]. A norma do domínio local,  $y_i \in Y_i$ , é  $\|Y_i\|_L = 1$  porque  $|y_i| = |y_j|$  [118] (p.8). Segundo [158],  $\|Y_i\|_L$  é a medida de  $y_i$  na dimensão correspondente; segundo [116, 117], é interpretada como o volume normalizado da célula periódica. A Equação (2.34) é interpretada como uma média (cociente de um somatório e a norma correspondente) sobre o período  $Y_i$ .

### 2.3.5 Equação homogeneizada

O procedimento para obter uma versão homogeneizada de um problema originalmente heterogêneo é conhecido [9] (Cap.4) e é mostrado no Capítulo (3), no contexto viscoelástico. É importante destacar que, de acordo com os fundamentos do MHA [9, 36, 35, 118], a equação homogeneizada deve preservar a forma da equação original. Assim, para o caso elástico, no domínio temporal, a equação homogeneizada assume a forma:

$$R_{ijkl}^H \partial_{jk}^x u_l^{[0]}(x_i, t) = -F_i, \quad R_{ijkl}^H = R_{ijkl}^H(t = 0). \quad (2.35)$$

No caso viscoelástico linear, sem envelhecimento e com a simplificação associada com a Equação (2.4) (deformação de engenharia), a equação homogeneizada assume a forma:

$$\int_0^t R_{ijkl}^H(t - \tau) \partial_{jk}^x u_l^{[0]}(x_i, \tau) d\tau = -F_i. \quad (2.36)$$

Tanto a Equação (2.35) como a Equação (2.36) são compatíveis com as condições iniciais e de contorno, Equação (2.2) e Equação (2.3), respectivamente, do problema original da Equação (2.1), conforme esperado em qualquer abordagem padrão do MHA.



## 2.4 Vantagens e desvantagens do MHA

*Esta seção atende aos requisitos do objetivo específico 3b.*

De acordo com [9] e as Equações (2.30)-(2.31), uma vantagem principal do MHA é que o erro esperado é da ordem de  $\mathcal{O}(\epsilon^M)$ , onde  $M + 1$  é a quantidade de termos na expansão assintótica na Equação (2.10). Quanto maior a razão entre a escala global ( $x_i$ ) e a escala local ( $y_i$ ),  $y_i/x_i = \epsilon^{-1} \rightarrow \infty$ , melhor a precisão. Na prática, isso vale se o comprimento da célula periódica for suficientemente pequeno ( $\epsilon \rightarrow 0$ ), mas ainda grande o bastante para desconsiderar escalas atômicas [79]. O Capítulo (3) deduz uma expressão para calcular as propriedades efetivas no contexto de uma aproximação de primeira ordem, ou seja,  $M = 1$  (apenas dois termos na expansão assintótica), como mostra a Equação (2.31). Essa delimitação simplifica o algoritmo computacional, permitindo, em certas circunstâncias, evitar a determinação explícita do problema local da Equação (2.14).

A teoria do MHA (incluindo métodos não-assintóticos) mostra que a expressão matemática que permite o cálculo da propriedade homogeneizada está delimitada pelas cotas teóricas (*Bounds*, do inglês), inferior e superior [55] (p.101), da regra das misturas [27] (p.638), que são as cotas clássicas de Reuss [125] (média harmônica) e Voigt [148] (média aritmética), respectivamente, para problemas lineares, e de Taylor [144] e Sachs [131], respectivamente, para problemas não-lineares [133], representando os extremos teóricos no comportamento dos compósitos. Muitas publicações, como [67] na Tabela (1.1), utilizam essas cotas como referência para validação de resultados. Segundo [9] e [55], considerando uma propriedade periódica generalizada  $P(y_i, t)$ , é possível demonstrar que:

$$P^{Reuss}(t) \leq P^H(t) \leq P^{Voigt}(t), \quad P^H(t) = \mathcal{H}\{P(y_i, t)\}, \quad (2.37)$$

onde  $\mathcal{H}\{\bullet\}$  é o **processo de homogeneização assintótica abstraído como um operador**. A Equação (2.37) é vantajosa tanto para validação quanto para garantir, de forma teórica, que os resultados do MHA permanecem dentro das cotas. Embora o cálculo de limites, cotas inferiores ou superiores, está fora do escopo deste estudo, idealizar o MHA como um operador permite analisar a ordem de precedência entre o princípio de correspondência (por meio de transformadas integrais) e o MHA; este assunto é comentado na Seção (A.1.1) e exemplificado na comparação de resultados do Capítulo (4).

O MHA é uma ferramenta analítica universal [9] (Cap.4), independente das equações de governo e constitutivas (neste caso, kernels viscoelásticos) do problema. Ou seja, pode ser modificado para comportar outro tipo de problemas (e.g. distorções plásticas [124]).

Conforme discutido no parágrafo anterior e seguindo a formulação teórica de [9] (pp. 100-103), uma vantagem do MHA é que as equações envolvidas são aplicáveis a propriedades descontínuas. Isso significa que a formulação dos kernels pode empregar funções contínuas por partes (*Piecewise smooth functions*, do inglês), que, conforme demonstrado por diversos autores na Tabela (1.1), refletem situações realistas em compósitos. A separação das funções que representam as propriedades materiais em segmentos permite que o algoritmo computacional utilize estruturas de dados compatíveis com essa característica, como arranjos (vetores e matrizes), os quais podem ser manipulados de forma eficiente.

Uma desvantagem do MHA é que, quando o tamanho da heterogeneidade se aproxima do problema macroscópico, as técnicas convencionais de homogeneização falham [155]; isso ocorre porque o MHA pressupõe que as coordenadas globais ( $x_i$ ) são independentes das coordenadas locais ( $y_i$ ) [9] (p.xxviii). Esse raciocínio assume que a geometria, a microestrutura e a fração volumétrica da célula periódica são invariantes em relação às deformações globais [101, 133], levando à formulação de um problema local, Equação (2.14), independente da dinâmica global. Ou seja, como explicitado por [9] (p.23), o fato que o parâmetro geométrico  $\epsilon$  depende de  $u_l(x_i, t)$  ou de  $\epsilon_{kl}(x_i, t)$  é completamente ignorado. Conseqüentemente, isso limita o uso do MHA em problemas com microestrutura em estado estacionário, ou transiente mas com comprimentos periódicos  $\epsilon$  muito pequenos. Embora essa limitação seja uma desvantagem, o algoritmo computacional descrito no Capítulo (3) tira proveito do fato de que  $\mathcal{H}\{\bullet\}$  não depende do tempo nem da dinâmica global, permitindo a aplicação de simplificações adicionais. Contudo, de acordo com [158], sempre que as fases sejam localmente isotrópicas e a fração volumétrica teórica (transitória ou não) permaneça similar ao caso realista, o método permanece confiável.

Outra desvantagem do MHA é que a equação do problema local (corretor de ordem  $m$ ) foi resolvida apenas para algumas estruturas periódicas [147, 9]; em estruturas mais complexas e realistas, utiliza-se frequentemente o MEF, que, de acordo com [45], é computacionalmente custoso e segundo [151] pode exigir um grau significativo de capacitação do usuário para formular o problema de forma eficaz. Neste trabalho a expressão para o cálculo da propriedade homogeneizada é desenvolvida sem a formulação explícita do problema local, o que é viabilizado pelas delimitações mencionadas nos parágrafos anteriores.

Finalmente, uma limitação do MHA ocorre em casos de grandes descontinuidades do material ou em estruturas não-periódicas [133], como porosidade, cavitação, difusão e concentração extremas, fadiga e fraturas. Além disso, altos contrastes nas propriedades podem impedir a convergência do método [101], exigindo abordagens mais sofisticadas.

## 2.5 Aplicação do MHA

*Esta seção atende aos requisitos do objetivo específico 3c.*

Mostra-se de forma resumida a aplicação do MHA com um exemplo mais concreto do que a idealização da Figura (2.1). Para isso, é necessário atender os seguintes itens:

- Explicitar as **etapas de implementação** do MHA, visando um algoritmo;
- Introduzir em contexto duas ferramentas analíticas que são utilizadas no Capítulo (3) (*integração por compatibilidade periódica e média sobre o período*);
- Apresentar o **problema local** e as expressões para os **coeficientes efetivos**;
- Formular as equações associadas a fases localmente isotrópicas, permitindo redução de complexidade algorítmica adicional.

Por disponibilidade de resultados (ver a Tabela (1.2), estrutura estratificada) e procurando simplificar a formulação matemática visando facilitar a correteza do Capítulo (3), o escopo é delimitado para o estudo de compósitos viscoelásticos com fases estratificadas.

### 2.5.1 Homogeneização em compósitos estratificados

Um compósito estratificado é um material formado por camadas de materiais diferentes, dispostas em direções específicas para otimizar suas propriedades mecânicas [27].

Cada fase (camada ou lâmina) é identificada pelo superscrito “ $(n)$ ”. A fração volumétrica  $\phi^{(n)}$  representa a razão entre o volume do  $n$ -ésimo material e o volume da célula, onde  $N$  é a quantidade de materiais no domínio do compósito:  $\Sigma = \Sigma^{(1)} \cup \dots \cup \Sigma^{(N)}$ .

A definição das propriedades materiais específicas de uma  $n$ -ésima região (uma fase arbitrária  $n$ ) pode ser feita utilizando um modelo que quantifica o comportamento do material. Essa equação constitutiva é chamada de “núcleo”; por exemplo, o contexto da viscoelasticidade utiliza o termo “kernel” [114]. No contexto do relaxamento, o kernel da região  $\Sigma^{(n)}$ , que é o tensor  $R_{ijkl}^{(n)}(y_i, t)$ , assume uma forma que depende explicitamente das variáveis internas do material, também denominadas “graus de liberdade” [19] (Cap.6).

A definição das propriedades materiais do compósito, abrangendo as  $1 < n \leq N$  regiões em cada célula, é feita usando kernels  $R_{ijkl}^{(n)}(y_i, t)$  em uma função por partes:

$$R_{ijkl}(y_i, t) = \begin{cases} R_{ijkl}^{(1)}(y_i, t), & \text{se } y_i \in \Sigma^{(1)} \\ \vdots \\ R_{ijkl}^{(N)}(y_i, t), & \text{se } y_i \in \Sigma^{(N)} \end{cases} \quad (2.38)$$

Note que a porção de cada região  $\Sigma^{(n)}$  está sujeita à fração volumétrica  $\phi^{(n)}$ . Contudo, quando  $N = 2$ , em um problema bifásico, o uso de superscritos pode ser omitido. Nesse caso,  $\phi$  representa a fração volumétrica de um material, enquanto  $1 - \phi$  indica a fração do outro. A Figura (2.2) ilustra essa relação usando medidas percentuais. Na prática,  $\phi$  pode representar a presença de um material, seja em função da geometria (como volume ou dimensões) ou da quantidade de matéria (como densidade ou concentração):

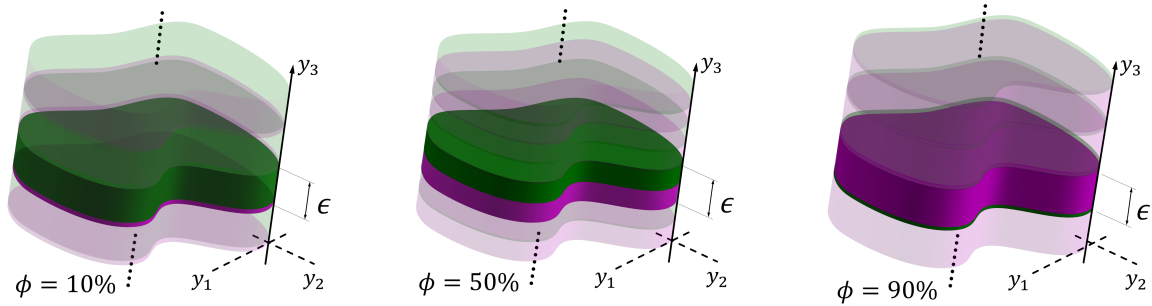


Figura 2.2: Células estratificadas segundo o comprimento periódico  $\epsilon$ , com compósitos bifásicos com frações volumétricas distintas: 10%, 50% e 90%. A simetria axial cartesiana, neste exemplo, é com relação a  $y_3$  (meio estratificado paralelo ao plano  $y_1y_2$ ).

A metodologia descrita na Seção (2.3) pode ser aplicada a este tipo de material compósito, considerando propriedades materiais não necessariamente contínuas, conforme a Equação (2.38). A aplicação do MHA pode ser resumida nas seguintes quatro etapas:

1. **Expansão assintótica** — Seção (2.3.1): Aplicação de uma série, com forma da Equação (2.10), sobre a variável do problema heterogêneo da Equação (2.1), a qual passa a ser expressa em coordenadas locais e globais conforme a Equação (2.12).
2. **Problema local** — Seções (2.3.2) e (2.3.3): Solução da Equação (2.14). Em uma aproximação que considere  $M + 1$  termos na expansão assintótica, é necessário resolver o  $m$ -ésimo problema local, que é o corretor de ordem  $m$ , para depois poder resolver o problema local do nível  $m + 1$ , onde  $m = 0, 1, \dots, M$ . Assim, na aproximação de primeira ordem,  $M = 1$ , existe um único problema local. Este corretor é calculado resolvendo a Equação (2.14). Paralelamente, a manipulação algébrica da Equação (2.12) resulta em três problemas conforme o agrupamento dos coeficientes  $\epsilon^{m-2}$ . Nesta etapa é demonstrado que o primeiro termo da expansão assintótica não depende da variável local. **O procedimento completo não é mostrado neste capítulo**, pois é um método padrão para o caso elástico ou difusivo [9, 36, 35, 118], entre outros casos, **mas é desenvolvido em detalhe no Capítulo (3) levando em consideração as particularidades do problema viscoelástico.**

3. **Coefficiente efetivo** — Seções (A.1.2) e (2.3.4): No contexto elástico, é possível utilizar a Equação (A.4) diretamente no domínio temporal. Já no contexto viscoelástico, devido ao princípio de correspondência, essa mesma equação é usada no espaço de Laplace-Carson para, após manipulação algébrica com os kernels, ser transformada de volta, se possível, para o domínio temporal [158]. Tal equação depende da solução do problema local, a qual é conhecida e computável no caso elástico ou difusivo; entretanto, no caso viscoelástico, o procedimento leva em conta algumas **considerações adicionais que são apresentadas no Capítulo (3)**.
4. **Equação homogeneizada** — Seção (2.3.5): No contexto elástico, utiliza-se a Equação (2.35), enquanto no contexto viscoelástico, aplica-se a Equação (2.36).

Este trabalho não usa coordenadas curvilíneas (uma análise nesse contexto pode ser encontrada em [40]), focando apenas em coordenadas cartesianas. As próximas subseções apresentam as expressões do problema local e da propriedade homogeneizada em compósitos estratificados, apresentando ferramentas para manipulação algébrica e discutindo aspectos de computabilidade em simetria axial. São abordados em paralelo os problemas elástico e viscoelástico para ressaltar as particularidades do caso viscoelástico.

### 2.5.1.1 Problema local em um caso de simetria axial

No contexto de laminados com simetria axial em  $y_3$ , considerando uma aproximação de primeira ordem ( $M = 1$ ), a partir das Equações (2.14) e (2.17) para o caso elástico e viscoelástico, respectivamente, o problema local é formulado da seguinte maneira:

$$\partial_3^y \left[ R_{i3k3}(y_i, 0) \partial_3^y \left( \chi_{jlk}^{[1]} + \chi_{jk}^{[0]} y_l \right) \right] = 0, \quad (2.39)$$

$$\partial_3^y \left[ \int_0^t R_{i3k3}(y_i, t - \tau) \partial^\tau \left( \partial_3^y \left( \chi_{jlk}^{[1]} + \chi_{jk}^{[0]} y_l \right) \right) d\tau \right] = 0, \quad (2.40)$$

onde  $\frac{\partial}{\partial y_{i \neq 3}}(\bullet) = \partial_{i \neq 3}^y(\bullet) = 0$ , anulando mudanças em direções diferentes de  $y_3$ .

Embora o problema seja simétrico em relação à coordenada  $y_3$  em ambas as equações, é possível considerar uma condição generalizada para o problema local, que não assuma que todos os componentes estão necessariamente alinhados com  $y_3$ . Isso pode ser feito trocando os índices  $j$  e  $l$  do argumento  $\chi_{jlk}^{[1]} + \chi_{jk}^{[0]} y_l$  apresentado nas Equações (2.39)-(2.40); se essa troca não é feita o resultado de ditas equações é um escalar nulo. Com índices arbitrários  $r$  e  $s$  substituindo  $j$  e  $l$ , respectivamente, o resultado pode ser interpretado como um estado de tensões nulo (e não um escalar), que também satisfaz as condições do problema local em casos de simetria, conforme formulado nas Equações (2.14) e (2.17).

### Integração por compatibilidade periódica

Esta ferramenta analítica é utilizada no MHA para a manipulação algébrica das equações integro-diferenciais, permitindo a formular a solução do problema local e calcular a propriedade efetiva [9] (Cap.3). Trata-se de uma integração indefinida (antiderivada) em relação a uma direção principal da coordenada local (que gera uma constante de integração, neste caso, com relação a  $y_3$ ), que, em problemas de maior complexidade (sem simetria axial, e.g. fibras, inclusões esféricas ou treliças), requer considerações adicionais.

Aplicando uma integral indefinida em relação a  $y_3$  em ambos os lados das Equações (2.39)-(2.40), e considerando que  $\chi_{rsk}^{[1]} = \chi_{rsk}$  e  $\chi_{rk}^{[0]} = \delta_{rk}$  (corretores de primeira e de ordem zero), é possível redistribuir os termos, aproveitando a linearidade dos operadores:

$$R_{i3k3}(y_i, 0)\partial_3^y(\chi_{rsk}) + R_{i3k3}(y_i, 0)\partial_3^y(\delta_{rk}y_s) = a_{i3rs}(x_i), \quad (2.41)$$

$$\int_0^t R_{i3k3}(y_i, t - \tau)\partial^\tau\partial_3^y(\chi_{rsk}) d\tau + \int_0^t R_{i3k3}(y_i, t - \tau)\partial^\tau\partial_3^y(\delta_{rk}y_s) d\tau = b_{i3rs}(x_i, t), \quad (2.42)$$

onde  $a_{i3rs}(x_i)$  e  $b_{i3rs}(x_i, t)$  são constantes, com relação a  $y_3$ . É importante notar que, na ausência de simetria axial em  $y_3$  permitindo variações em outras direções, ditas constantes dependeriam da direção de integração:  $a_{i3rs}(x_i, y_{i \neq 3})$  e  $b_{i3rs}(x_i, y_{i \neq 3}, t)$ . Assim, para que uma integração indefinida elimine os operadores  $\partial_j^y$ , é necessário que  $dy_i = dy_j$ . No Capítulo (3), essa abordagem é discutida em maior detalhe e aplicada diversas vezes, sendo chamada de critério de *integração por compatibilidade periódica* (ICP).

### Média sobre o período

Trata-se da Equação (2.34), entre outras aplicações, para eliminar termos que envolvem funções  $\epsilon$ -periódicas, simplificando as equações de interesse. A média sobre o período é aplicada de forma estratégica na manipulação algébrica da Seção (3.3), evitando a anulação completa dos termos da equação, como ilustrado no exemplo a seguir:

- A partir das Equações (2.41)-(2.42) é possível reconhecer que  $\partial_3^y y_s = \delta_{s3}$ , resultando:

$$R_{i3k3}(y_i, 0)\partial_3^y(\chi_{rsk}) + R_{i3k3}(y_i, 0)\delta_{rk}\delta_{s3} = a_{i3rs}(x_i), \quad (2.43)$$

$$\int_0^t R_{i3k3}(y_i, t - \tau)\partial^\tau\partial_3^y(\chi_{rsk}) d\tau + \int_0^t R_{i3k3}(y_i, t)\delta_{rk}\delta_{s3}\partial^\tau(1) d\tau = b_{i3rs}(x_i, t - \tau), \quad (2.44)$$

onde  $R_{i3k3}\delta_{rk}\delta_{s3} = R_{i3r3}\delta_{s3} = R_{i3rs}$ . Este tipo de tensores (rigidez e relaxamento, respectivamente) cumpre com a simetria intrínseca de todo tensor que representa uma propriedade material [9] (pp.137,248). Isto implica simetria principal,  $R_{ijkl} = R_{klij}$ , bem como simetrias secundárias,  $R_{ijkl} = R_{jikl} = R_{ijlk}$ , e as possíveis combinações entre estas [128].

A média sobre o período,  $\langle \bullet \rangle$ , de acordo com a Equação (2.34), pode ser aplicada sobre as Equações (2.43)-(2.44). Contudo, note que  $\langle f(x_i, t) \rangle \equiv f(x_i, t)$ , implicando que:

$$\langle R_{i3k3}(y_i, 0) \partial_3^y (\chi_{rsk}) \rangle + \langle R_{i3rs}(y_i, 0) \rangle = a_{i3rs}(x_i), \quad (2.45)$$

$$\left\langle \int_0^t R_{i3k3}(y_i, t - \tau) \partial^\tau \partial_3^y (\chi_{rsk}) d\tau \right\rangle + \left\langle \int_0^t R_{i3rs}(y_i, t - \tau) \partial^\tau (1) d\tau \right\rangle = b_{i3rs}(x_i, t), \quad (2.46)$$

onde, é possível perceber que a integração de uma função periódica nos limites do seu próprio período produz necessariamente um resultado nulo  $\langle f(y_i \pm 1, t) \rangle = 0$ , então:

$$\langle R_{i3k3}(y_i, 0) \partial_3^y (\chi_{rsk}) \rangle = \langle R_{i3rs}(y_i, 0) \rangle = 0, \quad (2.47)$$

$$\left\langle \int_0^t R_{i3k3}(y_i, t - \tau) \partial^\tau \partial_3^y (\chi_{rsk}) d\tau \right\rangle = \left\langle \int_0^t R_{i3rs}(y_i, t - \tau) \partial^\tau (1) d\tau \right\rangle = 0, \quad (2.48)$$

porque por definição, nas Equações (2.15) e (2.16),  $R_{i3rs}$  e  $\chi_{rsk}$ , respectivamente, são funções periódicas. Essa consequência natural de toda função periódica é apresentada, na literatura, em formato de “Lema” [9] (p.19). No Capítulo (3) esse lema é invocado diversas vezes sob o nome de critério da *média sobre o período* (MSP).

### Corretor de primeira ordem: função local no contexto de relaxamento

A solução do problema local é substituída na Equação (2.33) para calcular a propriedade homogeneizada. Alguns autores usam identidades como  $R_{ijkl} = R_{ijrs} R_{ijrs}^{-1} R_{ijkl}$  e  $R_{ijkl} = R_{ijrs} \delta_{rk} \delta_{sl}$  para formatar  $\chi_{rsk}$  antes da substituição [80] (pp.85-86). A expressão da solução do problema local (função local), demonstrada em [40] (pp.21-27) é:

$$\chi_{rsk}(y_i, t) = \left\langle \left\langle R_{i3k3}^{-1} R_{i3rs} \right\rangle \left\langle R_{i3k3}^{-1} \right\rangle^{-1} \right\rangle R_{i3k3}^{-1} - \left\langle R_{i3k3}^{-1} R_{i3rs} \right\rangle. \quad (2.49)$$

#### 2.5.1.2 Coeficiente efetivo em um caso de simetria axial

A expressão para calcular a propriedade homogeneizada, apresentada na Equação (2.33), é modificada para considerar a simetria axial em  $y_3$ . Assim, utilizando as Equações (2.33) e (2.34), no contexto de um fenômeno de relaxamento, é possível distribuir o produto e a média sobre o período, também, fazendo  $\partial_{i \neq 3}^y (\bullet) = 0$ , a expressão se torna:

$$R_{ijkl}^H(t) = \left\langle R_{ijkl}(y_i, t) \right\rangle + \left\langle R_{ijrs}(y_i, t) \partial_3^y (\chi_{rsk}(y_i, t)) \right\rangle, \quad (2.50)$$

Note que, se o corretor de primeira ordem,  $\chi_{rsk}^{[1]}(y_i, t) = \chi_{rsk}(y_i, t)$ , for constante em relação à coordenada local  $y_3$ , a propriedade homogeneizada pode ser obtida por uma simples integração, similar à cota clássica de Voigt:  $R_{ijkl}^H(t) = \left\langle R_{ijkl}(y_i, t) \right\rangle$  [148].



O corretor de ordem zero,  $\chi_{rsk}^{[0]} = \delta_{rk}$ , garante que a Equação (2.50) esteja em conformidade com os limites teóricos de Reuss (média harmônica) e Voigt (média aritmética), ambos usando a fração volumétrica das fases como argumento de entrada, como descrito por [118] (p.10). Por outro lado, o corretor de primeira ordem,  $\chi^{[1]}$ , captura variações periódicas nos fenômenos locais. Assim, conforme a expansão na Equação (2.30), um corretor de ordem  $m$  descreve deformações locais com amplitudes na ordem de  $\epsilon^m$ .

Ao substituir a expressão do corretor de primeira ordem, mostrada na Equação (2.49) para o caso de compósito laminado, na Equação (2.50), obtém-se uma expressão que pode ser empregada no cálculo de propriedades homogêneas diretamente no domínio temporal. Note que a propriedade homogeneizada é expressa por tensores, cujos coeficientes quantificam essa propriedade em diferentes direções; esse raciocínio justifica o uso dos termos “propriedade homogênea/homogeneizada” e “coeficiente(s) efetivo(s)” como equivalentes. De acordo com [123] (pp.194-195) e [122, 80], a equação dos coeficientes efetivos é:

$$R_{ijkl}^H(t) = \langle R_{ijkl} \rangle + \langle R_{ijr3} R_{s3r3}^{-1} \rangle \langle R_{p3q3}^{-1} R_{p3kl} \rangle \langle R_{s3q3}^{-1} \rangle^{-1} - \langle R_{ijr3} R_{s3r3}^{-1} R_{s3kl} \rangle, \quad (2.51)$$

onde  $R_{ijkl}$  e os outros tensores operandos são dependentes de  $(y_i, t)$ . Alguns índices foram modificados para ter compatibilidade com a expressão utilizada por [80] (p.86). Alguns autores adaptam a Equação (2.51) para o espaço de Laplace-Carson: [40] (p.26) e [41].

### Isotropia

O cálculo do coeficiente efetivo  $R_{ijkl}^H(t)$  em viscoelasticidade apresenta complexidade adicional devido aos termos associados a equações integro-diferenciais, enquanto manipulações algébricas simples são suficientes para casos elásticos ou difusivos. Independentemente da linguagem de programação, uma estratégia para garantir corretude é abordar um problema com complexidade algorítmica reduzida, sendo razoável considerar compósitos com fases isotrópicas, como todas as publicações da Tabela (1.1). **Considerar isotropia no modelo constitutivo de cada fase não implica que, em uma escala global, o compósito possua um comportamento desse tipo.** O comportamento do corpo de prova depende, principalmente, do tipo de configuração microestrutural [27].

Um tensor de quarta ordem em  $x_i, y_i \in \mathbb{R}^3$  possui 81 coeficientes, mas, devido às simetrias materiais [128, 116], passa a ter 21 coeficientes independentes no caso anisotrópico [19, 9, 114, 106, 18]. Entretanto, ao considerar um problema de fases com comportamento quase-rígido, como projetado na Equação (2.36) usando a deformação de engenharia, é ainda mais razoável simplificar o problema assumindo fases localmente isotrópicas.



No contexto isotrópico, a magnitude da deformação tende a ser similar em todas as direções:  $\partial_k^y u_l \sim \partial_l^y u_k$ . Assim, conforme indicado por [80] (p.147), o kernel viscoelástico de cada fase, em coordenadas locais, pode ser construído utilizando a seguinte expressão:

$$R_{ijkl}(y_i, t) = \lambda(y_i, t)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(y_i, t)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (2.52)$$

onde  $\lambda(y_i, t)$  e  $\mu(y_i, t)$  são compressibilidade e cisalhamento, respectivamente, conhecidas como parâmetros (neste caso viscoelásticos [127]) de Lamé [50] (p.49). A implementação da Equação (2.52), segundo [116, 128], permite as seguintes simetrias a nível local:

- Coeficientes de alongamento puro  $R_{iiii}$ :  $R_{1111} = R_{2222} = R_{3333} = \lambda(y_i, t) + 2\mu(y_i, t)$ ,
- Coeficientes de cisalhamento puro  $R_{iiij}$ :  $R_{2233} = R_{1133} = R_{1122} = \lambda(y_i, t)$ ,
- Coeficientes de deformação combinada  $R_{ijij}$ :  $R_{2323} = R_{1313} = R_{1212} = \mu(y_i, t)$ .

Paralelamente, dentro do contexto de compósitos laminados, por causa da simetria axial com relação a uma coordenada, qualquer coeficiente com uma quantidade ímpar de índices diferente de 3 é zero [48] (p.70). Isso permite reduzir a quantidade de coeficientes independentes de 21 (anisotropia) para 13 (monoclínico) por casa fase. Adicionando o critério de fases isotrópicas a quantidade de coeficientes independentes por cada fase se reduz para 2,  $\lambda^{(n)}(t)$  e  $\mu^{(n)}(t)$ , da Equação (2.52). Essa simplificação é conveniente para facilitar a etapa de análise dos resultados objetivando correteude; também diminui o custo computacional. Segundo [93] (p.863), os coeficientes da propriedade homogênea  $R_{ijkl}^H(t)$  da Equação (2.51) podem ser calculados explicitamente, coeficiente por coeficiente, utilizando as seguintes relações que compõem uma matriz transversalmente isotrópica:

$$c \equiv c(y_i, t) = \lambda(y_i, t) + 2\mu(y_i, t), \quad (2.53)$$

$$R_{1111}^H(t) = R_{2222}^H(t) = \langle c \rangle + \langle \lambda c^{-1} \rangle^2 \langle c^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda^2 c^{-1} \rangle, \quad (2.54)$$

$$R_{1122}^H(t) = \langle \lambda \rangle + \langle \lambda c^{-1} \rangle^2 \langle c^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda^2 c^{-1} \rangle, \quad (2.55)$$

$$R_{1212}^H(t) = \frac{1}{2} \left( R_{1111}^H(t) - R_{1122}^H(t) \right) = \langle \mu \rangle, \quad (2.56)$$

$$R_{1133}^H(t) = R_{2233}^H(t) = \langle \lambda c^{-1} \rangle \langle c^{-1} \rangle^{-1}, \quad (2.57)$$

$$R_{2323}^H(t) = R_{1313}^H(t) = \langle \mu^{-1} \rangle^{-1}, \quad (2.58)$$

$$R_{3333}^H(t) = \langle c^{-1} \rangle^{-1}, \quad (2.59)$$

onde todo coeficiente  $R_{ijkl}^H(t)$  com três índices iguais é nulo:  $R_{iiil}^H(t) = R_{iili}^H(t) = R_{ilii}^H(t) = R_{liii}^H(t)$ . Note que embora as fases são localmente isotrópicas a propriedade global é descrita por uma matriz transversalmente isotrópica, como toda estrutura estratificada.

## 2.6 Kernels viscoelásticos

*Esta seção atende aos requisitos do objetivo específico 4.*

A Tabela (1.2) apresenta modelos matemáticos comuns de propriedades de fase utilizados como kernels viscoelásticos. São abordados a teoria e as equações do modelo reológico de *Zener* (três parâmetros), do modelo exponencial de *Dischinger* (sem envelhecimento) e do modelo de expoente fracionário de *Scott Blair e Rabotnov*.

### 2.6.1 Sólido Linear Padrão, kernel Zener

Apesar das limitações do modelo baseado em arranjos mola-amortecedor (*Lumped parameter spring-damper arrangement*, do inglês), o kernel viscoelástico idealizado como um sólido linear padrão [119] (*Standard Linear Solid* do inglês) é utilizado nos casos de estudo unidimensionais devido à sua simplicidade [49](p.55). Também conhecido como Modelo Zener [78], possui diversas aplicações teóricas e práticas [130, 59, 91, 50]. Os casos de estudo, do presente trabalho, onde este kernel é utilizado, são unidimensionais, consequentemente não é necessário utilizar a notação indicial porque o tensor de quarta ordem, o tensor de relaxamento, é definido por  $R_{ijkl}(y, t) = R(y, t)\delta_{ij}\delta_{kl}$ . Assim, nos correspondentes casos de estudo apenas é utilizado apenas o coeficiente  $R(y, t)$ .

O modelo matemático de  $R(y, t)$ , no contexto do relaxamento, é implementado na  $n$ -ésima fase da região  $\Sigma^{(n)}$  utilizando parâmetros com uma clara interpretação física, como o módulo elástico (presente no caso limite quando  $t = 0$ )  $E^{(n)}$  [Pa], o módulo viscoso  $\eta^{(n)}$  [Pa s], o módulo viscoelástico  $M^{(n)}$  [Pa] e a razão de relaxamento  $r^{(n)} = \eta^{(n)}/M^{(n)}$  [s] (tempo de relaxamento). Assim, este modelo constitutivo possui três parâmetros independentes, ou “graus de liberdade” segundo [19]. Note que, se  $M^{(n)} = 0$  e  $E^{(n)} > 0$ , o material é puramente elástico; se  $M^{(n)} > 0$  e  $E^{(n)} = 0$ , o material é puramente viscoso. O termo  $\eta^{(n)} > 0$  regula a taxa de relaxamento do material, enquanto maior a magnitude menor o relaxamento. A Equação (2.38) permite montar a estrutura periódica do kernel Zener:

$$R(y, t) = \begin{cases} R^{(1)}(t) = E^{(1)} + M^{(1)}e^{-t/r^{(1)}} & \text{se } y \in \Sigma^{(1)}, \quad \phi^{(1)} := \phi \\ R^{(2)}(t) = E^{(2)} + M^{(2)}e^{-t/r^{(2)}} & \text{se } y \in \Sigma^{(2)}, \quad \phi^{(2)} := 1 - \phi \end{cases} \quad (2.60)$$

A implementação computacional deste modelo de kernel é exemplificada na Seção (3.4.3.2). Note que  $E^{(n)}$ ,  $M^{(n)}$  e  $r^{(n)}$  são parâmetros com magnitude constante, ou seja, representam propriedades localmente uniformes dentro de cada região  $\Sigma^{(n)}$ .

## 2.6.2 Decadência exponencial de Dischinger

O modelo constitutivo de Dischinger é utilizado na viscoelasticidade, especialmente para modelar materiais que exibem comportamento de fluência ou relaxamento com tendência ao envelhecimento (kernels transitórios) [59]. Segundo [38], existem duas versões do modelo: uma padrão (pp.30, 75-76) e uma aprimorada (*Improved Dischinger formula*, do inglês), ajustada a um conjunto específico de dados experimentais (p.78). Este estudo aborda apenas a versão padrão para o caso de relaxamento linear sem envelhecimento.

O modelo de Dischinger aborda propriedades viscoelásticas de materiais associados ao concreto (e.g. armado, protendido) [108, 13] como estruturas no contexto da construção civil [138] e materiais geológicos como rochas [39], considerando uma decadência exponencial da distribuição de tensões sob deformação constante ao longo do tempo. Embora este modelo possa ser implementado em um problema unidimensional, é mais comum encontrá-lo em problemas de compósitos estratificados transversalmente isotrópicos.

A representação matemática desse comportamento é feita por funções que incorporam termos exponenciais de decadência,  $e^{-t\alpha}$ , permitindo capturar a natureza transitória e de longo prazo do relaxamento [138]. Utilizando a Equação (2.38), é possível montar o modelo de Dischinger para o caso localmente isotrópico da seguinte maneira:

$$R(y, t) = \begin{cases} R^{(1)}(t) & \text{se } y \in \Sigma^{(1)}, \quad \phi^{(1)} := \phi \\ R^{(2)}(t) & \text{se } y \in \Sigma^{(2)}, \quad \phi^{(2)} := 1 - \phi \end{cases}, \quad R^{(n)}(t) = \lambda^{(n)}(t) + 2\mu^{(n)}(t), \quad (2.61)$$

onde  $\lambda^{(n)}$  e  $\mu^{(n)}$  são os parâmetros de Lamé da  $n$ -ésima fase, definidos previamente na Equação (2.52). O módulo de cisalhamento é expresso por uma amplitude  $\mu_0^{(n)}$  e um termo de decadência exponencial,  $\theta^{(n)}(t)$ , como mostra a seguinte expressão:

$$\mu^{(n)}(t) = \mu_0^{(n)} e^{\theta^{(n)}(t)}, \quad \theta^{(n)}(t) = \mu_0^{(n)} \frac{\psi(t)}{\alpha^{(n)}\beta^{(n)}}, \quad \psi(t) = e^{-t\alpha^{(n)}}, \quad (2.62)$$

O parâmetro  $\lambda^{(n)}(t)$  está associado à compressibilidade volumétrica  $K^{(n)}$ :

$$\lambda^{(n)}(t) = K^{(n)} - \frac{2}{3}\mu^{(n)}(t), \quad (2.63)$$

Os termos  $\alpha^{(n)}$  e  $\beta^{(n)}$  são os graus de liberdade do modelo, associados às características mecânicas da  $n$ -ésima fase, mas sem uma interpretação física direta notável. Na Equação (2.62), o termo exponencial original é  $\psi(t, \tau) = e^{-(t-\tau)\alpha^{(n)}}$ , porém,  $\tau = 0$  pois no escopo deste estudo, não são analisados casos que envolvem fenômenos de envelhecimento.

### 2.6.3 Núcleo de Scott Blair e Rabotnov

As vezes, modelos reológicos e exponenciais não conseguem ser ajustados aos dados experimentais com a precisão necessária [94] (pp.136-139), [58] (pp.58,87). Segundo diversos autores (e.g. [18, 112, 79]), uma alternativa mais flexível é o uso das Séries de Prony, que podem ser interpretadas como modelos reológicos mais avançados (são adicionados termos corretores em forma de um somatório), capazes de melhorar o ajuste dos dados. No entanto, em casos práticos, para garantir que o modelo reproduza fielmente o comportamento real do material, pode ser necessária uma quantidade elevada de graus de liberdade no somatório associado à série de Prony, o que pode ser pouco prático.

Essa dificuldade pode ser superada com o uso de modelos baseados no cálculo fracionário [94], que descrevem certos conjuntos de dados com relativamente poucos graus de liberdade utilizando funções especiais [20]. Um núcleo fracionário pode substituir tanto uma Série de Prony com múltiplos termos quanto um arranjo reológico complexo com numerosos coeficientes formados por combinações intrincadas de amortecedores e molas [38] (p.28). Uma descrição detalhada da abordagem associada ao ajuste de modelos fracionários com conjuntos de dados experimentais pode ser encontrada em [121].

Os kernels fracionários geralmente permitem a realização de transformadas integrais de forma analítica, de maneira relativamente simples e explícita. No entanto, ao lidar com transformadas inversas, assim como ocorre com outros tipos de kernels, a complexidade das expressões exige o uso de ferramentas computacionais especializadas [127, 112, 45]:

— Por exemplo, o Programa (B.1.4), usado como alternativa para calcular propriedades homogeneizadas visando validação dos resultados no Capítulo (4), utiliza a versão computacional da transformada de Laplace e sua inversa, com as funções `Laplace(●)` e `iLaplace(●)`, respectivamente, disponíveis no *ambiente simbólico* do GNU Octave (`pkg load symbolic`). Essas ferramentas são aplicadas em kernels não-fracionários para transformação e inversão (o processo de inversão é demorado, mesmo com expressões matemáticas simples), como mostra o programa citado; entretanto, **ferramentas de ambiente simbólico não são compatíveis com kernels fracionários**, sendo necessário o uso de métodos numéricos especializados como o INVLAP [75] ou o CME-ILT [77].

— O problema da transformada integral inversa de kernels fracionários surge em expressões, e.g. no domínio de Laplace, como  $R_{ijkl}^H(s)$ , com denominadores contendo  $s^\alpha$ , onde  $s \in \mathbb{C}$  é a variável transitória do domínio transformado e  $\alpha \in ]0, 1[ \subset \mathbb{R}$  é o expoente fracionário. Computar  $\mathcal{L}^{-1}\{R_{ijkl}^H(s)\}$  pode ser desafiador [127] ou intratável.

As Equações (2.60)-(2.61) podem ser adaptadas especificamente para o modelo de núcleo Scott Blair e Rabotnov utilizado em [140] (p.35); outros modelos fracionários, que podem ser encontrados, por exemplo, em versões reológico-fracionárias de [122], não estão inclusas no escopo do presente estudo. Assim, o kernel é estruturado da seguinte maneira:

$$R(y, t) = \begin{cases} R^{(1)}(t) & \text{se } y \in \Sigma^{(1)}, \quad \phi^{(1)} := \phi \\ R^{(2)}(t) & \text{se } y \in \Sigma^{(2)}, \quad \phi^{(2)} := 1 - \phi \end{cases}, \quad R^{(n)}(t) = \lambda^{(n)}(t) + \mu^{(n)}(t), \quad (2.64)$$

para argumentos localmente isotrópicos, que são os parâmetros de Lamé da  $n$ -ésima fase,  $\lambda^{(n)}(t)$  e  $\mu^{(n)}(t)$ , da Equação (2.52). Assim, neste caso específico:

$$\mu^{(n)}(t) = \mu_0^{(n)} \kappa^{(n)} \vartheta^{(n)}(\alpha, \beta, t), \quad \lambda^{(n)}(t) = K_0^{(n)} - \frac{2}{3} \mu^{(n)}(t), \quad (2.65)$$

onde  $\kappa^{(n)}$  é um dos graus de liberdade do kernel, que nas referências originais aparece como “ $\lambda$ ” [140]; porém, para evitar ambiguidades com o parâmetro de Lamé,  $\lambda^{(n)}(t)$ , a notação foi alterada para “ $\kappa$ ”. O termo  $K_0^{(n)}$  é o módulo de compressibilidade volumétrica (*Bulk modulus*, do inglês) da  $n$ -ésima fase do compósito, e as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  (a saber:  $\alpha^{(n)}$  e  $\beta^{(n)}$ ) são graus de liberdade adicionais, como argumentos da função fracionária  $\vartheta^{(n)}$ .

A função  $\vartheta^{(n)}(\alpha, \beta, t)$ , invocada pela Equação (2.65) para a  $n$ -ésima fase, pode ser implementada de duas maneiras [140] (p.35), que, ao menos em princípio, deveriam ser equivalentes. As duas formas de implementar o kernel de Scott Blair e Rabotnov são:

— A primeira forma, compatível com [7] (p.19), [160] (p.49) e [109] (p.113), é:

$$\vartheta^{(n)}(\alpha, \beta, t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k t^{k(1-\alpha)}}{\Gamma[(k+1)(1-\alpha)]}, \quad (2.66)$$

com  $\alpha$  e  $\beta$  sem uma interpretação física notável. A função Gamma,  $\Gamma(\bullet)$ , [4] (p.255), normalmente é nativa do entorno de computação (e.g. MATLAB<sup>®</sup>, GNU Octave).

— A segunda forma, considerando argumentos equivalentes à primeira forma, é:

$$\vartheta^{(n)}(\alpha, \beta, t) = \frac{1}{\beta} \left[ \mathcal{M}(\alpha + 1, 1, \beta t^{\alpha+1}) - 1 \right], \quad (2.67)$$

onde  $\mathcal{M}(\bullet)$  é a função de Mittag-Leffler [65], originalmente nomeada como  $M_{a,b}(z)$ , mas escrita aqui como  $\mathcal{M}(a, b, z)$  para evitar ambiguidades na notação.

A primeira e segunda forma de  $\vartheta^{(n)}(\alpha, \beta, t)$ , implementadas computacionalmente nos Programas (B.1.2) e (B.1.3), correspondem às Equações (2.66) e (2.67), respectivamente, e compartilham os argumentos  $a = \alpha + 1$  e  $z = \beta t^{\alpha+1}$ , os quais devem estar ajustados nesse formato (ou equivalente) para garantir compatibilidade entre as versões.

Cabe ressaltar que a função Mittag-Leffler é uma função especial que generaliza a função exponencial e está definida por uma série infinita expressa da seguinte maneira:

$$\mathcal{M}(a, b, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak + b)}. \quad (2.68)$$

A função de Mittag-Leffler com dois parâmetros,  $a$  e  $b$ , é um caso específico de sua versão mais geral com seis parâmetros [121], aceitando tanto argumentos reais ( $z, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) quanto complexos ( $z \in \mathbb{C}$ ). No entanto, o núcleo fracionário de Scott Blair e Rabotnov utiliza a versão simplificada com um único parâmetro ( $b = 1$ ), eliminando  $b$  como grau de liberdade; isto permite escrever  $\mathcal{M}(a, 1, z) \equiv \mathcal{M}(a, z)$ . Neste estudo, o Programa (B.1.3) implementa a Equação (2.68) apenas para argumentos reais.

Na versão uniparamétrica as Equações (2.66) e (2.67) se tornam idênticas à função exponencial quando  $a = 1$  (ou, de forma equivalente, quando  $\alpha = 0$  segundo o formato de  $\varepsilon^{(n)}$ ), ou seja:  $\mathcal{M}(1, z) \equiv e^z$ . Consequentemente, conforme apontado por [140, 44], o núcleo de Scott Blair e Rabotnov se torna equivalente ao modelo reológico de Kelvin.

Para finalizar, é necessário esclarecer que o kernel fracionário de Scott Blair e Rabotnov apresenta uma complexidade significativa para ser configurado de forma robusta e convergente no domínio do tempo. Isso ocorre porque ele é expresso, tanto na Equação (2.66) (primeira forma) quanto na Equação (2.67) (segunda forma), como uma soma infinita que envolve a função Gamma,  $\Gamma(\bullet)$ , no denominador e uma função exponencial do argumento transitório  $(f(t))^k$ , resultando em uma configuração inerentemente instável, uma vez que a cada iteração  $k$ , avalia-se o quociente entre números de grande magnitude, expondo, a cada  $k$ -ésima nova iteração, os limites da precisão computacional.

Após um determinado valor de  $k$ , que depende da precisão do computador e da linguagem de programação, as Equações (2.66) e (2.67) podem não convergir, resultando em valores não numéricos (*Not-a-Number*, NaN). Para minimizar esse problema, recomenda-se ajustar o ambiente computacional para utilizar a maior precisão numérica disponível, como a dupla precisão (64 bits). No entanto, devido a problemas de convergência, é utilizada apenas a Equação (2.66), pois, com o conjunto específico de dados fornecido no estudo de caso correspondente, a Equação (2.67) retorna valores incorretos.

# Capítulo 3

## Metodologia

*Este capítulo atende aos requisitos dos objetivos específicos 5 e 6.*

A formulação do algoritmo combina as etapas da aplicação do MHA, mostradas na Seção (2.5), com técnicas de manipulação de arranjos de dados, funções lambda, ferramentas de inversão de matrizes e integração numérica (esta última, apenas em casos gerais sem otimização). A organização deste capítulo segue as seguintes etapas:

1. **Considerações preliminares** — A simplificação e troca de notação, utilizada na manipulação algébrica, é justificada. Também, apresenta-se um conjunto de esclarecimentos relacionados à interpretação do problema de periodicidade bi-escala utilizada para a discretização espacial e escolha do paradigma.
2. **Definição dos operadores** — Todos os operadores utilizados na etapa de manipulação algébrica são definidos. A relação entre os operadores *gradiente* e *divergente*, com os operadores *média sobre o produto* e *integração por compatibilidade*, é comentada citando as considerações necessárias para dita relação. Detalhes adicionais relacionados à notação e propriedades algébricas são fornecidos.
3. **Manipulação algébrica** — Os operadores da etapa anterior são aplicados sobre a Equação (2.1); o intuito é que a partir desse ponto seja demonstrada a obtenção da expressão a ser implementada computacionalmente para cálculo da propriedade homogeneizada no contexto viscoelástico. A Equação (2.36), no contexto do relaxamento, é reescrita utilizando coordenadas locais e globais aplicando os operadores correspondentes. De acordo com o MHA padrão, a sequência de etapas é:
  - (a) **Expansão assintótica** — Aplicação da série mostrada na Equação (2.10) para obter um operador funcional análogo às Equações (2.12) e (2.37).

- (b) **Aproximação de primeira ordem** — Considerando o truncamento da Equação (2.12) em  $M = 1$  (ou seja,  $m = 0, 1$ ), a expressão é separada em três problemas que devem ser resolvidos na seguinte sequência:
- i. *Primeiro termo da expansão* — A expressão do primeiro termo da expansão é desenvolvida, mostrando que não depende da coordenada local;
  - ii. *Função local* — Embora a expressão do corretor de primeira ordem seja desenvolvida e equacionada, esta não chega a ser utilizada explicitamente;
  - iii. *Coefficiente efetivo* — A expressão para calcular a propriedade homogeneizada é desenvolvida utilizando os resultados anteriores;
  - iv. *Equação homogeneizada* — A expressão é mostrada, mas não é usada.
4. **Implementação computacional** — A escolha de estrutura de dados e fluxo de informação necessários para implementar a expressão que calcula a propriedade homogeneizada, desenvolvida nas etapas anteriores, são definidos:
- (a) **Redução de complexidade** — São desenvolvidos dois critérios que permitem analisar conceitualmente a redução de complexidade algorítmica da expressão matemática obtida na manipulação algébrica:
- i. *Condições de simulação* — São abordadas as consequências de um MHA com aproximação de primeira ordem e fases localmente isotrópicas.
  - ii. *Verificação* — É analisado, utilizando como exemplo o problema de compositos estratificados da Seção (2.5.1), que determinar uma solução para a função local equivale a uma manipulação algébrica matricial.
- (b) **Programação** — O programa principal baseia-se em três ferramentas computacionais bem estabelecidas, todas elas já implementadas no entorno de computação científica (neste caso o GNU Octave) utilizando funções nativas:
- i. *Vetorização* — Montagem de funções por partes utilizando manipulação de arranjos visando computação vetorizada via software (não hardware).
  - ii. *Somatório* — São destacados os casos em que a redução algorítmica não pode ser aplicada, exigindo o uso de uma ferramenta de integração numérica, como funções nativas de quadratura.
  - iii. *Inversão* — Uso de funções nativas de inversão numérica de matrizes.



## 3.1 Considerações preliminares

*Esta seção atende aos requisitos do objetivo específico 5a.*

A notação indicial apresentada no Capítulo (2) é útil para relacionar, sem ambiguidades, os índices com as operações envolvidas entre os tensores (e.g. produto matricial). Mas neste capítulo, para simplificar a escrita é necessária uma notação mais enxuta.

Portanto, no contexto de tensores de quarta ordem com dependência das coordenadas globais ( $x_i$ ), locais ( $y_i$ ) e do tempo ( $t$ ), o que em notação indicial deveria ser escrito como  $R_{ijkl}(x_1, \dots, x_D, y_1, \dots, y_D, t)$  é simplesmente escrito como  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ . Esta é a *notação em negrito*, que neste caso não faz distinção entre tensores de ordem  $\geq 2$ .

### Periodicidade bi-escala

A discretização espacial da coordenada global é baseada na divisão finita do comprimento representativo macroscópico  $L_i \in \mathbb{R}^D$ , onde  $i = 1, \dots, D$ . Isso pode ser expresso como:  $h_i \Delta x_i = L_i$ , onde  $h_i$  é a quantidade de intervalos finitos  $\Delta x_i$  que cabem em  $L_i$ .

Entretanto, um comprimento representativo microscópico  $\ell_i$  pode, na prática, ser consideravelmente menor que  $L_i$ , ou seja:  $\ell_i \ll L_i$ . Note que  $\Delta x_i$  deve ser suficientemente pequeno para capturar os fenômenos na ordem de comprimento de  $\ell_i$ . Conseqüentemente, uma estrutura periódica com comprimento  $\ell_i$  (que contém as regiões de cada fase), cada vez menor, exigiria um valor crescente de  $h_i$ , o que é computacionalmente oneroso, pois a complexidade do algoritmo numérico tende a ser proporcional com  $\mathcal{O}(h_i^D)$ .

O MHA introduz um parâmetro geométrico  $\epsilon$ , que vincula as coordenadas globais às coordenadas locais da seguinte forma:  $\epsilon y_i = x_i$ . Escrito desta maneira, poderia ser interpretado que  $\epsilon$  é uma quantidade adimensional, atuando como uma escala entre ambas as coordenadas que, segundo esta interpretação, são espaciais. Na versão diferencial aproximada, é possível escrever  $\epsilon \Delta y_i = \Delta x_i$ , o que sugere que  $\Delta y_i$  é um comprimento e  $\epsilon$  uma escala. Embora esse entendimento seja útil para uma interpretação geométrica da célula, não influi na aplicação do método. No algoritmo a ser descrito  $\epsilon$  é um comprimento (em concordância com [9, 36]) e  $y_i$  é uma coordenada que expressa uma frequência espacial. Conseqüentemente, o termo “periodicidade bi-escala” que originalmente faz referencia a uma escala global que depende de uma escala local, pode resultar um pouco impreciso.

Assim, a relação  $y_i = x_i \epsilon^{-1}$ , introduzida na Equação (2.10), no presente paradigma, expressa que  $y_i$  é uma quantidade adimensional que representa a proporção entre a coordenada macroscópica e o comprimento constante de uma estrutura micro-periódica.

A interpretação do parágrafo anterior é coerente com a condição  $\epsilon \ll L_i$  e sugere a seguinte hierarquia de comprimentos:  $\epsilon < \Delta x_i < \ell_i \leq \Delta L_i < L_i$ , onde  $\Delta L_i$  pode ser interpretada como uma diferença finita macroscópica, suficientemente pequena para ser tratada, com eficiência, por algum método que envolva discretização espacial global.

Independentemente da interpretação dos termos,  $\epsilon$  é uma métrica que relaciona a coordenada global  $x_i$  e a coordenada local  $y_i$ . Este parâmetro surge naturalmente da regra da cadeia apresentada na Equação (2.11), especificamente no termo  $\partial y_i / \partial x_i = \epsilon^{-1}$ .

## 3.2 Definição dos operadores

*Esta seção atende aos requisitos do objetivo específico 5b.*

Uma função lambda, também chamada no contexto da computação de “função anônima” ou “abstração Lambda” [57], é uma função sem nome explícito, frequentemente utilizada para representar operadores no Cálculo Lambda [12]. Esses operadores realizam uma sequência finita de operações matemáticas utilizando recursos finitos como energia, tempo e memória, e podem incluir outros operadores aninhados ou invocar subprogramas.

Em linguagens de programação multi-paradigma, como MATLAB<sup>®</sup> ou GNU Octave, a sintaxe para definir uma função lambda (um operador ou programa) é direta e permite definir funções em uma única linha. A sintaxe básica é:  $\mathbf{f} = @(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) \textit{expressão}$ , onde  $\mathbf{f}$  é a variável que armazena o resultado,  $@$  indica que se trata de uma função anônima,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{t}$  são os argumentos de entrada, e *expressão* é o próprio operador ou programa [145]. Por exemplo, para criar uma função lambda que calcula o quadrado de um número usa-se: `square = @(x) x.^2`. Essa função pode ser invocada utilizando um argumento compatível com  $@(\mathbf{x})$ , como: `result = square(3)`, que retornará `»result = 9`.

Funções lambda são úteis em operações com arranjos de dados, especialmente quando a estrutura de dados está predefinida para vetorização. Nesse contexto, a função lambda e seu invocador (e.g. `result = arrayfun(square[1,2,3])`, `»result = [1,4,9]`, ou equivalentemente com `cellfun(@(f))`) **podem ser abstraídos como um único operador ou programa** que recebe um argumento de entrada e devolve um resultado. Assim, neste capítulo a notação “ $f(\bullet)$ ” para funções matemáticas é substituída por “ $f\{\bullet\}$ ” enfatizando que dita função está representando consistentemente **um operador que abstrai um programa de computador**. O operador que manipula um conjunto de dados é escrito em negrito: “ $\mathbf{f}\{\bullet\}$ ”. Também, com relação aos problemas local e global descritos no Capítulo (2), a definição de um operador deve considerar uma direção genérica  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}, \mathbf{y}$ .

### Operador gradiente e sua inversa

Calcula as derivadas parciais dos componentes do argumento, com relação a cada direção  $\xi_i$ . Esta operação aumenta a ordem do tensor. A operação inversa resulta na sequencia de integrais definidas,  $D$  vezes em total, com relação a cada direção  $\xi_i$ :

$$\nabla_{\xi} \{\bullet\}, \quad \xi \in [0, 1], \quad \text{que permite: } \int_0^1 \nabla_{\xi} \{\mathbf{A}\} d\xi = \langle \nabla_{\xi} \{\mathbf{A}\} \rangle_{\xi} = \mathbf{A}, \quad (3.1)$$

onde  $\xi$  é o conjunto de todas as direções em uma coordenada arbitrária e  $\langle \bullet \rangle_{\xi}$  é o operador *média sobre o período* (MSP) mostrado na Equação (2.34). Como a MSP será utilizada apenas com relação a  $\mathbf{y}$  a notação evita a especificação da coordenada:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \{\bullet\} dy_1 \cdots dy_D = \langle \bullet \rangle. \quad (3.2)$$

### Operador divergente e sua inversa

Soma as derivadas parciais do argumento,  $D$  termos em total, com relação a cada direção  $\xi_i$ . Esta operação diminui a ordem do tensor. A operação inversa resulta em uma única integração indefinida com relação a uma única direção ortogonal  $\xi_1, \dots$ , ou  $\xi_D$ .

$$\nabla_{\xi} \cdot \{\bullet\}, \quad \xi \in [0, 1], \quad \text{que permite: } \int \nabla_{\xi} \cdot \{\mathbf{A}\} d\xi = \mathcal{S} \{\nabla_{\xi} \cdot \{\mathbf{A}\}\}_{\xi} = D\mathbf{A} + \mathbf{C}, \quad (3.3)$$

onde  $\xi$  é o conjunto de todas as direções em um sistema de coordenadas arbitrário e  $\mathcal{S} \{\bullet\}_{\xi}$  é o operador *integração por compatibilidade periódica* (ICP),  $D$  é a dimensão do argumento e  $\mathbf{C}$  é uma constante de integração com relação a  $\xi$ . Porém, como a ICP é utilizada apenas com relação a  $\mathbf{y}$ , então a notação evita a especificação da coordenada:

$$\int \{\bullet\} d\mathbf{y} = \int \{(\bullet)_1\} dy_1 + \cdots + \int \{(\bullet)_D\} dy_D = \mathcal{S} \{\bullet\}. \quad (3.4)$$

Este último operador assume que as variações diferenciais ( $d\mathbf{y}$ ) são compatíveis, ou pelo menos aproximadas:  $dy_1 \approx dy_1 \approx \cdots \approx dy_D$ . Conseqüentemente, se  $y_i$  é interpretada como uma variável espacial, então o domínio da célula representativa periódica deve ser cúbico. Em contra partida, se  $y_i$  é interpretada como uma escala ou frequência espacial, então a repetibilidade da célula periódica deve ser igual em todas as direções  $y_i$ . Embora a interpretação espacial seja mais fácil de visualizar, a interpretação de  $y_i$  como um contador variável (frequência espacial) permite o uso de células periódicas com diferentes formatos.

Este assunto precisa ser melhor desenvolvido, especialmente no caso quando  $\epsilon$  é não-uniforme, variável ou anisotrópico. Esta problemática é listada nos trabalhos futuros.

### Operador diferencial

Regra da cadeia, semelhante à Equação (2.11), no caso da divergência e do gradiente:

$$\nabla \cdot \{\bullet\} = \nabla_x \cdot \{\bullet\} + \epsilon^{-1} \nabla_y \cdot \{\bullet\}, \quad (3.5)$$

$$\nabla \{\bullet\} = \nabla_x \{\bullet\} + \epsilon^{-1} \nabla_y \{\bullet\}. \quad (3.6)$$

### Operador deformação

Para representar o tensor deformação definido na Equação (3.7):

$$\varepsilon_\xi \{\bullet\} = \frac{1}{2} \left( \nabla_\xi \{\bullet\} + (\nabla_\xi \{\bullet\})^T + TNL \{\bullet\} \right), \quad (3.7)$$

onde  $\xi = \mathbf{x}, \mathbf{y}$  indistintamente, para poder representar os operadores  $\varepsilon_x \{\bullet\}$  e  $\varepsilon_y \{\bullet\}$  como deformações com relação a coordenada  $\mathbf{x}$  e a coordenada  $\mathbf{y}$ , respectivamente. O operador  $TNL \{\bullet\}$  refere-se aos termos não-lineares, que são nulos no presente estudo, pois se considera uma aproximação de contínuo [61] infinitesimal de primeira ordem Lagrangiano [19], semelhante à deformação apresentada na Equação (2.4). O símbolo “ $T$ ” denota a transposição, o que em notação indicial enxuta seria:  $(\partial_k^x u_l)^T = \partial_l^x u_k$ . Combinando as Equações (3.6) e (3.7) é possível obter a expressão da “deformação linear total”:

$$\varepsilon \{\bullet\} = \varepsilon_x \{\bullet\} + \epsilon^{-1} \varepsilon_y \{\bullet\}. \quad (3.8)$$

### Operador de convolução

A operação de convolução, apresentada nas Equações (2.6)-(2.5) e (2.8), relaciona o relaxamento ou a fluência com distribuições de deformação ou tensão, respectivamente. Para considerar ambos os casos, é possível abstrair um único tensor de quarta ordem  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ , que denota uma “propriedade” transitória não-uniforme. Nesse contexto,  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$  aparece em forma de um tensor de relaxamento nas Equações (2.7)-(2.8), utilizando notação indicial:  $P_{ijkl}(x_1, \dots, x_D, t) = P_{ijkl}(x_i, t)$ . Entretanto, considerando uma troca de coordenadas, globais ( $\mathbf{x}$ ) para locais ( $\mathbf{y}$ ), este tensor pode ser expresso sem modificações da seguinte maneira:  $\mathbf{P}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{y} + \mathbf{1}, t)$ , porque de acordo com a Equação (2.15) é definido como uma função periódica em relação a coordenada  $\mathbf{y}$ . Contudo, a designação  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{P}(\mathbf{y}, t)$  é válida sempre que  $\epsilon$  é uma métrica constante. Consequentemente, o operador integral apresentado na Equação (2.24) pode ser rescrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{P}(\mathbf{y}, t) * \{\bullet\} = \int_0^t \mathbf{P}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_\tau \{\bullet\} d\tau = \mathcal{P}(\mathbf{y}, t) \{\bullet\}, \quad (3.9)$$

onde  $\nabla_\tau \{\bullet\} = \frac{\partial}{\partial \tau} \{\bullet\}$ , é mantido assim para enfatizar que trata-se de um programa.

É necessário reforçar que a Equação (3.9) é válida tanto para a convolução no caso do relaxamento  $\mathbf{P}(\mathbf{y}, t - \tau) := \mathbf{R}(\mathbf{y}, t - \tau)$  e  $\mathcal{P}(\mathbf{y}, t) \{\bullet\} := \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \{\bullet\}$ , quando para a convolução no caso de fluência  $\mathbf{P}(\mathbf{y}, t - \tau) := \mathbf{J}(\mathbf{y}, t - \tau)$  e  $\mathcal{P}(\mathbf{y}, t) \{\bullet\} := \mathcal{J}(\mathbf{y}, t) \{\bullet\}$ .

É evidente que uma função lambda inversa à convolução (um contra-operador) é útil quando se faz necessário aceder (no sentido de isolar) ao tensor de propriedades:

$$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{y}, t) * \{\bullet\} = \int_0^\tau \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_t \{\bullet\} dt = \mathcal{P}^{-1}(\mathbf{y}, t) \{\bullet\}, \quad (3.10)$$

onde  $\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{y}, t) = (\mathbf{P}(\mathbf{y}, t))^{-1}$  (o tensor deve ser não-singular e invertível).

A existência de  $\mathbf{P}^{-1}$  como a inversa de  $\mathbf{P}$  não é discutida no Capítulo (2); no entanto, é sabido que um tensor que representa uma propriedade material é definido-positivo e invertível, conforme explica [9] (p.139) quando detalha a *desigualdade de Korn*. Neste sentido, a propriedade de cancelamento associada à inversão da Equação (3.10), é referida nas próximas seções como *convolução inversa implícita* (CII). Essa propriedade pode ser desenvolvida para qualquer argumento, e.g.  $\{A\} = \{\bullet\}$ , da seguinte forma:

$$\mathcal{P}^{-1}(\mathbf{y}, t) * \{\mathcal{P}(\mathbf{y}, t) * \{A\}\} = A, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_t \left\{ \int_0^t \mathbf{P}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_\tau \{A\} d\tau \right\} dt &= A, \quad dt = d\tau \\ \int_0^\tau \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{y}, t - \tau) \mathbf{P}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_\tau \{A\} dt &= A, \\ \int_0^\tau \{A\} dt &= A \\ A &= A, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde o caso recíproco,  $\mathcal{P}(\mathbf{y}, t) * \{\mathcal{P}^{-1}(\mathbf{y}, t) * \{A\}\}$ , obedece a mesma propriedade.

### Operador de conservação

Este operador, no contexto viscoelástico, é o mesmo apresentado na Equação (2.13). Denominado “de conservação” porque ele satisfaz a condição constitutiva da equação de conservação da Equação (2.1). Devido à periodicidade bi-escala do problema, esse operador inclui duas coordenadas, resultando em quatro combinações possíveis. Uma versão semelhante, frequentemente utilizada no MHA, é apresentada em [114]. O operador de conservação é construído a partir da combinação de operadores previamente definidos:

$$\mathbf{L}_{\alpha\beta} \{\bullet\} = \nabla_\alpha \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \{\varepsilon_\beta \{\bullet\}\}, \quad (3.13)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são as coordenadas  $\mathbf{x}$  ou  $\mathbf{y}$  indistintamente, ou seja:  $\alpha\beta = \mathbf{x}\mathbf{x}, \mathbf{x}\mathbf{y}, \mathbf{y}\mathbf{x}, \mathbf{y}\mathbf{y}$ .

A combinação do operador de conservação e a MSP, conforme as Equações (3.13) e (3.2), respectivamente, resulta conveniente para simplificar termos na manipulação algébrica. No entanto, esta combinação é útil apenas em expressões com o seguinte formato:

$$\langle \mathbf{L}_{yy} \{ \mathbf{A}(\mathbf{y}, t) \} \rangle = 0, \quad \text{se, somente se: } \mathbf{A}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{y} + \mathbf{1}, t), \quad (3.14)$$

o que é chamado de *critério* MSP, apenas válido quando  $\mathbf{A}(\mathbf{y}, t)$  é uma função periódica com relação a  $\mathbf{y}$ . Cabe ressaltar que a combinação de duas funções periódicas resulta sempre em uma função também periódica [36, 35]. Note que a Equação (3.14) é semelhante à “alternativa de Fredholm” mencionada em formato de Lema em [9](p.139).

### 3.3 Manipulação algébrica baseada no MHA

*Esta seção atende aos requisitos do objetivo específico 5c.*

A expressão que codifica a conservação de momento é apresentada na Equação (2.1), esta pode ser reescrita da seguinte forma:  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{x}, t) \{ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}} \{ \bullet \} \} = -\mathbf{F}$ , cujo argumento de entrada é uma distribuição de deslocamentos  $\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \} = \{ \bullet \}$ , e argumento de saída é uma distribuição do carregamento mecânico  $\mathbf{F}$ , da maneira semelhante à Equação (2.7). Observe que um operador com essas características é uma abstração de um ensaio de relaxamento, onde é fornecida uma distribuição de deslocamentos como argumento de entrada para as Equações (2.4) ou (3.7), e em seguida a distribuição de carregamento é determinada. Esse operador pode ser desenvolvido da seguinte maneira:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int_0^t \mathcal{R}(\mathbf{x}, t - \tau) \nabla_{\tau} \left\{ \frac{1}{2} \left( \nabla_{\mathbf{x}} \{ \bullet \} + \left( \nabla_{\mathbf{x}} \{ \bullet \} \right)^{\text{T}} \right) \right\} d\tau, \quad (3.15)$$

com relação às coordenadas globais no domínio do tempo; note que utilizando este formato, o termo  $\mathbf{F}$  pode permanecer implícito. Para expressar a Equação (3.15) em função de  $\mathbf{y}$  é necessário aplicar a regra da cadeia das Equações (3.5) e (3.6), resultando:

$$\begin{aligned} & \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{x}, t) \{ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}} \{ \bullet \} + \epsilon^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{y}} \{ \bullet \} \} \\ & + \epsilon^{-1} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{x}, t) \{ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}} \{ \bullet \} + \epsilon^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{y}} \{ \bullet \} \}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde:  $\mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \{ \bullet \} = \mathcal{R}(\mathbf{x}, t) \{ \bullet \}$ , por ser uma função  $\epsilon$ -periódica. Logo:

$$\begin{aligned} & \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \{ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}} \{ \bullet \} \} + \epsilon^{-1} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \{ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}} \{ \bullet \} \} \\ & + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \{ \epsilon^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{y}} \{ \bullet \} \} + \epsilon^{-1} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \{ \epsilon^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{y}} \{ \bullet \} \}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Fazendo  $\mathbf{L}_{xx}\{\bullet\} = \nabla_x \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t)\{\varepsilon_x\{\bullet\}\}$  e  $\mathbf{L}_{yx}\{\bullet\} = \nabla_y \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t)\{\varepsilon_x\{\bullet\}\}$ , então:

$$\begin{aligned} & \mathbf{L}_{xx}\{\bullet\} + (\nabla_x \cdot \epsilon^{-1}) \mathcal{R}(\mathbf{y}, t)\{\varepsilon_y\{\bullet\}\} \\ & \quad + \epsilon^{-1} \nabla_x \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t)\{\varepsilon_y\{\bullet\}\} \\ & + \epsilon^{-1} \mathbf{L}_{yx}\{\bullet\} + \epsilon^{-1} (\nabla_y \cdot \epsilon^{-1}) \mathcal{R}(\mathbf{y}, t)\{\varepsilon_y\{\bullet\}\} \\ & \quad + \epsilon^{-2} \nabla_y \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t)\{\varepsilon_y\{\bullet\}\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde é possível perceber que  $(\nabla_x \cdot \epsilon^{-1}) + \epsilon^{-1} (\nabla_y \cdot \epsilon^{-1}) = 0$  por causa aplicação da regra da cadeia utilizando a Equação (3.5) sobre o parâmetro geométrico:  $(\nabla \cdot \epsilon^{-1}) = 0$ , que por ser uniforme (constante com relação a  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ ) possui uma divergência nula. Isto implica que futuros trabalhos que envolvam um comprimento periódico não-uniforme devem considerar uma contribuição de  $\mathcal{R}(\mathbf{y}, t)\{\varepsilon_y\{\bullet\}\}$  com amplitude  $(\nabla \cdot \epsilon^{-1}) \neq 0$ .

Fazendo  $\mathbf{L}_{xy}\{\bullet\} = \nabla_x \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t)\{\varepsilon_y\{\bullet\}\}$  e  $\mathbf{L}_{yy}\{\bullet\} = \nabla_y \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t)\{\varepsilon_y\{\bullet\}\}$ , então:

$$\mathbf{L}_{xx}\{\bullet\} + \epsilon^{-1} (\mathbf{L}_{xy}\{\bullet\} + \mathbf{L}_{yx}\{\bullet\}) + \epsilon^{-2} \mathbf{L}_{yy}\{\bullet\}. \quad (3.19)$$

Note que a Equação (3.19) é uma versão bi-escala da Equação (3.15), no domínio do tempo, associando a escala global do problema original, apresentado na Equação (2.7), com a escala local de acordo com a regra da cadeia das Equações (3.5) e (3.6).

Adicionalmente, note que a Equação (3.19) é independente da expansão assintótica.

### 3.3.1 Expansão assintótica

Substituindo os argumentos  $\mathbf{u}^{[m]} = \mathbf{u}^{[m]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  da Equação (2.10) (a expansão assintótica de ordem  $M \rightarrow \infty$ ) na Equação (3.19), é possível obter o seguinte somatório:

$$\sum_{m=0}^{M \rightarrow \infty} \left[ \mathbf{L}_{xx}\{\mathbf{u}^{[m]}\} + \epsilon^{-1} (\mathbf{L}_{xy}\{\mathbf{u}^{[m]}\} + \mathbf{L}_{yx}\{\mathbf{u}^{[m]}\}) + \epsilon^{-2} \mathbf{L}_{yy}\{\mathbf{u}^{[m]}\} \right], \quad (3.20)$$

que pode ser abstraído como:  $\sum_{m=0}^{M \rightarrow \infty} [\mathbf{L}\{\mathbf{u}^{[m]}\}](\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{N}\{\mathbf{u}\} = -\mathbf{F}$ , de acordo com uma abstração adicional proposta por [120, 9] na forma de  $N(u_i(x_i, t)) = -F_i(x_i, t)$  em notação indicial, onde  $N(\bullet)$  encapsula a expressão completa das Equações (2.1) e (3.20) e todas suas relações aninhadas. Note que a Equação (3.20) é análoga a Equação (2.12).

O presente estudo aplica o truncamento  $M = 1$  (a saber,  $m = 0, 1$ ) no somatório da Equação (3.20). Futuros trabalhos podem investigar se a precisão adicional ao incluir mais termos na expansão assintótica justifica a maior complexidade computacional.

### 3.3.2 Aproximação de primeira ordem

Após o truncamento da Equação (3.20) em  $M = 1$ , ou seja,  $n = 0, 1$  (duas iterações), é possível agrupar os termos de acordo com os coeficientes  $\epsilon^0$ ,  $\epsilon^{-1}$  e  $\epsilon^{-2}$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \epsilon^{-2} [\mathbf{L}_{yy} \{ \mathbf{u}^{[0]} \}] + \\ & \epsilon^{-1} [\mathbf{L}_{xy} \{ \mathbf{u}^{[0]} \} + \mathbf{L}_{yx} \{ \mathbf{u}^{[0]} \} + \mathbf{L}_{yy} \{ \mathbf{u}^{[1]} \}] + \\ & \epsilon^0 [\mathbf{L}_{xx} \{ \mathbf{u}^{[0]} \} + \mathbf{L}_{xy} \{ \mathbf{u}^{[1]} \} + \mathbf{L}_{yx} \{ \mathbf{u}^{[1]} \} + \mathbf{L}_{yy} \{ \mathbf{u}^{[2]} \} + \mathbf{F}] = \mathcal{O}(\epsilon) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

que pode ser entendida como um polinômio do tipo  $p(\mathbf{L}_{\alpha\beta} \{ \bullet \}) = 0$  com os coeficientes na forma:  $p(\bullet) = \epsilon^{-2}[\dots] + \epsilon^{-1}[\dots] + 1[\dots] = 0$ . De acordo com [9], cada monômio de  $p$  é chamado de “nível”, de acordo com [122] cada monômio é um “nível de problema de célula” (*Cell problem level*, do inglês). Independente do nome, uma das soluções do polinômio (no contexto de uma aproximação de ordem  $M = 1$ ) é a solução trivial, permitindo separar o problema da Equação (3.21) em três equações resolvidas em sequência; esse procedimento padrão é encontrado em [9, 36, 35]. O intuito é resolver cada um desses problemas separadamente, de modo a satisfazer a solução trivial da Equação (3.21).

A seguir, os problemas por separado são:

$$\mathbf{L}_{yy} \{ \mathbf{u}^{[0]} \} = 0, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{L}_{xy} \{ \mathbf{u}^{[0]} \} + \mathbf{L}_{yx} \{ \mathbf{u}^{[0]} \} + \mathbf{L}_{yy} \{ \mathbf{u}^{[1]} \} = 0, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{L}_{xx} \{ \mathbf{u}^{[0]} \} + \mathbf{L}_{xy} \{ \mathbf{u}^{[1]} \} + \mathbf{L}_{yx} \{ \mathbf{u}^{[1]} \} + \mathbf{L}_{yy} \{ \mathbf{u}^{[2]} \} + \mathbf{F} = 0. \quad (3.24)$$

Embora fora do escopo deste estudo, é possível notar que aproximações de ordem maior,  $1 \leq M \ll \infty$ , devem resolver o seguinte conjunto de problemas:

$$\epsilon^m [\mathbf{L}_{xx} \{ \mathbf{u}^{[m-1]} \} + \mathbf{L}_{xy} \{ \mathbf{u}^{[m]} \} + \mathbf{L}_{yx} \{ \mathbf{u}^{[m]} \} + \mathbf{L}_{yy} \{ \mathbf{u}^{[m+1]} \}] = 0. \quad (3.25)$$

Note que a cada termo adicional da Equação (3.25) pode ser formulado como um novo problema sequencial. Nesse cenário, as amplitudes que escalam as oscilações dos termos em função de  $\mathbf{u}^{[m]}$  são cada vez de menor magnitude, isto é:  $\epsilon^{-2} > \epsilon^{-1} > 1 > \epsilon > \epsilon^2 > \dots$ , porque  $\epsilon \rightarrow 0$ , implicando que a representatividade dos novos termos é cada vez menor. Este raciocínio justifica que **um truncamento em  $M = 1$  é razoavelmente preciso**.

A Equação (3.25), associada aos problemas locais  $m$ -ésimos da Equação (2.14), foge do escopo deste estudo, mas pode ser útil em futuros empreendimentos.



### 3.3.2.1 Primeiro termo da expansão

O objetivo nesta seção é isolar a variável  $\mathbf{u}^{[0]}$ , que é o primeiro termo da expansão assintótica do deslocamento, de acordo com a Equação (2.10).

A Equação (3.22) pode ser rescrita sem utilizar o operador de conservação:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \left\{ \varepsilon_{\mathbf{y}} \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} \right\} = 0. \quad (3.26)$$

Aplicando a ICP da Equação (3.4) sobre a Equação (3.26), o que é semelhante a aplicar uma antiderivada, é possível gerar uma função constante de integração  $\mathbf{C}_0(\mathbf{x}, t)$ :

$$\mathcal{S} \left\{ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \left\{ \varepsilon_{\mathbf{y}} \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} \right\} \right\} = \mathcal{S} \{0\} + \mathbf{C}_0(\mathbf{x}, t), \quad (3.27)$$

onde  $\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{C}_0(\mathbf{x}, t) = 0$ . Aplicando a Equação (3.3) sobre a Equação (3.27):

$$\mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \left\{ \varepsilon_{\mathbf{y}} \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} \right\} = D^{-1} \mathbf{C}_0(\mathbf{x}, t), \quad (3.28)$$

para  $D$  que é interpretada como a dimensão do espaço de  $\mathbf{x}$  ou  $\mathbf{y}$  conforme explicado na Seção (3.1). Sobre a Equação (3.28) é aplicado uma CII, ou seja, um operador inverso à convolução utilizando a Equação (3.10), permitindo isolar  $\varepsilon_{\mathbf{y}} \{\bullet\}$ , resultando:

$$\varepsilon_{\mathbf{y}} \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} = \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \left\{ D^{-1} \mathbf{C}_0(\mathbf{x}, t) \right\}. \quad (3.29)$$

O lado esquerdo da Equação (3.29), por definição, é uma expressão  $\varepsilon$ -periódica. Consequentemente, aplicando uma MSP, conforme a Equação (3.2) e o critério associado:

$$\left\langle \varepsilon_{\mathbf{y}} \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} \right\rangle = \left\langle \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \left\{ D^{-1} \mathbf{C}_0(\mathbf{x}, t) \right\} \right\rangle = 0, \quad (3.30)$$

onde  $D^{-1} > 0$ . O operador  $\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \{\bullet\}$  envolve uma relação integro-deferencial como mostra a Equação (3.10), onde  $\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{y}, t - \tau)$ , embora invertido, é definido positivo [9] (p.137). Logo, a única forma de satisfazer a Equação (3.30) é fazendo que  $\mathbf{C}_0(\mathbf{x}, t)$  seja nulo ou constante com relação ao tempo. De qualquer forma, é possível conferir que a deformação com relação às coordenadas locais é nula:  $\varepsilon_{\mathbf{y}} \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} = 0$ , permitindo inferir, usando a Equação (3.7), que o deslocamento  $\mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  é constante em  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) := \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t). \quad (3.31)$$

Na prática, isto significa que, levando em conta apenas o primeiro termo da expansão assintótica, a célula periódica está em traslação ou rotação puros, ou seja, não se deforma.

### 3.3.2.2 Problema local

O objetivo nesta seção é encontrar uma expressão que estabeleça uma associação entre  $\mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  e  $\mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t)$ . Para isto, de acordo com o MHA padrão, é necessário resolver uma equação que expresse o problema local de acordo com o formato da Equação (2.17); isto permite computar o corretor de primeira ordem.

Considerando a Equação (3.31), que mostra que  $\mathbf{u}^{[0]} = \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t)$ , é possível conferir o seguinte resultado:  $\mathbf{L}_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \} = 0$ . Consequentemente, a Equação (3.23), o segundo problema da expansão da Equação (3.21), pode ser rescrita simplificada, resultando:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \left\{ \varepsilon_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \} \right\} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \left\{ \varepsilon_{\mathbf{y}} \{ \mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \} \right\} = 0. \quad (3.32)$$

Partindo da Equação (3.32), são construídas por manipulação algébrica duas constantes de integração,  $\mathbf{C}_1$  e  $\mathbf{C}_2$ , que combinadas permitem montar a expressão da função local (corretor de primeira ordem) que vincula  $\mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  com  $\mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t)$ .

#### Primeira constante com relação às coordenadas locais

Aplicando a Equação (3.3) (integração por compatibilidade periódica, ICP) sobre a Equação (3.32) é possível eliminar os operadores divergente,  $\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \{ \bullet \}$ , de ambos os termos, e, gerar a primeira função constante (com relação a  $\mathbf{y}$ ) de integração  $\mathbf{C}_1$ :

$$\mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \left\{ \varepsilon_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \} \right\} + \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \left\{ \varepsilon_{\mathbf{y}} \{ \mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \} \right\} = \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t). \quad (3.33)$$

Aplicando a Equação (3.2) (média sobre o período, MSP) sobre a Equação (3.33), é possível eliminar o segundo termo do lado direito da equação. Note que  $\langle \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t) \rangle = \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t)$  porque é uma função que não depende das coordenadas locais:

$$\left\langle \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \left\{ \varepsilon_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \} \right\} \right\rangle = \langle \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad (3.34)$$

onde,  $\left\langle \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \left\{ \varepsilon_{\mathbf{y}} \{ \mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \} \right\} \right\rangle = 0$ , como predefinido pela Equação (3.14), por causa do critério de integração de funções periódicas. Também, é possível aplicar a Equação (3.10) sobre a igualdade  $\mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \left\{ \varepsilon_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \} \right\} = \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t)$ , que são os integrandos da Equação (3.34), objetivando isolar o operador vinculado à deformação  $\varepsilon_{\mathbf{x}} \{ \bullet \}$ :

$$\varepsilon_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \} = \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \{ \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t) \}, \quad (3.35)$$

$$\varepsilon_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \} = \int_0^\tau \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_t \{ \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t) \} dt. \quad (3.36)$$

A Equação (3.2) (média sobre o período, MSP) aplica-se sobre a Equação (3.36):

$$\left\langle \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\rangle = \left\langle \int_0^\tau \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_t \left\{ \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, \tau) \right\} dt \right\rangle, \quad (3.37)$$

que permite considerar a troca de ordem de precedência entre os operadores integrais  $\langle \bullet \rangle$  e  $\int_0^\tau (\bullet) dt$ , porque são linearmente independentes, como mostra a seguinte expressão:

$$\varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} = \int_0^\tau \left\langle \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_t \left\{ \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t) \right\} \right\rangle dt. \quad (3.38)$$

Entre as Equações (3.37) e (3.38) se fez:  $\left\langle \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\rangle = \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\}$ , porque o argumento não depende de  $\mathbf{y}$ . Adicionalmente, é possível considerar a seguinte relação:

$$\left\langle \nabla_t \left\{ \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t) \right\} \right\rangle = \nabla_t \left\{ \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t) \right\}, \quad (3.39)$$

o que permite uma versão ainda mais simplificada da Equação (3.38):

$$\varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} = \int_0^\tau \left\langle \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t - \tau) \right\rangle \nabla_t \left\{ \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t) \right\} dt. \quad (3.40)$$

Para poder isolar  $\mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t)$  aplica-se a Equação (3.10) (convolução inversa implícita, CII) sobre a Equação (3.40), resultando na seguinte expressão:

$$\int_0^t \left\langle \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t - \tau) \right\rangle^{-1} \nabla_\tau \left\{ \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, \tau) \right\} \right\} d\tau = \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t). \quad (3.41)$$

Note que existe uma semelhança entre a Equação (3.41) e a integral de Riemann-Stieltjes da Equação (2.6), que permite inferir que  $\mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t)$  é um tensor de tensões.

### Segunda constante com relação às coordenadas locais

Reagrupado os termos da Equação (3.32), com relação a  $\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \{ \bullet \}$ , obtém-se:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \left\{ \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} + \varepsilon_{\mathbf{y}} \left\{ \mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} \right\} = 0, \quad (3.42)$$

que permite interpretar, por causa do operador divergente  $\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \{ \bullet \}$ , que a distribuição de tensões não é dispersiva nem concentrada, com relação a  $\mathbf{y}$ . Aplicando a Equação (3.4), a ICP, sobre a Equação (3.42), é possível eliminar o operador divergente:

$$\mathcal{R}(\mathbf{y}, t) \left\{ \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} + \varepsilon_{\mathbf{y}} \left\{ \mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} \right\} = \mathbf{C}_2(\mathbf{x}, t), \quad (3.43)$$

onde é aplicada a Equação (3.10) para poder isolar as deformações:

$$\varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} + \varepsilon_{\mathbf{y}} \left\{ \mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} = \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \left\{ \mathbf{C}_2(\mathbf{x}, t) \right\}. \quad (3.44)$$

A Equação (3.44) é a expressão base para a montagem da função local. Contudo, antes é necessário mostrar que as funções  $\mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t)$  e  $\mathbf{C}_2(\mathbf{x}, t)$  são equivalentes. Neste sentido, é aplicada a Equação (3.2) (média sobre o produto, MSP) sobre a Equação (3.44):

$$\left\langle \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\rangle + \left\langle \varepsilon_y \left\{ \mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} \right\rangle = \left\langle \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \left\{ \mathbf{C}_2(\mathbf{x}, t) \right\} \right\rangle, \quad (3.45)$$

onde  $\left\langle \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\rangle = \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\}$  porque o argumento não depende das coordenadas locais e  $\left\langle \varepsilon_y \left\{ \mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} \right\rangle = 0$  porque o argumento é uma função  $\varepsilon$ -periódica por definição. Note que a função constante  $\mathbf{C}_2(\mathbf{x}, t)$  também não depende de  $\mathbf{y}$ , resultando:

$$\varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} = \int_0^\tau \left\langle \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t - \tau) \right\rangle \nabla_t \left\{ \mathbf{C}_2(\mathbf{x}, t) \right\} dt, \quad (3.46)$$

que é idêntica à Equação (3.40). Logo, é possível definir:  $\mathbf{C}_2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t) := \mathbf{C}(\mathbf{x}, t)$ . Este resultado permite abstrair uma versão generalizada em formato de convolução:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) * \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\}, \quad \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) = \left\langle \left\{ \mathbf{R}(\mathbf{y}, t) \right\}^{-1} \right\rangle^{-1}, \quad (3.47)$$

onde, entre as Equações (3.46) e (3.47) foi aplicada a Equação (3.10) (convolução inversa implícita, CII). Este resultado é utilizado, nas próximas seções, para formular uma expressão para o corretor de primeira ordem e o tensor de propriedades homogeneizadas.

### Corretor de primeira ordem

Com base na Equação (3.44) e substituindo a Equação (3.47), obtém-se:

$$\varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} + \varepsilon_y \left\{ \mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \left\{ \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) * \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\}, \quad (3.48)$$

cujos lado direito pode ser reescrito utilizando o formato completo:

$$\int_0^\tau \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_t \left( \int_0^t \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_\tau \left\{ \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, \tau) \right\} \right\} d\tau \right) dt, \quad (3.49)$$

onde  $dt = d\tau$ , de acordo com a dedução da Equação (3.12). Conseqüentemente:

$$\int_0^\tau \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t - \tau) \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_\tau \left\{ \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\} dt, \quad (3.50)$$

que pode ser reescrita como:  $\left( \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) \right) * \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\}$ . Neste contexto, verificando que  $\varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \equiv \delta(t) * \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\}$ , onde  $\delta(t)$  é a função delta de Dirac no domínio temporal, é possível reorganizar os termos da Equação (3.48):

$$\begin{aligned} \varepsilon_y \left\{ \mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} &= \left( \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) \right) * \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} - \delta(t) * \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \\ \varepsilon_y \left\{ \mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} &= \left( \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) - \delta(t) \right) * \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Sobre a Equação (3.51) aplica-se a média sobre o período (MSP) da Equação (3.2) como contra-operador de  $\varepsilon_y\{\bullet\}$ , resultando em na seguinte expressão:

$$\mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \left\langle \left( \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) - \boldsymbol{\delta}(t) \right) * \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\rangle, \quad (3.52)$$

onde é importante ressaltar que a Equação (3.52) pode proceder da (3.51) se, e somente se, for levada a versão da deformação de engenharia introduzida na Equação (2.4). Ou seja, a Equação (3.52) é válida apenas se  $\nabla_\xi \{\bullet\} \approx (\nabla_\xi \{\bullet\})^T$ , ou, de acordo com o formato da Equação (3.7), se  $\varepsilon_y \{\bullet\} \approx \nabla_y \{\bullet\}$ . Note que o termo referente às deformações globais, a expressão  $\varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\}$ , é constante com relação a  $\mathbf{y}$  permitindo que possa sair do operador da média sobre o período (MSP). Assim, reescrevendo a Equação (3.52):

$$\mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{y}, t) * \varepsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\}, \quad (3.53)$$

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{y}, t) = \left\langle \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) - \boldsymbol{\delta}(t) \right\rangle, \quad (3.54)$$

onde o termo  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{y}, t)$  é o corretor de primeira ordem,  $\chi_{ikh}^{[1]}$  da Equação (2.31), que pode ser identificado fazendo um paralelo com o segundo termo da expansão da Equação (2.30), pois permite estabelecer um vínculo matemático entre  $\mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  e  $\mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t)$ .

Com este resultado, no contexto de uma aproximação de primeira ordem, é possível formular o problema local utilizando como referência a Equação (2.17):

$$\nabla_y \cdot \left\{ \mathbf{R}(\mathbf{y}, t) * \varepsilon_y \left\{ \boldsymbol{\chi}(\mathbf{y}, t) + \boldsymbol{\delta}(t) \mathbf{y} \right\} \right\} = 0, \quad (3.55)$$

$$\nabla_y \cdot \left\{ \mathbf{R}(\mathbf{y}, t) * \varepsilon_y \left\{ \boldsymbol{\chi}(\mathbf{y}, t) \right\} + \mathbf{R}(\mathbf{y}, t) * \boldsymbol{\delta}(t) \right\} = 0, \quad (3.56)$$

onde se fez  $\varepsilon_y \left\{ \boldsymbol{\delta}(t) \mathbf{y} \right\} = \boldsymbol{\delta}(t)$ , para poder comparar com a Equação (2.25). Utilizando integrais ao invés do formato de convoluções, a Equação (3.56) se torna:

$$\nabla_y \cdot \left[ \int_0^\tau \mathbf{R}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_\tau \left\{ \varepsilon_y \left\{ \boldsymbol{\chi}(\mathbf{y}, t) \right\} \right\} d\tau + \mathbf{R}(\mathbf{y}, t) \right] = 0. \quad (3.57)$$

A implementação computacional da Equação (3.57), com o objetivo de calcular a função local  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{y}, t)$ , resulta redundante sob certas circunstâncias. Por exemplo, ao calcular deslocamentos usando a expansão assintótica da Equação (2.10), é necessário computar cada  $\mathbf{u}^{[m]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ , envolvendo corretores de  $m$ -ésima ordem; no mesmo cenário, considerando uma aproximação de primeira ordem, conforme a Equação (2.31), é preciso conhecer  $\mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t)$  e computar  $\mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  usando a Equação (3.53), necessitando da solução do problema local  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{y}, t)$ , obtida resolvendo a Equação (3.57).

Contudo, no presente estudo o objetivo é apenas calcular as propriedades homogeneizadas e não deslocamentos,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ , ou outras grandezas associadas com a dinâmica de um ensaio viscoelástico. Neste sentido, a proposta é contornar a determinação explícita da função local, procurando contrapor operadores com seus contra-operadores, objetivando desenvolver uma expressão simplificada para calcular as propriedades homogeneizadas

### 3.3.2.3 Coeficientes efetivos — Propriedade homogeneizada

O objetivo desta seção é desenvolver uma expressão para calcular a propriedade homogeneizada  $\mathbf{R}^H(t)$ , contornando o uso de  $\chi(\mathbf{y}, t)$  ou alguma dependência de  $\mathbf{y}$  e  $\epsilon$ . Dita expressão não deve depender de deslocamentos ou carregamentos; os coeficientes envolvidos devem ser exclusivamente baseados nas propriedades das fases em questão.

Considerando a Equação (3.24) e o resultado  $\mathbf{u}^{[0]} = \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t)$ , observa-se que não é possível realizar a mesma simplificação utilizada na Equação (3.23). Portanto, a estratégia consiste em aplicar a Equação (3.2) (média sobre o período, MSP) para eliminar termos  $\epsilon$ -periódicos:  $\langle \mathbf{L}_{yy} \{ \mathbf{u}^{[2]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \} \rangle$ . Assim, a Equação (3.24) toma a forma:

$$\langle \mathbf{L}_{xx} \{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \} \rangle + \langle \mathbf{L}_{xy} \{ \mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \} \rangle + \langle \mathbf{L}_{yx} \{ \mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \} \rangle = -\langle \mathbf{F} \rangle, \quad (3.58)$$

onde é possível utilizar a Equação (3.51) para substituir  $\epsilon_y \{ \mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \}$  no segundo termo da Equação (3.58), e, a Equação (3.53) para substituir  $\mathbf{u}^{[1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  no terceiro termo da Equação (3.58). Também,  $\mathbf{L}_{xx} \{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \}$  sai do operador  $\langle \bullet \rangle$  porque não depende das coordenadas locais. A expressão completa é reescrita explicitando os operadores:

$$\begin{aligned} & \langle \nabla_x \cdot \{ \mathbf{R}(\mathbf{y}, t) * \epsilon_x \{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \} \} \rangle + \\ & \langle \nabla_x \cdot \{ \mathbf{R}(\mathbf{y}, t) * (\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) - \delta(t)) * \epsilon_x \{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \} \} \rangle + \\ & \langle \nabla_y \cdot \{ \mathbf{R}(\mathbf{y}, t) * \epsilon_x \{ \chi(\mathbf{y}, t) * \epsilon_x \{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \} \} \} \rangle = -\langle \mathbf{F} \rangle. \end{aligned} \quad (3.59)$$

O terceiro termo da Equação (3.59) se faz nulo porque o argumento é  $\epsilon$ -periódico. Essa simplificação é confirmada trocando a ordem de precedência dos operadores:

$$\nabla_y \cdot \left\langle \left\langle \mathbf{R}(\mathbf{y}, t) * \epsilon_x \left\{ \chi(\mathbf{y}, t) * \epsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\} \right\rangle \right\rangle, \quad (3.60)$$

onde resulta que todos os argumentos de  $\langle \bullet \rangle$  são funções periódicas com relação a  $\mathbf{y}$ . Note que uma função constante como  $\mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t)$  também é periódica com relação a  $\mathbf{y}$ .

Neste ponto, utilizando a mesma justificativa do parágrafo anterior, é possível fazer o primeiro e segundo termos da Equação (3.59) nulos, por causa da  $\epsilon$ -periodicidade. Mas, a estratégia está em justamente evitar este passo acompanhando a seguinte estratégia:

$$\begin{aligned} & \left\langle \nabla_x \cdot \left\{ \mathbf{R}(\mathbf{y}, t) * \epsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\} + \right. \\ & \left. \nabla_x \cdot \left\{ \mathbf{R}(\mathbf{y}, t) * \left( \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) - \delta(t) \right) * \epsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\} \right\rangle = -\langle \mathbf{F} \rangle, \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde é possível igualar os integrandos e redistribuir os operadores de gradiente  $\nabla_x \cdot \{\bullet\}$  e de convolução  $\mathbf{R}(\mathbf{y}, t) * \{\bullet\}$ , simplificando a expressão da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \nabla_x \cdot \left\{ \mathbf{R}(\mathbf{y}, t) * \left\{ \delta(t) * \epsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\} + \right. \\ & \left. \left( \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) - \delta(t) \right) * \epsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\} = -\mathbf{F}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

que permite uma re-agrupação. do tipo  $\{\dots\} * \epsilon_x \{\dots\}$ . para anular a função  $\delta(t)$ :

$$\begin{aligned} & \nabla_x \cdot \left\{ \mathbf{R}(\mathbf{y}, t) * \left( \delta(t) + \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) - \delta(t) \right) * \epsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\} = -\mathbf{F}, \\ & \nabla_x \cdot \left\{ \mathbf{R}(\mathbf{y}, t) * \left( \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t) \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) \right) * \epsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\} = -\mathbf{F}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

Note que na versão integral da Equação (3.63) os tensores  $\mathbf{R}(\mathbf{y}, t)$  e  $\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t)$  se cancelam. Adicionalmente, é possível trocar a precedência do operador divergente:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \mathbf{R}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_\tau \left\{ \int_0^\tau \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t - \tau) \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_t \left\{ \nabla_x \cdot \left\{ \epsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\} \right\} dt, \right\} d\tau, \\ & \int_0^t \mathbf{R}(\mathbf{y}, t - \tau) \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}, t - \tau) \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_t \left\{ \nabla_x \cdot \left\{ \epsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\} \right\} d\tau, \\ & \int_0^t \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_t \left\{ \nabla_x \cdot \left\{ \epsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\} \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) * \nabla_x \cdot \left\{ \epsilon_x \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\}, \quad (3.65)$$

de tal forma que as Equações (3.64) e (3.65) podem ser comparadas com as Equações (2.7) e (2.8), respectivamente. Especificamente, note o paralelo entre os operadores da Equação (2.36) e a Equação (3.64), onde é possível associar  $R_{ijkl}^H(t)$  com  $\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t)$ :

$$R_{ijkl}^H(t) * (\bullet)_{kl} = \int_0^t R_{ijkl}^H(t - \tau) \partial^\tau (\bullet)_{kl} d\tau, \quad (3.66)$$

$$\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) * \{\bullet\} = \int_0^t \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t - \tau) \nabla_t \{\bullet\} d\tau. \quad (3.67)$$

Partindo das Equações (3.66)-(3.67) e (3.47), é possível fazer:

$$R_{ijkl}^H(t) = \mathbf{R}^H(t) \equiv \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}, t) = \left\langle \{\mathbf{R}(\mathbf{y}, t)\}^{-1} \right\rangle^{-1}, \quad (3.68)$$

que é válido para todo argumento utilizado nas Equações (3.66) e (3.66), conforme:

$$(\bullet)_{kl} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left\{ \varepsilon_{\mathbf{x}} \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\}. \quad (3.69)$$

### 3.3.2.4 Equação homogeneizada

Aplicando o critério utilizado entre as Equações (3.51) e (3.52), o que é equivalente a usar a Equação (2.4) sobre a Equação (3.7), é possível modificar a Equação (3.69) obtendo a seguinte expressão:  $(\bullet)_{kl} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left\{ \nabla_{\mathbf{x}} \{ \bullet \} \right\}$ , que é conhecida como operador Laplaciano com relação a coordenada global:  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \{ \bullet \}$ . Este procedimento delimita a análise, considerando apenas sólidos viscoelásticos quase-rígidos. Assim, usando as Equações (3.68) e (3.64), a equação homogeneizada da Equação (2.36), no contexto de um sólido viscoelástico sob pequenas deformações, pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{R}^H(t) * \nabla_{\mathbf{x}}^2 \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} = \int_0^t \mathbf{R}^H(t - \tau) \nabla_{\tau} \left\{ \nabla_{\mathbf{x}}^2 \left\{ \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}, t) \right\} \right\} d\tau = -\mathbf{F}(\mathbf{x}, t). \quad (3.70)$$

**Esta equação não é necessária para a determinação da propriedade homogeneizada,  $\mathbf{R}^H(t)$ ,** sendo apresentada apenas por formalidade. Contudo, esta característica do MHA padrão implica que, como esperado em um problema linear (viscoelástico e até mesmo elástico), os coeficientes efetivos não dependem da dinâmica do ensaio.

## 3.4 Implementação

*Esta seção atende aos requisitos do objetivo específico 6.*

A primeira parte desta seção, nas Subseções (3.4.1) e (3.4.2), descreve a construção de um algoritmo computacional que implementa a Equação (3.68) para um caso genérico e um adaptado a compósitos estratificados. São discutidas as implicações da aproximação de primeira ordem tratada na Seção (3.3.2), o uso de kernels isotrópicos conforme definido na Seção (2.5.1.2), e a consideração de fases uniformes (independentes da coordenada  $\mathbf{y}$ ).

A segunda parte, nas Subseções (3.4.3.1) e (3.4.3.2), foca no paradigma do programa, a sintaxe do entorno de computação e suas vantagens e limitações. Nesta etapa, um exemplo de aplicação é desenvolvido com a estruturação dos programas principal e auxiliares.



### 3.4.1 Simplificações importantes

*Esta subseção atende aos requisitos do objetivo específico 6(a)i.*

A aproximação de primeira ordem, desenvolvida na Seção (3.3.2), simplifica significativamente o problema de homogeneização, reduzindo a complexidade algorítmica, mas diminuindo a precisão com relação a aproximações de ordem superior. De acordo com as Equações (2.14)-(2.17), aproximações de ordem  $M > 1$  demandam o cálculo explícito dos corretores, que são as soluções dos problemas locais conforme a aproximação. No entanto, por se tratar de uma aproximação de primeira ordem, a formulação da Equação (3.68) pode prescindir da solução explícita do problema local correspondente.

Por outro lado, de acordo com as Equações (2.30)-(2.31), como o escopo deste estudo aborda apenas o cálculo de propriedades homogeneizadas, o corretor de primeira ordem não é calculado porque  $u^{[0]}(x, t)$  e  $u^{[1]}(x, y, t)$  não fazem parte da Equação (3.68).

A implementação da Equação (3.68) pode ser computacionalmente intensiva se as condições de simulação não estão ajustadas corretamente. Contudo, cabe ressaltar que essa expressão não está projetada, por definição, para considerar fração volumétrica transitória, envelhecimento de propriedades, contato imperfeito entre fases e o formato da célula periódica. As únicas condições de simulação que devem ser levadas em consideração são o modelo matemático que representa a propriedade de cada fase e a fração volumétrica.

Como exemplo, considere uma propriedade heterogênea  $\mathbf{R}(\mathbf{y}, t)$  (relaxamento) como uma função por partes de acordo à Equação (2.38), considerando uma célula quadrangular em coordenadas Cartesianas e comportando  $N$  fases distintas em contato perfeito mas não necessariamente seguindo um formato estratificado:  $\mathbf{R}(\mathbf{y}, t) = \bigcup_{n=1}^N \mathbf{R}^{(n)}(\mathbf{y}, t)$ ,  $\mathbf{y} \in \Sigma^{(n)}$ , onde  $\mathbf{R}^{(n)}(\mathbf{y}, t)$  é o kernel viscoelástico da  $n$ -ésima fase. De acordo com a Seção (2.6), é possível perceber que as fases possuem kernels que não dependem, localmente, de  $\mathbf{y}$ , ou seja,  $\mathbf{R}^{(n)}(\mathbf{y}, t) := \mathbf{R}^{(n)}(t)$ ; isto pode ser verificado nas Equações (2.60), (2.61) e (2.64). Seguindo este raciocínio, é possível rescrever a Equação (3.68) da seguinte maneira:

$$\mathbf{R}^H(t) = \left[ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \{ \mathbf{R}(\mathbf{y}, t) \}^{-1} dy_1 dy_2 dy_3 \right]^{-1}, \quad (3.71)$$

onde a ordem de precedência dos operadores integrais é arbitrária, pois  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  são linearmente independentes. Considerando que a região espacial de cada kernel pode ser reagrupada em volumes  $dy_1 dy_2 dy_3$ , é possível modificar a Equação (3.71):

$$\mathbf{R}^H(t) = \left[ \sum_{n=1}^N \left( \int_{\Sigma^{(n)}} \frac{1}{\mathbf{R}^{(n)}(t)} d\mathbf{y} \right) \right]^{-1}. \quad (3.72)$$

Utilizando a notação da Equação (3.71) é possível perceber que a região  $\Sigma^{(n)}$  está delimitada por segmentos  $dy_1 = y_{1\blacktriangle} - y_{1\blacktriangledown}$ ,  $dy_2 = y_{2\blacktriangle} - y_{2\blacktriangledown}$  e  $dy_3 = y_{3\blacktriangle} - y_{3\blacktriangledown}$ :

$$\mathbf{R}^H(t) = \left[ \sum_{n=1}^N \left( \int_{y_{1\blacktriangledown}}^{y_{1\blacktriangle}} \int_{y_{2\blacktriangledown}}^{y_{2\blacktriangle}} \int_{y_{3\blacktriangledown}}^{y_{3\blacktriangle}} \frac{1}{\mathbf{R}^{(n)}(t)} dy_1 dy_2 dy_3 \right) \right]^{-1}, \quad (3.73)$$

onde  $dy_i$  não é necessariamente igual a  $dy_j$ . No entanto, segundo o critério da Equação (3.4) (integração por compatibilidade periódica, ICP), para que a Equação (3.68) seja válida, as diferenças  $dy_i$  devem ser idênticas. Desta forma, a Equação (3.73) pode ser interpretada como um processo de homogeneização considerando agrupamentos por fases, onde a região  $dy_1 dy_2 dy_3$  está associada a  $n$ -ésima fase. Os símbolos “ $\blacktriangle$ ” e “ $\blacktriangledown$ ” são utilizados como indicadores de início e final, respectivamente, de cada segmento. Mantendo uma notação descritiva, as cotas deveriam ser identificadas da seguinte forma:  $dy_i^{(n)} = y_{i\blacktriangle}^{(n)} - y_{i\blacktriangledown}^{(n)}$ . No entanto, isso sobrecarrega a notação desnecessariamente.

A ideia principal das Equações (3.72) e (3.73) é mostrar a natureza do processo de homogeneização codificado na Equação (3.68). Esta abordagem é compatível com uma discretização espacial estruturada, volumes cúbicos de célula periódica e **aplicável a qualquer tipo de microestrutura sempre que a propriedade homogeneizada seja globalmente isotrópica**. Esta abordagem pode ser comparada com uma varredura de homogeneização de volumes  $dy_1 dy_2 dy_3$  por força bruta. Entretanto, sendo  $\mathbf{R}^{(n)}(t)$  um tensor de quarta ordem, sua inversão e integração deve ser pré configurada.

Por outro lado, assumir fases localmente uniformes faz sentido especialmente em uma célula periódica com um comprimento representativo  $\epsilon \rightarrow 0$ . Isto implica uma simplificação adicional, reduzindo a complexidade algorítmica da Equação (3.73); no entanto, em certos casos é uma abordagem contra-intuitiva, pois a maioria dos materiais compósitos possui um gradiente funcional (*functionally graded materials*, do inglês) em relação à coordenada  $\mathbf{x}$  [132] (Cap.14). Algumas publicações fora do escopo deste estudo exploram essa característica no contexto mecânico [54, 115], mas a maioria aborda problemas termomecânicos. Como mostrado por [79], o MHA é compatível com materiais de gradiente funcional local. No entanto, nesse cenário, ferramentas numéricas de integração (e.g. quadratura) são indispensáveis para implementar as Equações (3.73) e (3.72).

A simplificação associada a fases localmente uniformes implica a seguinte modificação:

$$\mathbf{R}^H(t) = \left[ \sum_{n=1}^N \frac{1}{\mathbf{R}^{(n)}(t)} \left( \int_{\Sigma^{(n)}} d\mathbf{y} \right) \right]^{-1}, \quad (3.74)$$

onde a expressão  $\int_{\Sigma^{(n)}} d\mathbf{y}$  é equivalente a fração volumétrica  $\phi^{(n)}$  definida na Seção (2.5.1).

Note que se o kernel  $\mathbf{R}^{(n)}$  é uma função independente do tempo, a Equação (3.74) é equivalente à cota de Reuss da Seção (2.4), porém aplicada a tensores.

A Equação (3.74) é uma aproximação simples, calculada com poucos recursos computacionais em comparação com as Equações (3.68) ou (3.73). Contudo, de acordo com os exemplos do Capítulo (4), esta versão é utilizada apenas para casos onde se espera que o compósito tenha uma estrutura globalmente isotrópica ou em casos unidimensionais. O kernel  $\mathbf{R}^{(n)}(t)$  deve ser implementado utilizando a Equação (2.52) definida para materiais isotrópicos, no entanto, é necessário esclarecer que o critério de uniformidade local também é aplicado nos parâmetros de Lamé:  $\lambda^{(n)}(\mathbf{y}, t) := \lambda^{(n)}(t)$  e  $\mu^{(n)}(\mathbf{y}, t) := \mu^{(n)}(t)$ .

Para evitar a manipulação dos 81 coeficientes do tensor  $\mathbf{R}^{(n)}(t)$  (a maioria nulos), pode-se usar a notação matricial de Voigt [132] (pp. 332-338) para reduzir o kernel a uma matriz  $6 \times 6$ . Assim, a Equação (3.74) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{R}^H(t) = \left[ \sum_{n=1}^N \begin{bmatrix} c^{(n)}(t) & \lambda^{(n)}(t) & \lambda^{(n)}(t) & 0 & 0 & 0 \\ \text{—} & c^{(n)}(t) & \lambda^{(n)}(t) & 0 & 0 & 0 \\ \text{—} & \text{—} & c^{(n)}(t) & 0 & 0 & 0 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \mu^{(n)}(t) & 0 & 0 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & \mu^{(n)}(t) & 0 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & \mu^{(n)}(t) \end{bmatrix}^{-1} \right]^{-1} \phi^{(n)}, \quad (3.75)$$

onde  $c^{(n)}(t) = \lambda^{(n)}(t) + 2\mu^{(n)}(t)$  semelhante à Equação (2.53). O símbolo “—” é usado para indicar a simetria. A Seção (3.4) discute a implementação desta expressão.

### 3.4.2 Compósito estratificado

*Esta subseção atende aos requisitos do objetivo específico 6(a)ii.*

De acordo com a Seção (2.5.1), no contexto da viscoelasticidade, a Equação (2.51) calcula a propriedade homogeneizada em compósitos estratificados, com simetria axial em  $y_3$ . Diversos autores, como [123] (pp.194-195), [80] (p.86) e [122, 93], deduzem a Equação (2.51) diretamente no domínio temporal, ou seja, desacoplada do princípio de correspondência. Todavia, é possível mostrar a relação matemática entre a Equação (3.68) e a Equação (2.51). Para isto, em notação indicial, considere as seguintes identidades:

$$R_{ijkl} = \delta_{ir}\delta_{jd}\delta_{kp}\delta_{ld}R_{rdpd}, \quad R_{ijkl} = \delta_{kw}\delta_{ld}R_{ijwd}, \quad \delta_{ij} = \delta_{ij}^{-1}, \quad (3.76)$$

por causa da simetria de  $R_{ijkl}$  (descrito na Seção (2.5.1)) e de  $\delta_{ij}$  (delta de Kronecker).

Utilizando as identidades da Equação (3.76), a Equação (3.68) é modificada. Para isto é necessário manter a notação indicial pois a notação em negrito não permite especificar as operações associadas aos tensores. Também, a dependência “(t)” é implicitada:

$$R_{ijkl}^H = \left\langle \frac{1}{R_{ijkl}} \right\rangle^{-1} = \left\langle R_{ijkl} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{R_{ijkl}} \right\rangle^{-1} - \left\langle R_{ijkl} \right\rangle, \quad (3.77)$$

$$R_{ijkl}^H = \left\langle R_{ijkl} \right\rangle + \left\langle \frac{R_{rdsd}}{R_{rdsd}} \right\rangle \left\langle \frac{1}{R_{ijkl}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{R_{pdqd}}{R_{pdqd}} \right\rangle - \left\langle R_{ijkl} \frac{R_{vdwd}}{R_{vdwd}} \right\rangle, \quad (3.78)$$

$$R_{ijkl}^H = \left\langle R_{ijkl} \right\rangle + \left\langle \frac{R_{rdsd}}{R_{rdsd}} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\delta_{ir}\delta_{jd}\delta_{kp}\delta_{ld}R_{rdpd}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{R_{pdqd}}{R_{pdqd}} \right\rangle - \left\langle \delta_{kw}\delta_{ld}R_{ijwd} \frac{R_{vdwd}}{R_{vdwd}} \right\rangle, \quad (3.79)$$

$$R_{ijkl}^H = \left\langle R_{ijkl} \right\rangle + \left\langle \frac{\delta_{ir}\delta_{jd}R_{rdsd}}{R_{rdsd}} \right\rangle \left\langle \frac{1}{R_{rdpd}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\delta_{kp}\delta_{ld}R_{pdqd}}{R_{pdqd}} \right\rangle - \left\langle R_{ijwd} \frac{\delta_{kw}\delta_{ld}R_{vdwd}}{R_{vdwd}} \right\rangle, \quad (3.80)$$

$$R_{ijkl}^H = \left\langle R_{ijkl} \right\rangle + \left\langle \frac{R_{ijsd}}{R_{rdsd}} \right\rangle \left\langle \frac{1}{R_{rdpd}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{R_{klqd}}{R_{pdqd}} \right\rangle - \left\langle R_{ijwd} \frac{R_{vdkl}}{R_{vdwd}} \right\rangle, \quad (3.81)$$

onde  $rs$ ,  $pq$  e  $vw$  são pares de índices auxiliares que permitem operações internas, assim:  $r, s, p, q, v, w = 1, 2, 3$  da mesma forma que os índices principais  $i, j, k, l$ . Observe que o índice  $d$  está reservado para representar o eixo de simetria axial (considerando um caso estratificado), sendo comumente fixado como  $d = 3$ , como exemplificado na Equação (2.51). No entanto, quando  $d = 1, 2, 3$ , a Equação (3.81) representa exatamente a mesma expressão que a Equação (3.68), embora com maior complexidade algorítmica devido às operações adicionais que envolvem as identidades da Equação (3.76).

A principal vantagem da Equação (3.81), em relação à (3.68), é a possibilidade de fixar uma direção específica de simetria axial. Isso significa que, enquanto ambas as equações utilizam como argumentos de entrada matrizes isotrópicas de cada fase, de acordo com a Equação (2.52), a Equação (3.68) retorna uma matriz isotrópica global, enquanto a Equação (3.81), com  $d$  fixado, retorna uma matriz transversalmente isotrópica (compósito estratificado). Conseqüentemente, se  $d = 3$  e as fases são localmente isotrópicas, a implementação da Equação (3.81) é equivalente à utilização das Equações (2.53)-(2.59).

As equivalências da Equação (3.76) e as manipulações das Equações (3.77)-(3.81) são uma alternativa diferente à formulação padrão de um problema local em um caso estratificado, envolvendo uma função local no formato da Equação (2.49). Neste sentido, vale destacar que as Equações (3.77)-(3.81) foram desenvolvidas com a Equação (2.51) em mente, levando em consideração as operações matriciais necessárias para calcular matrizes transversalmente isotrópicas, preservando a simetria das matrizes argumento. Embora fora do escopo deste estudo, uma questão que surge é se o mesmo fluxo de informações poderia ser aplicado para deduzir expressões para outras microestruturas.

Antes de passar ao código do algoritmo, é necessário compatibilizar o formato das Equações (3.75) (tensor  $6 \times 6$  em notação de Voigt) e (3.81) (tensor  $3 \times 3 \times 3 \times 3$ ). É utilizado o seguinte mapeamento:  $[11, 22, 33, 23 = 32, 31 = 13, 12 = 21] \rightarrow [1, 2, 3, 4, 5, 6]$ , que implica uma troca de índices  $i, j, k, l = 1, 2, 3$  para  $I, J = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  conforme explicado em [132] (Cap.11). Assim, a Equação (3.81) é rescrita da seguinte maneira:

$$R_{IJ}^H(t) = \left\langle R_{IJ}(t) \right\rangle + \left\langle \frac{R_{IS}(t)}{R_{RS}(t)} \right\rangle \left\langle \frac{1}{R_{RP}(t)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{R_{QJ}(t)}{R_{PQ}(t)} \right\rangle - \left\langle \frac{R_{IW}(t)R_{VJ}(t)}{R_{VW}(t)} \right\rangle, \quad (3.82)$$

onde os índices auxiliares  $R, S, P, Q, V$  e  $W$  estão utilizando o mapeamento de Voigt da seguinte forma:  $rd \rightarrow R$  e  $sd \rightarrow S$ ,  $pd \rightarrow P$  e  $qd \rightarrow Q$ ,  $vd \rightarrow V$  e  $wd \rightarrow W$ . Contudo, note que todos estes índices auxiliares dependem do eixo de simetria axial fixado por  $d$ :

- se  $d = 1$ , então  $R, S, P, Q, V, W = 1, 5, 6$ , representando simetria axial em  $y_1$ ;
- se  $d = 2$ , então  $R, S, P, Q, V, W = 2, 4, 6$ , representando simetria axial em  $y_2$ ;
- se  $d = 3$ , então  $R, S, P, Q, V, W = 3, 4, 5$ , representando simetria axial em  $y_3$ ;
- se  $d = 1, 2, 3$ , então  $R, S, P, Q, V, W = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , sem simetria axial.

Consequentemente, é possível perceber que em qualquer caso de simetria axial os termos  $R_{IS}(t) \equiv R_{IW}(t)$  e  $R_{QJ}(t) \equiv R_{VJ}(t)$  são matrizes retangulares  $6 \times 3$  e  $3 \times 6$ , respectivamente, e os termos  $R_{RS}(t) \equiv R_{RP}(t) \equiv R_{PQ}(t) \equiv R_{VW}(t)$  são matrizes quadradas  $3 \times 3$ . Adicionalmente, por causa da simetria das matrizes, é possível identificar que  $R_{IS}(t) \equiv \left(R_{QJ}(t)\right)^T$ . Todas estas características descritas permitem considerar uma notação simplificada objetivando evitar o uso dos índices auxiliares, especialmente para evitar ambiguidades como por exemplo o símbolo “ $R$ ” como índice e como coeficiente.

Assim, definindo  $\mathbf{A}(t) = R_{IJ}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t) = R_{IS}(t)$ ,  $\mathbf{C}(t) = [R_{RS}(t)]^{-1}$  e  $\mathbf{D}(t) = \left(\mathbf{B}(t)\right)^T$ , para simplificar a notação, a Equação (3.82) pode ser rescrita da seguinte maneira:

$$R_{IJ}^H(t) = \left\langle \mathbf{A}(t) \right\rangle + \left\langle \mathbf{B}(t)\mathbf{C}(t) \right\rangle \left\langle \mathbf{C}(t) \right\rangle^{-1} \left\langle \mathbf{C}(t)\mathbf{D}(t) \right\rangle - \left\langle \mathbf{B}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{D}(t) \right\rangle. \quad (3.83)$$

Por exemplo, no caso de simetria axial em  $y_3$  os argumentos da Equação (3.82) são:

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} \lambda^{(n)}(t) & 0 & 0 \\ \lambda^{(n)}(t) & 0 & 0 \\ c^{(n)}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{(n)}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{(n)}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} c^{(n)}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{(n)}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \quad (3.84)$$

onde  $c^{(n)}(t) = \lambda^{(n)}(t) + 2\mu^{(n)}(t)$  como definido na Equação (2.53).

### 3.4.3 Algoritmo computacional

A computabilidade do método baseia-se na premissa de que todos os operadores envolvidos na Seção (3.2) são representados por funções computáveis. Em outras palavras, cada operador possui um equivalente computacional que, por meio de um algoritmo com recursos finitos, e utilizando a sintaxe adequada, garante a saída esperada. As expressões implementadas são a Equação (3.75), como versão otimizada da Equação (3.68), e a Equação (3.83), para compósitos estratificados. Neste contexto, para calcular  $\mathbf{R}^H(t)$ , é necessário invocar quatro funções computáveis:

1. *Montagem do arranjo de dados.* A forma de montar  $\mathbf{R}(\mathbf{y}, t)$  obedece a estrutura das Equações (2.52) e (2.38), delimitando o  $n$ -ésimo kernel à uma região específica  $\Sigma^{(n)}$ . A combinação de funções lambda com técnicas de manipulação de arranjos é fundamental para a montagem efetiva de cada  $\mathbf{R}^{(n)}(t)$  que compõe  $\mathbf{R}(\mathbf{y}, t)$ . Entornos de computação científica como MATLAB<sup>®</sup> ou GNU Octave possuem uma sintaxe que combina dados formatados em arranjos ordenados junto com funções lambda para invocação das mesmas. No entanto, no formato implementado, a combinação de estruturas de dados do tipo matriz é incompatível com a acomodação de coeficientes em forma de funções lambda. Esse problema é resolvido com uma estrutura do tipo célula, que, após acomodar as funções correspondentes, é invocada por uma função que avalia a célula completa no instante de tempo correspondente retornando uma matriz. A ideia principal é evitar o cálculo dos coeficientes das Equações (2.54)-(2.59) um a um (“manualmente”), visando generalização.
2. *Inversão do arranjo de dados previamente montado.* Note que este passo impõe uma restrição importante para a estrutura de dados. Para que  $\mathbf{R}(\mathbf{y}, t)$  seja invertível (ou seja, exista uma inversa que possa ser computada), este arranjo deve ter o formato de um tensor de segunda ordem. Os seguintes requisitos são mais específicos:
  - (a) *Ser uma matriz quadrada, limitada a uma matriz plana* (no sentido de apenas estar constituída por linhas e colunas, e não um tensor de ordem  $> 2$ ). Este requisito impõe um formato específico que deve ser compatível com operações de álgebra linear. Não são consideradas matrizes retangulares.
  - (b) *O determinante não-nulo.* De acordo com as características dos tensores que representam propriedades materiais, esse requisito não apresenta dificuldades, uma vez que os tensores mencionados já atendem a essa condição de forma natural. Isto garante *independência linear* e um *posto completo*.

Para satisfazer essas condições,  $\mathbf{R}(\mathbf{y}, t)$  deve ser montada com rotinas que formatam tensores de quarta ordem em segunda ordem; o mapeamento de índices de Voigt é o procedimento padrão para obter matrizes quadradas [96] (p.34). A delimitação da Seção (2.5) é particularmente conveniente, pois, em um caso isotrópico, o arranjo de  $\mathbf{R}(\mathbf{y}, t)$  pode ser formatado em uma matriz quadrada  $6 \times 6$  conforme exemplificado na Equação (3.75), eficientemente invertível com rotinas com base no BLAS ou LAPACK [145] (funções nativas). Tendo atendido os requisitos para a inversibilidade, torna-se relativamente fácil solicitar ao computador realizar essa operação.

3. *Integração definida no arranjo de dados invertido.* Esta ferramenta é invocada apenas quando não é possível aplicar a simplificação da Equação (3.74). Contudo, como explica a Seção (3.4.1), as fases não possuem um gradiente funcional, sendo localmente uniformes. De qualquer forma, na hipótese de uma fase localmente não-uniforme, é possível invocar técnicas de integração (e.g. `quadv()`). Estas dependem do hardware disponível, da precisão numérica requerida e do método de quadratura que será utilizado. Entornos como MATLAB® ou GNU Octave possuem funções nativas suficientemente robustas para atender a essa demanda.
4. *Inversão do arranjo de dados integrado.* Esta função computável é idêntica à mencionada antes da etapa de integração. O arranjo deve ser uma matriz plana invertível.

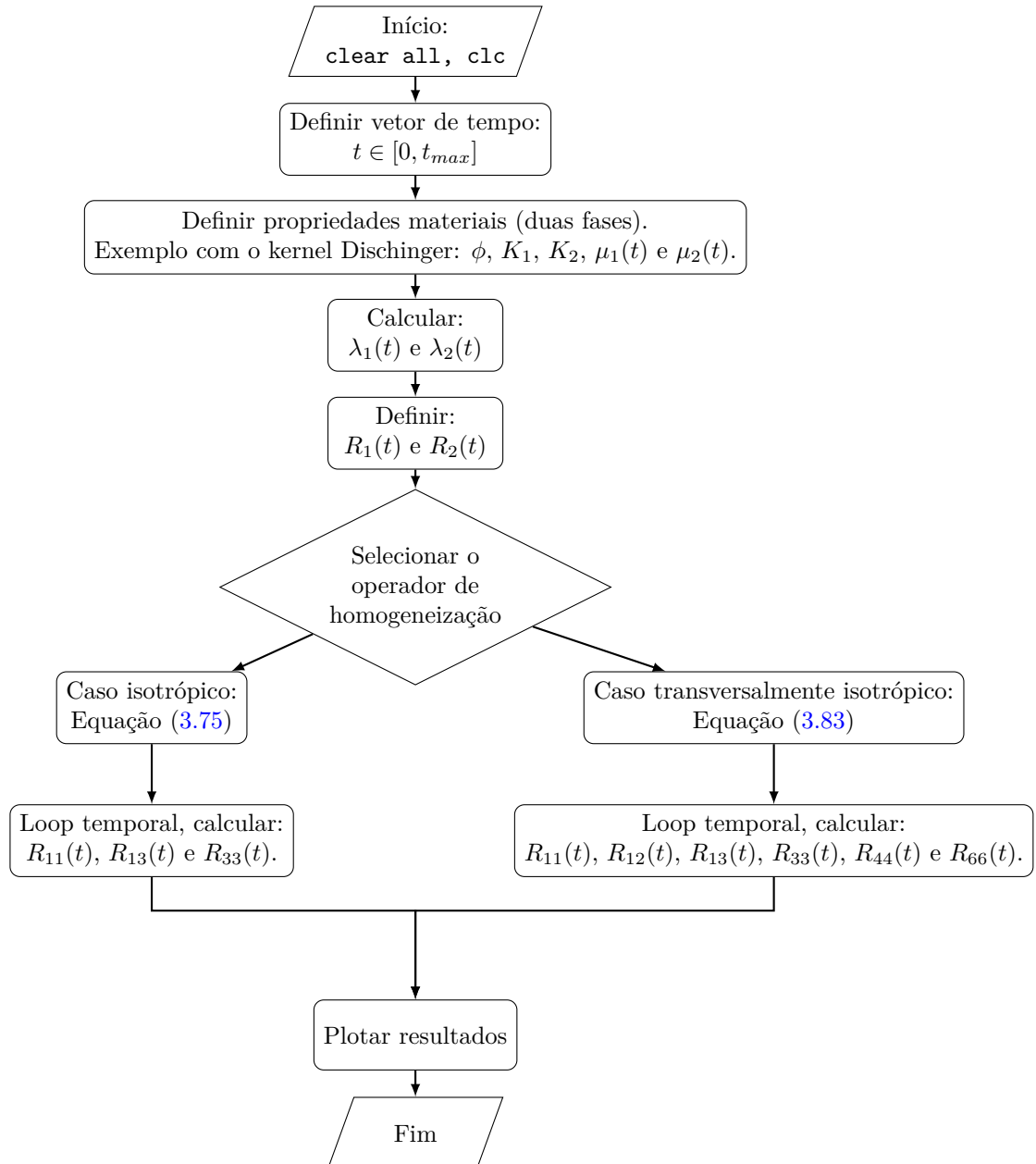
De acordo com as Equações (3.75) e (3.83), as funções que devem ser invocadas são: a **Montagem** de kernels, a **Inversão** e, ao invés da integração, o **Somatório**.

### 3.4.3.1 Exemplo do algoritmo computacional

O algoritmo a ser apresentado exemplifica a implementação das Equações (3.75) e (3.83) em dois passos consecutivos, utilizando trechos de código em GNU Octave. Abordar-se um problema bifásico, ou seja, é necessário computar  $\mathbf{R}^H(t)$  a partir dos kernels  $\mathbf{R}^{(1)}(t)$  e  $\mathbf{R}^{(2)}(t)$ , com frações volumétricas  $\phi^{(1)}$  e  $\phi^{(2)}$ , respectivamente. De acordo com a Seção (2.5.1) é possível fazer  $\phi^{(1)} = \phi$  e  $\phi^{(2)} = 1 - \phi$  por se tratar de apenas duas fases. O primeiro passo do algoritmo consiste na montagem de  $\mathbf{R}^{(1)}(t)$  e  $\mathbf{R}^{(2)}(t)$ , conforme a Equação (2.52). O segundo passo, com base nos kernels montados, implementa as Equações (3.75) e (3.83) utilizando a fração volumétrica  $\phi$  como argumento de entrada.

São utilizados, como exemplo, os dados de [93], que estuda um concreto (cimento e agregados) bifásico estratificado, combinando uma fase elástica com uma fase modelada pelo kernel de Dischinger sem envelhecimento, conforme especificado na Seção (2.6.2).

Antes de descrever o procedimento passo a passo, um fluxograma que resume o raciocínio do exemplo de implementação é apresentado na Figura (3.1). No Capítulo (4), os casos de estudo aplicam modificações conforme as particularidades correspondentes.

**Entrada:**

$\phi$ : Fração volumétrica (caso bifásico)  
 $K_1, K_2$ : Módulos de compressibilidade  
 $\mu_1(t), \mu_2(t)$ : Módulos de cisalhamento  
 $t_{max}$ : Tempo máximo

**Saída:**

$R_{11}(t), R_{12}(t), R_{13}(t),$   
 $R_{33}(t), R_{44}(t)$  e  $R_{66}(t)$ .  
 Coeficientes de relaxamento  
 homogeneizados

Figura 3.1: Diagrama de fluxo para o cálculo de coeficientes homogeneizados, em formato matricial.



**Passo 1** — Montagem dos kernels

Dependendo do problema viscoelástico, os parâmetros de Lamé da Equação (2.52) podem ser diretamente fornecidos ou calculados indiretamente. Neste exemplo é fornecido o módulo de compressibilidade volumétrica  $K^{(n)}$  e o módulo de cisalhamento  $\mu^{(n)}(t)$ .

```
K1 = 10E3; % [MPa]
K2 = 10E3; % [MPa]
mu1 = @(t) 8571*ones(size(t)); % [MPa]
mu2 = @(t) 8571*exp(8571*(exp(-0.026*t)))/35667); % [MPa]
```

Note que  $\mu^{(n)}(t)$  é montado utilizando uma função anônima (função lambda), embora na fase elástica o módulo permaneça constante com relação ao tempo. O módulo de compressibilidade  $\lambda^{(n)}(t)$  pode ser calculado utilizando as equações do contexto da elasticidade [132] (p.91). A expressão  $\lambda^{(n)}(t) = K^{(n)} - \frac{2}{3}\mu^{(n)}(t)$  é implementada da seguinte forma:

```
lmd1 = @(t) k1 - (2/3)*mu1(t); % [MPa]
lmd2 = @(t) k2 - (2/3)*mu2(t); % [MPa]
```

Os prefixos 1 e 2 distinguem as fases; embora esta notação seja eficiente para poucas fases, é possível considerar estruturas de dados mais sofisticadas para envolver mais fases. Contudo, este detalhe foge do escopo deste trabalho. As matrizes  $\mathbf{R}^{(1)}(t)$  e  $\mathbf{R}^{(2)}(t)$ , para cada fase, são montadas utilizando a notação de Voigt:

```
R1 = @(t) [cellfun(@(f) f(t), {
    @(t) lmd1(t)+2*mu1(t), @(t) lmd1(t), @(t) lmd1(t);
    @(t) lmd1(t), @(t) lmd1(t)+2*mu1(t), @(t) lmd1(t);
    @(t) lmd1(t), @(t) lmd1(t), @(t) lmd1(t)+2*mu1(t) }
    , zeros(3,3); zeros(3,3), cellfun(@(f) f(t), {
    @(t) mu1(t), @(t) 0, @(t) 0;
    @(t) 0, @(t) mu1(t), @(t) 0;
    @(t) 0, @(t) 0, @(t) mu1(t) } ) ]; % [MPa]
R2 = @(t) [cellfun(@(f) f(t), {
    @(t) lmd2(t)+2*mu1(t), @(t) lmd2(t), @(t) lmd2(t);
    @(t) lmd2(t), @(t) lmd2(t)+2*mu2(t), @(t) lmd2(t);
    @(t) lmd2(t), @(t) lmd2(t), @(t) lmd2(t)+2*mu2(t) }
    , zeros(3,3); zeros(3,3), cellfun(@(f) f(t), {
    @(t) mu2(t), @(t) 0, @(t) 0;
    @(t) 0, @(t) mu2(t), @(t) 0;
    @(t) 0, @(t) 0, @(t) mu2(t) } ) ]; % [MPa]
```

A função `cellfun()`, que pode combinar diferentes tipos de estruturas de dados em cada célula, permite definir uma função lambda para cada coeficiente da matriz correspondente. Essa característica é útil não apenas no caso de fases isotrópicas, mas também pode permitir, fora do escopo deste estudo, fases anisotrópicas. O valor numérico das matrizes `R1` e `R2`, no formato especificado, pode ser calculado utilizando o argumento do tempo, usando expressões como `R1(t)` e `R2(t)`, respectivamente, para uma variável `t` escalar arbitrária. Embora não seja comum, em caso de precisar verificar a variação temporal de cada matriz, ou seja, avaliar um argumento `t` de forma vetorizada (neste caso `t` é um arranjo e não um escalar), é possível implementar as seguintes instruções:

```
R1t = arrayfun(@(t) R1(t), t, 'UniformOutput', false); % [MPa]
R2t = arrayfun(@(t) R2(t), t, 'UniformOutput', false); % [MPa]
```

### Passo 2 — Inversão e somatório

A versão vetorizada da Equação (3.75) pode ser resumida utilizando uma sintaxe que invoca as funções `R1` e `R2` diretamente com um argumento vetorial `t`.

```
RH = @(t) inv( phi * inv(R1(t)) + (1-phi) * inv(R2(t)) ); % [MPa]
RHt = arrayfun(@(t) RH(t), t, 'UniformOutput', false); % [MPa]
```

Este procedimento também é válido para a Equação (3.83), substituindo a expressão “`RH = @(t) inv (...);`” pela expressão correspondente, no entanto, o algoritmo não é abordado dessa forma. A sintaxe enxuta desse exemplo garante o melhor aproveitamento das sub-rotinas (LAPACK e BLAS) de linguagens de programação otimizadas para vetorização. A matriz `RHt`, que é a propriedade homogeneizada, armazena todos os coeficientes efetivos. Contudo, antes de se considerar a eficiência computacional, é fundamental garantir a correteza dos resultados. Para isso, no presente estudo, as funções de inversão e somatório são implementadas com técnicas computacionais mais tradicionais. Também, embora essa sintaxe ofereça uma das alternativas mais eficientes, é possível que não seja totalmente compatível com a maioria das metodologias adotadas por outros autores.

Qualquer ciclo (e.g. `while`, `do`) poderia ser usado para implementar o somatório de propriedades por fase, mas em casos bifásicos este somatório é feito manualmente acompanhando o seguinte formato:  $\sum_{n=0}^2 \phi^{(n)} [R^{(n)}(t)]^{-1} = \phi [R^{(1)}(t)]^{-1} + (1 - \phi) [R^{(2)}(t)]^{-1}$ . Também, seria possível usar diferentes sintaxes para inverter matrizes (e.g. `()^(-1)`, `1/()`); no entanto, nesta implementação, a função nativa `inv` calcula as inversas.

A fração volumétrica, que de acordo com os dados de [93] é  $\phi = 0.5$ . A discretização temporal,  $t = 1, \dots, 300$  [dias], não é implementada de forma vetorizada, como explicado anteriormente. Logo, estas duas condições são implementadas da seguinte forma:

```
tmax = 300; t = linspace(0,tmax,tmax+1)'; nt = rows(t);
phi = 0.5; % Fração volumétrica
```

— Se o compósito é isotrópico desde uma perspectiva global:

```
Z = zeros(size(t)); R11 = Z; R12 = Z; R33 = Z;
for k=1:1:nt
    RH = inv( phi * inv(R1(t(k))) + (1-phi) * inv(R2(t(k))) );
    R11(k) = RH(1,1); % RH1111 = RH2222 = RH3333
    R12(k) = RH(1,2); % RH1122 = RH1133 = RH2233
    R33(k) = RH(2,3); % RH2323 = RH3131 = RH1212
end
```

— Se o compósito é transversalmente isotrópico desde uma perspectiva global:

```
d = [3,4,5]; Z = zeros(size(t));
R11 = Z; R12 = Z; R13 = Z; R33 = Z; R44 = Z; R66 = Z;
for k=1:1:nt
    R1t = R1(t(k)); B1 = R1t(:,d); C1 = inv(R1t(d,d)); D1 = B1';
    R2t = R2(t(k)); B2 = R2t(:,d); C2 = inv(R2t(d,d)); D2 = B2';
    RH_vt = phi * R1t + (1-phi) * R2t ; % 6x6
    RH_ID = phi * B1*C1 + (1-phi) * B2*C2 ; % 6x3
    RH_D = inv( phi * C1 + (1-phi) * C2 ) ; % 3x3
    RH_DJ = phi * C1*D1 + (1-phi) * C2*D2 ; % 3x6
    RH_IDJ = phi * B1*C1*D1 + (1-phi) * B2*C2*D2 ; % 6x6
    RH = RH_vt + RH_ID*RH_D*RH_DJ - RH_IDJ;
    R11(k) = RH(1,1); % RH1111 = RH2222
    R12(k) = RH(1,2); % RH1122
    R13(k) = RH(1,3); % RH1133 = RH2233
    R33(k) = RH(3,3); % RH3333
    R44(k) = RH(4,4); % RH2323 = RH3131
    R66(k) = RH(6,6); % RH1212 = (RH1111-RH2222)/2
end
```

Note que  $d$  é o índice da simetria axial. A matriz  $RH$ , a propriedade homogeneizada  $\mathbf{R}^H(t)$ , poderia ser armazenada para cada elemento de  $\mathbf{t}$ , mas, apenas é armazenado o perfil de cada coeficiente utilizando a notação de Voigt.

### Passo complementar — Plotagem

As instruções para gerar a Figura (3.2), para o coeficiente R11 deste exemplo, estão resumidas no Programa (B.1.1). Os dados do exemplo estão na Tabela (B.1).

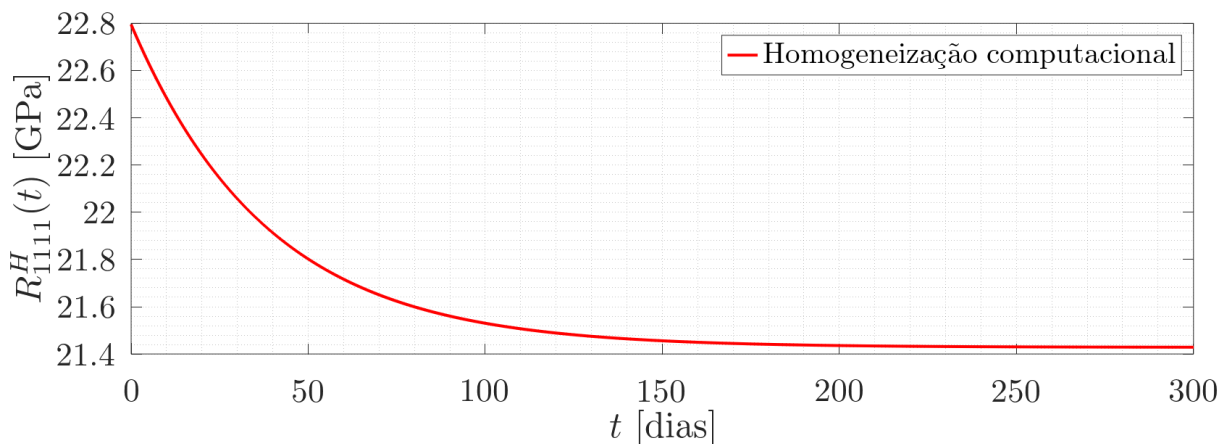


Figura 3.2:  $R_{1111}^H(t)$  [GPa] vs.  $t$  [dias]. Figura de exemplo, coeficiente efetivo de um compósito elástico-viscoelástico bifásico estratificado em função do tempo e da fração volumétrica  $\phi = 0.5$ . O exemplo idealiza um compósito bifásico de concreto e agregados.

#### 3.4.3.2 Algoritmos auxiliares

Quanto ao **Passo 1** da Subseção (3.4.3.1), a montagem dos kernels Zener e Dischinger das Equações (2.60) e (2.61) não necessita de algoritmos auxiliares. No entanto, o núcleo fracionário de Scott Blair e Rabotnov depende das funções auxiliares mostradas nas Equações (2.66) e (2.67). Embora essas funções possam ser implementadas no contexto específico de cada caso estudado no Capítulo (4), para modularidade e reciclagem de código, é melhor considerar implementações separadas para essas duas equações.

Segue um resumo das instruções para implementar cada kernel:

#### Kernel Zener

Acompanhando a Equação (2.60) da Seção (2.6.1), no contexto de um caso unidimensional, as instruções modelo necessárias para montagem do kernel Zener são:

```
E1 = 0.6;      E2 = 1.3;      % [GPa] Módulo elástico
M1 = 0.4;      M2 = 0.3;      % [GPa] Módulo viscoelástico
eta1 = 0.1;    eta2 = 0.2;    % [GPa s] Módulo viscoso
r1 = eta1/M1; r2 = eta2/M2;  % [s] Razão de relaxamento
R1 = @(t) E1 + M1*exp(-t/r1); % [GPa] Fase 1
R2 = @(t) E2 + M2*exp(-t/r2); % [GPa] Fase 2
```

### Kernel Dischinger

Acompanhando a Equação (2.61) da Seção (2.6.2), no contexto de um caso localmente isotrópico, as instruções modelo necessárias para montagem do kernel Dischinger são:

```
K1 = 10E3; K2 = 10E3; % [GPa] M. compressibilidade volumétrica (Bulk)
muo1 = 9E3; muo2 = 8E3; % [GPa] M. cisalhamento inicial (aparente) (\mu)
ap1 = 3E-2; ap2 = 2E-2; % [1/s] Parâmetro \alpha do modelo
abe1 = 4E4; abe2 = 5E4; % [1] Parâmetro \alpha\beta (adimensional)
mu1 = @(t) muo1*exp(muo1*(exp(-ap1*t))/abe1); % [GPa] \mu^{(1)}(t)
mu2 = @(t) muo2*exp(muo2*(exp(-ap2*t))/abe2); % [GPa] \mu^{(2)}(t)
lmd1 = @(t) K1 - (2/3)*mu1(t); % [GPa] \lambda^{(1)}(t)
lmd2 = @(t) K2 - (2/3)*mu2(t); % [GPa] \lambda^{(1)}(t)
```

### Kernel Rabotnov

Acompanhando a Equação (2.65) da Seção (2.6.3), no contexto de um caso localmente isotrópico porém expresso por um modelo fracionário, as instruções necessárias para a montagem do kernel de Scott Blair e Rabotnov são semelhantes aos casos anteriores. No entanto, inclui um detalhe adicional: é necessário declarar antecipadamente uma função auxiliar. Se a implementação usa a primeira forma do kernel, a Equação (2.66), então:

```
% Beta      Lambda      Mu inicial      Alpha      Tau
B1 = 0.98; k1 = 49.6; mu1 = 1.76E6; a1 = 0.47; tau1 = 0;
B2 = 0.45; k2 = 29.6; mu2 = 0.98E6; a2 = 0.47; tau2 = 0;
SBR1 = @(t) rabotnov_kernel(a1, B1, t, tau1); % [Pa] Fase 1
SBR2 = @(t) rabotnov_kernel(a2, B2, t, tau2); % [Pa] Fase 2
```

e se a implementação usa a segunda forma do kernel, a Equação (2.67), então é necessário substituir as instruções  $SBR1 = @(t)$  e  $SBR2 = @(t)$  da seguinte maneira:

```
SBR1 = @(t) ( mittagleffler_1p(a1, B1*t.^(a1+1) )-1 )/B1; % [Pa] Fase 1
SBR2 = @(t) ( mittagleffler_1p(a2, B2*t.^(a2+1) )-1 )/B2; % [Pa] Fase 2
```

onde as funções `rabotnov_kernel` e `mittagleffler_1p` estão disponíveis nos Programas (B.1.2) e (B.1.3) respectivamente. Tendo calculado cada kernel, estes podem ser usados como variáveis ou invocados como funções `lambda`, por exemplo:

```
R1 = @(t) k1*mu1*SBR1(t); % [Pa] Fase 1
R2 = @(t) k2*mu2*SBR2(t); % [Pa] Fase 2
```

### Transformada integral simbólica

Esta descrição não corresponde à montagem de um kernel, mas trata de um algoritmo computacional auxiliar utilizado no Capítulo (4) para reproduzir (no sentido de confirmar) os resultados de outros autores que aplicam o MHA utilizando uma transformada integral aproveitando o princípio de correspondência. Cabe ressaltar que esta ferramenta simples está projetada apenas para problemas unidimensionais não-fractionários. É utilizada a ferramenta de processamento matemático “simbólico” disponível no GNU Octave e MATLAB®. Assumindo um problema bifásico e que R1 e R2 já estão montados, é possível invocar a transformada integral simbólica utilizando as seguintes instruções:

```
pkg load symbolic
RHL = L_iL(t, phi, R1, R2);
```

Sendo que `phi` é o argumento associado à fração volumétrica da primeira fase ( $\phi^{(1)}$ ), e `t` é o arranjo vetorial que contém um domínio temporal discretizado, da mesma forma que nos exemplos anteriores. No Programa (B.1.4) é mostrada a função `L_iL` para três fases utilizando o domínio de Laplace; a continuação segue o exemplo para duas fases:

```
function h = L_iL(vt, phi, r1, r2)
    syms s t;
    phis = sym(phi);
    R1s = laplace(r1, t, s);
    R2s = laplace(r2, t, s);
    num = simplify ( R1s * R2s );
    den = simplify ( (1-phis)*R1s + phis*R2s );
    RHs = simplify ( num ./ den );
    ht = simplify ( ilaplace(RHs, s, t));
    h = double( subs(ht, 't', vt) );
    h(1)= 2*h(1); % Correção por causa da função Heaviside(t)
end
```

Como mencionado na Seção (2.6.3), as instruções `laplace(●)` e `ilaplace(●)` invocam as funções nativas associadas com a transformação integral; no caso de requerer utilizar a transformada de Laplace-Carson, basta modificar essas instruções por: `s*laplace(●)` e `ilaplace(●/s)`, respectivamente. A estrutura da função `L_iL` corresponde à Equação (3.75) simplificada para o caso unidimensional. Este algoritmo é utilizado por diversos autores como um veículo para a implementação do princípio de correspondência, porém, utilizando outras ferramentas computacionais de transformação integral.

# Capítulo 4

## Resultados

*Este capítulo atende aos requisitos do objetivo específico 7.*

O algoritmo computacional descrito na Subseção (3.4.3) foi adaptado para diferentes casos de estudo extraídos da literatura. Embora seja possível desenvolver um único algoritmo que abranja todos os casos, uma abordagem didática mais eficaz é tratar cada caso separadamente e em detalhe, garantindo a clareza, análise e especialmente a correteude dos algoritmos propostos. Em essência, todos os casos de estudo fornecem uma comparação objetiva entre a metodologia baseada no princípio de correspondência (por meio de transformadas integrais), utilizada por outros autores, e a metodologia de homogeneização adotada neste trabalho, que aplica as ferramentas diretamente no domínio temporal.

Os casos são organizados em duas seções: a primeira trata do cálculo de propriedades efetivas em compósitos bifásicos unidimensionais, enquanto a segunda explora problemas com células representativas contendo fases em forma de lâminas. Embora os problemas da primeira seção sejam particularmente simples, eles ajudam a desenvolver uma compreensão mais clara das características do processo de homogeneização. Desde o primeiro caso de estudo, é apresentada uma justificativa detalhada que suspeita da equivalência entre a metodologia que utiliza o princípio de correspondência e aquela que não o faz.

Além disso, no caso de fases localmente isotrópicas em materiais estratificados, os resultados do algoritmo proposto são comparados com as Equações (2.53)-(2.59), que descrevem um meio global transversalmente isotrópico. Como ambas as formulações derivam da mesma Equação (2.51) os resultados são consistentes (apenas difere a implementação).

Por fim, todos os casos de estudo incluem uma tabela, no Apêndice (B), que resume os parâmetros utilizados. Semelhantemente, é fornecida uma cópia do programa utilizado, garantindo transparência nos resultados e facilitando o intercâmbio de informações.

## 4.1 Compósitos bifásicos unidimensionais

### 4.1.1 Caso 1: Fase elástica e fase viscosa

Este caso aborda um problema unidimensional bifásico estruturando os kernels conforme a Equação (2.60) e comparando dois grupos diferentes de parâmetros:

— Grupo (a): Compósito unidimensional com duas fases, uma elástica, e uma viscosa, com parâmetros hipotéticos de acordo com o exemplo de [42] (*Exemplo I*, p.12). A Figura (4.1a) mostra a comparação dos resultados utilizando a Equação (3.74) com  $\phi = 0.1$ .

— Grupo (b): Mesmo cenário, porém utilizando dados dentro do esperado em materiais reais, conforme [27] (vidros de sílica, p.527; polímeros comuns, p.583). A Figura (4.1b), com fração volumétrica  $\phi = 0.1$ , mostra a comparação dos resultados entre a Equação (3.74) e o algoritmo auxiliar descrito ao final da Seção (3.4.3.2), que aplica o princípio de correspondência utilizando a transformada de Laplace e sua inversa.

Para ambos os grupos, os parâmetros utilizados estão registrados na Tabela (B.2).

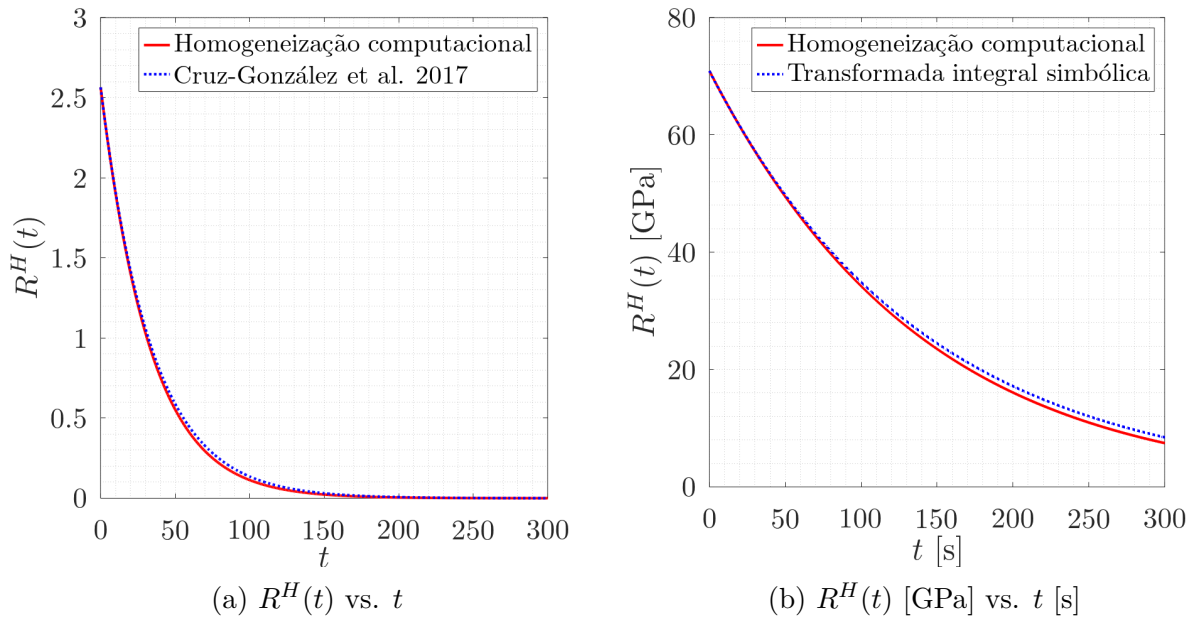


Figura 4.1: Coeficiente efetivo de um compósito bifásico unidimensional elástico-viscoso em função do tempo. (a) Comparação com resultado de [42], usando  $\phi = 0.1$ . (b) Comparação com o algoritmo que utiliza a transformada de Laplace usando  $\phi = 0.1$ .

Em ambos os casos, os resultados são semelhantes. No entanto, é importante considerar que o contraste entre as fases, sendo uma completamente elástica e outra completamente viscosa, está associado com uma limitação teórica que deve ser discutida:



Segundo [90], o princípio de correspondência transforma uma expressão convolucional,  $R(x, t) * \varepsilon(x, t)$ , em  $\hat{R}(x, s)\hat{\varepsilon}(x, s)$ , convertendo um problema viscoelástico (domínio temporal) em um problema elástico (domínio transformado). Até aqui, a princípio, em problemas homogêneos, **não há um vínculo com métodos de homogeneização**.

Não obstante, aplicar uma transformada integral em um contexto onde  $R(x, t)$  caracteriza um material compósito (e.g. Equação (2.38)) levanta questões sobre a **precedência entre o princípio de correspondência e o processo de homogeneização**. Essa questão é discutida mais abertamente na Seção (A.1.1).

Desse modo, percebe-se que **não é equivalente aplicar o processo de homogeneização assintótica antes do princípio de correspondência e aplicar o princípio de correspondência inicialmente, para depois submeter a imagem elástica do problema viscoelástico à homogeneização assintótica**. Se essa ordem de precedência fosse arbitrária, as seguintes expressões no contexto bifásico seriam equivalentes:

$$R^H(t) = \left[ \phi^{(1)} [R^{(1)}(t)]^{-1} + \phi^{(2)} [R^{(2)}(t)]^{-1} \right]^{-1}, \quad (4.1)$$

$$R^H(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[ \phi^{(1)} [\mathcal{L}\{R^{(1)}(t)\}]^{-1} + \phi^{(2)} [\mathcal{L}\{R^{(2)}(t)\}]^{-1} \right]^{-1} \right\}. \quad (4.2)$$

O modelo proposto utiliza a abordagem da Equação (4.1), conforme a manipulação algébrica do Capítulo (3), que é equivalente, porém no contexto unidimensional, à Equação (3.75) e à média harmônica (cota de Reuss), conforme citado na Seção (2.4). Por outro lado, a metodologia associada ao princípio de correspondência utiliza a Equação (4.2). Não são estudadas todas as condições de equivalência das Equações (4.1) e (4.2), mas é evidente que, no caso de um material homogêneo (uma única fase), é possível alternar a precedência entre o processo de homogeneização e a transformada integral.

Consequentemente, os resultados da Figura (4.1) não podem demonstrar equivalência entre as metodologias citadas. No entanto, essas fornecem resultados semelhantes quando a presença de uma das fases é baixa; note que as curvas comparadas nas Figuras (4.1a) e (4.1b) são parecidas porque a fração volumétrica da fase viscosa é baixa. Quando as propriedades das fases são semelhantes em comportamento, os resultados numéricos entre a metodologia proposta e a baseada no princípio de correspondência podem ser semelhantes. No entanto, neste caso de estudo, existe um contraste entre a fase elástica (módulo constante) e a fase viscosa (módulo tendendo a zero desde o início do teste). O aumento da diferença entre as curvas calculadas pelas Equações (4.1) e (4.2) pode ser confirmado, utilizando o Programa (B.2.1), ao aumentar a fração volumétrica.

A Figura (4.2) compara os resultados das Equações (4.1) e (4.2) usando os dados do grupo (b) da Tabela (B.2), considerando uma fração volumétrica  $\phi = 0.5$ :

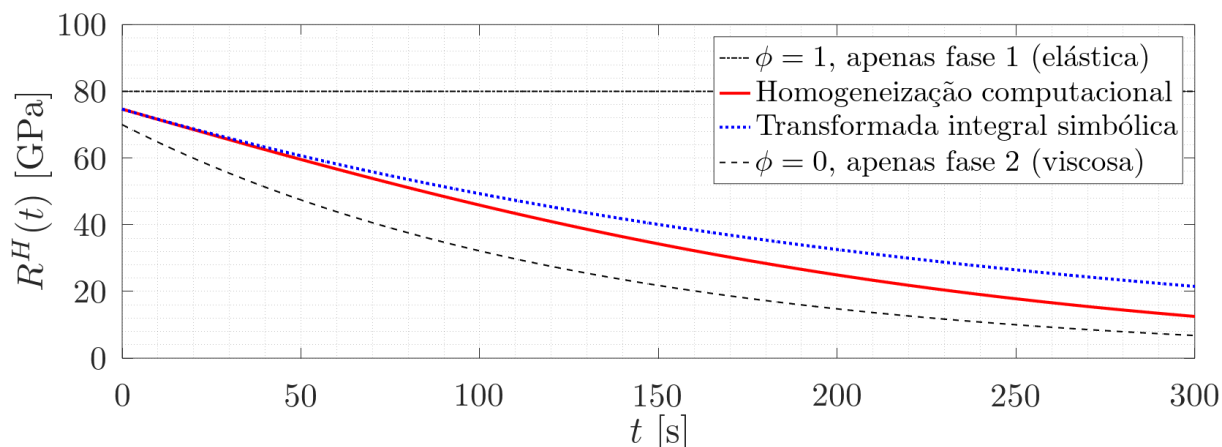


Figura 4.2:  $R^H(t)$  [GPa] vs.  $t$  [s]. Comparação do coeficiente efetivo de um compósito bifásico unidimensional elástico-viscoso em função do tempo usando  $\phi = 0.5$ .

A Figura (4.3) compara os resultados das Equações (4.1) e (4.2) usando os dados do grupo (b) da Tabela (B.2), considerando uma fração volumétrica  $\phi = 0.7$ :

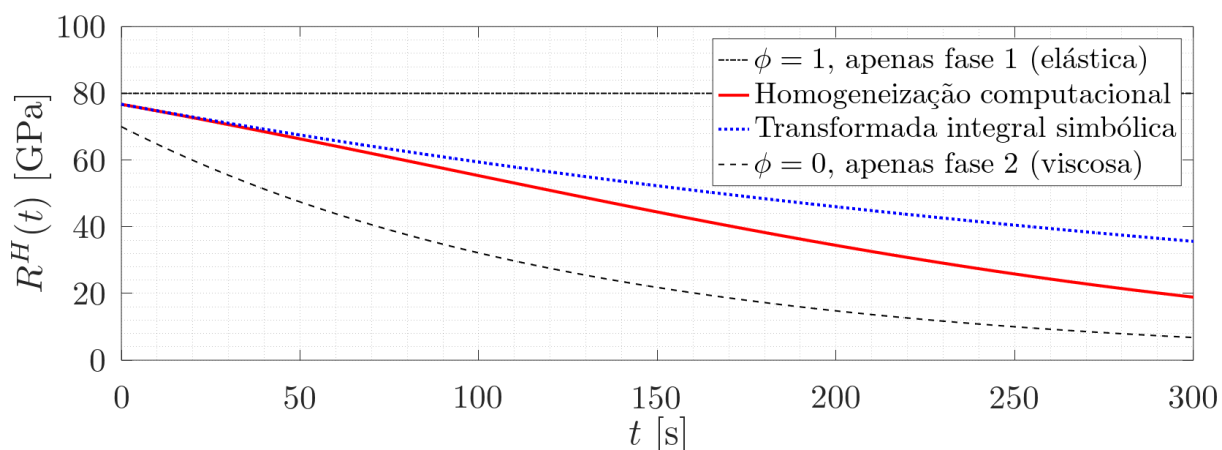


Figura 4.3:  $R^H(t)$  [GPa] vs.  $t$  [s]. Comparação do coeficiente efetivo de um compósito bifásico unidimensional elástico-viscoso em função do tempo usando  $\phi = 0.7$ .

A análise confirma que as Equações (4.1) e (4.2) não são equivalentes. No entanto, essas equações mostram semelhanças quando o compósito se aproxima de um material homogêneo, ou seja, nos casos extremos em que  $\phi \approx 0$  ou  $\phi \approx 1$ , e para pequenos intervalos de tempo, próximos a  $t = 0$ . Embora alguns autores atribuam essa diferença ao *princípio de memória* nos materiais viscoelásticos, é importante destacar que tais efeitos estão codificados na integral de convolução apresentada na Equação (2.6) ou (2.36), e não nas propriedades isentas de solicitações mecânicas.

### 4.1.2 Caso 2: Kernel Zener em ambas as fases

Este caso aborda um problema unidimensional bifásico, com base na montagem de kernels da Equação (2.60), comparando dois grupos diferentes de parâmetros:

— Grupo (a): Apresentado nas Figuras (4.4)-(4.5)-(4.6), consiste em um compósito unidimensional com duas fases viscoelásticas, utilizando parâmetros hipotéticos de acordo com o exemplo de [40] (*Modelo II*, p.34). As Figuras (4.4a)-(4.5a)-(4.5a) consideram frações volumétricas  $\phi = 0.5, 0.7, 0.9$ , respectivamente, e mostram a comparação dos resultados utilizando o modelo proposto na Equação (3.74) na versão unidimensional.

— Grupo (b): Apresentado nas Figuras (4.4)-(4.5)-(4.6), consiste em um compósito unidimensional bifásico viscoelástico utilizando dados dentro do comportamento esperado em materiais reais, conforme [27] (vidros de sílica, p.527; polímeros comuns, p.583). As Figuras (4.4b)-(4.5b)-(4.6b), com frações volumétricas  $\phi = 0.1, 0.7, 0.9$ , respectivamente, mostram a comparação dos resultados entre o modelo proposto na Equação (3.74), que é equivalente à Equação (4.1), frente a implementação da transformada de Laplace, e sua inversa, utilizando um ambiente simbólico, como formulado na Equação (4.2).

Para ambos os grupos, os parâmetros utilizados estão registrados na Tabela (B.3).

A Figura (4.4) mostra resultados de ambos os grupos, com  $\phi = 0.5$ :

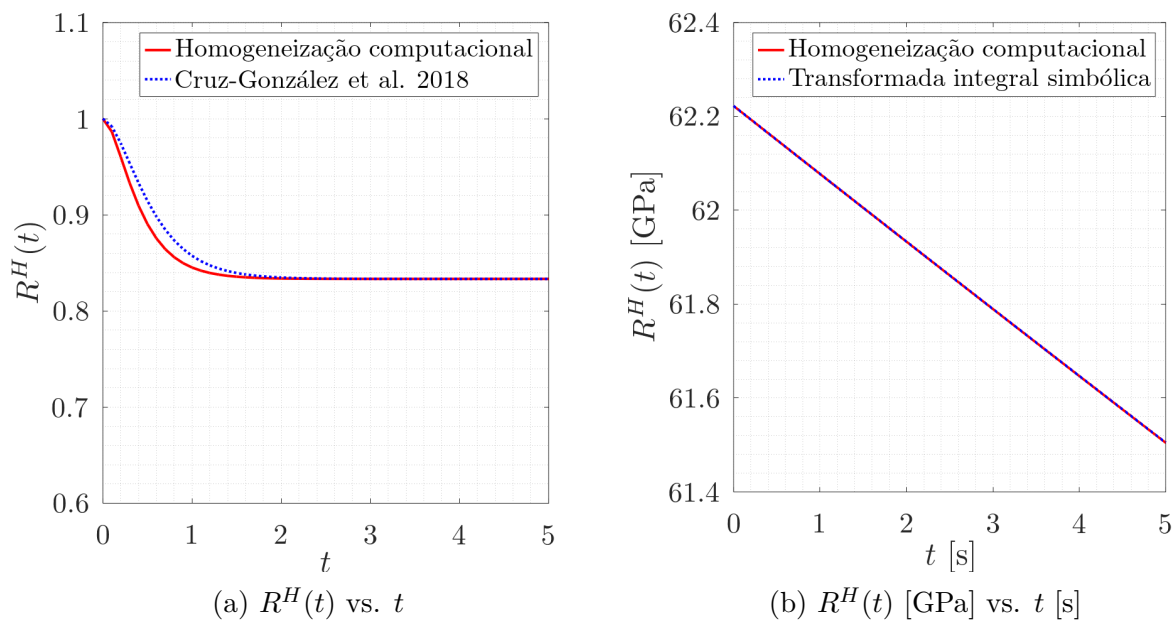


Figura 4.4: Coeficiente efetivo de um compósito bifásico unidimensional viscoelástico em função do tempo. (a) Comparação com resultado de [40], usando  $\phi = 0.5$ . (b) Comparação com uma implementação do princípio de correspondência usando  $\phi = 0.5$ .

A Figura (4.5) mostra resultados de ambos os grupos, com  $\phi = 0.7$ :

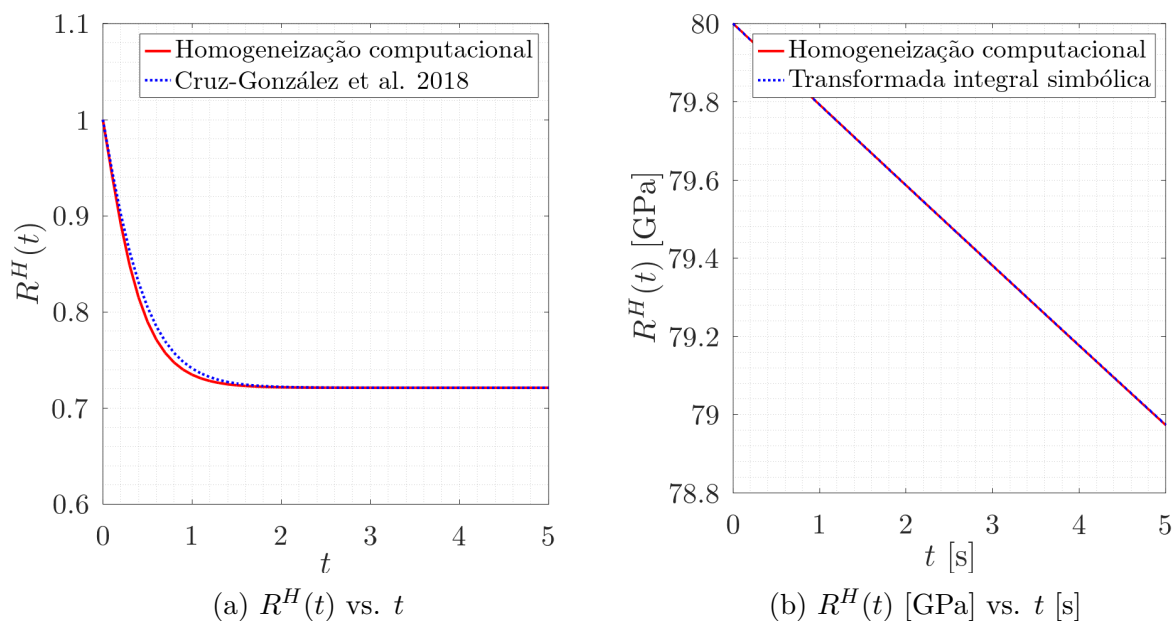


Figura 4.5: Coeficiente efetivo de um compósito bifásico unidimensional viscoelástico em função do tempo. (a) Comparação com resultado de [40], usando  $\phi = 0.7$ . (b) Comparação com uma implementação do princípio de correspondência usando  $\phi = 0.7$ .

A Figura (4.6) mostra resultados de ambos os grupos, com  $\phi = 0.9$ :

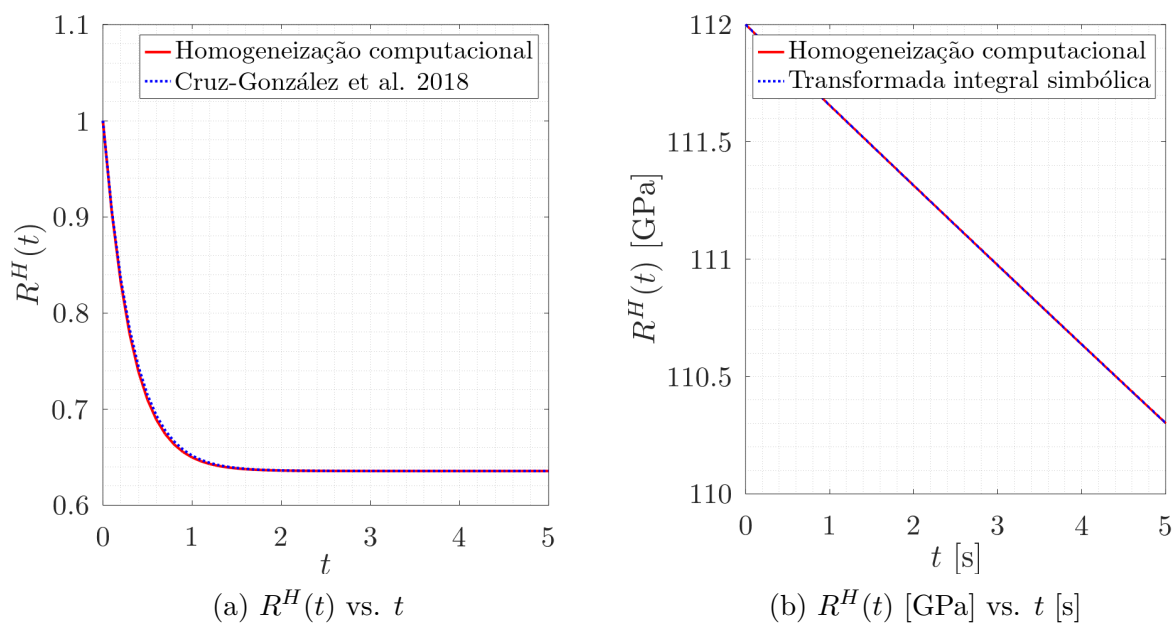


Figura 4.6: Coeficiente efetivo de um compósito bifásico unidimensional viscoelástico em função do tempo. (a) Comparação com resultado de [40], usando  $\phi = 0.9$ . (b) Comparação com uma implementação do princípio de correspondência usando  $\phi = 0.9$ .

De acordo com os comentários do Caso 1, a semelhança entre as Equações (4.1) e (4.2) é mais acentuada quando a fração volumétrica de uma das fases é relativamente baixa (ou seja, são equações equivalentes apenas em problemas homogêneos).

Considerando o Grupo (a) (materiais fictícios do exemplo de [40]), a Figura (4.4a) (com  $\phi = 0.5$ , fases em proporções iguais) mostra o pior dos três cenários em relação às Figuras (4.5a) e (4.6a). No entanto, como as fases compartilham o mesmo modelo de kernel, a tendência final do coeficiente efetivo pode ser resumida pela expressão  $R^H(t \rightarrow \infty) = [\phi/E^{(1)} + (1 - \phi)/E^{(2)}]^{-1}$ , que envolve apenas as constantes elásticas após o término da contribuição viscosa ( $M^{(n)}e^{-(t \rightarrow \infty)/r^{(n)}} \rightarrow 0$ ). Assim, os efeitos viscosos desaparecem antes de notar a diferença entre as Equações (4.1) e (4.2); note que estas equações são equivalentes quando as fases se tornam puramente elásticas ( $t \rightarrow \infty$ ).

Para o Grupo (b), a Equação (3.74) e o algoritmo associado à transformada integral parecem gerar os mesmos resultados. No entanto, exceto em cenários homogêneos,  $\phi = 0$  (apenas fase 2) e  $\phi = 1$  (apenas fase 1), as curvas resultantes das Equações (4.1) e (4.2) devem diferir, especialmente quando há contraste notório entre as propriedades. Para verificar isto, são montadas duas modificações sobre o Grupo (b) da Tabela (B.3):

— As Figuras (4.4b), (4.5b) e (4.6b) são modificadas considerando  $\phi = 0.3$ ,  $\phi = 0.5$  e  $\phi = 0.7$ ; nessa faixa de frações volumétricas as divergências entre as Equações (4.1) e (4.2) poderiam se tornar mais evidentes. A Figura (4.7), em um domínio temporal de  $t = 1600$  segundos, confirma que, **ao término da contribuição viscosa, as Equações (4.1) e (4.2) são equivalentes**, como nos exemplos das Figuras (4.4a), (4.5a) e (4.6a).

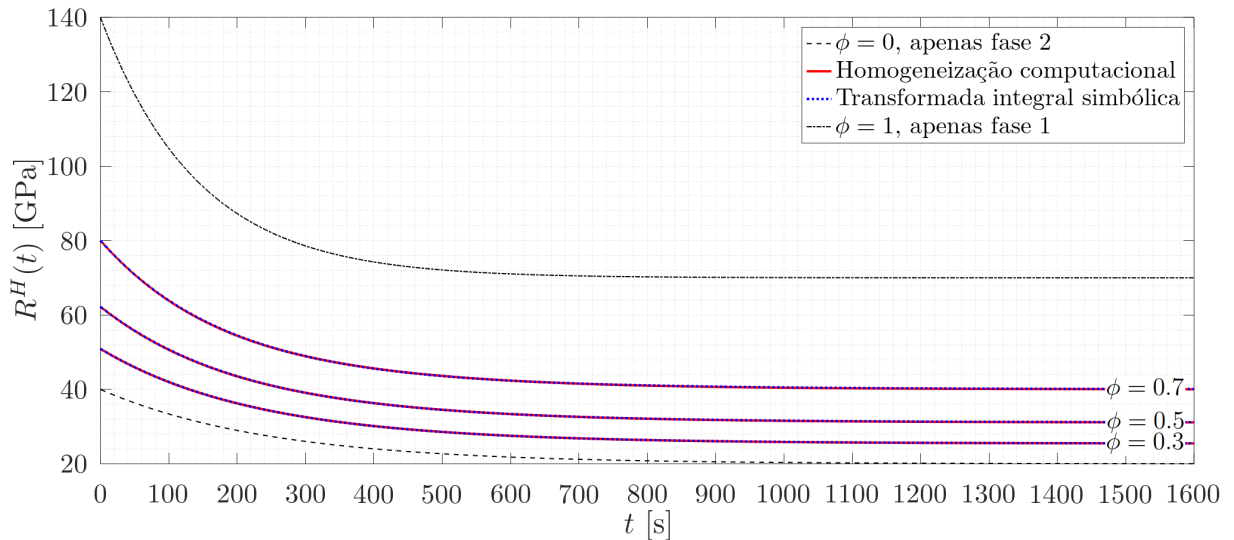


Figura 4.7:  $R^H(t)$  [GPa] vs.  $t$  [s]. Coeficientes efetivos de um compósito viscoelástico bifásico unidimensional em função do tempo e da fração volumétrica  $\phi = 0.3, 0.5, 0.7$ .

— As Figuras (4.4b), (4.5b) e (4.6b) são modificadas de forma semelhante ao caso da Figura (4.7). No entanto, as propriedades viscoelásticas da segunda fase são alteradas para representar um material com uma taxa de relaxamento consideravelmente maior que a da primeira fase; isto é, de acordo com a Equação (2.60), o módulo viscoelástico  $M^{(2)}$  é aumentado em magnitude e o módulo viscoso  $\eta^{(2)}$  é diminuído. Estas modificações sobre a segunda fase estão resumidas na Tabela (B.4). Assim, a diferença entre as Equações (4.1) e (4.2) não passa despercebida. A Figura (4.8), em um domínio temporal de  $t = 20$  segundos, reduzido em relação à Figura (4.7) para visualizar o relaxamento da segunda fase, confirma que as Equações (4.1) e (4.2) não são equivalentes.

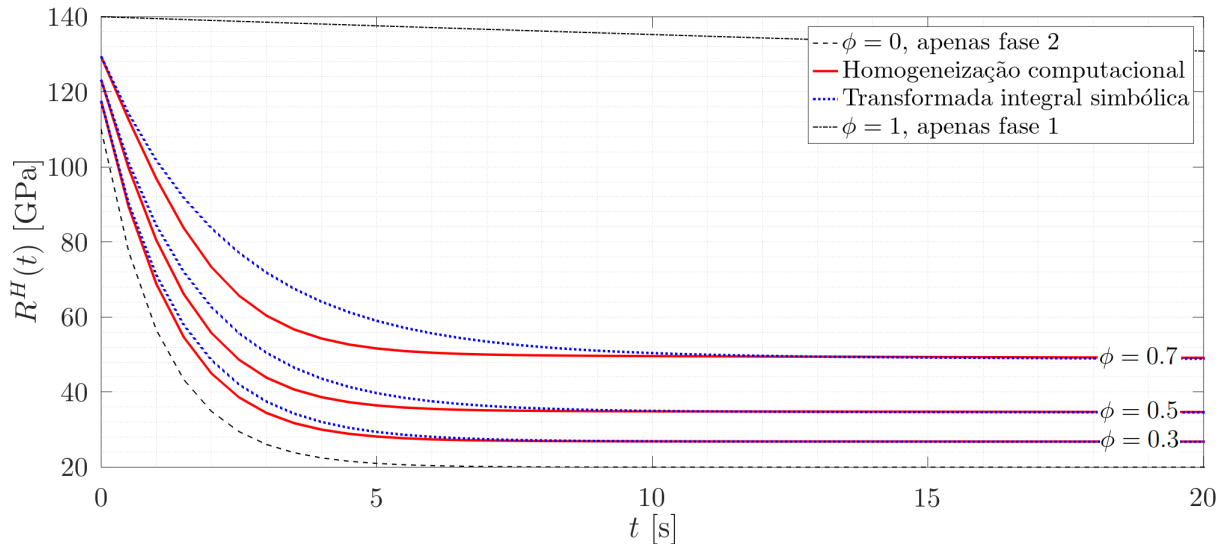


Figura 4.8:  $R^H(t)$  [GPa] vs.  $t$  [s]. Coeficientes efetivos de um compósito viscoelástico bifásico unidimensional em função do tempo e da fração volumétrica  $\phi = 0.3, 0.5, 0.7$ .

Nas Figuras (4.4b), (4.5b), (4.6b), (4.7) e (4.8), a primeira fase (fase 1) permanece inalterada; apenas na Figura (4.8), onde a segunda fase (fase 2) é propositalmente alterada, é possível perceber a não-equivalência entre as Equações (4.1) e (4.2). Uma possível razão para o uso das transformadas integrais como alternativa aparentemente equivalente à abordagem no domínio temporal pode ser ilustrada por casos como o da Figura (4.7).

Utilizando as Figuras (4.4a), (4.5a) e (4.6a) no contexto do exemplo de referência [40], e em concordância com as Figuras (4.7) e (4.8), confirma-se que as Equações (4.1) e (4.2) são equivalentes apenas sem contribuições viscosas, restando apenas as contribuições elásticas. Com relação a predominância de uma das fases (fração volumétrica  $\phi \approx 0$  ou  $\phi \approx 1$ ), em um cenário homogêneo, é fácil verificar que existe equivalência entre as Equações (4.1) e (4.2). Também, é possível confirmar que a semelhança entre essas equações é mais evidente quando as fases possuem perfis de relaxamento próximos.

### 4.1.3 Caso 3: Núcleo de Scott Blair e Rabotnov em ambas fases

Este caso de estudo aborda um problema unidimensional bifásico, utilizando a estrutura de kernels das Equações (2.64)-(2.65), baseada no modelo da Equação (2.66) (a primeira forma, aquela que não utiliza a função Mittag-Leffler). É utilizado um único grupo de parâmetros similares para cada fase, conforme mostra a Tabela (B.5), associados a um polímero semelhante ao PMMA (polimetilmetacrilato) estudado por [140] (pp.35-36). A comparação do modelo proposto, descrito por  $R^H(t)$  na Equação (3.74), é feita com a expressão sugerida por [40] (*Modelo III*, p.36), representada aqui por  $R_C^H(t)$ :

$$R_C^H(t) = M_0 \vartheta(\alpha_0, \beta_0, t), \quad M_0 = \left[ \frac{\phi}{M^{(1)}} + \frac{1-\phi}{M^{(2)}} \right]^{-1}, \quad \alpha_0 = \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)}, \quad (4.3)$$

$$\beta_0 = \frac{(1-\phi)M^{(1)}\beta^{(2)} + \phi M^{(2)}\beta^{(1)}}{(1-\phi)M^{(1)} + \phi M^{(2)}}, \quad M^{(n)} = \kappa^{(n)}\mu^{(n)}, \quad n = 1, 2. \quad (4.4)$$

Nas Figuras (4.9a)-(4.10a)-(4.10a), a comparação entre  $R^H(t)$  e  $R_C^H(t)$  é calculada usando o Programa (B.4.1). Adicionalmente, nas Figuras (4.9b)-(4.10b)-(4.11b), é mostrado o erro relativo percentual,  $e(t)[\%]$ , que é calculado usando a seguinte expressão:

$$e(t) = 100 \left( R^H(t) - R_C^H(t) \right) \left[ R_C^H(t) \right]^{-1}. \quad (4.5)$$

A Figura (4.9) mostra resultados usando uma fração volumétrica  $\phi = 0.2$ :

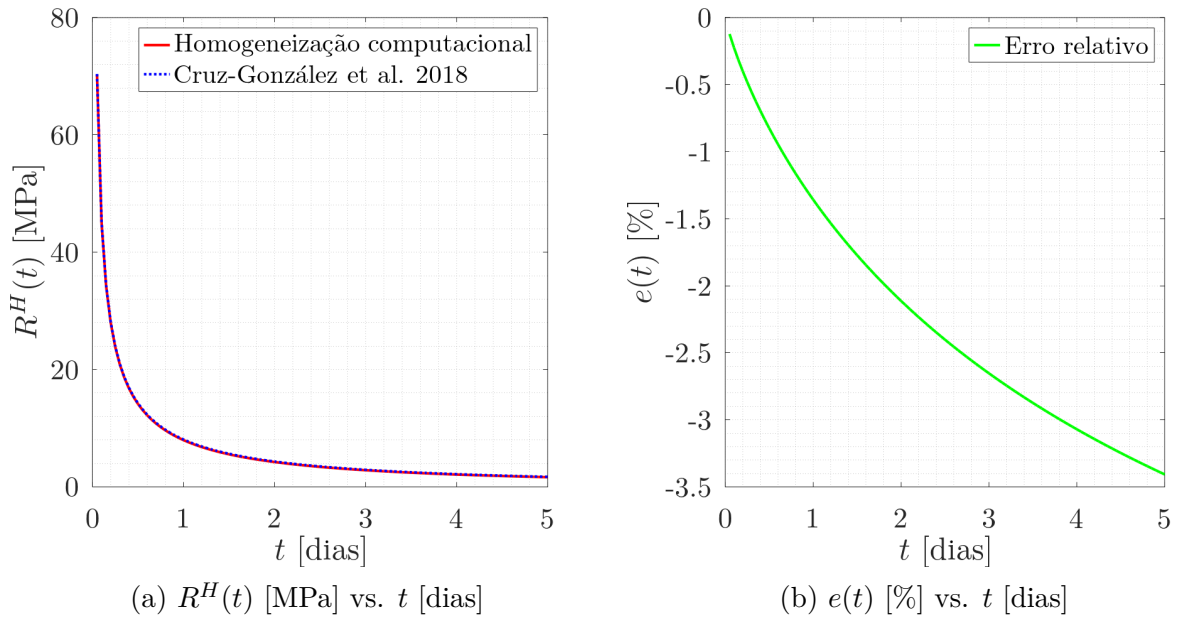


Figura 4.9: Coeficiente efetivo de um compósito bifásico unidimensional viscoelástico em função do tempo. (a) Comparação com [40], usando  $\phi = 0.2$ . (b) Erro percentual.



A Figura (4.9) mostra resultados usando uma fração volumétrica  $\phi = 0.5$ :

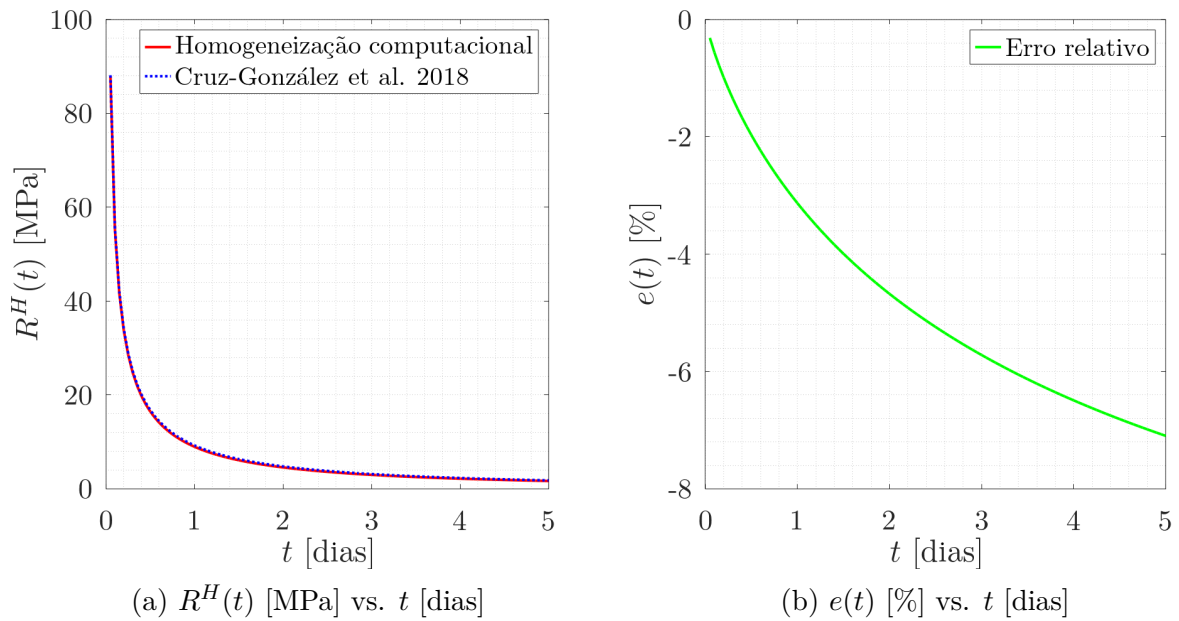


Figura 4.10: Coeficiente efetivo de um compósito bifásico unidimensional viscoelástico em função do tempo. (a) Comparação com [40], usando  $\phi = 0.5$ . (b) Erro percentual.

A Figura (4.9) mostra resultados usando uma fração volumétrica  $\phi = 0.8$ :

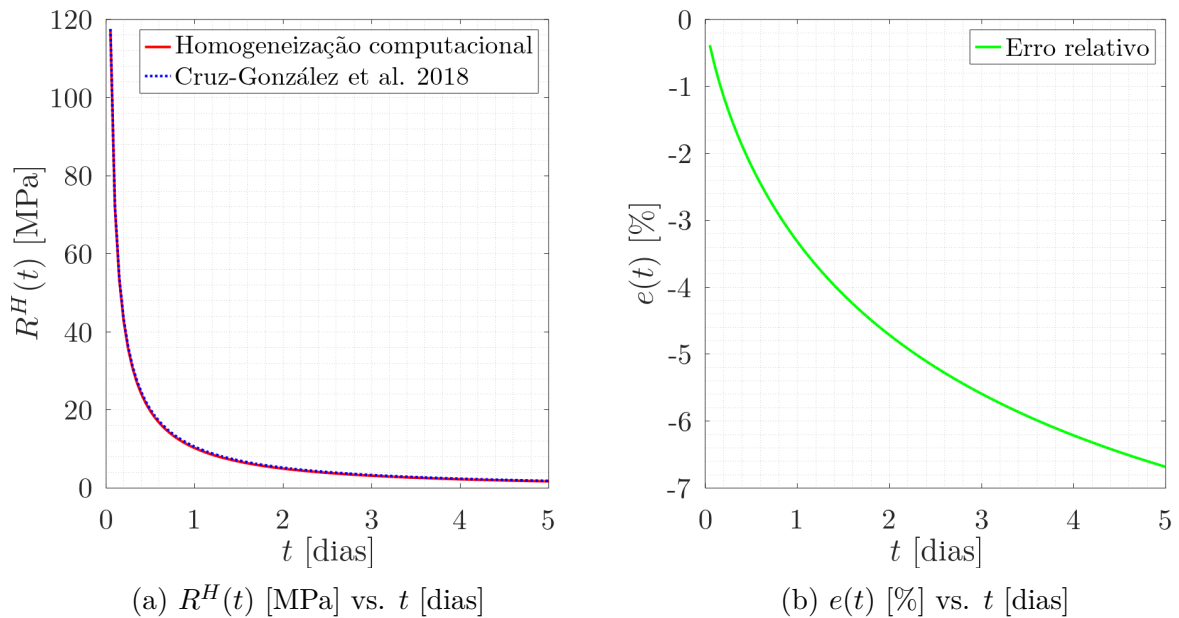


Figura 4.11: Coeficiente efetivo de um compósito bifásico unidimensional viscoelástico em função do tempo. (a) Comparação com [40], usando  $\phi = 0.8$ . (b) Erro percentual.

As Figuras (4.9a)-(4.10a)-(4.11a) seguem o formato original de [40]. No entanto, uma escala logarítmica é sugerida na Figura (4.12) como alternativa à Figura (4.10).



As Equações (4.3)-(4.4) são propostas por [40] utilizando o princípio de correspondência por meio da transformada de Laplace-Carson. Isso significa que, para todos os casos das Figuras (4.9)-(4.10)-(4.11), o termo  $R_C^H(t)$  é calculado utilizando uma versão semelhante à Equação (4.2), apenas mudando  $\mathcal{L}\{\bullet\}$  por  $\mathcal{L}_C\{\bullet\}$  (incluindo suas inversas).

Conseqüentemente, como explicado no Casos de estudo 1 e 2, é esperada uma diferença entre  $R^H(t)$  e  $R_C^H(t)$ , especialmente para uma fração volumétrica longe dos casos homogêneos (apenas fase 1,  $\phi = 1$ , ou apenas fase 2,  $\phi = 0$ ). Assim, em concordância com a não-equivalência das Equações (4.1)-(4.2), observa-se que o maior erro relativo ocorre quando a fração volumétrica é  $\phi = 0.5$ , como esperado em um compósito bifásico.

Embora as curvas das Figuras (4.9a)-(4.10a)-(4.11a) sejam semelhantes, os erros relativos nas Figuras (4.9b)-(4.10b)-(4.11b), respectivamente, indicam uma tendência crescente de discrepância. Isso pode ser visualizado, na Figura (4.12), ao aumentar o intervalo do domínio, para  $\phi = 0.5$ , e modificando a escala das ordenadas para uma escala logarítmica:

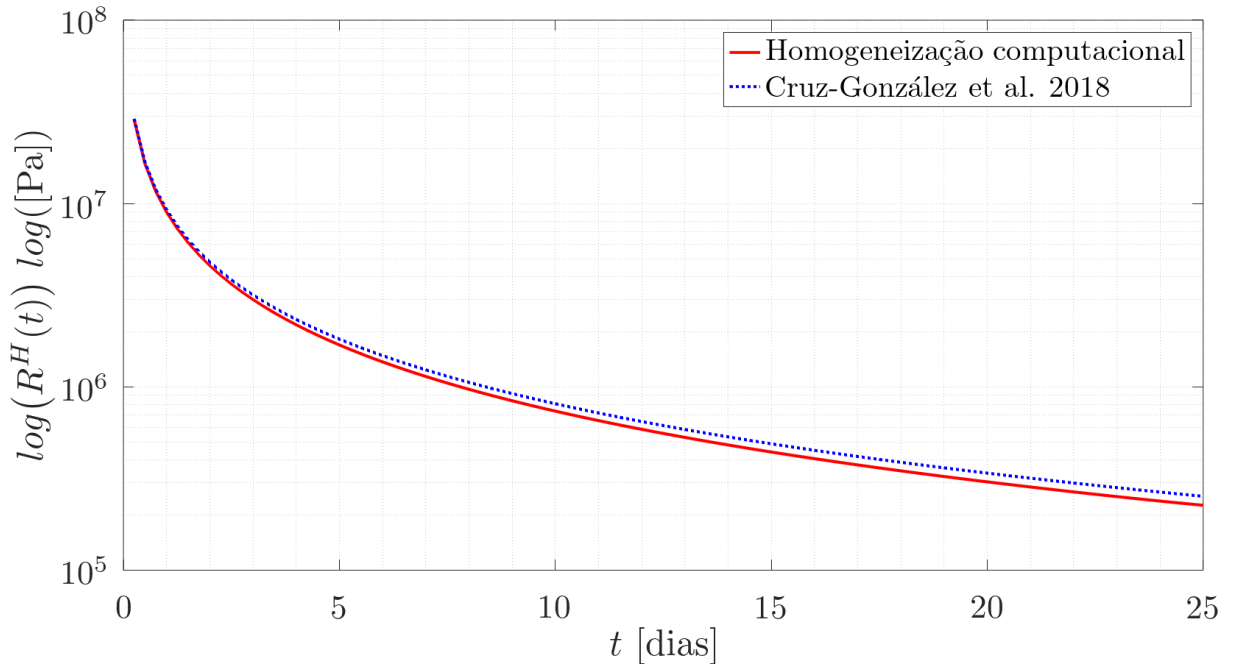


Figura 4.12:  $\log(R^H(t)) \log([\text{Pa}])$  vs.  $t$  [dias]. Coeficiente efetivo de um compósito bifásico viscoelástico unidimensional em função do tempo e da fração volumétrica  $\phi = 0.5$ .

Na Figura (4.12) é notório, melhor do que na Figura (4.10a), que as Equações (4.1)-(4.2) não fornecem os mesmos resultados, no entanto, embora considerando a situação que permite maior dessemelhança (isto é, uma fração volumétrica  $\phi = 0.5$ ), o erro relativo parece ser assintótico. Esse raciocínio pode ser confirmado analisando a Figura (4.13), até  $t \sim 24$  [dias], que apresenta o erro relativo correspondente à Figura (4.12).

A implementação de um domínio  $t > 24$  [dias], segundo a configuração particular deste caso de estudo e de acordo com os dados da Tabela (B.5), objetivando visualizar se o erro relativo é efetivamente assintótico, não pode ser realizado por causa da não-convergência da Equação (2.66), implementada com o Programa (B.1.2). Acontece que, o núcleo de Scott Blair e Rabotnov da fase 1, a função  $\varepsilon^{(1)}(\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, t)$  de acordo com a Equação (2.66), computa valores inconsistentes a partir de  $t \sim 24$  [dias], devolvendo resultados relativamente elevados ou em formato NaN (*Not a Number*, do inglês), o que significa que a função  $\text{SBR1} = \mathcal{E}(t)$  do Programa (B.1.2) não converge utilizando os dados fornecidos. Isto pode ser evidenciado na Figura (4.13). Conseqüentemente, após  $t \sim 24$  [dias], com esta configuração, não é possível comprovar se  $e(t)$  estabiliza em um valor fixo  $\sim -9\%$ .

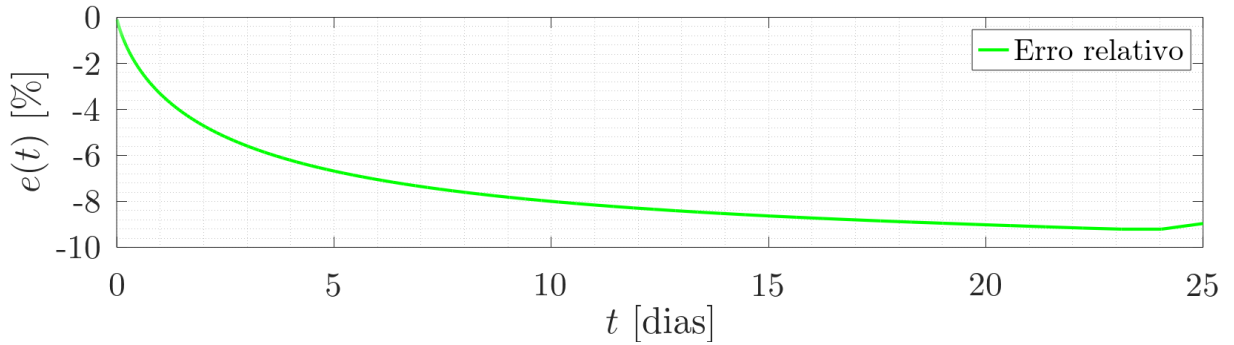


Figura 4.13:  $e(t)$  [%] vs.  $t$  [dias]. Erro relativo entre  $R^H(t)$  e  $R_C^H(t)$  com  $\phi = 0.5$ .

De acordo com a Equação (4.5), o erro relativo da Figura (4.13) usa  $R_C^H(t)$  como base. No entanto, é possível utilizar o kernel das fases como referência, semelhante à Figura (4.7). **Uma propriedade homogeneizada unidimensional deve estar situada entre as propriedades das fases;** a Figura (4.14) implementa este raciocínio.

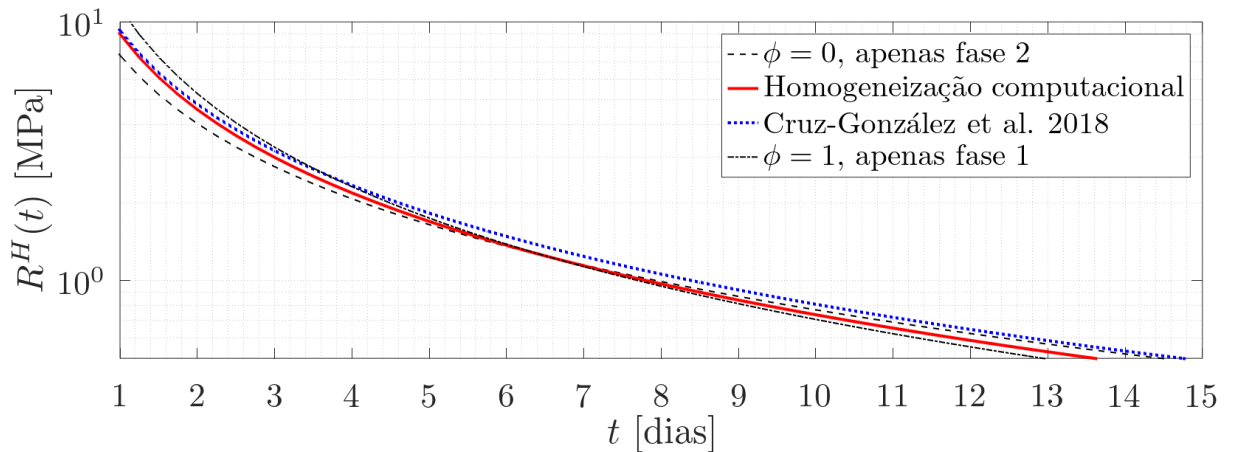


Figura 4.14:  $R^H(t)$  [MPa] vs.  $t$  [s]. Coeficientes efetivos de um compósito viscoelástico bifásico unidimensional em função do tempo e da fração volumétrica  $\phi = 0.5$ .

#### 4.1.4 Caso 4: Kernel Zener com três fases

Este caso de estudo aborda um problema unidimensional com três fases. A primeira fase é viscoelástica, e a segunda e terceira fases são puramente elásticas. De acordo com [43], a referência em questão, a primeira e segunda camadas são consideradas como uma fase composta. Utilizando uma modificação à estrutura do kernel Zener, da Equação (2.60), é possível definir a microestrutura unidimensional deste tipo de compósito:

$$R(y, t) = \begin{cases} R^{(c)}(y, t) & \text{se } y \in \Sigma^{(c)}, \phi^{(c)} = \frac{2}{3}, \\ R^{(3)} = E^{(3)} & \text{se } y \in \Sigma^{(3)}, \phi^{(3)} = \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (4.6)$$

$$R^{(c)}(y, t) = \begin{cases} R^{(1)}(t) & \text{se } y \in \Sigma^{(1)}, \phi^{(1)} = 0.8\phi^{(c)}, \\ R^{(2)} = E^{(2)} & \text{se } y \in \Sigma^{(2)}, \phi^{(2)} = 0.2\phi^{(c)}. \end{cases} \quad (4.7)$$

$$R^{(1)}(t) = E_0 \left( 1 - g \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right), \quad E_0 = E^{(1)} + M^{(1)}, \quad g = \frac{E^{(1)}}{E_0}, \quad \tau = \tau^{(1)}. \quad (4.8)$$

Note que  $R^{(c)}(y, t)$  está definido como um compósito bifásico aninhado, constituído por uma fase viscoelástica,  $R^{(1)}(t)$ , e uma outra elástica,  $R^{(2)}$ . Seguindo esse contexto, [43] respeita essa hierarquia de fases, mostrada nas Equações (4.6)-(4.7), aplicando uma primeira homogenização,  $R^{H_1}(t)$ , entre a primeira e a segunda fases, seguida de uma segunda homogenização,  $R^{H_2}(t)$ , entre a fase composta e a terceira fase. No entanto, no caso unidimensional, é possível mostrar que a ordem das fases não é relevante, apenas interessa o valor das frações volumétricas e dos kernels. Este raciocínio pode ser confirmado utilizando uma modificação das Equações (4.1)-(4.2), no caso de três fases:

$$R^H(t) = \left[ \frac{\phi^{(1)}}{R^{(1)}(t)} + \frac{\phi^{(2)}}{R^{(2)}(t)} + \frac{\phi^{(3)}}{R^{(3)}(t)} \right]^{-1}, \quad (4.9)$$

$$R^H(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[ \frac{\phi^{(1)}}{\mathcal{L}\{R^{(1)}(t)\}} + \frac{\phi^{(2)}}{\mathcal{L}\{R^{(2)}(t)\}} + \frac{\phi^{(3)}}{\mathcal{L}\{R^{(3)}(t)\}} \right]^{-1} \right\}, \quad (4.10)$$

onde, em ambos os casos,  $R^H(t)$  depende de cada  $\phi^{(n)}$  e da magnitude transitória dos kernels, sem que a ordem dos somados tenha qualquer influência. Alternativamente, a abordagem hierárquica de [43] permite resolver a Equação (4.10) por partes:

$$R^{H_1}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[ \frac{\phi^{(1)}}{\mathcal{L}\{R^{(1)}(t)\}} + \frac{\phi^{(2)}}{\mathcal{L}\{R^{(2)}(t)\}} \right]^{-1} \right\}, \quad (4.11)$$

$$R^H(t) = R^{H_2}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[ \frac{\phi^{(c)}}{\mathcal{L}\{R^{H_1}(t)\}} + \frac{\phi^{(3)}}{\mathcal{L}\{R^{(3)}(t)\}} \right]^{-1} \right\}. \quad (4.12)$$

Note que as Equações (4.11) e (4.12), quando combinadas, são equivalentes à Equação (4.10), sendo que a Equação (4.7) já inclui frações volumétricas hierarquizadas como:  $\phi^{(1)} = 0.8\phi^{(c)}$ , onde  $\phi^{(c)}$  representa a fração volumétrica da fase composta  $R^{(c)}(t)$ .

A implementação de [43] e os resultados da Equação (4.10) são comparados nas Figuras (4.15a)-(4.15b), mostrando que ambas abordagens fornecem os mesmos resultados, pois usam o princípio de correspondência por meio de uma transformada integral. Em [43], é utilizada a transformada de Laplace-Carson e sua inversa pela ferramenta computacional INVLAP [75] do MATLAB®, enquanto na Equação (4.10) é utilizada a transformada de Laplace e sua inversa no entorno computacional simbólico `laplace(●)` do GNU Octave. Adicionalmente, as figuras também comparam o resultado da Equação (4.9), baseada na Equação (3.74), confirmando que, **assim como não há equivalência entre as Equações (4.1) e (4.2), também não há entre as Equações (4.9) e (4.10)**.

A Figura (4.15a) apresenta os resultados da primeira homogeneização,  $R^{H_1}(t)$ , obtidos por meio da Equação (4.11). A Figura (4.15b) exibe os resultados da segunda homogeneização,  $R^{H_2}(t)$ , no entanto, ao invés de utilizar a Equação (4.12), emprega-se diretamente a Equação (4.9), conforme mencionado anteriormente. Ambos os procedimentos fazem uso dos parâmetros listados na Tabela (B.6), utilizando o Programa (B.5.1).

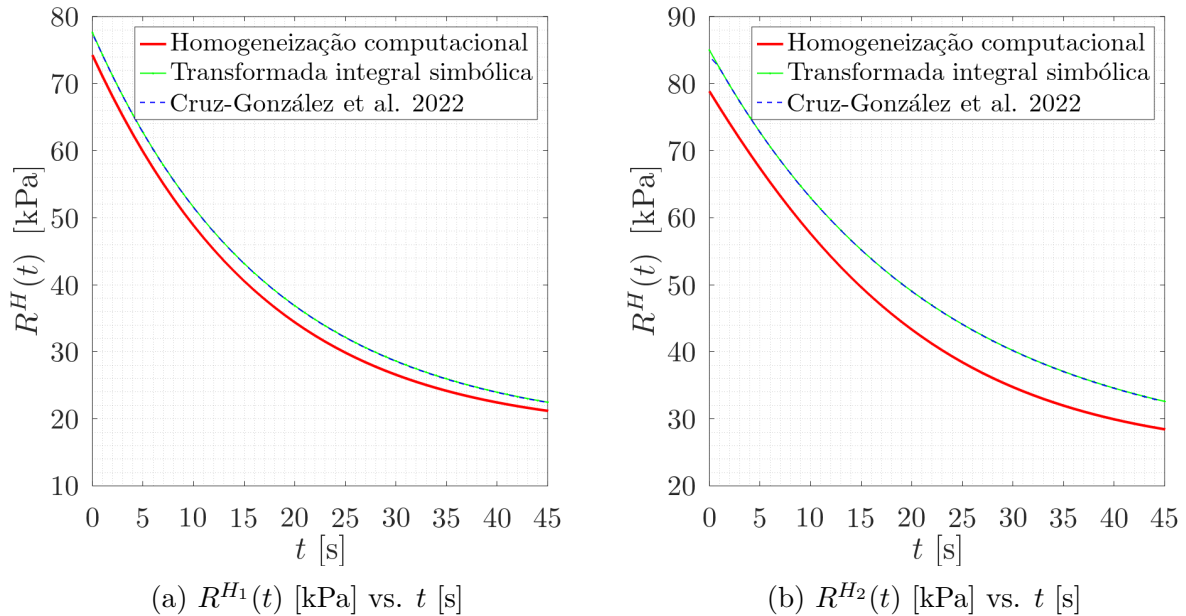


Figura 4.15: Comparação de coeficientes efetivos de um compósito unidimensional viscoelástico em função do tempo, levando em conta a homogeneização computacional proposta na Equação (3.74), a transformada integral exemplificada no Programa (B.1.4) e os resultados de [43] obtidos usando o WebPlotDigitizer [129]. (a) Primeira homogeneização,  $R^{H_1}$ , utilizando frações volumétricas  $\phi^{(1)} = 0.8$  e  $\phi^{(2)} = 0.2$ . (b) Segunda homogeneização,  $R^{H_2}$ , utilizando frações volumétricas  $\phi^{(1)} = 0.8\phi^{(c)}$ ,  $\phi^{(2)} = 0.2\phi^{(c)}$ ,  $\phi^{(c)} = 2/3$  e  $\phi^{(3)} = 1/3$ .

## 4.2 Compósitos bifásicos estratificados

Esta seção, baseada na teoria da Seção (2.5.1), trata de compósitos com microestrutura estratificada e simetria axial fixa. A Figura (2.2) idealiza a célula periódica com simetria axial em  $y_3$ , enquanto a Figura (4.16) oferece um exemplo menos abstrato:

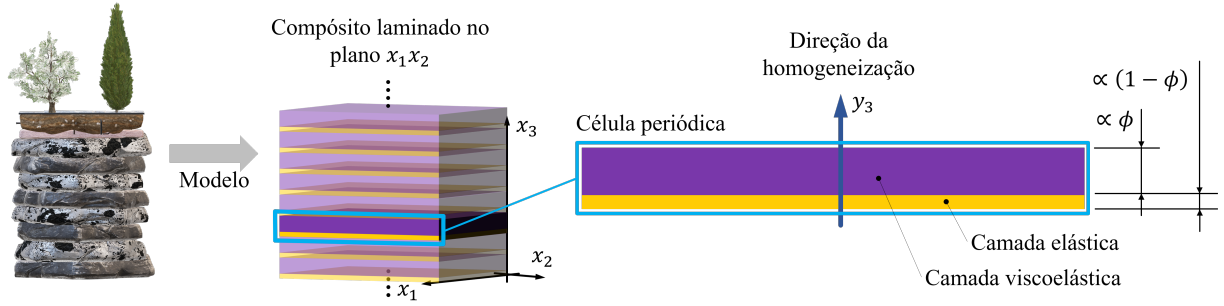


Figura 4.16: Exemplo de um meio estratificado que pode ser idealizado como um compósito representado por uma célula periódica representativa visando aplicação do MHA.

O exemplo da Figura (4.16) mostra um cenário geológico onde diferentes estratos rochosos formam um compósito laminado, com propriedades homogêneas no plano  $x_1x_2$ . O processo de homogeneização das propriedades mecânicas identifica uma microrregião representativa com as fases distintas. Embora o exemplo considere uma célula periódica com apenas duas fases, a teoria permite um número arbitrário de fases. O problema elástico, conforme as equações de governo, como a Equação (2.36), é um caso particular do problema viscoelástico. No problema elástico, as propriedades permanecem constantes ao longo do tempo, enquanto no viscoelástico, elas variam conforme as equações constitutivas dos kernels na Seção (2.6). Por isso, a figura exemplifica duas camadas, uma elástica e uma viscoelástica, cuja quantidade de substância é proporcional à fração volumétrica  $\phi$ .

O objetivo é determinar uma propriedade homogeneizada  $R_{ijkl}^H(t)$  transversalmente isotrópica a partir de fases localmente homogêneas com propriedades isotrópicas conhecidas,  $R_{ijkl}^{(n)}(t)$ , conforme o formato previsto pela teoria de homogeneização:

$$R_{ijkl}^H(t) = \begin{pmatrix} R_{1111}^H(t) & R_{1122}^H(t) & R_{1133}^H(t) & 0 & 0 & 0 \\ \text{—} & R_{1111}^H(t) & R_{1133}^H(t) & 0 & 0 & 0 \\ \text{—} & \text{—} & R_{3333}^H(t) & 0 & 0 & 0 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & R_{2323}^H(t) & 0 & 0 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & R_{2323}^H(t) & 0 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & R_{1212}^H(t) \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

onde o símbolo “—” é utilizado para indicar a simetria da matriz de coeficientes efetivos.

### 4.2.1 Caso 1: Fase elástica e fase com kernel de Dischinger

Este estudo aborda um compósito bifásico estratificado. A primeira fase é elástica, com um kernel  $R_{ijkl}^{(1)}$  estruturado conforme a Equação (2.52). A segunda fase é viscoelástica, modelada por um módulo de cisalhamento,  $\mu^{(1)}(t)$ , de acordo com a Equação (2.62), que expressa o relaxamento exponencial de Dischinger, em conjunto com um módulo de compressibilidade volumétrica constante,  $K^{(2)}$ , que alimenta a Equação (2.63).

A propriedade homogeneizada é calculada com os dados da Tabela (B.6) e o Programa (B.5.1), que implementa a Equação (3.83), equivalente às Equações (2.53)-(2.59) do MHA padrão, como mostrado em todas as figuras. Os resultados são comparados com: [93] (*Propriedade média*, p.886) usando dados da Tabela (B.1), e [44] (*Modelo I*, p.214, Figura 10.7) usando dados da Tabela (B.6). É importante mencionar que existe uma diferença de ordem de magnitude entre essas tabelas; contudo, os dados são comparáveis, pois, em ambas as referências, as curvas estão normalizadas: segundo [93], em relação ao módulo oedométrico  $E_{oed}^{(n)} = \lambda^{(n)}(0) + 2\mu^{(n)}(0)$ , e segundo [44], em relação à fase elástica  $R_{ijkl}^{(1)}$ . Os resultados desses autores não estão disponíveis para todos os coeficientes.

A normalização dos resultados calculados com a implementação da Equação (3.83), neste trabalho, está relacionada ao módulo de relaxamento inicial, ou seja,  $R_{ijkl}^H(t=0)$ .

A Figura (4.17) mostra  $R_{1111}^H(t)$  com  $\phi = 0.5$ , comparando curvas com [44] e [93]:

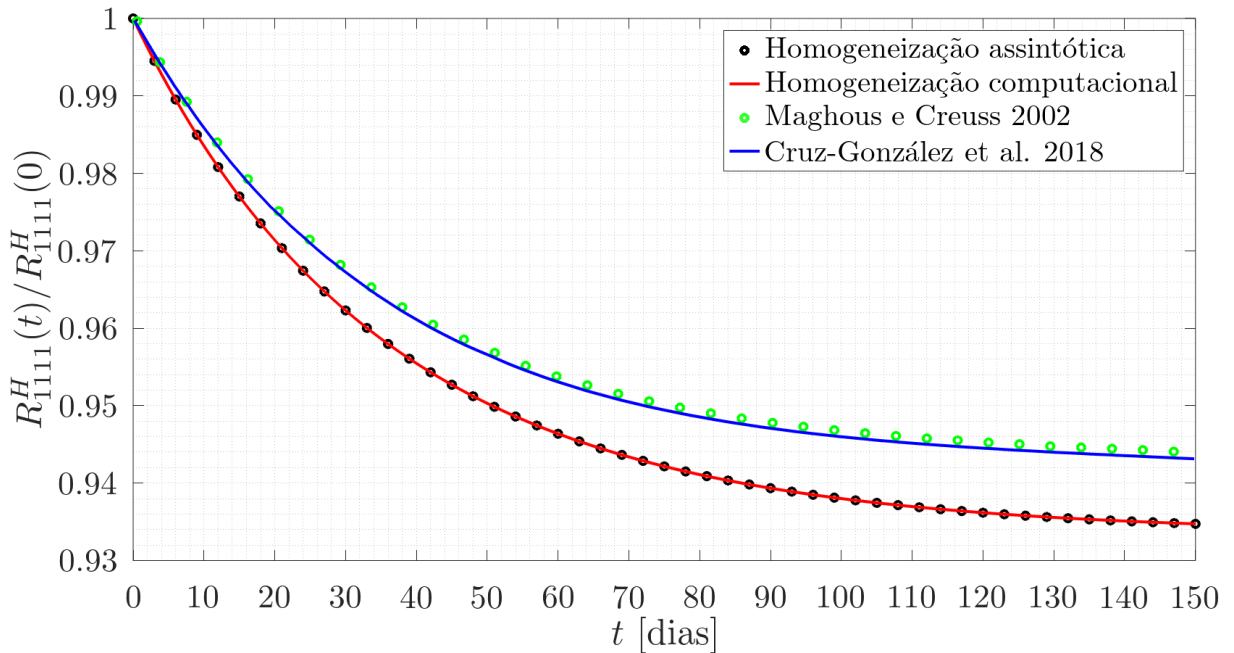


Figura 4.17:  $R_{1111}^H(t)/R_{1111}^H(0)$  vs.  $t$  [dias]. Coeficiente efetivo  $R_{1111}^H(t)$ , normalizado, de um compósito bifásico estratificado em função do tempo e da fração volumétrica  $\phi = 0.5$ .

A Figura (4.18) mostra  $R_{3333}^H(t)$  com  $\phi = 0.5$ , comparando curvas com [44] e [93]:

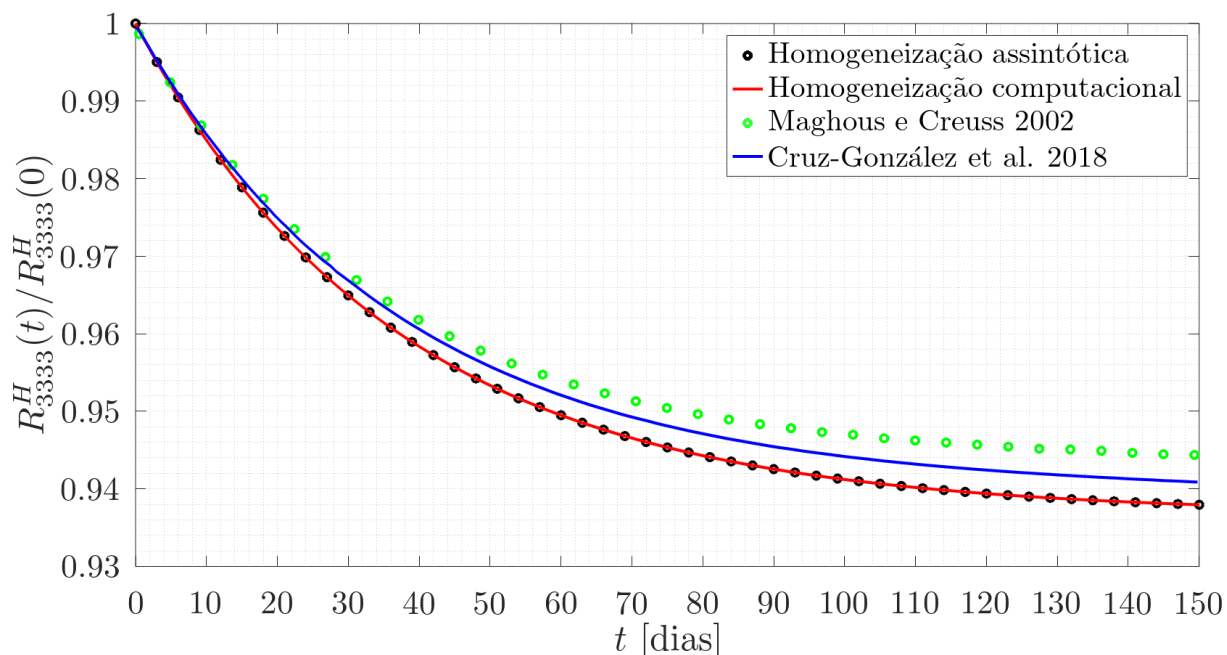


Figura 4.18:  $R_{3333}^H(t)/R_{3333}^H(0)$  vs.  $t$  [dias]. Coeficiente efetivo  $R_{3333}^H(t)$ , normalizado, de um compósito bifásico estratificado em função do tempo e da fração volumétrica  $\phi = 0.5$ .

Devido à limitação de dados disponíveis, os resultados de [93] (curvas marcadas com círculos verdes) estão incluídos apenas nas Figuras (4.17) e (4.18). Estas curvas correspondem ao que esse autor denomina como propriedade média (*Averaged value*, em inglês), seguindo uma abordagem semelhante à cota de Voigt, conforme descrito em [93] (p.867), sem a aplicação do princípio de correspondência. Por outro lado, ao aplicar o princípio de correspondência por meio da transformada de Laplace e sua inversa, as propriedades homogeneizadas calculadas por esse método apresentam, de acordo com esse autor, um efeito de memória que as distingue das propriedades obtidas diretamente no domínio temporal, conforme relatado em [93] (p.866). Essas curvas não estão incluídas nas Figuras (4.17) e (4.18), pois exibem uma discrepância significativa em relação às curvas apresentadas.

Entretanto, como discutido nos casos de estudo da Seção (4.1), **o efeito de memória surge exclusivamente da interação entre as propriedades materiais e as deformações**, como representado pela convolução descrita na Equação (2.6), e **não em propriedades isoladas, desvinculadas de qualquer processo de deformação**.

As curvas de [93], mostradas nas Figuras (4.17) e (4.18), estão na mesma ordem das obtidas com o modelo proposto na Equação (3.83), já que, em ambos os casos, não foram utilizadas transformadas integrais; curiosamente, existe semelhança entre [93] e [44].



De acordo com a não-equivalência prevista na Seção (4.1.1) entre a abordagem que utiliza transformadas integrais e aquela realizada diretamente no domínio do tempo, é esperado que as curvas comparadas nas Figuras (4.17) e (4.18) apresentem diferenças entre [44] e o modelo proposto. Isso pode ser justificado pelo fato de [44] empregar a Equação (2.51) no domínio transformado, conforme o raciocínio seguido nas Equações (4.2) e (4.10), enquanto o modelo proposto pela Equação (3.83) segue a lógica das Equações (4.1) e (4.9).

A Figura (4.19) mostra a comparação entre os resultados do modelo proposto na Equação (3.83), de [44] (princípio de correspondência) e a implementação da Equação (2.58) do Capítulo (2), para  $R_{1313}^H(t)$  normalizado e usando a fração volumétrica  $\phi = 0.5$ :

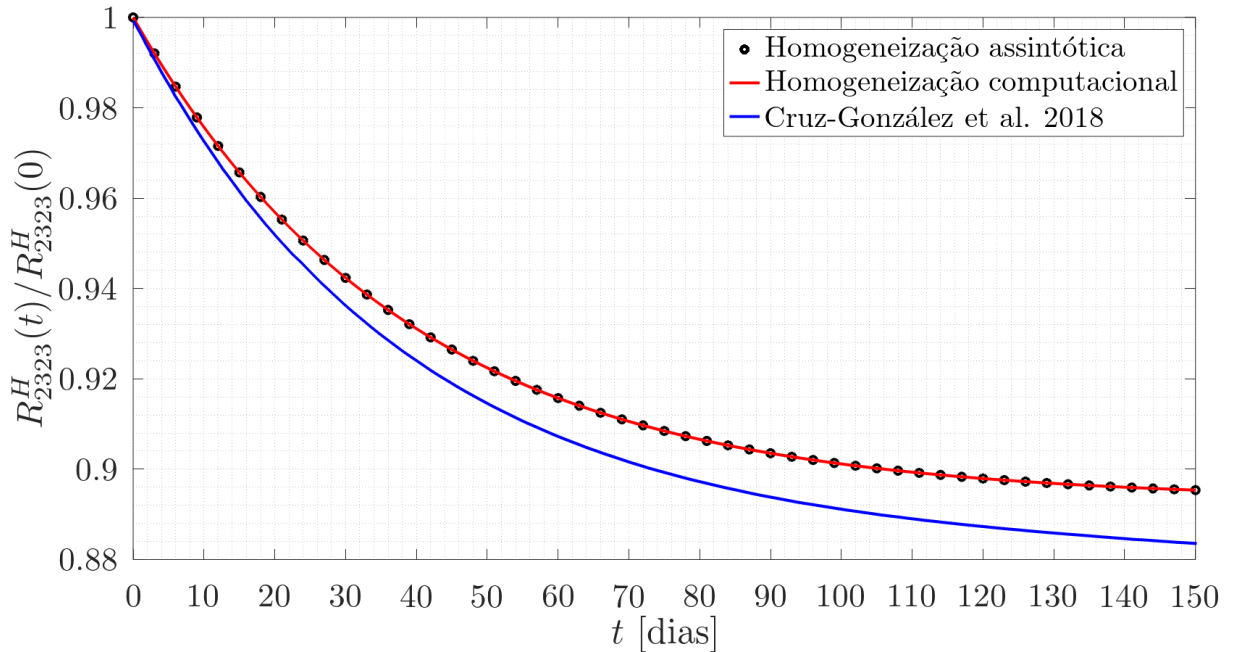


Figura 4.19:  $R_{2323}^H(t)/R_{2323}^H(0)$  vs.  $t$  [dias]. Coeficiente efetivo  $R_{2323}^H(t)$ , normalizado, de um compósito bifásico estratificado em função do tempo e da fração volumétrica  $\phi = 0.5$ .

A implementação da Equação (2.58), com relação à  $R_{2323}^H(t)$  da Figura (4.19), está incluída no Programa (B.5.1); isto também é válido para os outros coeficientes. Assim, todas as Equações (2.53)-(2.59), representadas pelas curvas de “Homogeneização assintótica” (curvas com marcadores pretos), são calculadas utilizando  $\lambda^{(n)}(t)$  e  $\mu^{(n)}(t)$  como argumentos de entrada, fornecendo resultados para cada coeficiente individualmente. Já a Equação (3.83), associada às curvas de “Homogeneização computacional” (curvas vermelhas), utiliza os kernels das fases estruturados em matrizes isotrópicas como mostrado no exemplo da Equação (3.75) (embora a implementação suporta matrizes anisotrópicas), para gerar uma matriz transversalmente isotrópica com o formato da Equação (4.13).



Note que para todos os coeficientes e em todas as figuras deste caso de estudo, as Equações (2.53)-(2.59) e o modelo proposto na Equação (3.83) produzem resultados idênticos porque embora são formulações diferentes, ambas partem da lógica da Equação (2.51) implementada diretamente no domínio temporal. Neste contexto, na Figura (4.19), [44] implementa o cálculo de  $R_{2323}^H(t)$  utilizando a Equação (2.51) no domínio de Laplace-Carson, conseqüentemente é esperada uma dessemelhança entre ambas as abordagens.

A Figura (4.20) mostra a comparação entre os resultados do modelo proposto na Equação (3.83), de [44] (princípio de correspondência) e a implementação da Equação (2.55) do Capítulo (2), para  $R_{1122}^H(t)$  normalizado e usando a fração volumétrica  $\phi = 0.5$ :

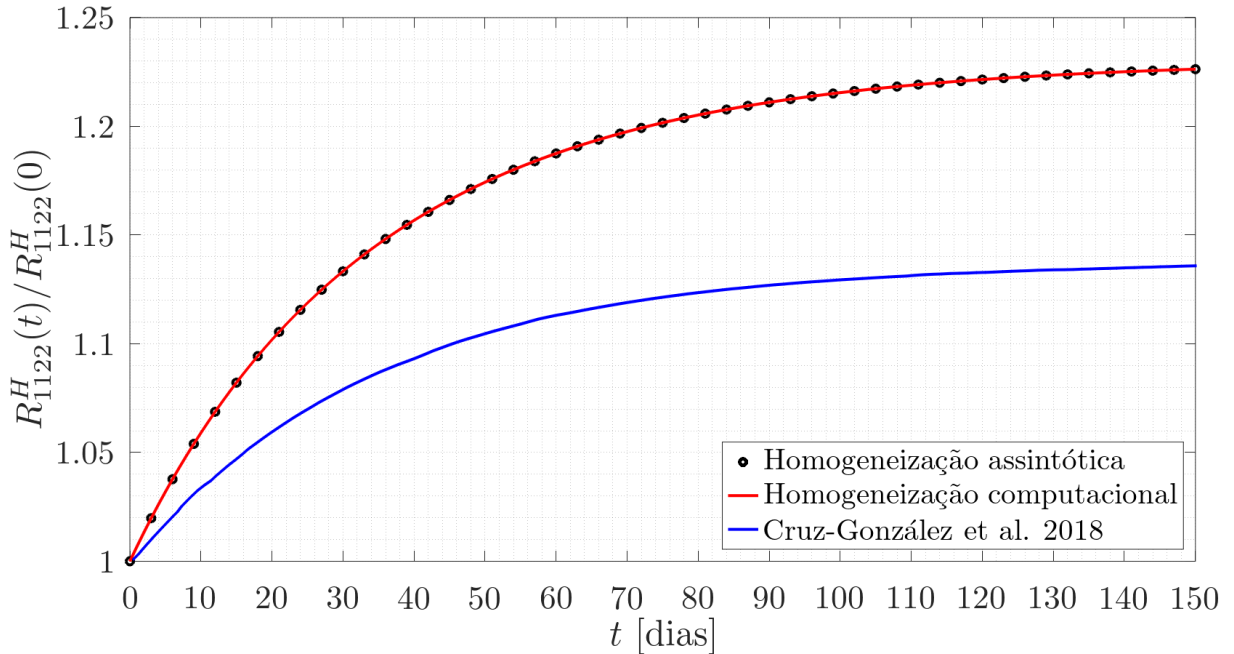


Figura 4.20:  $R_{1122}^H(t)/R_{1122}^H(0)$  vs.  $t$  [dias]. Coeficiente efetivo  $R_{1122}^H(t)$ , normalizado, de um compósito bifásico estratificado em função do tempo e da fração volumétrica  $\phi = 0.5$ .

Todas as curvas de [44] foram importadas utilizando a ferramenta WebPlotDigitizer [129], que oferece precisão suficiente para minimizar erros na importação dos dados.

Por tanto, na Figura (4.20), a diferença entre as curvas refere-se à não-equivalência entre o cálculo do coeficiente homogeneizado  $R_{1122}^H(t)$  utilizando a Equação (2.51) em um domínio transformado frente o seu cálculo diretamente no domínio do tempo. Para mostrar isto, a Equação (2.55) é formulada de acordo com o princípio de correspondência:

$$R_{1122}^H(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left\langle \mathcal{L} \left\{ \lambda(t) \right\} \right\rangle + \left\langle \mathcal{L} \left\{ \frac{\lambda(t)}{c(t)} \right\} \right\rangle^2 \left\langle \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{c(t)} \right\} \right\rangle^{-1} - \left\langle \mathcal{L} \left\{ \frac{\lambda^2(t)}{c(t)} \right\} \right\rangle \right\}, \quad (4.14)$$

onde  $c(t) = \lambda(t) + 2\mu(t)$ , conforme definido na Equação (2.53), e **claramente não existe possibilidade de troca de precedência** entre os operadores da transformada de Laplace  $\mathcal{L}\{\bullet\}$ , ou Laplace-Carson  $\mathcal{L}_C\{\bullet\}$  como no caso de [44], com os outros operadores.

Por tanto, a questão que surge está associada em identificar em quais situações a Equação (2.55) pode ser equivalente à Equação (4.14); claramente, a Figura (4.20) não é um desses casos. Este raciocínio leva novamente à não-equivalência prevista na Seção (4.1) em casos mais simples, como exemplificado nas Equações (4.1)-(4.2) e (4.9)-(4.10).

Prosseguindo, devido à limitação de dados disponíveis, os resultados de [44] (curvas azuis) estão incluídos apenas nas Figuras (4.17), (4.18), (4.19) e (4.20).

A Figura (4.21) mostra o modelo proposto e a implementação da Equação (2.57) do Capítulo (2), para  $R_{1133}^H(t)$  normalizado e usando a fração volumétrica  $\phi = 0.5$ :

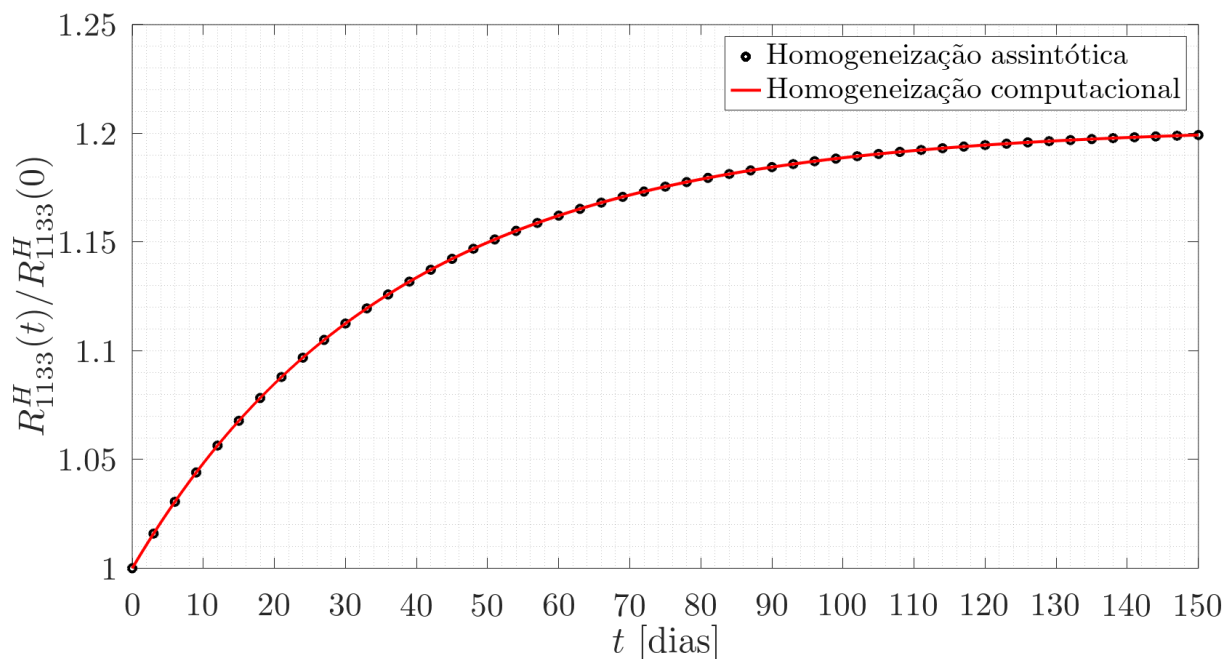


Figura 4.21:  $R_{1133}^H(t)/R_{1133}^H(0)$  vs.  $t$  [dias]. Coeficiente efetivo  $R_{1133}^H(t)$ , normalizado, de um compósito bifásico estratificado em função do tempo e da fração volumétrica  $\phi = 0.5$ .

Ao comparar as Figuras (4.20) e (4.21), observa-se uma semelhança na magnitude normalizada dos coeficientes. No entanto, essa comparação é válida apenas para avaliar a razão de relaxamento em relação ao valor inicial, uma vez que os módulos não normalizados podem apresentar diferenças significativas em termos de ordem de magnitude. Assim, a normalização de magnitudes, proposta por [93], adotada por [44] e implementada nas figuras deste estudo visando comparação, embora útil para fins de representação visual, pode ocultar diferenças substanciais nos valores em termos de ordem de magnitude.

Por último, a Figura (4.22) mostra o modelo proposto e a implementação da Equação (2.56) do Capítulo (2), para  $R_{1212}^H(t)$  normalizado e usando a fração volumétrica  $\phi = 0.5$ :

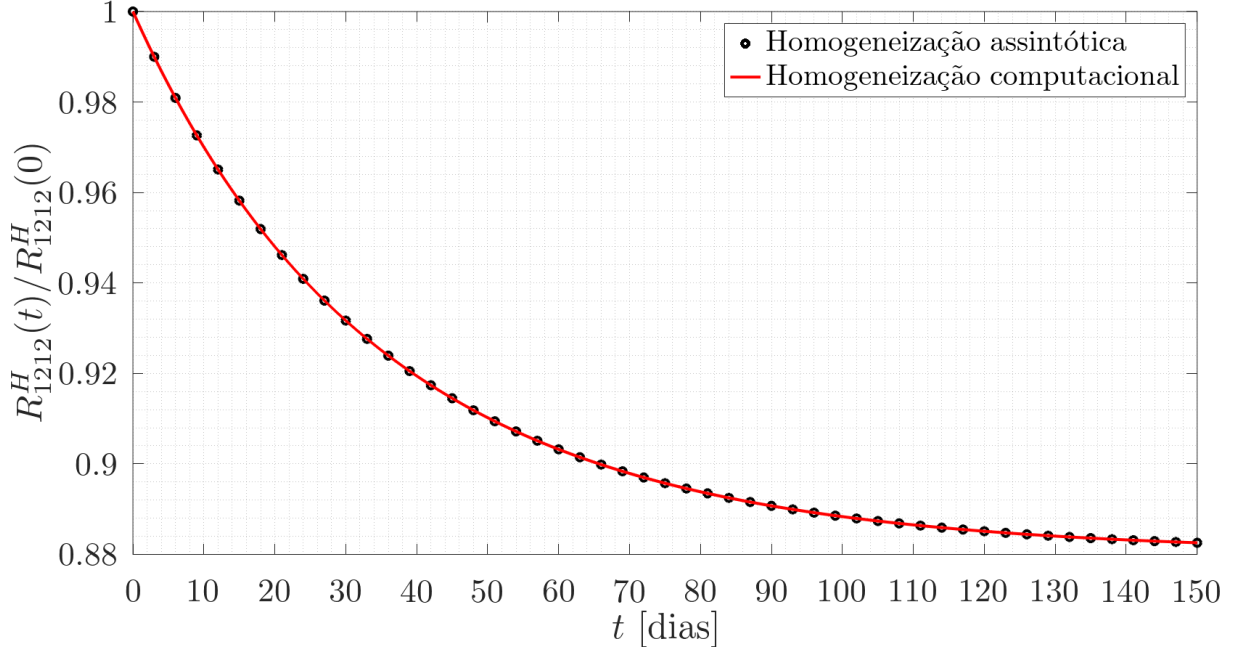


Figura 4.22:  $R_{1212}^H(t)/R_{1212}^H(0)$  vs.  $t$  [dias]. Coeficiente efetivo  $R_{1212}^H(t)$ , normalizado, de um compósito bifásico estratificado em função do tempo e da fração volumétrica  $\phi = 0.5$ .

Como definido nas Equações (2.53)-(2.59), o coeficiente  $R_{1212}^H(t)$  não é independente, pois, em uma matriz transversalmente isotrópica de acordo com a Equação (4.13), ele pode ser calculado a partir de  $R_{1111}^H(t)$  e  $R_{1122}^H(t)$  conforme a Equação (2.56).

Dentre as Equações (2.53)-(2.59), o cálculo de  $R_{1212}^H(t)$  demanda a menor complexidade algorítmica (a equação é mais simples), assumindo a forma da cota de Voigt (média aritmética), que no caso bifásico, no domínio do tempo, se expressa da seguinte maneira:

$$R_{1122}^H(t) = \langle \mu(t) \rangle = \phi \mu^{(1)}(t) + (1 - \phi) \mu^{(2)}(t), \quad (4.15)$$

representada pelo princípio de correspondência, usando a transformada de Laplace, por:

$$R_{1122}^H(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \langle \mathcal{L}\{\mu\} \rangle \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \phi \mathcal{L}\{\mu^{(1)}(t)\} + (1 - \phi) \mathcal{L}\{\mu^{(2)}(t)\} \right\}, \quad (4.16)$$

onde verifica-se que para uma fração volumétrica constante, é possível trocar a ordem de precedência entre os operadores  $\langle \bullet \rangle$  e  $\mathcal{L}\{\bullet\}$ . Assim, existe equivalência entre a Equação (4.15) e a Equação (4.16). No entanto, ao inspecionar as Equações (2.53)-(2.59), a equivalência entre uma abordagem que utiliza o princípio de correspondência e outra diretamente no domínio temporal **se verifica apenas nesse caso particular**.

# Capítulo 5

## Conclusões e trabalhos futuros

### 5.1 Conclusões gerais

A **ferramenta computacional para o cálculo de propriedades** homogeneizadas foi desenvolvida **com base na teoria do MHA em duas escalas**, uma local e outra global, **contornando a solução explícita do problema local** da Equação (2.17).

A implementação computacional da Equação (3.83) **calcula as propriedades homogeneizadas de um meio heterogêneo transversalmente isotrópico a partir das propriedades isotrópicas das fases**, que são consideradas localmente uniformes. A abordagem é equivalente às Equações (2.53)-(2.59) da literatura para um meio visco-elástico; no entanto, o algoritmo proposto apresenta modificações importantes: permite a **escolha da direção de simetria axial, suporta fases anisotrópicas como argumento de entrada e calcula a matriz de coeficientes efetivos** em vez de fazer isso um por um. A otimização do modelo baseia-se na redução da complexidade algorítmica, associada ao uso de fases com kernels localmente uniformes, e na manipulação vetorizada de dados, embora esta última não seja aplicada à discretização temporal.

A originalidade deste estudo reside em deduzir a Equação (3.75) com base no MHA diretamente no domínio temporal **sem resolver o problema local**. Ao invés disto, são aplicadas **transformações matriciais**, que **aproveitam a simetria dos tensores** envolvidos, permitindo projetar a versão computacional da Equação (3.83), específica para **compósitos estratificados**. A Equação (3.75) possibilita o cálculo das propriedades homogeneizadas de um compósito macroscopicamente isotrópico, incluindo casos unidimensionais. Isto é diferente do MHA padrão, que requer a solução do problema local.

## 5.2 Conclusões específicas

De acordo com os **objetivos específicos** da Seção (1.3), é possível detalhar conclusões por temáticas individuais, acompanhando a estrutura organizacional do documento:

1. Para facilitar a troca de informações com um público interdisciplinar, na Seção (2.1) é fornecida uma brevíssima definição contextual de três conceitos chave.
2. A Seção (2.2) fornece a fundamentação teórica do problema viscoelástico, descrevendo as equações de governo e constitutivas. Como o escopo é delimitado ao **cálculo de propriedades homogeneizadas sem incluir a dinâmica do processo de deformação**, as **condições iniciais e de contorno** são definidas apenas por formalidade, **não sendo necessárias para dito cálculo**. Adicionalmente, em todo o Capítulo (2), apresenta-se as equações elásticas em paralelo com as viscoelásticas para **ênfatar que o caso elástico é um caso especial do viscoelástico**.
3. A Seção (2.3) apresenta de forma sucinta as etapas para a aplicação do MHA, disponíveis no início do Capítulo (3) e aplicadas passo a passo na Seção (3.3). A Seção (2.4) apresenta cinco vantagens importantes do MHA no contexto da micromecânica dos materiais, bem como três desvantagens vinculadas ao escopo deste estudo, que fundamentam a maioria dos futuros empreendimentos listados na Seção (5.3).

Na Seção (2.5), são apresentadas as equações para modelar compósitos estratificados, com fases isotrópicas, desde o problema local até a equação homogeneizada.

**Kernels independentes da coordenada local permitem evitar o uso de ferramentas de quadratura** (média sobre o período) no processo de homogeneização.

As Equações (2.53)-(2.59) servem para calcular propriedades homogeneizadas de um meio transversalmente isotrópico, sem necessidade de transformadas integrais.

4. A teoria fundamental e as equações necessárias para a implementação de três tipos de kernel viscoelásticos são apresentadas na Seção (2.6) e Subseção (3.4.3.2).
5. A Seção (3.1) aborda as considerações preliminares para a formulação do algoritmo, com justificativa de computabilidade baseada na definição de operadores como funções computáveis, como mostra a Seção (3.2). O corretor de primeira ordem (função local) é formulado na Subseção (3.3.2.2) utilizando o formato dos operadores, no entanto, na Subseção (3.3.2.3) é mostrado como evitar a solução do problema local para deduzir uma expressão que calcula as propriedades homogeneizadas.

O fato de não resolver o problema local resulta em uma expressão generalista, inadequada para meios que não sejam globalmente isotrópicos.

6. Mesmo utilizando a versão generalista da expressão que calcula propriedades homogeneizadas deduzida na Seção (3.3), que é a Equação (3.68), a Seção (3.4) descreve as simplificações adicionais adotadas para reduzir a complexidade algorítmica do problema, gerando a Equação (3.75). Na Seção (3.4.2), apresenta-se um procedimento heurístico para adaptar a Equação (3.75), possibilitando uma **versão computacional que calcula propriedades homogeneizadas em meios transversalmente isotrópicos** de forma equivalente às Equações (2.53)-(2.59), mas **de maneira automática, eficiente e generalista**, culminando na Equação (3.83).

Portanto, é possível confirmar que a **resolução do problema local no MHA padrão está associada a transformações matriciais** (independentes da formulação do MHA) aplicadas à Equação (3.68).

Isso levanta a questão de *se o mesmo procedimento pode ser adaptado para outras microestruturas*, além do caso estratificado.

Por outro lado, as funções computáveis necessárias para a implementação das Equações (3.75) e (3.83) estão resumidas na Seção (3.4.3), com um exemplo prático, utilizando um fluxograma e também a sintaxe do código final. Além disso, os algoritmos auxiliares, como para montagem de kernels, são apresentados na Seção (3.4.3.2).

7. A Seção (4.1) apresenta os resultados da implementação unidimensional da Equação (3.75) para compósitos bifásicos. Desde o primeiro caso, surge uma **suspeita de não-equivalência entre implementações via transformadas integrais e no domínio temporal**. O objetivo, porém, não é questionar o princípio de equivalência, mas sim **ressaltar as restrições quanto à precedência dos operadores de homogeneização e transformadas integrais**.

Na Seção (4.2), implementa-se a Equação (3.83) para compósitos estratificados. Destaca-se a **diferença entre métodos que aplicam transformadas integrais e aqueles no domínio temporal**. O desafio não está no princípio de correspondência ou na homogeneização, mas na **ordem de aplicação**, pois **em quase todos os casos**, exceto na Equação (4.16) (que não possui operadores de inversão ou produtos aninhados), **os operadores de homogeneização são não-lineares**.

Termina-se aqui o resumo das conclusões gerais e específicas alinhadas aos objetivos. A formulação dos trabalhos futuros é apresentada na Seção (5.3).

## 5.3 Trabalhos futuros

Os temas para trabalhos futuros estão organizados por tópicos:

### Viscoelasticidade

- Explorar casos de viscoelasticidade não-linear (ou outras relações constitutivas):
  - Envelhecimento.
  - Dependência da temperatura.
- Explorar casos em domínios transformados.

### Método de homogeneização assintótica

- Resolução computacional do problema local conforme a microestrutura:
  - Meios estratificados.
  - Fibras prismáticas ou cilíndricas.
  - Inclusões esféricas.
  - Distribuição aleatória e meios porosos.
- Aproximação assintótica de ordem  $M > 1$ , realizando comparações de complexidade computacional.
- Testar diferentes condições de simulação:
  - Fases com kernels com gradiente funcional, ou seja, localmente não-uniformes. Isto requer rotinas associadas com quadratura.
  - Fases não necessariamente isotrópicas, e.g. anisotrópicas.
  - Contato imperfeito e fases de interface.
  - Quantidade de substância variável, fração volumétrica transitória.
- Microestrutura:
  - Diferentes formatos de célula.
  - Parâmetro geométrico ( $\epsilon$ ) não-uniforme, transitório ou não-isotrópico.
- Escalas aninhadas ou múltiplas escalas.

### Equação de governo e dinâmica do problema

- Cálculo de tensões e deformações.
- Condições de contorno variáveis.

### Temas relacionados

- Comparação de resultados utilizando análise baseada em cotas teóricas.
- Comparação com métodos de energia, incluindo custo computacional.

# Referências

- [1] ABADI, M. T. Micromechanical analysis of stress relaxation response of fiber-reinforced polymers. *Composites Science and Technology* 69, 7–8 (2009), 1286–1292.
- [2] ABOUDI, J. Micromechanical analysis of composites by the method of cells - update. *Applied Mechanics Reviews* 49, 10S (1996), S83.
- [3] ABOUDI, J., PINDERA, M.-J., ARNOLD, S. M. Linear thermoelastic higher-order theory for periodic multiphase materials. *Journal of Applied Mechanics* 68, 5 (2001), 697.
- [4] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th revised ed. ed. Dover Publications, 1965.
- [5] ACCORSI, M., NEMAT-NASSER, S. Bounds on the overall elastic and instantaneous elastoplastic moduli of periodic composites. *Mechanics of Materials* 5, 3 (1986), 209–220.
- [6] ANDRIANOV, I., DANISHEVS'KYY, V., WEICHERT, D. Homogenization of viscoelastic-matrix fibrous composites with square-lattice reinforcement. *Archive of Applied Mechanics* 81 (2011), 1903–1913.
- [7] ANNIN, B. D. On a class of defining relations in linear anisotropic inherited theory of elasticity. In *Inherited Mechanics of Deformation and Destruction of Solids - Scientific Heritage of Yu. N. Rabotnov*, N. A. Tatus, Ed. IMASH RAN, Moscow, 2014, p. 18–22. Published at the conference held from February 24-26, 2014, at IMASH RAN.
- [8] ANSYS, INC. *ANSYS Workbench v. 2023 R2*. Canonsburg, PA, EUA, 2023.
- [9] BAKHVALOV, N., PANASENKO, G. *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media - Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials*, vol. 36. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.
- [10] BANERJEE, B., ADAMS, D. O. On predicting the effective elastic properties of polymer bonded explosives using the recursive cell method. *International Journal of Solids and Structures* 41, 2 (2004), 481–509.
- [11] BARBERO, E. J., LUCIANO, R. Micromechanical formulas for the relaxation tensor of linear viscoelastic composites with transverse isotropic fibers. *International Journal of Solids and Structures* 32, 13 (1995), 1859–1872. Received: 18 March 1994; Revised: 15 September 1994.



- [12] BARENDREGT, H. P. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*, revised edition ed. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, 1985.
- [13] BAZANT, Z. P., Ed. *Mathematical Modeling of Creep and Shrinkage of Concrete*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. John Wiley & Sons, 1988.
- [14] BENSOUSSAN, A., LIONS, J.-L., PAPANICOLAOU, G., Eds. *Studies in Mathematics and Its Applications*, vol. 5 em *Studies in Mathematics and Its Applications*. North-Holland, 1978.
- [15] BENVENISTE, Y. A new approach to the application of mori-tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials* 6, 2 (1987), 147–157.
- [16] BERDICHEVSKII, V. L. Variational-asymptotic method of constructing a theory of shells. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 43, 4 (1979), 711–736.
- [17] BERGEN, J. T., Ed. *Viscoelasticity: Phenomenological Aspects*. Academic Press Inc., London, 1960.
- [18] BERGER, H., WÜRKNER, M., OTERO, J., GUINOVART-DÍAZ, R., BRAVO-CASTILLERO, J., RODRÍGUEZ-RAMOS, R. Unit cell models of viscoelastic fibrous composites for numerical computation of effective properties. In *Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials 1*, H. Altenbach, J. Pouget, M. Rousseau, B. Collet, and T. Michelitsch, Eds., vol. 89 em *Advanced Structured Materials*. Springer, Cham, 2018, p. 69–82.
- [19] BIOT, A. M. *Mechanics of Incremental Deformations - Theory of Elasticity and Viscoelasticity of Initially Stressed Solids and Fluids Including Thermodynamic Foundations and Applications to Finite Strain*. John Wiley & Sons, Inc., London, 1965.
- [20] BLAIR, G. W. S., COPPEN, F. M. V. The subjective judgment of the elastic and plastic properties of soft bodies; the “differential thresholds” for viscosities and compression moduli. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* 128, 850 (1939), 109–125.
- [21] BOLTZMANN, L. Wissenschaftliche abhandlungen - zur theorie der elastischen nachwirkung. *Annalen der Physik* 46 (1876), 318–320.
- [22] BOLTZMANN, L. Wissenschaftliche abhandlungen - zur theorie der elastischen nachwirkung. *Annalen der Physik* 30 (1876), 616–640.
- [23] BOLTZMANN, L. Zur theorie der elastischen nachwirkung. *Annalen der Physik* 241, 11 (1878), 430–432.
- [24] BRINSON, H. F., BRINSON, L. C. *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity: An Introduction*, 2 ed. Springer New York, NY, 2015.
- [25] BRINSON, L. C., LIN, W. S. Comparison of micromechanics methods for effective properties of multiphase viscoelastic composites. *Composite Structures* 41, 3–4 (1998), 353–367.

- [26] CAI, Y., SUN, H. Prediction on viscoelastic properties of three-dimensionally braided composites by multi-scale model. *Journal of Materials Science* 48 (2013), 6499–6508.
- [27] CALLISTER, W. D., RETHWISCH, D. G. *Fundamentos de Ciência e Engenharia dos Materiais*, 9 ed. John Wiley & Sons, Rio de Janeiro, 2014. Tradução de: *Materials Science and Engineering: An Introduction*.
- [28] CAPORALE, A., LUCIANO, R., PENNA, R. Fourier series expansion in non-orthogonal coordinate system for the homogenization of linear viscoelastic periodic composites. *Composites Part B: Engineering* 54 (2013), 241–245.
- [29] CASTAÑEDA, P. P. New variational principles in plasticity and their application to composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40, 8 (1992), 1757–1788.
- [30] CAVALCANTE, M. A., MARQUES, S. P. Homogenization of periodic materials with viscoelastic phases using the generalized fvdam theory. *Computational Materials Science* 87 (2014), 43–53.
- [31] CHINH, P. D. Bounds on the effective shear modulus of multiphase materials. *International Journal of Engineering Science* 31, 1 (1993), 11–17.
- [32] CHO, K. S. *Viscoelasticity of Polymers – Theory and Numerical Algorithms*, vol. 241. Springer Science+Business Media B. V., Dordrecht, 2016.
- [33] CHRISTENSEN, R. M. Viscoelastic properties of heterogeneous media. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 17 (1969), 23–41. Printed in Great Britain.
- [34] CHRISTENSEN, R. M. *Theory of Viscoelasticity - An Introduction*, 2nd ed. Academic Press Inc., New York, 1982.
- [35] CIORANESCU, D., DONATO, P. *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications - An Introduction to Homogenization*, 1st ed., vol. 17. Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [36] CIORANESCU, D., PAULIN, J. S. J. *Applied Mathematical Sciences - Homogenization of Reticulated Structures*, 1st ed., vol. 136. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1991.
- [37] COMSOL AB. *COMSOL Multiphysics® v. 6.2*. Estocolmo, Suécia, 2023.
- [38] CREUS, G. J. *Viscoelasticity: Basic Theory and Applications to Concrete Structures*, vol. 16 em *Lecture Notes in Engineering*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986. Includes bibliographies and index.
- [39] CRISTESCU, N. D., HUNSCHE, U. *Time Effects in Rock Mechanics*. Wiley, 1998.
- [40] CRUZ-GONZÁLES, O. L. Homogeneización de compuestos viscoelásticos, lineales, sin envejecimiento y con periodicidad generalizada. Dissertação de Mestrado, Universidad de La Habana - Universidad de Matanzas, 2018.

- [41] CRUZ-GONZÁLES, O. L., GUINOVART-SANJUÁN, D., RODRÍGUEZ-RAMOS, R., BRAVO-CASTILLERO, J., GUINOVART-DÍAZ, R., MERODIO, J., PENTA, R., OTERO, J. A., DUMONT, S., LEBON, F., SABINA, F. J. An approach for modeling non-ageing linear viscoelastic composites with general periodicity. *Composite Structures* 223 (2019), 110–927.
- [42] CRUZ-GONZÁLES, O., RODRÍGUEZ-RAMOS, R., BRAVO-CASTILLERO, J., MARTÍNEZ-ROSADO, R., GUINOVART-DÍAZ, R., OTERO, J., SABINA, F. Effective viscoelastic properties of one-dimensional composites. *American Research Journal of Physics* 3, 1 (2017), 2.
- [43] CRUZ-GONZÁLES, O. L., RAMÍREZ-TORRES, A., RODRÍGUEZ-RAMOS, R., PENTA, R., LEBON, F. Hierarchical heterogeneous one-dimensional problem in linear viscoelastic media. *European Journal of Mechanics / A Solids* 95 (2022), 104617.
- [44] CRUZ-GONZÁLES, O. L., RODRÍGUEZ-RAMOS, R., OTERO, J. A., BRAVO-CASTILLERO, J., GUINOVART-DÍAZ, R., MARTÍNEZ-ROSADO, R., SABINA, F. J., DUMONT, S., LEBON, F., SEVOSTIANOV, I. Viscoelastic effective properties for composites with rectangular cross-section fibers using the asymptotic homogenization method. In *Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials 1*, vol. 89 em *Advanced Structured Materials*. Springer International Publishing AG, 2018, p. 203–222.
- [45] CRUZ-GONZÁLES, O. L., RODRÍGUEZ-RAMOS, R., OTERO, J. A., RAMÍREZ-TORRES, A., PENTA, R., LEBON, F. On the effective behavior of viscoelastic composites in three dimensions. *International Journal of Engineering Science* 157 (2020), 103377.
- [46] DARIDON, L., LICHT, C., ORANKITJAROEN, S., PAGANO, S. Periodic homogenization for kelvin-voigt viscoelastic media with a kelvin-voigt viscoelastic interphase. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 58 (2016), 163–171.
- [47] DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA CORP. *Abaqus v. 2023*. Providence, RI, EUA, 2023.
- [48] DILL, E. H. *Continuum Mechanics: Elasticity, Plasticity, Viscoelasticity*, 1st ed. CRC Press: Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2007.
- [49] DROZDOV, A. D. *Viscoelastic Structures – Mechanics of Growth and Aging*. Academic Press, London, 1998.
- [50] DROZDOV, A. D., KOLMANOVSKII, V. B. *Stability in Viscoelasticity – North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 38. Elsevier Science B. V., Amsterdam, 1994.
- [51] DVORAK, G., BAHEI-EL-DIN, Y. Elastic-plastic behavior of fibrous composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 27, 1 (1979), 51–72.
- [52] EATON, J. W., OTHERS. *GNU Octave version 7.1.0*. GNU Project, 2023.
- [53] EDF R&D. *Code\_Aster v15.2*. Paris, França, 2023.

- [54] ERDOGAN, F. Fracture mechanics of functionally graded materials. *Composites Engineering* 5, 7 (1995), 753–770.
- [55] ESTRIN, Y., BRÉCHET, Y., DUNLOP, J., FRATZL, P., Eds. *Architected Materials in Nature and Engineering*, 1 ed. Springer Series in Materials Science. Springer Cham, 2019.
- [56] FABRIZIO, M., MORRO, A. *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*, vol. 12 em *SIAM Studies in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992. Copyright ©1992 by the Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [57] FERNANDEZ, M. *Models of Computation: An Introduction to Computability Theory*. Undergraduate Topics in Computer Science. Springer Science & Business Media, 2009.
- [58] FERRY, J. D. *Viscoelastic Properties of Polymers*, 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1980.
- [59] FINDLEY, W. N., LAI, J. S., ONARAN, K. *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials with an Introduction to Linear Viscoelasticity*. Dover Publications, Inc., New York, 1976.
- [60] FISHER, F., BRINSON, L. Viscoelastic interphases in polymer–matrix composites: theoretical models and finite-element analysis. *Composites Science and Technology* 61, 6 (2001), 731–748.
- [61] FLÜGGE, W. *Viscoelasticity*, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [62] GIBIANSKY, L., LAKES, R. Bounds on the complex bulk modulus of a two-phase viscoelastic composite with arbitrary volume fractions of the components. *Mechanics of Materials* 16, 3 (1993), 317–331.
- [63] GIBIANSKY, L. V., MILTON, G. W. On the effective viscoelastic moduli of two-phase media. I. rigorous bounds on the complex bulk modulus. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 440, 1908 (1993), 163–188.
- [64] GIBIANSKY, L. V., MILTON, G. W., BERRYMAN, J. G. On the effective viscoelastic moduli of two-phase media. III. rigorous bounds on the complex shear modulus in two dimensions. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 455, 1986 (1999), 2117–2149.
- [65] GORENFLO, R., KILBAS, A. A., MAINARDI, F., ROGOSIN, S. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, 2 ed. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 2020. Published: October 28, 2020.
- [66] GROSS, B. *Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity*. Actualités scientifiques et industrielles. Hermann, 1953.

- [67] GUINOVART-DÍAZ, R., BRAVO-CASTILLERO, J., RODRÍGUEZ-RAMOS, R., SABINA, F. J. Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. i: Elastic and hexagonal symmetry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49, 7 (2001), 1445–1462.
- [68] GURTIN, E., STERNBERG, M. E. On the linear theory of viscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 11 (1962), 291–356.
- [69] GUTIÉRREZ-LEMINI, D. *Engineering Viscoelasticity*, 1st ed. Springer New York, NY, Arlington, 2014.
- [70] HASHIN, Z. Viscoelastic behavior of heterogeneous media. *Journal of Applied Mechanics* 32, 3 (1965), 630.
- [71] HASHIN, Z. Complex moduli of viscoelastic composites—I. general theory and application to particulate composites. *International Journal of Solids and Structures* 6, 5 (1970), 539–552.
- [72] HASHIN, Z. Complex moduli of viscoelastic composites—II. fiber reinforced materials. *International Journal of Solids and Structures* 6, 6 (1970), 797–807.
- [73] HASHIN, Z., SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10, 4 (1962), 343–352.
- [74] HILL, R. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials—iii. self-consistent model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13, 4 (1965), 189–198.
- [75] HOLLENBECK, K. Invlap.m: a matlab function for numerical inversion of laplace transforms by the hoog algorithm. [https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/uploaded\\_files/1034/invlap.m](https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/uploaded_files/1034/invlap.m), 1998.
- [76] HONORIO, T., BARY, B., SANAHUJA, J., BENBOUDJEMA, F. Effective properties of n-coated composite spheres assemblage in an ageing linear viscoelastic framework. *International Journal of Solids and Structures* 124 (2017), 1–13.
- [77] HORVÁTH, G., HORVÁTH, I., TELEK, M., ALMOUSA, S. A.-D., TALYIGÁS, Z. Inverse laplace transform with concentrated matrix-exponential functions, 2023.
- [78] JOSEPH, D. D. *Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids*, vol. 84 em *Applied Mathematical Sciences*. Springer Science & Business Media, November 2013. Includes bibliographical references and index.
- [79] JR, R. M. D., CEZARO, A. D., PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D. Asymptotic homogenization and fractional calculus applied to micro-heterogeneous media modelling: an introduction with the case of a microperiodic and linear functionally graded rod. *Vetor* 32, 1 (2022), 13–22.
- [80] KAMIŃSKI, M. M. *Computational Mechanics of Composite Materials - Sensitivity, Randomness and Multi-scale Behaviour*. Springer-Verlag Ltd., London, 2005.

- [81] KRÖNER, E. Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalls aus den konstanten des einkristalls. *Z. Physik* 151 (1958), 504–518.
- [82] KURNATOWSKI, B., MATZENMILLER, A. Finite element analysis of viscoelastic composite structures based on a micromechanical material model. *Computational Materials Science* 43, 4 (2008), 957–973.
- [83] LAHELLEC, N., SUQUET, P. Effective behavior of linear viscoelastic composites: A time-integration approach. *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007), 507–529.
- [84] LAKES, R. *Viscoelastic Materials*, 1st ed., vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [85] LAWS, N., MCCLAUGHLIN, R. Self-consistent estimates for the viscoelastic creep compliances of composite materials. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 359, 1697 (1978), 251–273.
- [86] LE, Q., MEFTAH, F., HE, Q., OTHERS. Creep and relaxation functions of a heterogeneous viscoelastic porous medium using the mori-tanaka homogenization scheme and a discrete microscopic retardation spectrum. *Mechanics of Time-Dependent Materials* 11 (2007), 309–331.
- [87] LEADERMAN, H. *Elastic and Creep Properties of Filamentous Materials*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1941.
- [88] LI, K., GAO, X.-L., ROY, A. K. Micromechanical modeling of viscoelastic properties of carbon nanotube-reinforced polymer composites. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 13, 4 (2006), 317–328.
- [89] LI, Q., CHEN, W., LIU, S., WANG, J. A novel implementation of asymptotic homogenization for viscoelastic composites with periodic microstructures. *Composite Structures* (2018).
- [90] LIU, S., CHEN, K.-Z., FENG, X.-A. Prediction of viscoelastic property of layered materials. *International Journal of Solids and Structures* 41, 13 (2004), 3675–3688.
- [91] LODGE, A. S., RENARDY, M., NOHEL, J. A., Eds. *Viscoelasticity and Rheology* (Orlando, Florida, 1984), Academic Press, Inc. Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. United Kingdom Edition published by Academic Press Inc. (London) Ltd., 24-28 Oval Road, London NW1 7DX.
- [92] LÉVESQUE, M., GILCHRIST, M., BOULEAU, N., OTHERS. Numerical inversion of the laplace-carson transform applied to homogenization of randomly reinforced linear viscoelastic media. *Computational Mechanics* 40 (2007), 771–789.
- [93] MAGHOUS, S., CREUS, G. J. Periodic homogenization in thermoviscoelasticity: Case of multilayered media with ageing. *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), 851–870.
- [94] MAINARDI, F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity - An Introduction to Mathematical Models*. British Library – Imperial College Press, London, 2010.

- [95] MANDEL, J. Un principe de correspondance pour les corps viscoélastiques linéaires vieillissants. In *Mechanics of Visco-Elastic Media and Bodies*, J. Hult, Ed., IUTAM Symposia. Springer Berlin, Heidelberg, 1975, p. 44–55. Symposium Gothenburg/Sweden September 2–6, 1974.
- [96] MARQUES, S. P. C., CREUS, G. J. *Computational Viscoelasticity – Computational Mechanics*. Springer Heidelberg D., London, 2012.
- [97] MARSDEN, J., SIROVICH, L., ANTMAN, S., Eds. *Multiscale Methods: Averaging and Homogenization*, vol. 53 em *Texts in Applied Mathematics*. Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2008. Library of Congress Control Number: 2007941385. Mathematics Subject Classification (2000): 34, 35, 60.
- [98] MASSON, R., BRENNER, R., CASTELNAU, O. Incremental homogenization approach for ageing viscoelastic polycrystals. *Comptes Rendus Mécanique* 340, 4–5 (2012), 378–386.
- [99] MATZENMILLER, A., GERLACH, S. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber–matrix bonding. *Computational Materials Science* 29, 3 (2004), 283–300.
- [100] MEI, C. C., VERNESCU, B. *Homogenization Methods for Multiscale Mechanics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2010.
- [101] MICHEL, J., MOULINEC, H., SUQUET, P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 172, 1–4 (1999), 109–143.
- [102] MILTON, G. W. *The Theory of Composites*, vol. 6 em *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2002.
- [103] MILTON, G. W., BERRYMAN, J. G. On the effective viscoelastic moduli of two-phase media. II. rigorous bounds on the complex shear modulus in three dimensions. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 453, 1964 (1997), 1849–1880.
- [104] MORI, T., TANAKA, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica* 21 (1973), 597–629.
- [105] MORRIS, G. M., GEIGER, D. A., FINE, K. A. *Thermodynamics: An Engineering Approach*, 7 ed. McGraw-Hill, New York, 2011. This is a well-known textbook in thermodynamics.
- [106] NAIK, A., ABOLFATHI, N., KARAMI, G., ZIEJEWSKI, M. Micromechanical viscoelastic characterization of fibrous composites. *Journal of Composite Materials* 42, 12 (2008), 1179–1204.
- [107] NGUYEN, H. V., PASTOR, J., MULLER, D. A method for predicting linear viscoelastic mechanical behavior of composites, a comparison with other methods and experimental validation. *European Journal of Mechanics, A/Solids* 14 (1995), 939–960.

- [108] NIELSEN, L. F. On the applicability of modified dischinger equations. *Cement and Concrete Research* 7, 2 (1977), 149–160.
- [109] NOVOZHENOVA, O. G. Memories of volterra functions, rabotnov’s fractional-exponential function, mittag-leffler and degenerate hypergeometric functions, as well as a brief overview of the corresponding works. In *Inherited Mechanics of Deformation and Destruction of Solids - Scientific Heritage of Yu. N. Rabotnov*, N. A. Tatus, Ed. IMASH RAN, Moscow, 2014, p. 113–117. Published at the conference held from February 24-26, 2014, at IMASH RAN.
- [110] OLEINIK, O. A., SHAMAEV, A. S., YOSIFAN, G. A. *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization - Studies in Mathematics and Its Applications*, vol. 26. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1992.
- [111] OTERO, J. A., RODRÍGUEZ-RAMOS, R., ESPINOSA-ALMEYDA, Y., SABINA, F. J., LEVIN, V. Homogenization approaches for the effective characteristics of fractional visco-piezoelastic fibrous composites. *Acta Mechanica* 234 (2023), 2087–2101.
- [112] OTERO, J. A., RODRÍGUEZ-RAMOS, R., GUINOVART-DÍAZ, R., CRUZ-GONZÁLEZ, O. L., SABINA, F. J., BERGER, H., BÖHLKE, T. Asymptotic and numerical homogenization methods applied to fibrous viscoelastic composites using prony’s series. *Acta Mechanica* 231 (2020), 2761–2771.
- [113] PALEY, M., ABOUDI, J. Micromechanical analysis of composites by the generalized cells model. *Mechanics of Materials* 14, 2 (1992), 127–139.
- [114] PANASENKO, G. *Multi-scale Modelling for Structures and Composites*, 1st ed. Springer Dordrecht, Netherlands, 2005.
- [115] PARAMESWARAN, V., SHUKLA, A. Asymptotic stress fields for stationary cracks along the gradient in functionally graded materials. *Journal of Applied Mechanics* 69, 3 (2002), 240.
- [116] PENTA, R., GERISCH, A. Investigation of the potential of asymptotic homogenization for elastic composites via a three-dimensional computational study. *Computing and Visualization in Science* 17, 4 (2015), 185–201.
- [117] PENTA, R., RAMÍREZ-TORRES, A., MERODIO, J., RODRÍGUEZ-RAMOS, R. Effective balance equations for elastic composites subject to inhomogeneous potentials. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 30 (2018), 145–163.
- [118] PERSSON, L. E., PERSSON, L., SVANSTEDT, N., WYLLER, J. *The Homogenization Method - An Introduction*. Studentlitteratur, Lund, 1993.
- [119] PIPKIN, A. C. *Applied Mathematical Sciences - Lectures on Viscoelasticity Theory*, 2nd ed., vol. 7. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1972.
- [120] POBEDRYA, B. E. Application of the theory of viscoelasticity to composite materials. *Mechanics of Composite Materials* 15 (1979), 271–278.



- [121] PODLUBNY, I., THIMANN, K. V. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, vol. 198 em *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1998.
- [122] RAMÍREZ-TORRES, A., PENTA, R., GRILLO, A. Effective properties of fractional viscoelastic composites via two-scale asymptotic homogenization. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 46 (2023), 16500–16520.
- [123] RAMÍREZ-TORRES, A., PENTA, R., RODRÍGUEZ-RAMOS, R., MERODIO, J., SABINA, F. J., BRAVO-CASTILLERO, J., GUINOVART-DÍAZ, R., PREZIOSI, L., GRILLO, A. Three scales asymptotic homogenization and its application to layered hierarchical hard tissues. *International Journal of Solids and Structures* 130–131 (2018), 190–198.
- [124] RAMÍREZ-TORRES, A., STEFANO, S. D., GRILLO, A., RODRÍGUEZ-RAMOS, R., MERODIO, J., PENTA, R. An asymptotic homogenization approach to the microstructural evolution of heterogeneous media. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 106 (2018), 245–257.
- [125] REUSS, A. Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. *ZAMM - Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik* 9, 1 (1929), 49–58.
- [126] RICAUD, J.-M., MASSON, R. Effective properties of linear viscoelastic heterogeneous media: Internal variables formulation and extension to ageing behaviours. *International Journal of Solids and Structures* 46 (2009), 1599–1606.
- [127] RODRÍGUEZ-RAMOS, R., OTERO, J. A., CRUZ-GONZÁLEZ, O. L., GUINOVART-DÍAZ, R., BRAVO-CASTILLERO, J., SABINA, F. J., PADILLA, P., LEBON, F., SEVOSTIANOV, I. Computation of the relaxation effective moduli for fibrous viscoelastic composites using the asymptotic homogenization method. *International Journal of Solids and Structures* 190 (2020), 281–290.
- [128] ROGERS, T. G., PIPKIN, A. C. Asymmetric relaxation and compliance matrices in linear viscoelasticity. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 14 (May 1963), 334–343. Received: August 2, 1962.
- [129] ROHATGI, A. Webplotdigitizer, 2023.
- [130] ROYLANCE, D. Engineering viscoelasticity. MIT OpenCourseWare, October 2001. Accessed: 2024-08-29.
- [131] SACHS, G. Zur ableitung einer fließbedingung. *Z. Ver. Dtsch. Ing.* 72 (1928), 734–736.
- [132] SADD, M. H. *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. MATLAB Examples. Academic Press is an imprint of Elsevier, 2021.
- [133] SAEB, S., STEINMANN, P., JAVILI, A. Aspects of computational homogenization at finite deformations: A unifying review from reuss’ to voigt’s bound. *Applied Mechanics Reviews* 68, 5 (2016), 050801.

- [134] SALENÇON, J. *Viscoelastic Modeling for Structural Analysis – Materials Science Series*. ISTE Ltd., London, 2019.
- [135] SANAHUJA, J. Effective behaviour of ageing linear viscoelastic composites: Homogenization approach. *International Journal of Solids and Structures* 50 (2013), 2846–2856.
- [136] SANCHEZ-PALENCIA, E., Ed. *Non-homogeneous Media and Vibration Theory - Lectures in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [137] SCHEINER, S., HELLMICH, C. Continuum microviscoelasticity model for aging basic creep of early-age concrete. *Journal of Engineering Mechanics* 135, 4 (2009), 307–323.
- [138] SCHIESSL, P. *Beton und Spannbeton: Festbeton*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976. Este livro aborda a viscoelasticidade em concreto, discutindo o modelo de Dischinger no contexto da engenharia civil e como ele se aplica à fluência em concreto.
- [139] SCHÖNEICH, M., DINZART, F., SABAR, H., BERBENNI, S., STOMMEL, M. A coated inclusion-based homogenization scheme for viscoelastic composites with interphases. *Mechanics of Materials* 105 (2017), 89–98.
- [140] SEVOSTIANOV, I., LEVIN, V., RADI, E. Effective properties of linear viscoelastic microcracked materials: Application of maxwell homogenization scheme. *Mechanics of Materials* 90 (2015), 35–50.
- [141] STAROVOITOV, E. I., NAGIYEV, F. B. *Foundations of the Theory of Elasticity, Plasticity and Viscoelasticity*. Apple Academic Press Inc., Oakville, 2012.
- [142] SUN, C. T., VAIDYA, R. S. Prediction of composite properties from a representative volume element. *Composites Science and Technology* 56, 2 (1996), 171–179.
- [143] TANG, T., FELICELLI, S. D. Computational evaluation of effective stress relaxation behavior of polymer composites. *International Journal of Engineering Science* 90 (2015), 76–85.
- [144] TAYLOR, G. I. Plastic strain in metals. *Journal of the Institute of Metals* 62 (1938), 307–324.
- [145] THE MATHWORKS INC. MATLAB version 9.13.0 (R2022b), 2022.
- [146] TO, Q.-D., NGUYEN, S.-T., BONNET, G., VU, M.-N. Overall viscoelastic properties of 2d and two-phase periodic composites constituted of elliptical and rectangular heterogeneities. *European Journal of Mechanics A/Solids* 64 (2017), 186–201.
- [147] TRAN, A. B., YVONNET, J., HE, Q.-C., TOULEMONDE, C., SANAHUJA, J. A simple computational homogenization method for structures made of linear heterogeneous viscoelastic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200, 45-46 (2011), 2956–2970.
- [148] VOIGT, W. Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitätsconstanten isotroper körper. *Annalen Der Physik* 274, 12 (1889), 573–587.

- [149] VOLTERRA, V. Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità. *Atti Della Reale Accademia Dei Lincei Rendiconti S5*, 18-2.2 (1909), 295–301.
- [150] VOYIADJIS, G. Z., KATTAN, P. I. *Mechanics of Composite Materials with MATLAB*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2005. Library of Congress Control Number: 2005920509. Printed in The Netherlands.
- [151] WANG, G., PINDERA, M.-J. Locally-exact homogenization of viscoelastic unidirectional composites. *Mechanics of Materials 103* (2016), 95–109.
- [152] WILLIAMS, T. O. A three-dimensional, higher-order, elasticity-based micromechanics model. *International Journal of Solids and Structures 42*, 3-4 (2005), 971–1007.
- [153] WILLIAMS, T. O. A two-dimensional, higher-order, elasticity-based micromechanics model. *International Journal of Solids and Structures 42*, 3-4 (2005), 1009–1038.
- [154] YANCEY, R. N., PINDERA, M.-J. Micromechanical analysis of the creep response of unidirectional composites. *Journal of Engineering Materials and Technology 112*, 2 (1990), 157.
- [155] YANG, H., ABALI, B. E., MÜLLER, W. H., BARBOURA, S., LI, J. Verification of asymptotic homogenization method developed for periodic architected materials in strain gradient continuum. *International Journal of Solids and Structures 238* (2022), 111386.
- [156] YANG, X. J., GAO, F., JU, Y. *General Fractional Derivatives with Applications in Viscoelasticity*. Academic Press Elsevier Inc., London, 2020.
- [157] YI, S., POLLOCK, G. D., AHMAD, M. F., HILTON, H. H. Effective transverse young's modulus of composites with viscoelastic interphase. *AIAA Journal 33*, 8 (1995), 1548–1550.
- [158] YI, Y.-M., PARK, S.-H., YOUN, S.-K. Asymptotic homogenization of viscoelastic composites with periodic microstructures. *International Journal of Solids and Structures 35*, 17 (1998), 2039–2055.
- [159] YU, W., TANG, T. Variational asymptotic method for unit cell homogenization of periodically heterogeneous materials. *International Journal of Solids and Structures 44*, 11–12 (2006), 3738–3755.
- [160] ZEZIN, Y. P. Investigation of relaxation properties of elastomeric composites. In *Inherited Mechanics of Deformation and Destruction of Solids - Scientific Heritage of Yu. N. Rabotnov*, N. A. Tatus, Ed. IMASH RAN, Moscow, 2014, p. 47–52. Published at the conference held from February 24-26, 2014, at IMASH RAN.
- [161] ÇENGEL, Y. A., CIMBALA, J. M. *Mecânica dos Fluidos e Aplicações*, 1 ed. McGraw-Hill, Bookman, 2007. Catalogação na publicação: Ana Paula M. Magnus CRB 10/2052.

# APÊNDICE A

## A.1 Princípio de Correspondência

### A.1.1 Homogeneização como um operador

De acordo com [70], uma das primeiras referências cronológicas sobre o tema, o princípio de correspondência é válido no contexto de uma propriedade material em conjunto com distribuições de tensão e deformação para descrever um fenômeno viscoelástico. Em outras palavras, de acordo com [33], a transformação do domínio do tempo é aplicada para evitar a computação das operações de convolução de tensores, como  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) * \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ , e, ao invés, computar simples produtos tensoriais:  $\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, s)\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, s) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, s)$ , onde  $s$  é a variável transitória de alguma das transformadas integrais na Tabela (1.1). Contudo, note que esta estratégia é independente de qualquer processo de homogeneização. Neste sentido, se as transformadas integrais são operadores lineares (porque preservam as propriedades de linearidade), então **existe um conjunto de condições para desacoplar o processo de homogeneização dos efeitos hereditários do princípio de correspondência.**

No artigo de [158], o processo de homogeneização é abstraído como um operador não-linear, com uma versão para o domínio do tempo,  $\mathcal{H}_t\{\bullet\}$ , e outra para o domínio transformado,  $\mathcal{H}_s\{\bullet\}$ , ambos tratados como operadores distintos. Neste sentido, as Equações (2.51) e (3.68) podem ser abstraídas como um operador:  $\mathcal{H}_t\{\mathbf{R}(\mathbf{y}, t)\} = \mathbf{R}^H(t)$ , onde é possível confirmar que se trata de um operador não-linear, pois  $\mathcal{H}_t\{a + b\} \neq \mathcal{H}_t\{a\} + \mathcal{H}_t\{b\}$ . Apesar disso, é possível verificar que a homogeneização, nas publicações da Tabela (1.1), não distingue o domínio, ou seja, **a metodologia de homogeneização (não necessariamente assintótica) é a mesma, seja aplicada no domínio do tempo ou no transformado.** Contudo, o que muda é a formulação e a dinâmica associada ao volume representativo, que no caso do MHA padrão é uma célula periódica imutável.

Portanto, **há um critério para que o MHA troque de precedência** com outros operadores, como uma transformada integral, por ser um procedimento não-linear.

Como citado na Seção (2.4), o MHA está limitado, por definição, a células periódicas representativas independentes da dinâmica global. Isto pode ser verificado com a interpretação das Equações (2.14)-(2.17), que apresentam um problema local sem forçamentos, e com um comprimento periódico  $\epsilon$  constante em relação ao tempo e às coordenadas locais e globais. Consequentemente, se o formato da célula periódica não muda com o tempo (é independente das deformações locais), então a variável local ( $\mathbf{y}$ ) não depende das variáveis transitórias, estejam elas no domínio do tempo ou no domínio transformado. Portanto, é possível afirmar que, no contexto do MHA formulado no Capítulo (2), o operador de homogeneização é independente das variáveis transitórias:  $\mathcal{H}_t \{\bullet\} = \mathcal{H}_s \{\bullet\} := \mathcal{H} \{\bullet\}$ .

A aplicação do MHA utilizando o princípio de correspondência, de acordo com a Seção (A.1.2) e o Programa (B.1.4), pode ser resumida nos seguintes passos consecutivos: aplicar uma transformada integral, aplicar a homogeneização e aplicar uma transformada integral inversa. Considerando uma transformada integral, como a de Laplace-Carson por exemplo, esse procedimento pode ser escrito utilizando a seguinte equivalência:

$$\mathcal{H} \{\bullet\} = \mathcal{L}_C^{-1} \left\{ \mathcal{H} \left\{ \mathcal{L}_C \{\bullet\} \right\} \right\}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\mathcal{L}_C \{\bullet\}$  é contra-operador de  $\mathcal{L}_C^{-1} \{\bullet\}$ , e vice-versa, permitindo considerar que a única forma de satisfazer esta equivalência é considerando a troca de precedência:

$$\mathcal{H} \left\{ \mathcal{L}_C^{-1} \{\bullet\} \right\} = \mathcal{L}_C^{-1} \left\{ \mathcal{H} \{\bullet\} \right\}, \quad \text{ou} \quad \mathcal{H} \left\{ \mathcal{L}_C \{\bullet\} \right\} = \mathcal{L}_C \left\{ \mathcal{H} \{\bullet\} \right\}, \quad (\text{A.2})$$

verdadeiras no contexto do MHA formulado com  $\epsilon$  e  $\mathbf{y}$  em estado estável e **se o argumento  $\{\bullet\}$  não envolve somatórios ou inversões**. Logo, a precedência é condicionada.

Assim, seria possível desacoplar o princípio de correspondência do MHA, de acordo com o Capítulo (3), assumindo que os efeitos do princípio de superposição de Boltzmann são lentos em relação às taxas de mudança das propriedades. Isso permite desconsiderar termos inerciais associados à dinâmica de deformações (no caso de relaxamento) e tensões (no caso de fluência). Segundo [70], com uma formulação quase-estática como esta, seria possível utilizar esta metodologia com suficiente precisão. Portanto, o problema não está na formulação do MHA, mas nos somatórios (ou integrais) e inversões, associados às contribuições das fases, que compõem os argumentos da Equação (A.2).

Dada uma propriedade homogênea  $\mathbf{P}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{y}, t)$ , o processo de homogeneização não implica modificações:  $\mathbf{P}^H(t) = \mathcal{H} \left\{ \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{y}, t) \right\} = \mathbf{P}(\mathbf{y}, t)$  porque a fração volumétrica é  $\phi^{(1)} = 1$ . Portanto, a aplicação da Equação (A.1) sobre  $\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{y}, t)$  **permite a troca de precedência entre operadores apenas se o material é homogêneo**.

### A.1.2 Propriedade homogeneizada — domínio de Laplace-Carson

Apesar das vantagens do princípio de correspondência citadas na Seção (A.1.2), a transformação integral reversa apresenta desafios computacionais significativos, assim como kernels fracionários que não podem ser revertidos sem precisar métodos numéricos especializados; isto acontece, por exemplo, nas últimas sete publicações citadas na Tabela (1.2). A inversão da transformação integral é prática apenas em modelos constitutivos e microestruturas simples [69] (p.253). O princípio de correspondência é utilizado principalmente quando as soluções elásticas, homogêneas, já são conhecidas [96] (Cap.5).

Conforme mencionado na Seção (2.2), o princípio de correspondência simplifica o problema de manipulação algébrica de termos ao permitir que a operação de convolução descrita nas Equações (2.7)-(2.8) seja representada como um produto tensorial, como mostra a Equação (2.9). Esse princípio afirma que um problema viscoelástico no domínio do tempo,  $t \in \mathbb{R}$ , possui uma imagem no espaço de Laplace,  $\mathcal{L}\{\bullet\}$ , ou para o espaço de Laplace-Carson,  $\mathcal{L}_C\{\bullet\}$  [134] (pp.31-33) [141] (pp.223-224), onde  $\mathcal{L}_C\{\bullet\} \equiv s\mathcal{L}\{\bullet\}$ . Nesse contexto, o problema é resolvido como se fosse um problema elástico [61].

Essa abordagem é amplamente utilizada, conforme mostrado na Tabela (1.1), permitindo a inversão de propriedades materiais [69] (Cap.7), a modelagem de kernels [49] (p.59) e fornecendo uma base teórica para a análise de estabilidade termomecânica [19] (Cap.6). Está também consolidada nas ciências aplicadas [32] (p.85) [69] (p.42).

Note que  $\mathcal{L}\{R_{ijkl}(y_i, t)\} = \hat{R}_{ijkl}(y_i, s)$  e  $\mathcal{L}_C\{R_{ijkl}(y_i, t)\} = \hat{R}_{ijkl}(y_i, p)$ , com unidades físicas, da parte real,  $[\text{Pa s}^{-1}]$  e  $[\text{Pa}]$ , respectivamente, permitindo perceber que com Laplace-Carson as unidades físicas são preservadas [158]. A abordagem generalizada de [80] (p.86), não detalhada aqui, apenas como um exemplo, é expressa da seguinte forma:

$$\hat{R}_{ijkl}^H(s) = \left\langle \hat{R}_{ijkl}(y_i, s) + \hat{R}_{ijrs}(y_i, s) \frac{1}{2} \left( \partial_l^y \chi_{rsk}(y_i, s) + \partial_k^y \chi_{rsl}(y_i, s) \right) \right\rangle, \quad (\text{A.3})$$

A simplificação da Equação (2.4) (delimitação para sólidos quasi-rígidos), permite obter uma versão simplificada da Equação (A.3). A implementação dessa simplificação, conforme [41], é adaptada para o caso viscoelástico da seguinte forma:

$$\hat{R}_{ijkl}^H(s) = \left\langle \hat{R}_{ijkl}(y_i, s) + \hat{R}_{ijrs}(y_i, s) \partial_l^y \chi_{rsk}(y_i, s) \right\rangle. \quad (\text{A.4})$$

Esta propriedade homogeneizada (coeficiente efetivo) é global e uniforme, e apresenta kernels sem envelhecimento sob qualquer distribuição de tensões [80] (p.97).

# APÊNDICE B

## B.1 Exemplo didático do algoritmo computacional

| Fase | $K^{(n)}$ [MPa] | $\mu^{(n)}$ [MPa]  | $\alpha^{(n)}$ [dias <sup>-1</sup> ] | $\beta^{(n)}$ [MPa] |
|------|-----------------|--------------------|--------------------------------------|---------------------|
| (1)  | $10 \cdot 10^3$ | $8.571 \cdot 10^3$ | —                                    | —                   |
| (2)  | $10 \cdot 10^3$ | $8.571 \cdot 10^3$ | 0.026                                | $35.667 \cdot 10^3$ |

Tabela B.1: Parâmetros das fases (1) e (2) de acordo com o kernel Dischinger.

### B.1.1 Instruções modelo para criação de figuras

```

fig = figure; set(fig, 'Position', [0,0, 1200, 400]);
ftz = 22; clf; hold on; box on; grid minor;
plot(t, R11/1E3, '-r', 'DisplayName', 'Homogeneização
↪ computacional', 'markersize', 5, 'linewidth', 2);
% Configuração da figura
legend('fontsize', ftz, 'Location', 'northeast', 'Interpreter', 'latex');
set(gca, 'FontName', 'CMU Serif', 'FontSize', ftz, 'TickLabelInterpreter',
↪ 'latex');
xlabel('$t$ [dias]', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$R^{\{H\}}_{\{1111\}}(t)$ [GPa]', 'Interpreter', 'latex');
xlim([0, tmax]); hold off;

```

### B.1.2 Kernel fracionário de Scott Blair e Rabotnov

```

% Entrada:
% - alpha: Expoente fracionário, controla o decaimento.
% - beta: Coeficiente de escala.
% - t: Vetor de tempos para avaliação.
% - tau: Tempo de referência.

```

```

% Saída:
% - R: Kernel calculado para os tempos em t.
% A função usa uma soma truncada de max_k termos para equilibrar precisão.
function R = rabotnov_kernel(alpha, beta, t, tau)
    sRt = zeros(size(t));
    n = floor(1/(alpha^2));
    max_k = 100 * n;
    for k = 0:max_k
        sbk = (-beta)^k;
        num = (t-tau).^ (k*alpha);
        den = gamma( (k+1) *alpha );
        ter = sbk.*(num./den);
        sRt += ter;
    end
    R = (t - tau).^(alpha-1) .* sRt;
end

```

### B.1.3 Função Mittag-Leffler

```

function E = mittagleffler_1p(alpha, z)
    nk = 100; E = zeros(size(z));
    alpha_threshold = 1e-6;
    switch true
    case alpha == 0
        E = 1./(1-z);
        return;
    case abs(alpha) < alpha_threshold
        for j = 1:numel(z)
            series_sum = 0;
            for k = 0:nk
                series_sum = series_sum + z(j)^k;
            end
            E(j) = series_sum;
        end
        return;
    case alpha == 0.5
        E = exp(z.^2) .* erfc(-z);
        return;
    case alpha == 1
        E = exp(z);
        return;
    case alpha == 2

```



```

    E = cosh(sqrt(z));
    return;
case alpha == 3
    z3 = z.^(1/3);
    ze = -z3/2;
    zc = sqrt(3) * z3 / 2;
    E = (cos(z3) + 2 * exp(ze) .* cos(zc)) / 3;
    return;
case alpha == 4
    z4 = z.^(1/4);
    E = (cos(z4) + cosh(z4)) / 2;
    return;
otherwise % Calcular a série de Mittag-Leffler para o caso geral
    nap = 1;
    n = floor(nk / (alpha^nap)); % Menos iterações conforme alpha cresce
    for j = 1:numel(z)
        series_sum = 0;
        for k = 0:n
            series_sum = series_sum + (z(j))^k / gamma(alpha * k + 1);
        end
        E(j) = series_sum;
    end
    return;
end
end
end

```

### B.1.4 Função de Laplace, e inversa, no ambiente simbólico

```

% Esta versão contempla três fases
function h = L_iL_3f(vt, phi1, phi2, phi3, r1, r2, r3)
    syms s t;
    phi1s = sym(phi1);
    phi2s = sym(phi2);
    phi3s = sym(phi3);
    R1s = laplace(r1, t, s);
    R2s = laplace(r2, t, s);
    R3s = laplace(r3, t, s);
    RHs = simplify( 1./( phi1s/R1s + phi2s/R2s + phi3s/R3s ) );
    ht = simplify ( ilaplace(RHs, s, t));
    h = double( subs(ht, 't', vt) );
    h(1)= 2*h(1); % Correção por causa da função Heaviside(t)
end

```

## B.2 Caso 1D 1: Fase elástica e fase viscosa

| Grupo | $E^{(1)}$ | $E^{(2)}$ | $M^{(1)}$ | $M^{(2)}$ | $\eta^{(1)}$  | $\eta^{(2)}$ |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------|--------------|
| (a)   | 3.162     | 0         | 0         | 2.512     | $\infty$      | 78.5         |
| (b)   | 80 GPa    | 0 Pa      | 0 Pa      | 70 GPa    | $\infty$ Pa s | 9 TPa s      |

Tabela B.2: Parâmetros dos grupos (a) e (b) de acordo com kernel Zener.

### B.2.1 Programa 1:

```

clear all,clc;
pkg load symbolic
tempo = 300; t = linspace(0,tempo,301);
% Módulo elástico
E1 = 3.162;
% Módulo viscoelástico
E2 = 2.512;
% Módulo viscoso
eta = 78.5;
% Coeficiente de relaxamento
r = eta/E2;
% Fração volumétrica
phi = 0.1; % [0.1 0.7 0.9]
% Módulo de relaxamento uniforme, porém transitório
R1 = @(t) E1*ones(1,columns(t));
R2 = @(t) E2*exp(-t/r);
% Módulo efetivo de relaxamento (versão Reuss)
num = @(t) R1(t).*R2(t);
den = @(t,phi) R1(t).*(1-phi) + R2(t).*phi;
RH = @(t,phi) num(t)./den(t,phi);
% Processamento no domínio de Laplace utilizando o método simbólico
function h = L_iL(vt, phi, r1, r2)
    syms s t;
    phis = sym(phi);
    R1s = laplace(r1, t, s);
    R2s = laplace(r2, t, s);
    num = simplify ( R1s * R2s );
    den = simplify ( (1-phis)*R1s + phis*R2s );
    RHs = simplify ( num ./ den );
    ht = simplify ( ilaplace(RHs, s, t));
    h = double( subs(ht, 't', vt) );
    h(1)= 2*h(1); % Correção por causa da função Heaviside(t)
end

```

```
tic, RHL = L_iL(t, phi, R1, R2); Laplace = toc;
% Plotagem
f1 = figure; set(f1, 'Position', [0, 0, 600, 600]);
ftz = 22; clf; hold on; box on; grid minor;
D = 'DisplayName';
NameP = 'Homogeneização computacional';
tic, RHt = RH(t, phi); D_Temporal= toc;
plot(t, RHt, '-r',D,NameP,'linewidth',2);
NameR = 'Cruz-González et al. 2017';
plot(t, RHL, ':b',D,NameR,'linewidth',2);
% Configuração da figura
legend('fontsize',ftz,'Location','northeast','Interpreter','latex');
set(gca,'FontName','CMU Serif','FontSize',ftz,'TickLabelInterpreter',
↪ 'latex');
xlabel('$t$', 'Interpreter','latex');
ylabel('$R^H(t)$', 'Interpreter','latex');
hold off;
#print(f1, 'f1_600x600.png', '-dpng', '-r600');
```

## B.3 Caso 1D 2: Kernel Zener em ambas as fases

| Grupo | $E^{(1)}$ | $E^{(2)}$ | $M^{(1)}$ | $M^{(2)}$ | $\eta^{(1)}$ | $\eta^{(2)}$ |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------|--------------|
| (a)   | 0.6       | 1.36364   | 0.4       | -0.363636 | 0.12         | -0.0991734   |
| (b)   | 70 GPa    | 20 GPa    | 70 GPa    | 20 GPa    | 10 TPa s     | 5 TPa s      |

Tabela B.3: Parâmetros dos grupos (a) e (b) de acordo com o kernel Zener.

| $E^{(1)}$ | $E^{(2)}$ | $M^{(1)}$ | $M^{(2)}$ | $\eta^{(1)}$ | $\eta^{(2)}$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------|--------------|
| 70 GPa    | 20 GPa    | 70 GPa    | 90 GPa    | 10 TPa s     | 100 GPa s    |

Tabela B.4: Parâmetros de acordo com o kernel Zener

### B.3.1 Programa 2:

```

clear all,clc;
pkg load symbolic
tempo = 5; t = linspace(0,tempo,101);
% Módulo elástico
E1 = 70E9; % [Pa]
E2 = 20E9; % [Pa]
% Módulo viscoelástico
M1 = 70E9; % [Pa]
M2 = 20E9; % [Pa]
% Módulo viscoso
eta1 = 10E12; % [Pa s]
eta2 = 05E12; % [Pa s]
% Fração volumétrica
phi = [0.5 0.7 0.9];
% Razão de relaxamento
r1 = eta1/M1; % [s]
r2 = eta2/M2; % [s]
% Módulo de relaxamento uniforme, porém transitório
R1 = @(t) E1 + M1*exp(-t/r1);
R2 = @(t) E2 + M2*exp(-t/r2);
% Módulo efetivo de relaxamento (versão Reuss)
num = @(t) R1(t).*R2(t);
den = @(t,phi) R1(t).*(1-phi) + R2(t).*phi;
RH = @(t,phi) num(t)./den(t,phi);
% Processamento no domínio das frequências utilizando o método simbólico
function h = L_iL(vt, phi, r1, r2)
syms s t;

```

```

phis = sym(phi);
R1s = laplace(r1, t, s);
R2s = laplace(r2, t, s);
num = simplify ( R1s * R2s );
den = simplify ( (1-phis)*R1s + phis*R2s );
RHs = simplify ( num ./ den );
ht = simplify ( ilaplace(RHs, s, t));
h = double( subs(ht, 't', vt) );
h(1)= 2*h(1); % Correção por causa da função Heaviside(t)
end
RHL05 = L_iL(t, phi(1), R1, R2);
RHL07 = L_iL(t, phi(2), R1, R2);
RHL09 = L_iL(t, phi(3), R1, R2);
% Plotagem
f1 = figure; set(f1, 'Position', [0, 0, 600, 600]);
ftz = 22; clf; hold on; box on; grid minor;
D = 'DisplayName';
NameP = 'Homogeneização computacional';
%plot(t, RH(t, phi(1))/1E9, '-r',D,NameP,'linewidth',2);
%plot(t, RH(t, phi(2))/1E9, '-r',D,NameP,'linewidth',2);
plot(t, RH(t, phi(3))/1E9, '-r',D,NameP,'linewidth',2);
NameR = 'Transformada integral simbólica';
%plot(t, RHL05/1E9, ':b',D,NameR,'linewidth',2);
%plot(t, RHL07/1E9, ':b',D,NameR,'linewidth',2);
plot(t, RHL09/1E9, ':b',D,NameR,'linewidth',2);
% Configuração da figura
legend('fontsize',ftz,'Location','northeast','Interpreter','latex');
set(gca,'FontName','CMU Serif','FontSize',ftz,'TickLabelInterpreter',
↵ 'latex');
xlabel('$t$ [s]','Interpreter','latex');
ylabel('$R^H(t)$ [GPa]','Interpreter','latex');
hold off;
#print(f1, 'f1_600x600.png', '-dpng', '-r600');

```

## B.4 Caso 1D 3: Núcleo de Scott Blair e Rabotnov em ambas as fases

| Fase | $\mu_0$ [MPa] | $\alpha$ [1] | $\beta$ [dias <sup>(<math>\alpha-1</math>)</sup> ] | $\kappa$ [dias <sup>(<math>\alpha-1</math>)</sup> ] |
|------|---------------|--------------|--|---|
| (1)  | 1.76          | 0.47         | 0.98   | 49.6  |
| (2)  | 0.98          | 0.47         | 0.45   | 29.6  |

Alguns autores utilizam  $\alpha$  ou  $\beta$  com sinal trocado; esta tabela é compatível com a Equação (2.66).

Tabela B.5: Parâmetros das fases (1) e (2) de acordo com o kernel de Scott Blair e Rabotnov.

### B.4.1 Programa 3:

```

clear all,clc;
tempo = 5; t = linspace(0,tempo,101);
% Beta      Lambda      Mu inicial      Alpha      Tau
B1 = 0.98; k1 = 49.6; mu1 = 1.76E6; a1 = 0.47; tau1 = 0;
B2 = 0.45; k2 = 29.6; mu2 = 0.98E6; a2 = 0.47; tau2 = 0;
% Função Scott Blair - Rabotnov
SBR1 = @(t) rabotnov_kernel(a1, B1, t, tau1); % plot(t,SBR1(t),'xco'), hold
→ on
SBR2 = @(t) rabotnov_kernel(a2, B2, t, tau2); % plot(t,SBR2(t),'xmo'), hold
→ off
% Fração volumétrica
phi = [0.2 0.5 0.8];
% Módulo de relaxamento
R1 = @(t) k1*mu1*SBR1(t); % plot(t,R1(t),'xco'), hold on
R2 = @(t) k2*mu2*SBR2(t); % plot(t,R2(t),'xmo'), hold off
% Módulo efetivo de relaxamento ( RH(t) )
RH = @(t,phi) ( phi./R1(t) + (1-phi)./R2(t) ).^(-1); % plot(t, RH(t,phi(2))
→ , 'xro')
% Módulo efetivo de relaxamento ( RM(t) ) segundo Cruz-González et al.
MH = @(phi) ( phi/(k1*mu1) + (1-phi)/(k2*mu2) )^(-1); % MH(phi(2))
xn = @(phi) (1-phi)*k1*mu1*B2 + phi*k2*mu2*B1;
xd = @(phi) (1-phi)*k1*mu1 + phi*k2*mu2;
xo = @(phi) xn(phi)/xd(phi); % xo(phi(2))
RM = @(t,phi) MH(phi)*rabotnov_kernel_v000(0.47, xo(phi), t, 0); % plot(t,
→ RM(t,phi(2)) , 'xbo')
% Plotagem
f1 = figure; set(f1, 'Position', [0, 0, 600, 600]);
ftz = 22; clf; hold on; box on; grid minor;
D = 'DisplayName';

```

```
NameP = 'Homogeneização computacional';
%plot(t, RH(t,phi(1))/1E6, '-r',D,NameP,'linewidth',2);
%plot(t, RH(t, phi(2))/1E6, '-r',D,NameP,'linewidth',2);
plot(t, RH(t, phi(3))/1E6, '-r',D,NameP,'linewidth',2);
NameR = 'Cruz-González et al. 2018';
%plot(t, RM(t,phi(1))/1E6, ':b',D,NameR,'linewidth',2);
%plot(t, RM(t,phi(2))/1E6, ':b',D,NameR,'linewidth',2);
plot(t, RM(t,phi(3))/1E6, ':b',D,NameR,'linewidth',2);
% Configuração da figura
legend('fontsize',ftz,'Location','northeast','Interpreter','latex');
set(gca,'FontName','CMU Serif','FontSize',ftz,'TickLabelInterpreter',
↪ 'latex');
xlabel('$t$ [dias]','Interpreter','latex');
ylabel('$R^H(t)$ [MPa]','Interpreter','latex');
hold off;
#print(f1, 'f1_600x600.png', '-dpng', '-r600');
```

## B.5 Caso 1D 4: Kernel Zener com três fases

| $E_0$    | $E^{(2)}$ | $E^{(3)}$ | $\tau$ | $g$     |
|----------|-----------|-----------|--------|---------|
| 75 [kPa] | 90 [kPa]  | 105 [kPa] | 15 [s] | 0.8 [1] |

Neste caso de estudo o Kernel Zener é adaptado ao formato da Equação (4.8).

Tabela B.6: Parâmetros de acordo com o kernel Zener, e duas fases elásticas.

### B.5.1 Programa 4:

```

clear all,clc;
pkg load symbolic
tmax = 45; t = linspace(0,tmax,tmax+1)'; nt = rows(t);
% Módulo de relaxamento instantâneo
Eo = 75; % [kPa]
% Tempo de relaxamento
tau= 15; % [s]
% Relação dos módulos de Young (g=E1/Eo)
g = 0.8; % [1]
% Módulo de relaxamento uniforme, porém transitório
R1 = @(t) Eo*( 1 - g*( 1-exp( -t/tau ) ) ); % [kPa] plot(t,R1(t)), hold on
R2 = @(t) 90*ones(size(t)); % [kPa] plot(t,R2(t))
R3 = @(t) 105*ones(size(t)); % [kPa] plot(t,R3(t)), hold off
% Funções para o processamento no domínio de Laplace utilizando o método
↪ simbólico
function h = L_iL_2f(vt, phi1, phi2, r1, r2)
    syms s t;
    phi1s = sym(phi1);
    phi2s = sym(phi2);
    R1s = laplace(r1, t, s);
    R2s = laplace(r2, t, s);
    RHs = simplify( 1./( phi1s/R1s + phi2s/R2s ) );
    ht = simplify ( ilaplace(RHs, s, t));
    h = double( subs(ht, 't', vt) );
    h(1)= 2*h(1); % Correção por causa da função Heaviside(t)
end
function h = L_iL_3f(vt, phi1, phi2, phi3, r1, r2, r3)
    syms s t;
    phi1s = sym(phi1);
    phi2s = sym(phi2);
    phi3s = sym(phi3);
    R1s = laplace(r1, t, s);

```



```

R2s = laplace(r2, t, s);
R3s = laplace(r3, t, s);
RHs = simplify( 1./( phi1s/R1s + phi2s/R2s + phi3s/R3s ) );
ht = simplify ( ilaplace(RHs, s, t));
h = double( subs(ht, 't', vt) );
h(1)= 2*h(1); % Correção por causa da função Heaviside(t)
end

% Frações volumétricas da primeira homogeneização
phi1_1H = 0.8;
phi2_1H = 1 - phi1_1H;
% Frações volumétricas da segunda homogeneização
phi1_2H = (2/3)*0.8;
phi2_2H = (2/3)*0.2;
phi3_2H = 1 - phi1_2H - phi2_2H;

% Coeficiente efetivo - primeira homogeneização ( 1H )
% Domínio de Laplace
RL_1H = L_iL_2f(t, phi1_1H, phi2_1H, R1, R2); % plot(t,RL_1H)
% Domínio do tempo
Rt_1H = zeros(size(t));
for k=1:1:nt
    Rt_1H(k) = 1/( phi1_1H/R1(k) + phi2_1H/R2(k) );
end
% Importação de dados de comparação
R_1H = csvread('Rh_1H.csv'); t_1H = R_1H(:,1); R_1H = R_1H(:,2); #
↪ plot(t_1H,R_1H,'b')

% Coeficiente efetivo - segunda homogeneização ( 2H )
% Domínio de Laplace
RL_2H = L_iL_3f(t, phi1_2H, phi2_2H, phi3_2H, R1, R2, R3); % plot(t,RL_2H)
% Domínio do tempo
Rt_2H = zeros(size(t));
for k=1:1:nt
    Rt_2H(k) = 1/( phi1_2H/R1(k) + phi2_2H/R2(k) + phi3_2H/R2(k) );
end
% Importação de dados de comparação
R_2H = csvread('Rh_2H.csv'); t_2H = R_2H(:,1); R_2H = R_2H(:,2); #
↪ plot(t_2H,R_2H,'b')

% Plotagem
% Primeira homogeneização ( 1H )
f_1H = figure; set(f_1H, 'Position', [0,0, 600, 600]);
ftz = 22; clf; hold on; box on; grid minor;
plot(t , Rt_1H,' -r','DisplayName','Homogeneização
↪ computacional','markersize',5,'linewidth',2);

```

```

plot(t    , RL_1H, '-g', 'DisplayName', 'Transformada integral
↳  simbólica', 'markersize', 5, 'linewidth', 1);
plot(t_1H, R_1H , '--b', 'DisplayName', 'Cruz-González et al. 2022'
↳  , 'markersize', 5, 'linewidth', 1);
% Configuração da figura
legend('fontsize',ftz,'Location','northeast','Interpreter','latex');
set(gca,'FontName','CMU Serif','FontSize',ftz,'TickLabelInterpreter',
↳  'latex');
xlabel('$t$ [s]','Interpreter','latex');
ylabel('$R^H(t)$ [kPa]','Interpreter','latex');
xlim([0, tmax]); xticks([0:5:tmax]);
hold off;
% Segunda homogenização ( 2H )
f_2H = figure; set(f_2H, 'Position', [0,0, 600, 600]);
ftz = 22; clf; hold on; box on; grid minor;
plot(t    , Rt_2H, '-r', 'DisplayName', 'Homogeneização
↳  computacional', 'markersize', 5, 'linewidth', 2);
plot(t    , RL_2H, '-g', 'DisplayName', 'Transformada integral
↳  simbólica', 'markersize', 5, 'linewidth', 1);
plot(t_2H, R_2H , '--b', 'DisplayName', 'Cruz-González et al. 2022'
↳  , 'markersize', 5, 'linewidth', 1);
% Configuração da figura
legend('fontsize',ftz,'Location','northeast','Interpreter','latex');
set(gca,'FontName','CMU Serif','FontSize',ftz,'TickLabelInterpreter',
↳  'latex');
xlabel('$t$ [s]','Interpreter','latex');
ylabel('$R^H(t)$ [kPa]','Interpreter','latex');
xlim([0, tmax]); xticks([0:5:tmax]);
hold off;

```

## B.6 Caso estratificado 1: Fase elástica e fase com kernel de Dischinger

### B.6.1 Programa 5:

```

clear all,clc;
% Módulo de compressibilidade volumétrica (Bulk)
K1 = 10E3; % [GPa]
K2 = 10E3; % [GPa]
% Módulo de cisalhamento (\mu)
mu1 = @(t) 8571*ones(size(t)); % [GPa] plot(mu1(t)), hold on
mu2 = @(t) 8571*exp(8571*(exp(-0.026*t))/35667); % [GPa] plot(mu2(t)),
    ↪ hold off
% Compressibilidade (\lambda) mu1(0)
lmd1 = @(t) K1 - (2/3)*mu1(t); % [GPa] plot(t,lmd1(t)), hold on
lmd2 = @(t) K2 - (2/3)*mu2(t); % [GPa] plot(t,lmd2(t)), hold off
% Módulo de relaxamento uniforme, porém transitório
Z0 = zeros(3,3);
R1 = @(t) [cellfun(@(f) f(t), {
    @(t) lmd1(t) + 2*mu1(t), @(t) lmd1(t),          @(t) lmd1(t);
    @(t) lmd1(t),          @(t) lmd1(t) + 2*mu1(t), @(t) lmd1(t);
    @(t) lmd1(t),          @(t) lmd1(t),          @(t) lmd1(t) +
    ↪ 2*mu1(t) }), Z0;
Z0, cellfun(@(f) f(t), {
    @(t) mu1(t), @(t) 0,          @(t) 0;
    @(t) 0,          @(t) mu1(t), @(t) 0;
    @(t) 0,          @(t) 0,          @(t) mu1(t) } ) ];
%R1t = arrayfun(@(t) R1(t), t, 'UniformOutput', false);
R2 = @(t) [cellfun(@(f) f(t), {
    @(t) lmd2(t) + 2*mu2(t), @(t) lmd2(t),          @(t) lmd2(t);
    @(t) lmd2(t),          @(t) lmd2(t) + 2*mu2(t), @(t) lmd2(t);
    @(t) lmd2(t),          @(t) lmd2(t),          @(t) lmd2(t) +
    ↪ 2*mu2(t) }), Z0;
Z0, cellfun(@(f) f(t), {
    @(t) mu2(t), @(t) 0,          @(t) 0;
    @(t) 0,          @(t) mu2(t), @(t) 0;
    @(t) 0,          @(t) 0,          @(t) mu2(t) } ) ];
%R2t = arrayfun(@(t) R2(t), t, 'UniformOutput', false);
tmax = 150;
t = linspace(0,tmax,tmax+1)'; nt = rows(t);
% Fração volumétrica
phi = 0.5;
% Direção de estratificação
%d = [1,5,6]; % Simetria axial em y1

```

```

%d = [2,4,6]; % Simetria axial em y2
d = [3,4,5]; % Simetria axial em y3
% Inicialização de coeficientes
Z = zeros(size(t));
R11 = Z; R12 = Z; R13 = Z; R33 = Z; R44 = Z; R66 = Z; % Homogeneização
↳ computacional
R11t = Z; R12t = Z; R13t = Z; R33t = Z; R44t = Z; R66t = Z; % Homogeneização
↳ assintótica
% Operador de homogeneização
for k=1:1:nt
    R1t = R1(t(k)); I1 = R1t(:,d); D1 = inv(R1t(d,d)); J1 = I1';
    R2t = R2(t(k)); I2 = R2t(:,d); D2 = inv(R2t(d,d)); J2 = I2';
    RH_vt = phi * R1t + (1-phi) * R2t ; % 6x6
    RH_ID = phi * I1*D1 + (1-phi) * I2*D2 ; % 6x3
    RH_D = inv( phi * D1 + (1-phi) * D2 ) ; % 3x3
    RH_DJ = phi * D1*J1 + (1-phi) * D2*J2 ; % 3x6
    RH_IDJ = phi * I1*D1*J1 + (1-phi) * I2*D2*J2; % 6x6
    RH = RH_vt + RH_ID*RH_D*RH_DJ - RH_IDJ;
    R11(k) = RH(1,1); % RH1111 = RH2222
    R12(k) = RH(1,2); % RH1122
    R13(k) = RH(1,3); % RH1133 = RH2233
    R33(k) = RH(3,3); % RH3333
    R44(k) = RH(4,4); % RH2323 = RH3131
    R66(k) = RH(6,6); % RH1212 = (RH1111-RH2222)/2
end
% Cálculo utilizando as expressões analíticas
C1 = lmd1(t)+2*mu1(t); B1 = 1./C1; D1 = 1./mu1(t); E1 = lmd1(t).*B1; F1 =
↳ lmd1(t).*E1; % Fase 1
C2 = lmd2(t)+2*mu2(t); B2 = 1./C2; D2 = 1./mu2(t); E2 = lmd2(t).*B2; F2 =
↳ lmd2(t).*E2; % Fase 2
R66t = phi*mu1(t) + (1-phi)*mu2(t); % R1212(t)
R44t = 1./( phi*D1 + (1-phi)*D2 ); % R2323(t)=R3131(t)
R33t = 1./( phi*B1 + (1-phi)*B2 ); % R3333(t)
Raux = ( phi*E1 + (1-phi)*E2); R13t = R33t.*Raux; % R1133(t)
R11a = phi*C1 + (1-phi)*C2; R11b = Raux.^2; R11c = phi*F1 + (1-phi)*F2;
↳ R11t = R11a + R11b.*R33t - R11c; % R1111(t)=R2222(t)
R12t = R11t - 2*R66t;
% Importação de dados:
%Rh11
H11MHA = csvread('R11_MHA.csv'); t11MHA = H11MHA(:,1); R11MHA =
↳ H11MHA(:,2); # plot(t11MHA,R11MHA)
H11AVM = csvread('R11_AVM.csv'); t11AVM = H11AVM(:,1); R11AVM =
↳ H11AVM(:,2); # plot(t11AVM,R11AVM)
%Rh12
H12MHA = csvread('R12_MHA.csv'); t12MHA = H12MHA(:,1); R12MHA =
↳ H12MHA(:,2); # plot(t12MHA,R12MHA)

```

```

%Rh33
H33MHA = csvread('R33_MHA.csv'); t33MHA = H33MHA(:,1); R33MHA =
↪ H33MHA(:,2); # plot(t33MHA,R33MHA)
H33AVM = csvread('R33_AVM.csv'); t33AVM = H33AVM(:,1); R33AVM =
↪ H33AVM(:,2); # plot(t33AVM,R33AVM)
%Rh44
H44MHA = csvread('R44_MHA.csv'); t44MHA = H44MHA(:,1); R44MHA =
↪ H44MHA(:,2); # plot(t44MHA,R44MHA)
% Figura R11 \to R1111
f11 = figure; set(f11, 'Position', [0,0, 1200, 600]);
ftz = 22; clf; hold on; box on; grid minor; delta = 3;
D = 'DisplayName'; M = 'markersize'; L = 'linewidth';
NameH = 'Homogeneização assintótica' ; tH = t(1:delta:end); RH =
↪ R11t(1:delta:end)/R11t(1);
NameC = 'Homogeneização computacional'; tC = t; RC =
↪ R11 / R11(1);
NameM = 'Maghous e Creuss 2002' ; tM = t11AVM(1:delta:end); RM =
↪ R11AVM(1:delta:end);
NameG = 'Cruz-González et al. 2018' ; tG = t11MHA; RG =
↪ R11MHA;
plot(tH, RH, 'ko',D,NameH,M,5,L,2);
plot(tC, RC, '-r ',D,NameC,M,5,L,2);
plot(tM, RM, 'go',D,NameM,M,5,L,2);
plot(tG, RG, '-b ',D,NameG,M,5,L,2);
% Configuração da figura
legend('fontsize',ftz,'Location','northeast','Interpreter','latex');
set(gca,'FontName','CMU Serif','FontSize',ftz,'TickLabelInterpreter',
↪ 'latex');
xlabel('$t$ [dias]','Interpreter','latex');
ylabel('$R^H_{1111}(t)/R^H_{1111}(0)$','Interpreter','latex');
xlim([0, tmax]); xticks([0:10:tmax]); hold off;

% Figura R12 \to R1122
f12 = figure; set(f12, 'Position', [0,0, 1200, 600]);
ftz = 22; clf; hold on; box on; grid minor; delta = 3;
D = 'DisplayName'; M = 'markersize'; L = 'linewidth';
NameH = 'Homogeneização assintótica' ; tH = t(1:delta:end); RH =
↪ R12t(1:delta:end)/R12t(1);
NameC = 'Homogeneização computacional'; tC = t; RC =
↪ R12 / R12(1);
NameG = 'Cruz-González et al. 2018' ; tG = t12MHA; RG =
↪ R12MHA;
plot(tH, RH, 'ko',D,NameH,M,5,L,2);
plot(tC, RC, '-r ',D,NameC,M,5,L,2);
plot(tG, RG, '-b ',D,NameG,M,5,L,2);
% Configuração da figura

```

```

legend('fontsize',ftz,'Location','southeast','Interpreter','latex');
set(gca,'FontName','CMU Serif','FontSize',ftz,'TickLabelInterpreter',
↪ 'latex');
xlabel('$t$ [dias]','Interpreter','latex');
ylabel('$R^{\{H\}}_{\{1122\}}(t)/R^{\{H\}}_{\{1122\}}(0)$','Interpreter','latex');
xlim([0, tmax]); xticks([0:10:tmax]); hold off;

% Figura R13 \to R1133
f13 = figure; set(f13, 'Position', [0,0, 1200, 600]);
ftz = 22; clf; hold on; box on; grid minor; delta = 3;
D = 'DisplayName'; M = 'markersize'; L = 'linewidth';
NameH = 'Homogeneização assintótica' ; tH = t(1:delta:end); RH =
↪ R13t(1:delta:end)/R13t(1);
NameC = 'Homogeneização computacional'; tC = t; RC =
↪ R13 / R13(1);
plot(tH, RH, ' ko',D,NameH,M,5,L,2);
plot(tC, RC, ' -r ',D,NameC,M,5,L,2);
% Configuração da figura
legend('fontsize',ftz,'Location','northeast','Interpreter','latex');
set(gca,'FontName','CMU Serif','FontSize',ftz,'TickLabelInterpreter',
↪ 'latex');
xlabel('$t$ [dias]','Interpreter','latex');
ylabel('$R^{\{H\}}_{\{1133\}}(t)/R^{\{H\}}_{\{1133\}}(0)$','Interpreter','latex');
xlim([0, tmax]); xticks([0:10:tmax]); hold off;

% Figura R33 \to R3333
f33 = figure; set(f33, 'Position', [0,0, 1200, 600]);
ftz = 22; clf; hold on; box on; grid minor; delta = 3;
D = 'DisplayName'; M = 'markersize'; L = 'linewidth';
NameH = 'Homogeneização assintótica' ; tH = t(1:delta:end); RH =
↪ R33t(1:delta:end)/R33t(1);
NameC = 'Homogeneização computacional'; tC = t; RC =
↪ R33 / R33(1);
NameM = 'Maghous e Creuss 2002' ; tM = t33AVM(1:delta:end); RM =
↪ R33AVM(1:delta:end);
NameG = 'Cruz-González et al. 2018' ; tG = t33MHA; RG =
↪ R33MHA;
plot(tH, RH, ' ko',D,NameH,M,5,L,2);
plot(tC, RC, ' -r ',D,NameC,M,5,L,2);
plot(tM, RM, ' go',D,NameM,M,5,L,2);
plot(tG, RG, ' -b ',D,NameG,M,5,L,2);
% Configuração da figura
legend('fontsize',ftz,'Location','northeast','Interpreter','latex');
set(gca,'FontName','CMU Serif','FontSize',ftz,'TickLabelInterpreter',
↪ 'latex');
xlabel('$t$ [dias]','Interpreter','latex');

```

```

ylabel('$R^{\text{H}}_{\text{3333}}(t)/R^{\text{H}}_{\text{3333}}(0)$','Interpreter','latex');
xlim([0, tmax]); xticks([0:10:tmax]); hold off;

% Figura R44 \to R2323 = R3131
f44 = figure; set(f44, 'Position', [0,0, 1200, 600]);
ftz = 22; clf; hold on; box on; grid minor; delta = 3;
D = 'DisplayName'; M = 'markersize'; L = 'linewidth';
NameH = 'Homogeneização assintótica' ; tH = t(1:delta:end);      RH =
    ↪ R44t(1:delta:end)/R44t(1);
NameC = 'Homogeneização computacional'; tC = t;                  RC =
    ↪ R44 / R44(1);
NameG = 'Cruz-González et al. 2018' ; tG = t44MHA;              RG =
    ↪ R44MHA;
plot(tH, RH, 'ko',D,NameH,M,5,L,2);
plot(tC, RC, '-r ',D,NameC,M,5,L,2);
plot(tG, RG, '-b ',D,NameG,M,5,L,2);
% Configuração da figura
legend('fontsize',ftz,'Location','northeast','Interpreter','latex');
set(gca,'FontName','CMU Serif','FontSize',ftz,'TickLabelInterpreter',
    ↪ 'latex');
xlabel('$t$ [dias]','Interpreter','latex');
ylabel('$R^{\text{H}}_{\text{2323}}(t)/R^{\text{H}}_{\text{2323}}(0)$','Interpreter','latex');
xlim([0, tmax]); xticks([0:10:tmax]); hold off;

% Figura R66 \to R1212
f66 = figure; set(f66, 'Position', [0,0, 1200, 600]);
ftz = 22; clf; hold on; box on; grid minor; delta = 3;
D = 'DisplayName'; M = 'markersize'; L = 'linewidth';
NameH = 'Homogeneização assintótica' ; tH = t(1:delta:end);      RH =
    ↪ R66t(1:delta:end)/R66t(1);
NameC = 'Homogeneização computacional'; tC = t;                  RC =
    ↪ R66 / R66(1);
plot(tH, RH, 'ko',D,NameH,M,5,L,2);
plot(tC, RC, '-r ',D,NameC,M,5,L,2);
% Configuração da figura
legend('fontsize',ftz,'Location','northeast','Interpreter','latex');
set(gca,'FontName','CMU Serif','FontSize',ftz,'TickLabelInterpreter',
    ↪ 'latex');
xlabel('$t$ [dias]','Interpreter','latex');
ylabel('$R^{\text{H}}_{\text{1212}}(t)/R^{\text{H}}_{\text{1212}}(0)$','Interpreter','latex');
xlim([0, tmax]); xticks([0:10:tmax]); hold off;

```