

Universidade Federal Fluminense

JÉSSICA MOURA DA FONSECA

Novas Formulações em Diferenças Finitas para
a Equação da Difusão-Convecção com
Convecção Dominante

VOLTA REDONDA

2025

JÉSSICA MOURA DA FONSECA

Novas Formulações em Diferenças Finitas para a Equação da Difusão-Convecção com Convecção Dominante

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Orientador:

Gustavo Benitez Alvarez

Coorientador:

Cleyton Senior Stampa

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

VOLTA REDONDA

2025

Ficha catalográfica automática - SDC/BEM
Gerada com informações fornecidas pelo autor

F676n Fonseca, Jessica Moura da
Novas Formulações em Diferenças Finitas para a Equação da Difusão-Convecção com Convecção Dominante / Jessica Moura da Fonseca. - 2025.
139 f.: il.

Orientador: Gustavo Benitez Alvarez.
Coorientador: Cleyton Senior Stampa.
Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense, Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda, Volta Redonda, 2025.

1. Método de Diferenças Finitas. 2. Equação da Difusão-Convecção. 3. Convecção Dominante. 4. Equações Diferenciais Parciais. 5. Produção intelectual. I. Alvarez, Gustavo Benitez, orientador. II. Stampa, Cleyton Senior, coorientador. III. Universidade Federal Fluminense. Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda. IV. Título.

CDD - XXX

Novas Formulações em Diferenças Finitas para a Equação da Difusão-Convecção com Convecção Dominante

Jéssica Moura da Fonseca

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada por:

Documento assinado digitalmente
 **GUSTAVO BENITEZ ALVAREZ**
Data: 10/01/2025 06:45:41-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Gustavo Benitez Alvarez, D.Sc. / MCCT-UFF (Orientador)

Documento assinado digitalmente
 **CLEYTON SENIOR STAMPA**
Data: 14/01/2025 13:45:51-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Cleyton Senior Stampa, D.Sc. / UFF (Coorientador)

Documento assinado digitalmente
 **TIAGO ARAUJO NEVES**
Data: 13/01/2025 06:43:13-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Tiago Araújo Neves, D.Sc. / MCCT-UFF

Documento assinado digitalmente
 **VANESSA DA SILVA GARCIA**
Data: 10/01/2025 09:41:08-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Vanessa da Silva Garcia, D.Sc. / MCCT-UFF

Documento assinado digitalmente
 **WELTON ALVES DE MENEZES**
Data: 13/01/2025 09:09:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Welton Alves de Menezes, D.Sc. / UFF

Documento assinado digitalmente
 **ISAMARA LANDIM NUNES ARAUJO**
Data: 13/01/2025 10:17:22-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Isamara Landim Nunes Araújo, D.Sc. / UFF

Documento assinado digitalmente
 **JEFERSON OSMAR DE ALMEIDA**
Data: 13/01/2025 19:24:48-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Pesq. Jeferson Osmar de Almeida, D.Sc. / COPPE-UFRJ

Volta Redonda, Janeiro de 2025.

Resumo

A Equação da Difusão-Convecção é uma Equação Diferencial Parcial que descreve o comportamento de sistemas físicos sujeitos aos processos de difusão e convecção, resultando do acoplamento dessas duas equações fundamentais. Esta dissertação aborda a resolução numérica de problemas de difusão-convecção com convecção dominante, um desafio significativo em simulações numéricas de escoamentos de fluidos e no transporte de calor e massa. Quando a convecção prevalece sobre a difusão, as soluções numéricas enfrentam dificuldades devido à presença de camadas limite, regiões onde ocorrem mudanças abruptas na solução. A aplicação de métodos tradicionais, como os de elementos finitos e diferenças finitas, frequentemente resulta em oscilações indesejadas e baixa precisão, a menos que sejam utilizadas malhas altamente refinadas, o que eleva os custos computacionais. Neste contexto, o objetivo principal desta pesquisa foi desenvolver e implementar novos esquemas de diferenças finitas, visando aumentar a precisão e a estabilidade dos métodos sem a necessidade de refinamentos excessivos de malha. Para isso, foram analisados esquemas numéricos existentes e introduzidas modificações e a criação de novos esquemas inéditos na tentativa de superar limitações conhecidas, como instabilidades e oscilações indesejadas. Os novos métodos foram primeiramente validados em problemas unidimensionais de difusão-convecção, em estêncil de três pontos, onde alguns esquemas apresentaram soluções estáveis, superando métodos tradicionais em precisão, como os Métodos de Diferenças Finitas Centradas e Upwind. Ainda em 1D, foram mostradas as aproximações de cada método para as derivadas primeiras e derivadas segundas para análises de desempenho. Posteriormente, os esquemas foram adaptados e testados em problemas bidimensionais, agora em estêncil de cinco pontos, com foco na avaliação do comportamento em situações mais complexas. Entre os métodos propostos, apenas um dos esquemas destacou-se por oferecer melhores resultados em precisão e estabilidade, enquanto outros métodos mostraram oscilações indesejadas, indicando a necessidade de ajustes adicionais ou ainda, da criação de novos esquemas. A pesquisa conclui que os esquemas propostos representam um avanço na modelagem numérica da equação de difusão-convecção, proporcionando alternativas eficientes e estáveis para a resolução desse tipo de problema.

Abstract

The Convection-Diffusion Equation is a Partial Differential Equation that describes the behavior of physical systems subjected to the processes of diffusion and convection, resulting from the coupling of these two fundamental equations. This dissertation addresses the numerical solution of convection-diffusion problems with dominant convection, a significant challenge in numerical simulations of fluid flow and heat and mass transfer. When convection prevails over diffusion, numerical solutions face difficulties due to the presence of boundary layers, regions where abrupt changes in the solution occur. The application of traditional methods, such as finite elements and finite differences, often results in undesired oscillations and low accuracy, unless highly refined meshes are used, which increases computational costs. In this context, the main objective of this research was to develop and implement new finite difference schemes, aiming to improve the accuracy and stability of the methods without the need for excessive mesh refinements. For this, existing numerical schemes were analyzed, and modifications and the creation of novel schemes were introduced in an attempt to overcome known limitations, such as instabilities and undesired oscillations. The new methods were first validated in one-dimensional convection-diffusion problems, using a three-point stencil, where some schemes presented stable solutions, surpassing traditional methods in terms of accuracy, such as Central and Upwind Finite Difference Methods. In 1D, the approximations of each method for the first and second derivatives were also shown for performance analysis. Subsequently, the schemes were adapted and tested in two-dimensional problems, now using a five-point stencil, with a focus on evaluating their behavior in more complex situations. Among the proposed methods, only one of the schemes stood out by offering better results in terms of accuracy and stability, while other methods exhibited undesired oscillations, indicating the need for further adjustments or even the creation of new schemes. The research concludes that the proposed schemes represent an advancement in the numerical modeling of the convection-diffusion equation, providing efficient and stable alternatives for solving this type of problem.

Palavras-chave

1. Método Diferenças Finitas Centradas
2. Método Diferenças Finitas Upwind
3. Equação da Difusão-Convecção
4. Convecção Dominante
5. Equações Diferenciais Parciais
6. Estabilização

Glossário

CC	:	Centrado Clássico
EDP	:	Equação Diferencial Parcial
ETL	:	Erro de Truncamento Local
NE	:	Novo Esquema
Pe	:	Número de Pécelet

Sumário

1	Introdução	9
2	Fundamentação Teórica	11
2.1	Equação Difusiva-Convectiva	11
2.2	Método de Diferenças Finitas	13
3	Novos Esquemas em Diferenças Finitas	18
3.1	Caso Unidimensional	18
3.1.1	Novos Esquemas de Diferenças Finitas	18
3.1.2	Erro de Truncamento Local	21
3.2	Caso Bidimensional	23
3.2.1	Novos Esquemas de Diferenças Finitas	23
3.2.2	Erro de Truncamento Local	26
4	Resultados Numéricos	29
4.1	Resultados Unidimensionais	29
4.1.1	Solução Exata Suave Parábola	30
4.1.2	Solução Exata Suave Seno	39
4.1.3	Solução Exata com Camada Limite Externa	48
4.1.3.1	Camada Limite Externa à Direita	48
4.1.3.2	Camada Limite Externa à Esquerda	58
4.1.4	Solução Exata com Camada Limite Interna	66
4.1.5	Solução Exata Proposta por LeVeque	76

4.1.6	Síntese dos Resultados Unidimensionais	84
4.2	Resultados Bidimensionais	85
4.2.1	Caso Teste	85
4.2.2	Caso I	88
4.2.3	Caso II	93
4.2.4	Caso III	98
4.2.5	Caso IV	102
4.2.6	Caso V	108
4.2.7	Caso VI	112
4.2.8	Caso VII	116
4.2.9	Caso VIII	120
4.2.10	Síntese dos Resultados Bidimensionais	123
4.3	Análise do Custo Temporal	124
4.3.1	Unidimensional	124
4.3.2	Bidimensional	126
5	Conclusões e Trabalhos Futuros	129
5.1	Conclusões	129
5.2	Trabalhos Futuros	130
	Referências	131
	Apêndice A – Códigos	133
A.1	Unidimensional	133
A.2	Bidimensional	136

Capítulo 1

Introdução

A Equação da Difusão-Convecção é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) amplamente utilizada para descrever fenômenos físicos que envolvem simultaneamente os processos de difusão e convecção. Esse modelo matemático resulta do acoplamento de duas equações fundamentais e é aplicado em diversas áreas da engenharia e das ciências, como na modelagem de escoamentos de fluidos, transferência de calor e transporte de massa [21, 7, 13]. Na sua forma estacionária, a equação é dada por:

$$\begin{cases} f = -D\Delta u + v \cdot \nabla u & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde u representa a variável de interesse (como temperatura ou concentração), D é o coeficiente de difusividade, v é o campo de velocidade, f é o termo fonte, g representa as condições de contorno e Ω denota o domínio computacional.

Problemas dominados pela convecção, como escoamentos em alta velocidade e transporte em reatores químicos ou processos de transferência de calor forçada, são notoriamente desafiadores devido à presença de camadas limite. Essas regiões, caracterizadas por variações abruptas na solução, impõem dificuldades significativas à estabilidade e à precisão de métodos numéricos clássicos, como os Métodos de Diferenças Finitas e de Elementos Finitos.

A aplicação desses métodos em suas formulações tradicionais frequentemente resulta em oscilações numéricas indesejadas e baixa precisão, especialmente na ausência de malhas altamente refinadas, que acarretam elevados custos computacionais [22, 19, 12]. Para superar essas limitações, diversas abordagens têm sido propostas tanto no âmbito de Elementos Finitos quanto em Diferenças Finitas.

No contexto de Elementos Finitos, estratégias como formulações Galerkin descontínuas e métodos híbridos que combinam formulações contínuas e descontínuas têm sido exploradas para mitigar instabilidades em problemas de convecção-difusão [10, 9]. Embora tais abordagens tenham apresentado avanços notáveis, são frequentemente associadas a maior complexidade de implementação.

Por outro lado, os Métodos de Diferenças Finitas permanecem amplamente utilizados devido à sua simplicidade, eficiência e facilidade de aplicação em malhas estruturadas. Nesse contexto, esforços significativos têm sido direcionados ao desenvolvimento de esquemas de alta ordem e estratégias híbridas, visando aprimorar a precisão e estabilidade desses métodos [14, 5, 24, 11, 16].

Nesta dissertação, o foco recai sobre o desenvolvimento de novos esquemas de diferenças finitas voltados à solução numérica da Equação da Difusão-Convecção em situações onde a convecção é o fenômeno predominante. O objetivo é aprimorar a precisão e estabilidade dos métodos numéricos, reduzindo a necessidade de refinamentos excessivos de malha e, conseqüentemente, os custos computacionais.

Para tal, esquemas existentes foram analisados criticamente, introduzindo-se modificações e propondo-se novos métodos capazes de mitigar oscilações e instabilidades observadas em abordagens convencionais. Os métodos desenvolvidos foram validados inicialmente em problemas unidimensionais, empregando estênceis de três pontos, e posteriormente adaptados para problemas bidimensionais, utilizando estênceis de cinco pontos.

Resultados comparativos com métodos clássicos, como Diferenças Finitas Centradas e *Upwind*, evidenciam os ganhos obtidos em termos de precisão e estabilidade em diferentes cenários. Entretanto, algumas limitações ainda foram identificadas, indicando a necessidade de ajustes adicionais e o potencial para futuros aprimoramentos.

A dissertação está estruturada da seguinte forma: no Capítulo 2, apresenta-se uma fundamentação teórica sobre a Equação da Difusão-Convecção e os Métodos de Diferenças Finitas. O Capítulo 3 descreve os novos esquemas numéricos desenvolvidos. O Capítulo 4 traz a análise detalhada dos resultados obtidos. Por fim, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Equação Difusiva-Convectiva

A Equação da Difusão-Convecção desempenha um papel crucial em muitos fenômenos de engenharia e física, pois é usada para modelar e resolver problemas de transporte em diversas áreas, como poluição do ar e de lençóis freáticos, fluxo em reservatórios de petróleo, modelagem de semicondutores, entre outras aplicações [7]. A equação é descrita por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (D\nabla)u + f, \quad (2.1)$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla \cdot (D\nabla)u + f, \quad (2.2)$$

em que u se trata de uma quantidade física de interesse, \vec{v} é um campo vetorial, D representa viscosidade ou difusividade e f é uma fonte dentro do domínio estipulado.

A solução da equação (2.1) é uma função $u(x, y, t)$ que varia conforme o tempo em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com Ω aberto e limitado, no qual o contorno Γ é suave e definido [10].

Quando $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, diz-se que a Equação da Difusão-Convecção é estacionária e depende somente de suas variáveis espaciais. A partir disso, a equação (2.1) pode ser reescrita como abaixo, sendo identificada como uma equação diferencial parcial elíptica [13, 7].

$$-D\Delta u + v \cdot \nabla u = f. \quad (2.3)$$

Em muitos problemas de difusão-convecção, o coeficiente de convecção é significativamente maior que o de difusão, caracterizando problemas dominados por convecção ou singularmente perturbados. Esta relação entre os coeficientes é descrita pelo número de Péclet, que é definido como a razão entre os termos de transporte convectivo e difusivo [20, 7]. Matematicamente, o número de Péclet em uma dimensão (Pe) é dado por:

$$Pe = \frac{vh}{2D}, \quad (2.4)$$

onde h é o espaçamento da malha. Para $Pe \gg 1$, a convecção domina sobre a difusão, enquanto para $Pe \ll 1$, a difusão é mais significativa.

Em duas dimensões, tem-se o Pe_x , Pe_y e o Pe , respectivamente representados abaixo pelas equações (2.5) a (2.7).

$$Pe_x = \frac{v_1 h_x}{2D}. \quad (2.5)$$

$$Pe_y = \frac{v_2 h_y}{2D}. \quad (2.6)$$

$$Pe = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} h}{2D}. \quad (2.7)$$

Em relação às soluções desta equação, o capítulo 4 traz algumas soluções exatas para o caso de uma dimensão. Já para duas dimensões, há poucas soluções exatas gerais, tudo dependerá da geometria, coeficientes e condições de contorno [3].

As soluções numéricas desses problemas enfrentam sérias dificuldades devido à presença de camadas limite, que são pequenas regiões caracterizadas por variações abruptas nas derivadas da solução. Essas camadas tornam os métodos tradicionais de Elementos Finitos ou Diferenças Finitas inadequados para esses problemas, pois podem gerar oscilações espúrias e baixa precisão [22, 19, 12].

Para mitigar esses problemas, é necessário introduzir malhas refinadas nas regiões onde as camadas limite estão presentes, utilizando estratégias de refinamento de malha adaptativo. No entanto, essa abordagem deve ser implementada com cautela para evitar a propagação de erros para áreas onde o refinamento não é necessário, o que poderia acarretar custos computacionais excessivos [18, 4, 17].

Assim, o desenvolvimento de métodos numéricos que minimizem as oscilações espúrias e a suavização excessiva tem se tornado um objetivo central. Esses métodos devem considerar tanto a robustez quanto o custo computacional, especialmente ao lidar com os

grandes sistemas lineares que surgem de problemas físicos complexos [14, 5, 15].

2.2 Método de Diferenças Finitas

O Método de Diferenças Finitas é uma técnica amplamente utilizada para a discretização de problemas contínuos. Ele envolve a definição das variáveis de interesse em pontos discretos distribuídos ao longo de uma malha que cobre o domínio da equação. Fundamentado no Teorema de Taylor, o método aproxima as derivadas e os termos de uma Equação Diferencial Parcial (EDP) por meio de séries de potências, resultando em um esquema de Diferenças Finitas que fornece uma solução numérica aproximada [19, 22]. A precisão dessa aproximação depende da ordem das séries de Taylor e da resolução da malha, de modo que uma malha mais refinada pode melhorar a precisão, embora com um aumento no custo computacional.

Neste processo, a região da EDP é mapeada por meio de uma malha discreta, onde a variável dependente é aproximada a partir dos valores de solução em pontos vizinhos. As derivadas parciais da EDP são então estimadas utilizando o Teorema de Taylor, resultando em um sistema de equações que pode ser resolvido numericamente [20, 14]. Esse procedimento converte o problema contínuo em um sistema de equações lineares, fornecendo a solução aproximada da EDP.

Uma das principais vantagens do Método de Diferenças Finitas é a sua simplicidade tanto conceitual quanto prática, o que o torna particularmente eficiente para domínios de geometria simples, como retângulos. Quando malhas uniformes são empregadas, as matrizes geradas apresentam uma estrutura esparsa, facilitando a solução do sistema linear [26, 25, 4]. Em casos que envolvem geometria mais complexa, o método pode ser aprimorado com técnicas de adaptação de malha, permitindo alcançar alta precisão sem impor um custo computacional elevado [4, 17].

Em relação à aproximação das derivadas, as funções no Método de Diferenças Finitas utilizam o polinômio de Taylor para interpolar a função u em torno de um ponto arbitrário x . A partir dessa interpolação, são obtidas aproximações para as derivadas, que dão origem a diferentes esquemas de discretização, cada um com suas características de precisão [14, 25].

Seja uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pertencente a C^∞ sendo Ω o domínio, x um ponto

no interior de tal domínio e o ponto $x + h \in \Omega$:

$$u(x + h) = u(x) + u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2!} + u'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots + u^{n-1}(x)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \mathcal{O}(h^n). \quad (2.8)$$

Para um ponto $x - h \in \Omega$:

$$u(x - h) = u(x) - u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2!} - u'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots + u^{n-1}(x)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \mathcal{O}(h^n), \quad (2.9)$$

onde

$$\mathcal{O}(h^n) = \frac{u^{(n)}(x + \theta_n h)h^n}{n!} \text{ com } 0 < \theta_n < 1 \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Desconsiderando o termo $\mathcal{O}(h^n)$ e truncando o lado direito, obtém-se uma aproximação para $u(x + h)$ com erro igual a $\mathcal{O}(h^n)$.

Em diferenças finitas, deve-se conhecer o valor u nos pontos da malha e substituir as derivadas parciais da EDP para resolver por aproximação nestes pontos. Tomando-se a equação (2.8) e isolando a primeira derivada, tem-se:

$$u'(x) = \frac{u(x + h) - u(x)}{h} - \frac{h}{2!}u''(x) - \frac{h^2}{3!}u'''(x) - \dots \quad (2.11)$$

Admitindo-se erro de truncamento com precisão de primeira ordem, tem-se

$$u'(x) = \frac{u(x + h) - u(x)}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (2.12)$$

A equação (2.12) é chamada de aproximação adiantada ou avançada (*forward*) de primeira ordem para derivada primeira. De maneira análoga e utilizando a equação (2.9), é possível obter o esquema para a expressão chamada de retardada ou atrasada (*backward*).

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x - h)}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (2.13)$$

Os erros de truncamento para ambos os esquemas são representados por $\mathcal{O}(h)$ sendo de primeira ordem. Há ainda mais um esquema bastante utilizado, que possui erro de segunda ordem, ou seja $\mathcal{O}(h^2)$, sendo mais preciso que os anteriores. É chamado de aproximação centrada (*centered*), obtido através da subtração e posterior manipulação das equações (2.8) e (2.9).

$$u'(x) = \frac{u(x + h) - u(x - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.14)$$

O domínio é representado de forma particionada, onde analisa-se a solução de forma pontual. Dá-se o nome para cada ponto do domínio de nó e a distância entre eles será chamada de h . Para facilitar a escrita, pode-se reescrever as aproximações para as primeiras derivadas obtidas acima com índices convenientes, assim, $u(x + h)$ pode ser reescrito como U_{i+1} , $u(x - h)$ pode ser reescrito como U_{i-1} e ainda, $u(x)$ pode ser reescrito como U_i . Assim, desprezando o erro de truncamento, pode-se escrever:

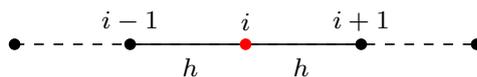


Figura 2.1: Malha unidimensional [8].

Adiantada:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{U_{i+1} - U_i}{h}. \quad (2.15)$$

Retardada:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{h}. \quad (2.16)$$

Centrada:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}. \quad (2.17)$$

As derivadas de segunda ordem também podem ser aproximadas utilizando as relações obtidas de forma análoga às utilizadas para obter as formulações das derivadas de primeira ordem. Porém, neste caso, truncam-se as equações (2.8) e (2.9) após o termo que contém a segunda derivada e, em seguida, somam-se termo a termo. Resultando nas seguintes aproximações para as segundas derivadas:

Adiantada:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{U_i - 2U_{i+1} + U_{i+2}}{h^2}. \quad (2.18)$$

Retardada:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{U_i - 2U_{i-1} + U_{i-2}}{h^2}. \quad (2.19)$$

Centrada:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}. \quad (2.20)$$

Para o caso bidimensional utiliza-se o raciocínio análogo, porém dessa vez serão utilizados quatro vizinhos, ao invés de apenas dois, como no caso unidimensional. Nesse caso tem-se uma função $u(x, y)$ com $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pertencente à C^∞ , sendo x e y pontos interiores ao domínio Ω com $(x + h_x)$ e $(y + h_y)$:

$$u(x + h_x, y) = u(x, y) + u'(x, y)h_x + u''(x, y)\frac{h_x^2}{2!} + \mathcal{O}(h_x^3). \quad (2.21)$$

$$u(x - h_x, y) = u(x, y) - u'(x, y)h_x + u''(x, y)\frac{h_x^2}{2!} + \mathcal{O}(h_x^3). \quad (2.22)$$

$$u(x, y + h_y) = u(x, y) + u'(x, y)h_y + u''(x, y)\frac{h_y^2}{2!} + \mathcal{O}(h_y^3). \quad (2.23)$$

$$u(x, y - h_y) = u(x, y) - u'(x, y)h_y + u''(x, y)\frac{h_y^2}{2!} + \mathcal{O}(h_y^3). \quad (2.24)$$

Através de manipulações nas equações (2.21) e (2.24) chega-se nas aproximações das derivadas de primeira e segunda ordem em duas dimensões. Nesse contexto, o domínio é representado por dois índices, i e j . É importante observar que está sendo considerada uma malha uniforme, onde os espaçamentos entre os nós em x e y são iguais a h_x e h_y , respectivamente.

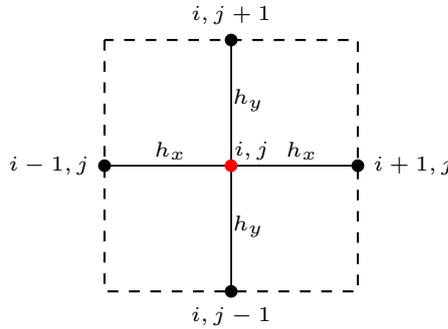


Figura 2.2: Malha bidimensional [8].

Então, para a primeira derivada, são obtidas as seguintes aproximações:

Adiantadas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h_x}. \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{h_y}. \quad (2.26)$$

Retardadas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h_x}. \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{h_y}. \quad (2.28)$$

Centradas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h_x}. \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2h_y}. \quad (2.30)$$

Para as segundas derivadas:

Adiantadas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i,j} - 2U_{i+1,j} + U_{i+2,j}}{(h_x)^2}. \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j} - 2U_{i,j+1} + U_{i,j+2}}{(h_y)^2}. \quad (2.32)$$

Retardadas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i,j} - 2U_{i-1,j} + U_{i-2,j}}{(h_x)^2}. \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j} - 2U_{i,j-1} + U_{i,j-2}}{(h_y)^2}. \quad (2.34)$$

Centradas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{(h_x)^2}. \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{(h_y)^2}. \quad (2.36)$$

O esquema conhecido como *Upwind* é caracterizado pelo uso de uma aproximação avançada ou atrasada de primeira ordem para o termo convectivo, e uma aproximação centrada de segunda ordem para o termo difusivo. Este método é aplicável tanto a problemas unidimensionais quanto bidimensionais. Ao empregar o esquema *Upwind*, ocorre a introdução de falsa dispersão numérica, o que resulta em soluções aproximadas com maior suavização [7].

Capítulo 3

Novos Esquemas em Diferenças Finitas

Os novos esquemas desenvolvidos nesta dissertação foram desenvolvidos de maneira semelhante ao utilizado em [8], motivados pela intenção de gerar esquemas linearmente independentes (LI), com o objetivo de estabelecer uma base para o método denominado Método Completo, conforme descrito também em [8, 2, 1]. Esses esquemas podem ser interpretados como médias no entorno do ponto i , seguindo a lógica de aproximações locais para a resolução numérica das equações envolvidas.

A formulação dos métodos contempla a obtenção de aproximações para a derivada primeira, enquanto para a derivada segunda foi empregado o esquema de diferenças finitas centrado de segunda ordem. No caso bidimensional, foram realizadas adaptações específicas para ampliar a aplicabilidade dos métodos originalmente desenvolvidos para problemas unidimensionais.

3.1 Caso Unidimensional

3.1.1 Novos Esquemas de Diferenças Finitas

A forma do estêncil em uma dimensão é escrito como na equação (3.1), que caracteriza uma equação matricial da forma $MU = F$.

$$AU_{i-1} + BU_i + CU_{i+1} = f_i, \quad (3.1)$$

onde A são os elementos da diagonal inferior, C são os elementos da diagonal superior, B representa os elementos da diagonal principal da matriz M , e F representa o vetor termo

fonte.

- **Método de Diferenças Finitas Centradas Clássico (CC):**

Este é o esquema clássico onde a derivada primeira é aproximada por:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{1}{2h}(U_{i+1} - U_{i-1}). \quad (3.2)$$

E o estêncil final é dado por:

$$\left(-\frac{D}{h^2} - \frac{v}{2h}\right)U_{i-1} + \left(\frac{2D}{h^2}\right)U_i + \left(-\frac{D}{h^2} + \frac{v}{2h}\right)U_{i+1} = f_i. \quad (3.3)$$

- **Método de Diferenças Finitas *Upwind*:**

Aproximação para a derivada primeira retardada:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{1}{h}(U_i - U_{i-1}). \quad (3.4)$$

Aproximação para a derivada primeira adiantada:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{1}{h}(U_{i+1} - U_i). \quad (3.5)$$

Assim, a equação final do estêncil utilizando a aproximação retardada é:

$$\left(-\frac{D}{h^2} - \frac{v}{h}\right)U_{i-1} + \left(\frac{2D}{h^2} + \frac{v}{h}\right)U_i + \left(-\frac{D}{h^2}\right)U_{i+1} = f_i. \quad (3.6)$$

E a equação final do estêncil utilizando a aproximação adiantada é:

$$\left(-\frac{D}{h^2}\right)U_{i-1} + \left(\frac{2D}{h^2} - \frac{v}{h}\right)U_i + \left(-\frac{D}{h^2} + \frac{v}{h}\right)U_{i+1} = f_i. \quad (3.7)$$

- **Novo Esquema 1 (NE-1):**

Este esquema utilizou a aproximação:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{1}{2h}(U_{i-1} - 4U_i + 3U_{i+1}). \quad (3.8)$$

Assim, a equação final do estêncil é:

$$\left(-\frac{D}{h^2} + \frac{v}{2h}\right)U_{i-1} + \left(\frac{2D}{h^2} - \frac{2v}{h}\right)U_i + \left(-\frac{D}{h^2} + \frac{3v}{2h}\right)U_{i+1} = f_i. \quad (3.9)$$

- **Novo Esquema 2 (NE-2):**

Aproximação para a derivada primeira:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{1}{4h}(-U_{i-1} - 2U_i + 3U_{i+1}). \quad (3.10)$$

A equação final do estêncil é:

$$\left(-\frac{D}{h^2} - \frac{v}{4h}\right)U_{i-1} + \left(\frac{2D}{h^2} - \frac{v}{2h}\right)U_i + \left(-\frac{D}{h^2} + \frac{3v}{4h}\right)U_{i+1} = f_i. \quad (3.11)$$

• **Novo Esquema 3 (NE-3):**

Aproximação para derivada primeira:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{1}{4h}(-3U_{i-1} + 2U_i + U_{i+1}). \quad (3.12)$$

Assim, a equação final do estêncil é:

$$\left(-\frac{D}{h^2} - \frac{3v}{4h}\right)U_{i-1} + \left(\frac{2D}{h^2} + \frac{v}{2h}\right)U_i + \left(-\frac{D}{h^2} + \frac{v}{4h}\right)U_{i+1} = f_i. \quad (3.13)$$

• **Novo Esquema 4 (NE-4):**

Aproximação para derivada primeira:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{1}{2h} \left(\left(-\frac{vh}{2D} - 1\right)U_{i-1} + \left(\frac{vh}{D}\right)U_i + \left(-\frac{vh}{2D} + 1\right)U_{i+1} \right). \quad (3.14)$$

A equação final do estêncil é:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{D}{h^2} + \frac{v}{2h} \left(\frac{-vh}{2D} - 1\right)\right)U_{i-1} + \\ & + \left(\frac{2D}{h^2} + \frac{v^2}{2D}\right)U_i + \left(-\frac{D}{h^2} + \frac{v}{2h} \left(\frac{-vh}{2D} + 1\right)\right)U_{i+1} = f_i. \end{aligned} \quad (3.15)$$

• **Novo Esquema 5 (NE-5):**

Aproximação para derivada primeira:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{1}{8h}(-5U_{i-1} + 2U_i + 3U_{i+1}). \quad (3.16)$$

Equação final do estêncil:

$$\left(-\frac{D}{h^2} - \frac{5v}{8h}\right)U_{i-1} + \left(\frac{2D}{h^2} + \frac{v}{4h}\right)U_i + \left(-\frac{D}{h^2} + \frac{3v}{8h}\right)U_{i+1} = f_i. \quad (3.17)$$

• **Novo Esquema 6 (NE-6):**

Aproximação da primeira derivada:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{1}{2h} ((\alpha - 1)U_{i-1} - 2\alpha U_i + (\alpha + 1)U_{i+1}). \quad (3.18)$$

Portanto, a equação final do estêncil é:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{D}{h^2} + \frac{v}{2h}(\alpha - 1) \right) U_{i-1} + \\ & + \left(\frac{2D}{h^2} + \frac{v\alpha}{h} \right) U_i + \left(-\frac{D}{h^2} + \frac{v}{2h}(\alpha + 1) \right) U_{i+1} = f_i, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde, α é representado pela equação (3.20) e Pe pela equação (2.4), citada no capítulo 2.

$$\alpha = \frac{(1 + Pe) - e^{2Pe}[2 + e^{2Pe}(Pe - 1)]}{Pe[1 + e^{2Pe}(e^{2Pe} - 2)]}. \quad (3.20)$$

Este esquema utiliza α como o parâmetro livre. Este, é escolhido de forma que a solução numérica seja nodalmente exata para o problema com camada limite externa à direita. Esta é uma estratégia comumente usada nos chamados *Optimal Upwind* or *Optimal Weighted Upwind Methods* [6, 23].

3.1.2 Erro de Truncamento Local

O Cálculo de Erro de Truncamento Local é feito ao substituir o U_i por valores da solução exata $u(x_i)$ na equação (3.1), discretizada. Para calcular o ETL em uma dimensão, utilizou-se as equações (3.21) e (3.22) e ainda, considerou-se $u(x_i) = u_i$ com o intuito de simplificação da escrita.

$$U_{i+1} = u(x) + u^{(1)}(x)h + u^{(2)}(x)\frac{h^2}{2} + u^{(3)}(x)\frac{h^3}{6} + u^{(4)}(x)\frac{h^4}{24} + \mathcal{O}(h^5). \quad (3.21)$$

$$U_{i-1} = u(x) - u^{(1)}(x)h + u^{(2)}(x)\frac{h^2}{2} - u^{(3)}(x)\frac{h^3}{6} + u^{(4)}(x)\frac{h^4}{24} + \mathcal{O}(h^5). \quad (3.22)$$

Assim, foram obtidos os seguintes resultados:

- **Método Diferenças Finitas Centradas Clássico:**

$$\tau_i = \frac{vu_i^{(3)}h^2}{6} - \frac{u_i^{(4)}Dh^2}{12} + \mathcal{O}(h^3). \quad (3.23)$$

- **Método Diferenças Finitas *Upwind*:**

Retardado:

$$\tau_i = -\frac{vu_i^{(2)}h}{2} + \frac{vu_i^{(3)}h^2}{6} - \frac{u_i^{(4)}Dh^2}{12} - \frac{vu_i^{(4)}h^3}{24} + \mathcal{O}(h^4). \quad (3.24)$$

Adiantado:

$$\tau_i = \frac{vu_i^{(2)}h}{2} + \frac{vu_i^{(3)}h^2}{6} - \frac{u_i^{(4)}Dh^2}{12} + \frac{vu_i^{(4)}h^3}{24} + \mathcal{O}(h^4). \quad (3.25)$$

- Novo Esquema 1 (NE-1):

$$\tau_i = vu_i^{(2)}h + \frac{vu_i^{(3)}h^2}{6} + \frac{u_i^{(4)}(-D + vh)h^2}{12} + \mathcal{O}(h^3). \quad (3.26)$$

- Novo Esquema 2 (NE-2):

$$\tau_i = \frac{vu_i^{(2)}h}{4} + \frac{vu_i^{(3)}h^2}{2} - \frac{u_i^{(4)}Dh^2}{12} + \frac{vu_i^{(4)}h^3}{48} + \mathcal{O}(h^4). \quad (3.27)$$

- Novo Esquema 3 (NE-3):

$$\tau_i = -\frac{vu_i^{(2)}h}{4} + \frac{vu_i^{(3)}h^2}{6} + u_i^{(4)} \left(-\frac{Dh^2}{12} - \frac{vh^3}{48} \right) + \mathcal{O}(h^4). \quad (3.28)$$

- Novo Esquema 4 (NE-4):

$$\tau_i = -\frac{v^2u_i^{(2)}h^2}{4D} + \frac{vu_i^{(3)}h^2}{6} + u_i^{(4)} \left(-\frac{Dh^2}{12} - \frac{v^2h^4}{D} \right) + \mathcal{O}(h^5). \quad (3.29)$$

- Novo Esquema 5 (NE-5):

$$\tau_i = -\frac{vu_i^{(2)}h}{8} + \frac{vu_i^{(3)}h^2}{6} + u_i^{(4)} \left(-\frac{Dh^2}{12} - \frac{vh^3}{48} \right) + \mathcal{O}(h^4). \quad (3.30)$$

- Novo Esquema 6 (NE-6):

$$\tau_i = -\frac{\alpha vu_i^{(2)}h}{2} + \frac{vu_i^{(3)}h^2}{6} + u_i^{(4)} \left(-\frac{Dh^2}{12} + \frac{\alpha vh^3}{24} \right) + \mathcal{O}(h^4), \quad (3.31)$$

onde α é descrito pela equação (3.20).

3.2 Caso Bidimensional

3.2.1 Novos Esquemas de Diferenças Finitas

O Caso Bidimensional é feito de forma análoga ao Caso Unidimensional, porém, utiliza um estêncil de cinco pontos. A equação do estêncil é dada pela equação (3.32).

$$AU_{i,j-1} + BU_{i-1,j} + CU_{i,j} + DU_{i+1,j} + EU_{i,j+1} = f_{i,j}. \quad (3.32)$$

- **Método de Diferenças Finitas Centradas Clássico (CC-2D):**

Neste esquema clássico, temos as equações (3.33) e (3.34) como aproximações para as derivadas primeiras em relação a x e y .

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{2h_x}(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}). \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{2h_y}(U_{i,j+1} - U_{i,j-1}). \quad (3.34)$$

E o estêncil final é dado por:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{D}{h_y^2} - \frac{v_2}{2h_y}\right)U_{i,j-1} + \left(-\frac{D}{h_x^2} - \frac{v_1}{2h_x}\right)U_{i-1,j} + \\ & \left(\frac{2D}{h_x^2} + \frac{2D}{h_y^2}\right)U_{i,j} + \left(-\frac{D}{h_x^2} + \frac{v_1}{2h_x}\right)U_{i+1,j} + \left(-\frac{D}{h_y^2} + \frac{v_2}{2h_y}\right)U_{i,j+1} = f_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

- **Método de Diferenças Finitas *Upwind* (2D):**

Aproximação para as derivadas primeiras em relação a x e y retardado:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{h_x}(U_{i,j} - U_{i-1,j}). \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{h_y}(U_{i,j} - U_{i,j-1}). \quad (3.37)$$

Aproximação para as derivadas primeiras em relação a x e y adiantado:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{h_x}(U_{i+1,j} - U_{i,j}). \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{h_y}(U_{i,j+1} - U_{i,j}). \quad (3.39)$$

Assim, a equação do estêncil com aproximação retardada é:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{D}{h_y^2} - \frac{v_2}{h_y}\right) U_{i,j-1} + \left(-\frac{D}{h_x^2} + \frac{v_1}{h_x}\right) U_{i-1,j} + \\ & \left(-\frac{2D}{h_x^2} - \frac{2D}{h_y^2} + \frac{v_1}{h_x} + \frac{v_2}{h_y}\right) U_{i,j} + \left(-\frac{D}{h_x^2}\right) U_{i+1,j} \left(-\frac{D}{h_y^2}\right) U_{i,j+1} = f_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

E a equação do estêncil com aproximação adiantada é:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{D}{h_y^2}\right) U_{i,j-1} + \left(-\frac{D}{h_x^2}\right) U_{i-1,j} + \left(-\frac{2D}{h_x^2} - \frac{2D}{h_y^2} - \frac{v_1}{h_x} - \frac{v_2}{h_y}\right) U_{i,j} + \\ & + \left(-\frac{D}{h_x^2} + \frac{v_1}{h_x}\right) U_{i+1,j} \left(-\frac{D}{h_y^2} + \frac{v_2}{h_y}\right) U_{i,j+1} = f_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

- **Novo Esquema 1 (NE-1-2D):**

Aproximação para as derivadas primeiras em relação a x e y :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{2h_x} (U_{i-1,j} - 4U_{i,j} + 3U_{i+1,j}), \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{2h_y} (U_{i,j-1} - 4U_{i,j} + 3U_{i,j+1}). \quad (3.43)$$

Assim, a equação final do estêncil é:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{D}{h_y^2} + \frac{v_2}{2h_y}\right) U_{i,j-1} + \left(-\frac{D}{h_x^2} + \frac{v_1}{2h_x}\right) U_{i-1,j} + \left(\frac{2D}{h_x^2} - \frac{2v_1}{h_x} + \frac{2D}{h_y^2} - \frac{2v_2}{h_y}\right) U_{i,j} + \\ & + \left(-\frac{D}{h_x^2} + \frac{3v_1}{2h_x}\right) U_{i+1,j} \left(-\frac{D}{h_y^2} + \frac{3v_2}{2h_y}\right) U_{i,j+1} = f_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

- **Novo Esquema 2 (NE-2-2D):**

Aproximação para as derivadas primeiras em relação a x e y :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{4h_x} (-U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + 3U_{i+1,j}). \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{4h_y} (-U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + 3U_{i,j+1}). \quad (3.46)$$

A equação final do estêncil é:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{D}{h_y^2} - \frac{v_2}{4h_y}\right) U_{i,j-1} + \left(-\frac{D}{h_x^2} + \frac{v_1}{4h_x}\right) U_{i-1,j} + \left(\frac{2D}{h_x^2} - \frac{v_1}{2h_x} + \frac{2D}{h_y^2} - \frac{v_2}{2h_y}\right) U_{i,j} + \\ & + \left(-\frac{D}{h_x^2} + \frac{3v_1}{4h_x}\right) U_{i+1,j} \left(-\frac{D}{h_y^2} + \frac{3v_2}{4h_y}\right) U_{i,j+1} = f_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

- **Novo Esquema 3 (NE-3-2D):**

Aproximação para as derivadas primeiras em relação a x e y :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{4h_x}(-3U_{i-1,j} + 2U_{i,j} + U_{i+1,j}). \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{4h_y}(-3U_{i,j-1} + 2U_{i,j} + U_{i,j+1}). \quad (3.49)$$

Assim, a equação final do estêncil é:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{D}{h_y^2} - \frac{3v_2}{4h_y}\right)U_{i,j-1} + \left(-\frac{D}{h_x^2} - \frac{3v_1}{4h_x}\right)U_{i-1,j} + \left(\frac{2D}{h_x^2} + \frac{v_1}{2h_x} + \frac{2D}{h_y^2} - \frac{v_2}{2h_y}\right)U_{i,j} + \\ + \left(-\frac{D}{h_x^2} + \frac{v_1}{4h_x}\right)U_{i+1,j} + \left(-\frac{D}{h_y^2} + \frac{v_2}{4h_y}\right)U_{i,j+1} = f_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

- **Novo Esquema 4 (NE-4-2D):**

Aproximação para as derivadas primeiras em relação a x e y :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{2h_x} \left(\left(-\frac{v_1 h_x}{2D} - 1\right)U_{i-1,j} + \left(\frac{v h}{D}\right)U_{i,j} + \left(-\frac{v h_x}{2D} + 1\right)U_{i+1,j} \right). \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{2h_y} \left(\left(-\frac{v_2 h_y}{2D} - 1\right)U_{i,j-1} + \left(\frac{v_2 h_y}{D}\right)U_{i,j} + \left(-\frac{v_2 h_y}{2D} + 1\right)U_{i,j+1} \right). \quad (3.52)$$

A equação final do estêncil é:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{D}{h_y^2} + \left[\left(\frac{v_2}{2h_y}\right)\left(-\frac{v_2 h_y}{2D} - 1\right)\right]\right)U_{i,j-1} + \left(-\frac{D}{h_x^2} + \left[\left(\frac{v_1}{2h_x}\right)\left(-\frac{v_1 h_x}{2D} - 1\right)\right]\right)U_{i-1,j} + \\ \left(\frac{2D}{h_x^2} + \frac{v_1^2}{2D} + \frac{2D}{h_y^2} + \frac{v_2^2}{2D}\right)U_{i,j} + \left(-\frac{D}{h_x^2} + \left[\left(\frac{v_1}{2h_x}\right)\left(-\frac{v_1 h_x}{2D} - 1\right)\right]\right)U_{i+1,j} + \\ + \left(-\frac{D}{h_y^2} + \left[\left(\frac{v_2}{2h_y}\right)\left(-\frac{v_2 h_y}{2D} - 1\right)\right]\right)U_{i,j+1} = f_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

- **Novo Esquema 5 (NE-5-2D):**

Aproximação para as derivadas primeiras em relação a x e y :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{8h_x}(-5U_{i-1,j} + 2U_{i,j} + 3U_{i+1,j}). \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{8h_y}(-5U_{i,j-1} + 2U_{i,j} + 3U_{i,j+1}). \quad (3.55)$$

A equação final do estêncil é:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{D}{h_y^2} - \frac{5v_2}{8h_y}\right) U_{i,j-1} + \left(-\frac{D}{h_x^2} - \frac{5v_1}{8h_x}\right) U_{i-1,j} + \left(\frac{2D}{h_x^2} + \frac{v_1}{4h_x} + \frac{2D}{h_y^2} + \frac{v_2}{4h_y}\right) U_{i,j} + \\ + \left(-\frac{D}{h_x^2} + \frac{3v_1}{8h_x}\right) U_{i+1,j} + \left(-\frac{D}{h_y^2} + \frac{3v_2}{8h_y}\right) U_{i,j+1} = f_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

- **Novo Esquema 6 (NE-6-2D):**

Aproximação para as derivadas primeiras em relação a x e y :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{2h_x} ((\alpha_x - 1)U_{i-1,j} - (2\alpha_x)U_{i,j} + (\alpha_x + 1)U_{i+1,j}). \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{2h_y} ((\alpha_y - 1)U_{i,j-1} - (2\alpha_y)U_{i,j} + (\alpha_y + 1)U_{i,j+1}). \quad (3.58)$$

Assim, a equação final do estêncil é:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{D}{h_y^2} + \left[\frac{v_2}{2h_y}(\alpha_y - 1)\right]\right) U_{i,j-1} + \left(-\frac{D}{h_x^2} + \left[\frac{v_1}{2h_x}(\alpha_x - 1)\right]\right) U_{i-1,j} + \\ \left(\frac{2D}{h_x^2} - \frac{v_1\alpha_x}{h_x} + \frac{2D}{h_y^2} - \frac{v_2\alpha_y}{h_y}\right) U_{i,j} + \left(-\frac{D}{h_x^2} + \left[\frac{v_1}{2h_x}(\alpha_x + 1)\right]\right) U_{i+1,j} + \\ + \left(-\frac{D}{h_y^2} + \left[\frac{v_2}{2h_y}(\alpha_y + 1)\right]\right) U_{i,j+1} = f_{i,j}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde, Pe_x e Pe_y são representados pelas equações (3.60) e (3.61) e α_x e α_y são representados pelas equações (3.62) e (3.63).

$$Pe_x = \frac{v_1 h_x}{2D}. \quad (3.60)$$

$$Pe_y = \frac{v_2 h_y}{2D}. \quad (3.61)$$

$$\alpha_x = \frac{(1 + Pe_x) - e^{2Pe_x}[2 + e^{2Pe_x}(Pe_x - 1)]}{Pe_x[1 + e^{2Pe_x}(e^{2Pe_x} - 2)]}. \quad (3.62)$$

$$\alpha_y = \frac{(1 + Pe_y) - e^{2Pe_y}[2 + e^{2Pe_y}(Pe_y - 1)]}{Pe_y[1 + e^{2Pe_y}(e^{2Pe_y} - 2)]}. \quad (3.63)$$

3.2.2 Erro de Truncamento Local

O Cálculo do ETL em duas dimensões é feito de forma análoga ao cálculo de uma dimensão. Para uma notação mais simplificada, utiliza-se $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$ e ainda, as notações abaixo:

$$u_{i,j}^{(nx)} = \frac{\partial^n u(x_i, y_j)}{\partial x^n}. \quad (3.64)$$

$$u_{i,j}^{(ny)} = \frac{\partial^n u(x_i, y_j)}{\partial y^n}. \quad (3.65)$$

Para calcular o ETL em duas dimensões utiliza-se as equações:

$$U_{i+1,j} = u_{i,j} + u_{i,j}^{(1x)}h + u_{i,j}^{(2x)}\frac{h^2}{2} + u_{i,j}^{(3x)}\frac{h^3}{6} + u_{i,j}^{(4x)}\frac{h^4}{24} + \mathcal{O}(h^5). \quad (3.66)$$

$$U_{i-1,j} = u_{i,j} - u_{i,j}^{(1x)}h + u_{i,j}^{(2x)}\frac{h^2}{2} - u_{i,j}^{(3x)}\frac{h^3}{6} + u_{i,j}^{(4x)}\frac{h^4}{24} + \mathcal{O}(h^5). \quad (3.67)$$

$$U_{i,j+1} = u_{i,j} + u_{i,j}^{(1y)}h + u_{i,j}^{(2y)}\frac{h^2}{2} + u_{i,j}^{(3y)}\frac{h^3}{6} + u_{i,j}^{(4y)}\frac{h^4}{24} + \mathcal{O}(h^5). \quad (3.68)$$

$$U_{i,j-1} = u_{i,j} - u_{i,j}^{(1y)}h + u_{i,j}^{(2y)}\frac{h^2}{2} - u_{i,j}^{(3y)}\frac{h^3}{6} + u_{i,j}^{(4y)}\frac{h^4}{24} + \mathcal{O}(h^5). \quad (3.69)$$

Assim, foram obtidos os seguintes resultados:

- **Método Diferenças Finitas Centradas Clássico (CC-2D):**

$$\tau_{i,j} = \frac{(v_1 u_{i,j}^{(3x)} + v_2 u_{i,j}^{(3y)})h^2}{6} - \frac{(u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)})Dh^2}{12} + \mathcal{O}(h^3). \quad (3.70)$$

- **Método Diferenças Finitas *Upwind* (2D):**

Retardado:

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} = & -\frac{(v_1 u_{i,j}^{(2x)} + v_2 u_{i,j}^{(2y)})h}{2} + \frac{(v_1 u_{i,j}^{(3x)} + v_2 u_{i,j}^{(3y)})Dh^2}{6} - \\ & -\frac{D(u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)})h^2}{12} - \frac{(v_1 u_{i,j}^{(4x)} + v_2 u_{i,j}^{(4y)})h^3}{24} + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Adiantado:

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} = & \frac{(v_1 u_{i,j}^{(2x)} + v_2 u_{i,j}^{(2y)})h}{2} + \frac{(v_1 u_{i,j}^{(3x)} + v_2 u_{i,j}^{(3y)})Dh^2}{6} - \\ & -\frac{(u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)})Dh^2}{12} + \frac{(v_1 u_{i,j}^{(4x)} + v_2 u_{i,j}^{(4y)})h^3}{24} + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned} \quad (3.72)$$

- **Novo Esquema 1 (NE-1-2D):**

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} = & (v_1 u_{i,j}^{(2x)} + v_2 u_{i,j}^{(2y)})h + \frac{(v_1 u_{i,j}^{(3x)} + v_2 u_{i,j}^{(3y)})h^2}{6} + \\ & + \frac{-(u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)})Dh^2 + (v_1 u_{i,j}^{(4x)} + v_2 u_{i,j}^{(4y)})h^3}{12} + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned} \quad (3.73)$$

- Novo Esquema 2 (NE-2-2D):

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} = & \frac{(v_1 u_{i,j}^{(2x)} + v_2 u_{i,j}^{(2y)})h}{4} + \frac{(v_1 u_{i,j}^{(3x)} + v_2 u_{i,j}^{(3y)})h^2}{6} - \\ & - \frac{(u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)})Dh^2}{12} + \frac{(v_1 u_{i,j}^{(4x)} + v_1 u_{i,j}^{(4y)})h^3}{48} + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned} \quad (3.74)$$

- Novo Esquema 3 (NE-3-2D):

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} = & -\frac{(v_1 u_{i,j}^{(2x)} + v_2 u_{i,j}^{(2y)})h}{4} + \frac{(v_1 u_{i,j}^{(3x)} + v_2 u_{i,j}^{(3y)})h^2}{6} - \\ & - \frac{(u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)})Dh^2}{12} - \frac{(v_1 u_{i,j}^{(4x)} + v_2 u_{i,j}^{(4y)})h^3}{48} + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned} \quad (3.75)$$

- Novo Esquema 4 (NE-4-2D):

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} = & -\frac{(v_1^2 u_{i,j}^{(2x)} + v_2^2 u_{i,j}^{(2y)})h^2}{4D} + \frac{(v_1 u_{i,j}^{(3x)} + v_2 u_{i,j}^{(3y)})h^2}{6} - \\ & - \frac{(u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)})Dh^2}{12} - \frac{(v_1^2 u_{i,j}^{(4x)} + v_2^2 u_{i,j}^{(4y)})h^4}{48D} + \mathcal{O}(h^5). \end{aligned} \quad (3.76)$$

- Novo Esquema 5 (NE-5-2D):

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} = & -\frac{(v_1 u_{i,j}^{(2x)} + v_2 u_{i,j}^{(2y)})h}{8} + \frac{(v_1 u_{i,j}^{(3x)} + v_2 u_{i,j}^{(3y)})h^2}{6} - \\ & - \frac{(u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)})Dh^2}{12} - \frac{(v_1 u_{i,j}^{(4x)} + v_2 u_{i,j}^{(4y)})h^3}{96} + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned} \quad (3.77)$$

- Novo Esquema 6 (NE-6-2D):

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} = & -\frac{(\alpha_x v_1 u_{i,j}^{(2x)} + \alpha_y v_2 u_{i,j}^{(2y)})h}{2} + \frac{(v_1 u_{i,j}^{(3x)} + v_2 u_{i,j}^{(3y)})h^2}{6} - \\ & - \frac{(u_{i,j}^{(4x)} + u_{i,j}^{(4y)})Dh^2}{12} + \frac{(\alpha_x v_1 u_{i,j}^{(4x)} + \alpha_y v_2 u_{i,j}^{(4y)})h^3}{24} + \mathcal{O}(h^4), \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde α_x e α_y são descritos pelas equações (3.62) e (3.63).

Capítulo 4

Resultados Numéricos

Este capítulo apresenta os resultados numéricos obtidos pela aplicação dos métodos em problemas unidimensionais e bidimensionais. A análise dos resultados tem como objetivo avaliar o desempenho dos métodos em termos de precisão, estabilidade e comportamento sob diferentes condições de contorno e configurações de malha.

No contexto unidimensional, são apresentados gráficos comparativos que ilustram o desempenho dos métodos em relação às soluções exatas e às aproximações para as derivadas de primeira e segunda ordem. Já no caso bidimensional, os gráficos demonstram o comportamento dos métodos em cenários mais complexos, destacando a influência de malhas bidimensionais e condições de contorno sobre os resultados. Essa análise permite verificar a robustez dos métodos diante de desafios computacionais mais significativos.

Para a implementação computacional dos esquemas numéricos, foi utilizado o software *MATLAB*[®], executado em um sistema operacional Linux Mint 21.2 Victoria, uma distribuição baseada no Ubuntu 22.04 LTS, configurada com o kernel Linux 5.15 e o ambiente gráfico Cinnamon 5.8.4. As simulações numéricas foram realizadas em um computador com especificações técnicas que garantem o desempenho necessário para os experimentos propostos: processador Intel Core i7-8565U com 4 núcleos e 8 *threads* (clock base de 1.8 GHz e máximo de 4.6 GHz), 16 GB de memória RAM DDR4, um disco de estado sólido A-Data SU810NS38 de 128 GB e um disco rígido Western Digital de 1 TB.

4.1 Resultados Unidimensionais

Nesta seção são ilustrados os resultados em uma dimensão da Equação Difusiva-Convectiva descrita pela equação (4.1), com as condições de contorno das equações (4.2)

e (4.3) obtidos através dos Novos Esquemas mencionados no capítulo anterior e eles são comparados com o Método de Diferenças Finitas Centrado Clássico e com a solução exata de cada uma das soluções.

$$-D \frac{d^2 u}{dx^2} + v \frac{du}{dx} = f(x) \quad x \in]0, 1[. \quad (4.1)$$

$$u(0) = \alpha \quad (4.2)$$

$$u(1) = \beta. \quad (4.3)$$

4.1.1 Solução Exata Suave Parábola

A Solução Exata Suave para a Equação Difusiva-Convectiva que resulta em uma parábola pode ser expressa pela equação (4.4), acompanhada da fonte expressa na equação (4.5), coeficiente difusivo $D = 10^{-2}$ e velocidade $\vec{v} = 1$. Para comparações, foram testados casos em que $h = 0.1$, $h = 0.04$ e $h = 0.02$. Esses valores geram, respectivamente, $Pe = 5$, $Pe = 2$ e $Pe = 1$.

$$\begin{cases} u(x) = x^2 + x + 1, \\ u(0) = 1, \\ u(1) = 3. \end{cases} \quad (4.4)$$

$$f(x) = 2(-D + vx) + v. \quad (4.5)$$

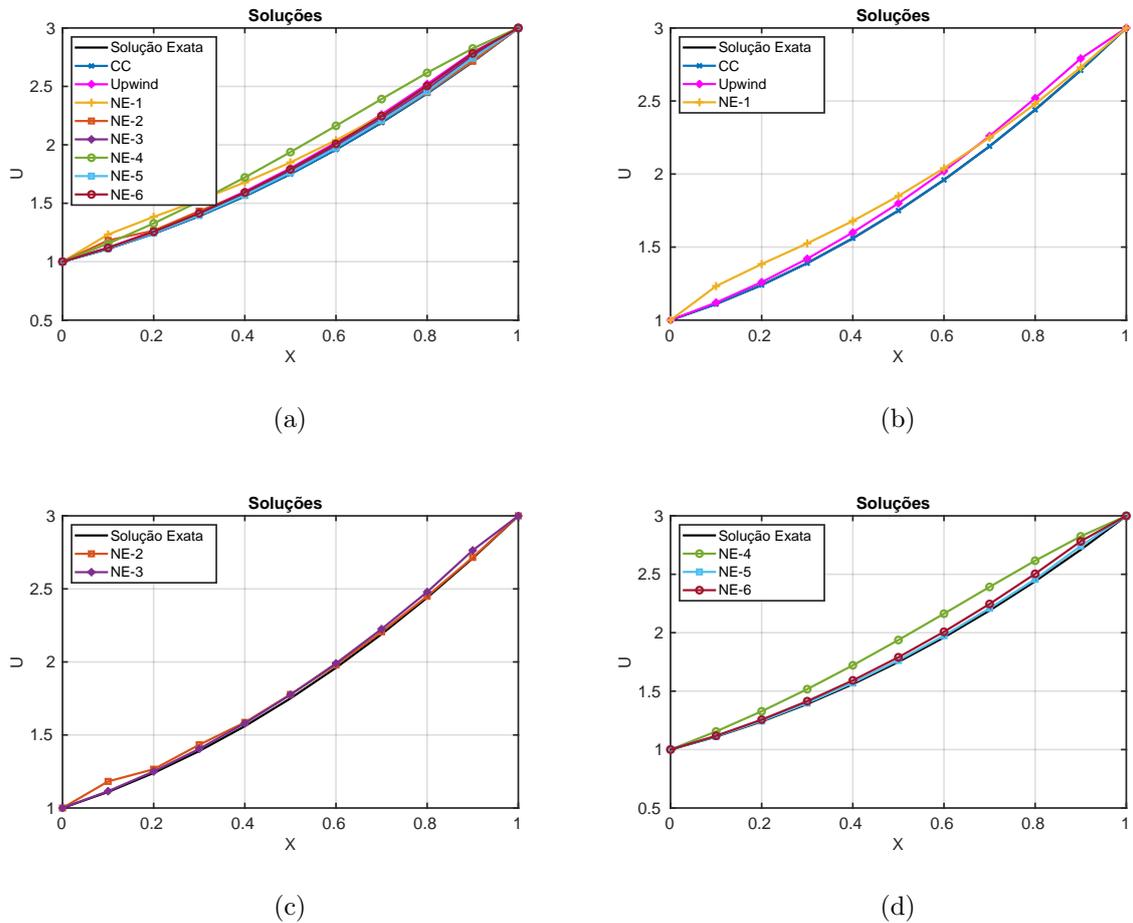


Figura 4.1: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.1 utiliza $h = 0.1$ e tem $Pe = 5$. A figura 4.1(a) mostra o resultado com todos os métodos, e nas imagens seguintes são apresentados os métodos de forma separada para uma melhor visualização. Na figura 4.1(b), pode-se observar que o método CC está bem próximo da solução exata, enquanto o método NE-1 se mostra o mais distante. Na figura 4.1(c), os dois métodos exibidos apresentam resultados parecidos e próximos da solução. Já na figura 4.1(d), o método NE-5 é uma boa aproximação para a solução exata, enquanto NE-4 é o método que mais se afasta da solução. Assim, voltando para a figura 4.1(a), pode-se notar que CC entrega o resultado mais próximo, enquanto NE-4 fornece a estimativa mais distante da solução exata.

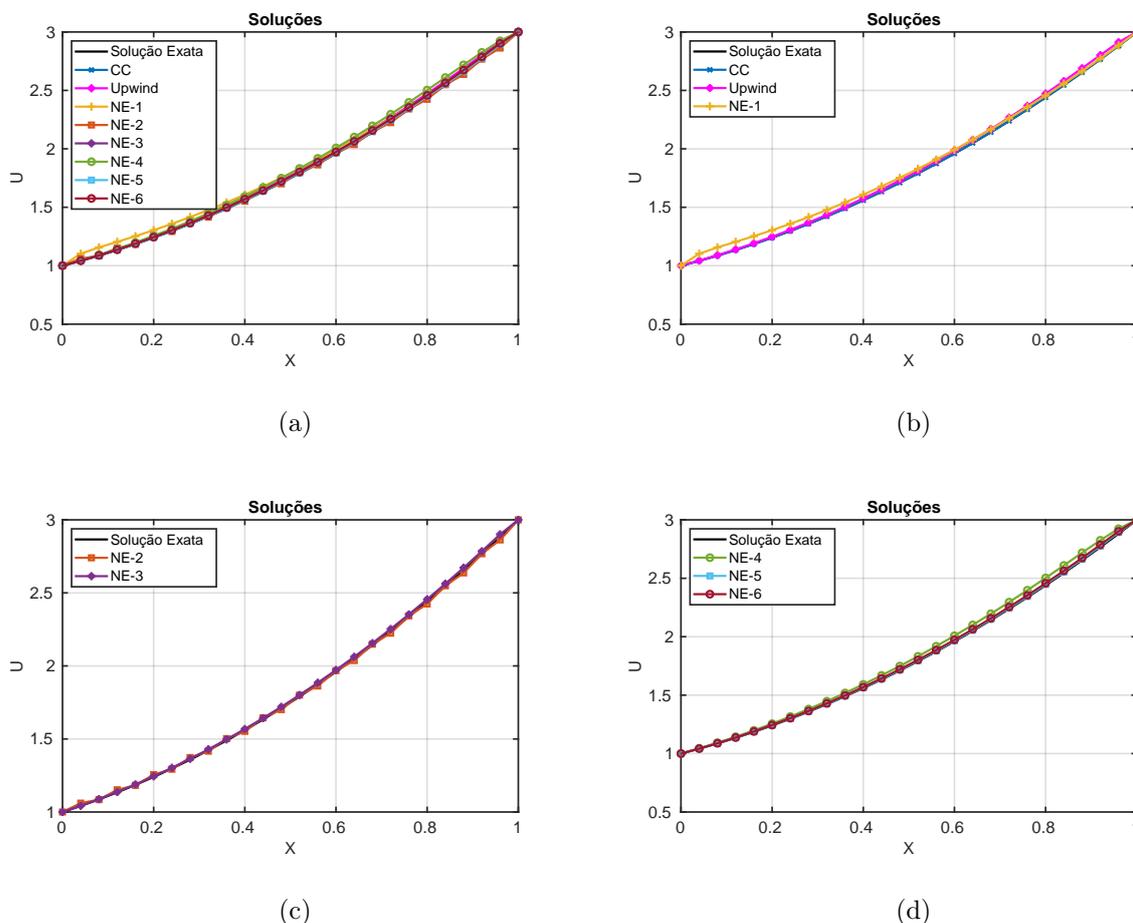


Figura 4.2: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.2 faz o primeiro refinamento da malha, utilizando $h = 0.04$ e tem $Pe = 2$. A figura 4.2(a) mostra o resultado com todos os métodos, o que já é possível notar a melhora de resultados, e nas imagens seguintes são apresentados os métodos de forma separada para uma melhor visualização. Na figura 4.2(b), pode-se observar que o método CC está bem próximo da solução exata, e mesmo com o refinamento, o método NE-1 continua se mostrando mais distante. Na figura 4.2(c), os dois métodos exibidos que já apresentavam resultados parecidos e próximos da solução, agora mostram um resultado ainda melhor. Já na figura 4.2(d), houve melhora em todos os métodos, até mesmo no NE-4 que se mostrava o método mais distante. Assim, voltando para a figura 4.2(a), pode-se concluir que como esperado, o refinamento da malha trouxe uma melhora significativa para todos os resultados, porém, nota-se que o método NE-1 não melhorou tanto quanto os outros e agora se mostra o mais distante.

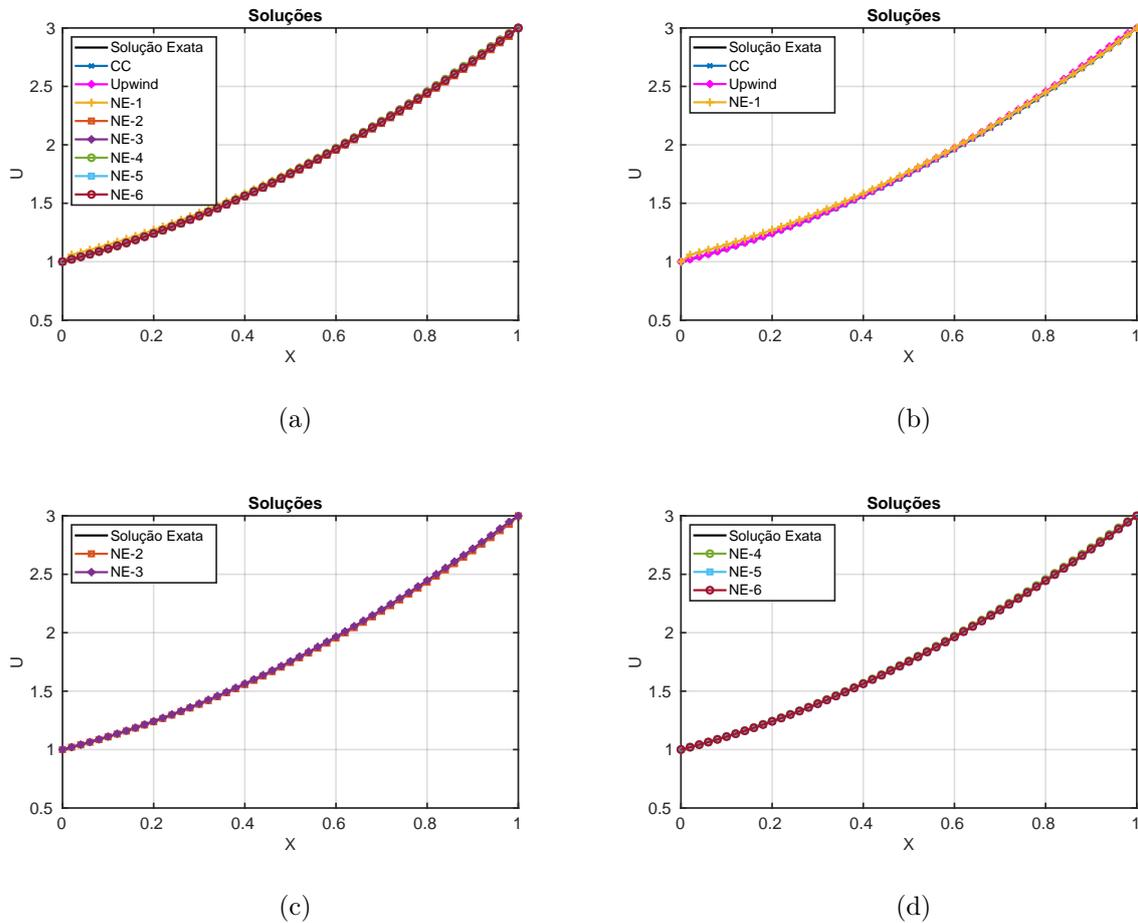
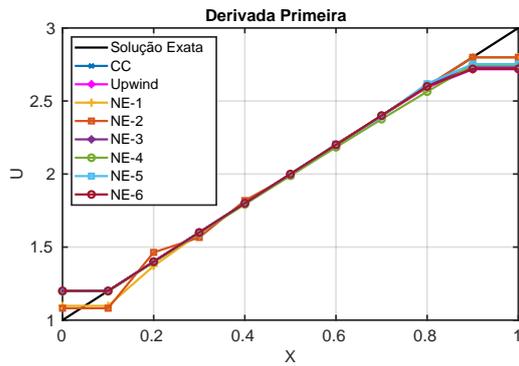


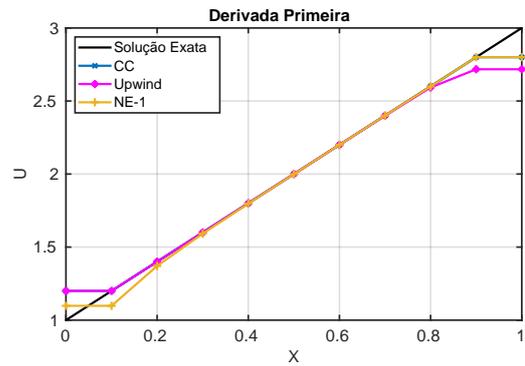
Figura 4.3: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.3 traz o último refinamento, utilizando $h = 0.02$ e tem $Pe = 1$. Nela, a figura 4.3(a) mostra o resultado com todos os métodos, e nas imagens seguintes são apresentadas os métodos de forma separada para uma melhor visualização. Na figura 4.3(b), pode-se observar que mesmo em um refinamento maior, o método NE-1 se mostra oscilante. Nas figuras 4.3(c) e 4.3(d) todos os métodos já apresentam resultados próximos a solução exata. Voltando para a figura 4.3(a), nota-se que o refinamento trouxe o resultado esperado, de que todos os métodos conseguem boas aproximações.

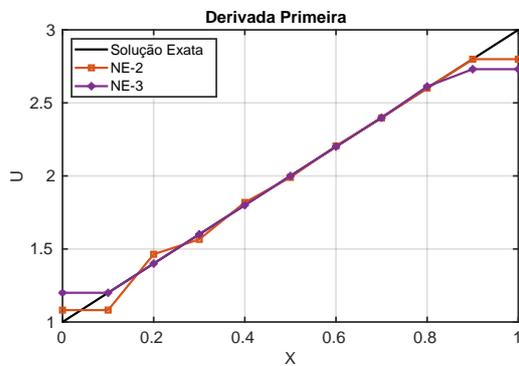
- Aproximações das Derivadas Primeiras



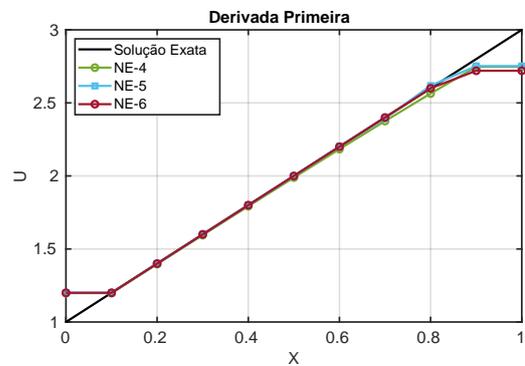
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.4: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.4 mostra a aproximação da primeira derivada utilizando $h = 0.1$ e tem $Pe = 5$. A figura 4.4(a) mostra o resultado com todos os métodos, e nas imagens seguintes são apresentados os métodos de forma separada para uma melhor visualização. Na figura 4.4(b), pode-se observar que dentre os métodos, a aproximação do método CC é a mais próxima da derivada exata. Na figura 4.4(c), o método NE-2 apresenta maiores oscilações. Já na figura 4.4(d), nota-se que os métodos possuem aproximações parecidas entre si. Assim, voltando para a figura 4.4(a), pode-se concluir que a aproximação mais oscilante é o NE-2, enquanto a solução mais próxima é a do CC.

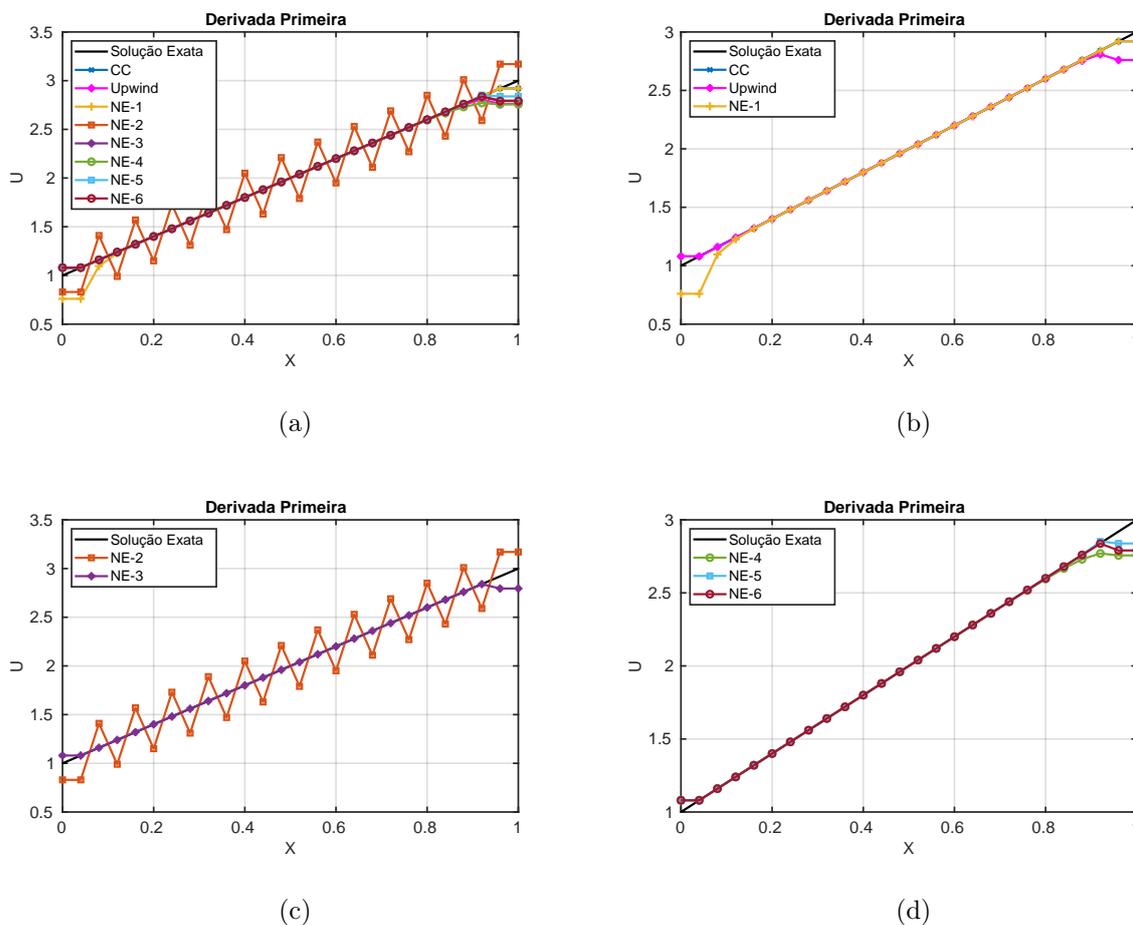


Figura 4.5: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.5 mostra o resultado considerando o primeiro refinamento de malha com a aproximação da primeira derivada utilizando $h = 0.04$ e tem $Pe = 2$. Nela, a figura 4.5(a) mostra o resultado com todos os métodos, e nas imagens seguintes são apresentados os métodos de forma separada para uma melhor visualização. Pode-se notar nas figuras 4.5(b) e 4.5(d) que como esperado pelo refinamento, houve melhora na aproximação de todos os métodos mostrados, já na figura 4.5(c) é possível perceber que o método NE-2 trouxe maiores oscilações apesar do refinamento de malha. Assim, voltando para a figura 4.5(a), pode-se concluir que a aproximação mais oscilante é o NE-2, no qual houve uma piora no resultado com este valor de malha, enquanto a solução mais próxima é a do CC.

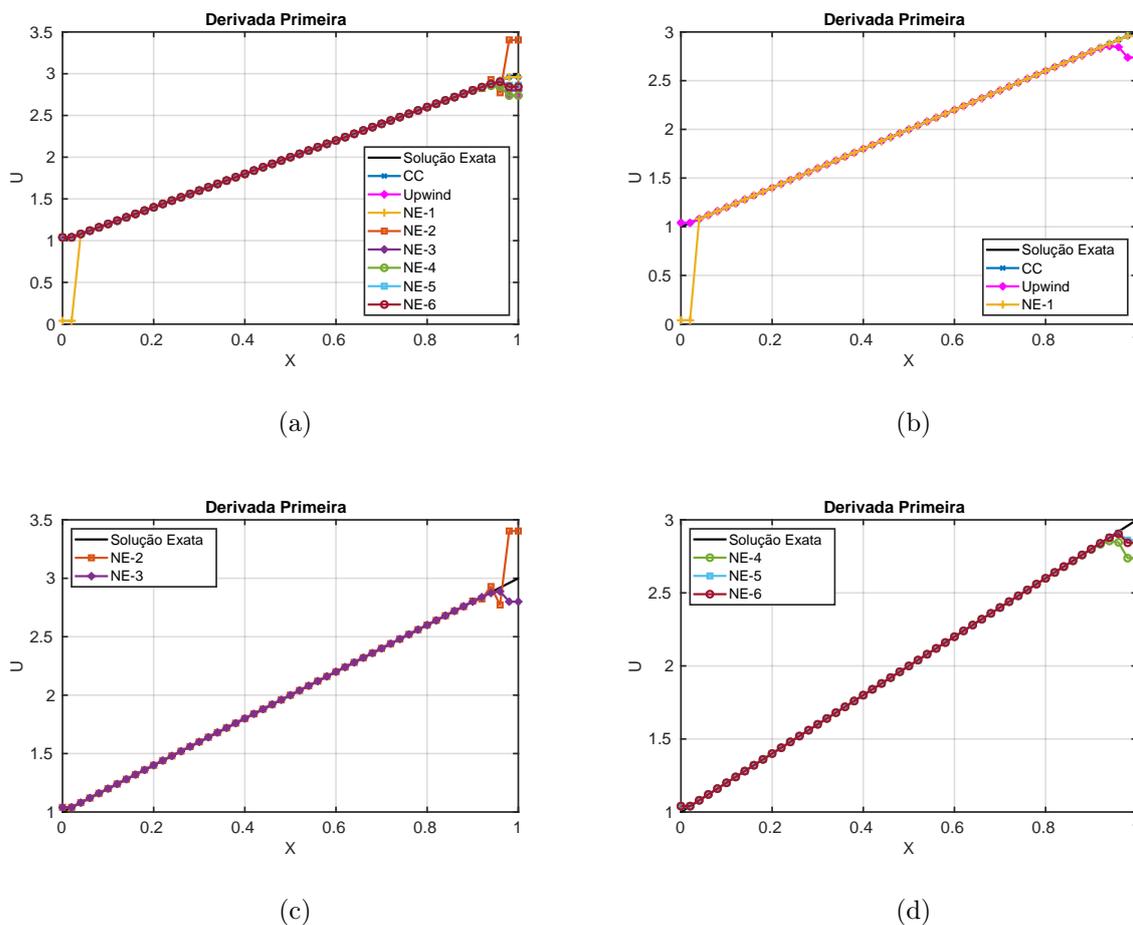


Figura 4.6: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.6 mostra o resultado considerando o último refinamento de malha com a aproximação da primeira derivada utilizando $h = 0.02$ e tem $Pe = 1$. A figura 4.6(a) mostra o resultado com todos os métodos, e nas imagens seguintes são apresentados os métodos de forma separada para melhor visualização. Pode-se notar nas figuras 4.6(b) a 4.6(d) que como esperado pelo refinamento, houve melhora na aproximação de todos os métodos mostrados, até mesmo nas oscilações indesejadas apresentadas por NE-2 no refinamento anterior. Assim, voltando para a figura 4.6(a), pode-se concluir que o refinamento teve o resultado esperado por todos os métodos, e as pequenas oscilações notadas no início ou final do gráfico de um método ou outro, se referem ao contorno.

- Aproximações para Derivadas Segundas

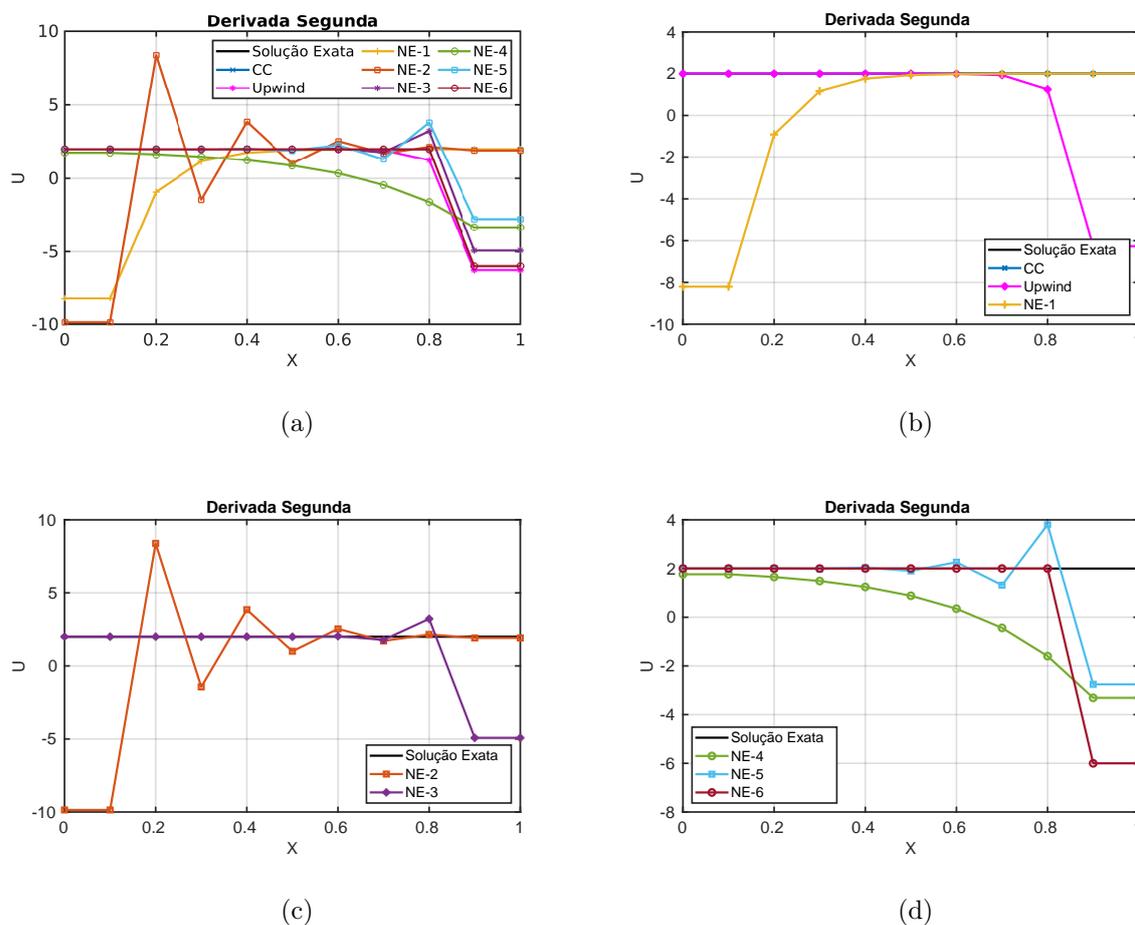
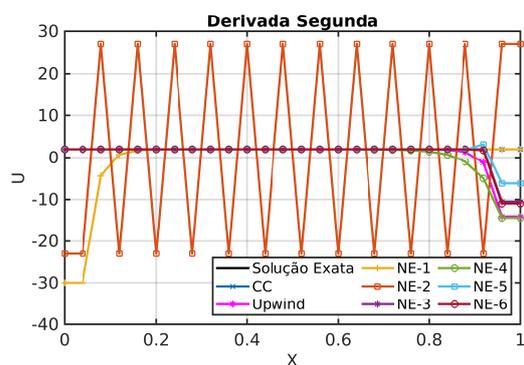
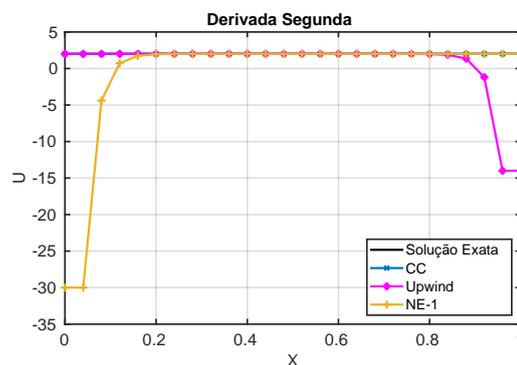


Figura 4.7: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

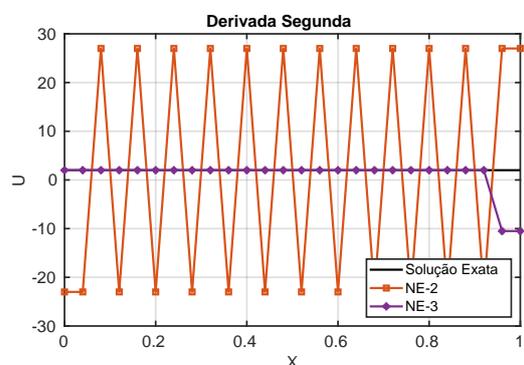
A figura 4.7 mostra a aproximação da segunda derivada utilizando $h = 0.1$ e tem $Pe = 5$. A figura 4.7(a) mostra o resultado com todos os métodos, e nas imagens seguintes são apresentados os métodos de forma separada para melhor visualização. Pode-se notar na figura 4.7(b) que CC faz uma aproximação visualmente próxima a derivada segunda exata. Na figura 4.7(c) percebe-se que ambos os métodos apresentam oscilações, mas, dentre eles, NE-2 traz mais oscilações. Já na figura 4.7(d) vê-se que o NE-6 consegue apresentar uma aproximação sem oscilações em seu interior e sua oscilação no fim, é devido a questões do contorno e que NE-4, apesar de não resultar em oscilações em seu interior, se mantém mais distante da derivada segunda exata ao longo de todo seu gráfico. Assim, voltando para a figura 4.7(a), pode-se concluir que a derivada segunda em uma malha grosseira como neste caso, traz aproximações bastante oscilantes entre os métodos, e, CC é o método em que a aproximação apresenta menor erro.



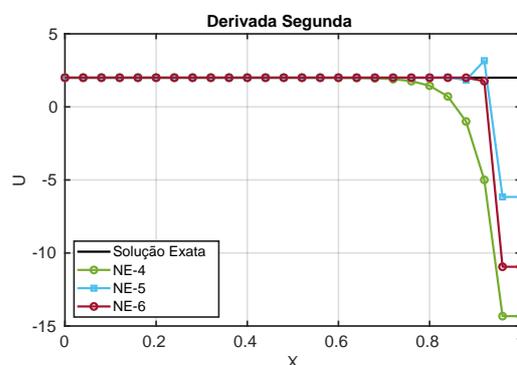
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.8: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.8 mostra o primeiro refinamento de malha para a aproximação da segunda derivada utilizando $h = 0.04$ e tem $Pe = 2$. Nela, a figura 4.8(a) mostra o resultado com todos os métodos, e nas figuras que a seguem são apresentados os métodos de forma separada para melhor visualização. Como esperado pelo refinamento da malha, ocorre melhora nos métodos que pode ser vista nas figuras 4.8(b) e 4.8(d). Na figura 4.8(c) percebe-se que NE-2 gerou mais oscilações em seu meio. Assim, voltando para a figura 4.8(a), pode-se concluir que com exceção do NE-2, ocorre o esperado em todos os métodos, que é a melhora em seus resultados e que CC possui a aproximação com menor distância da solução exata.

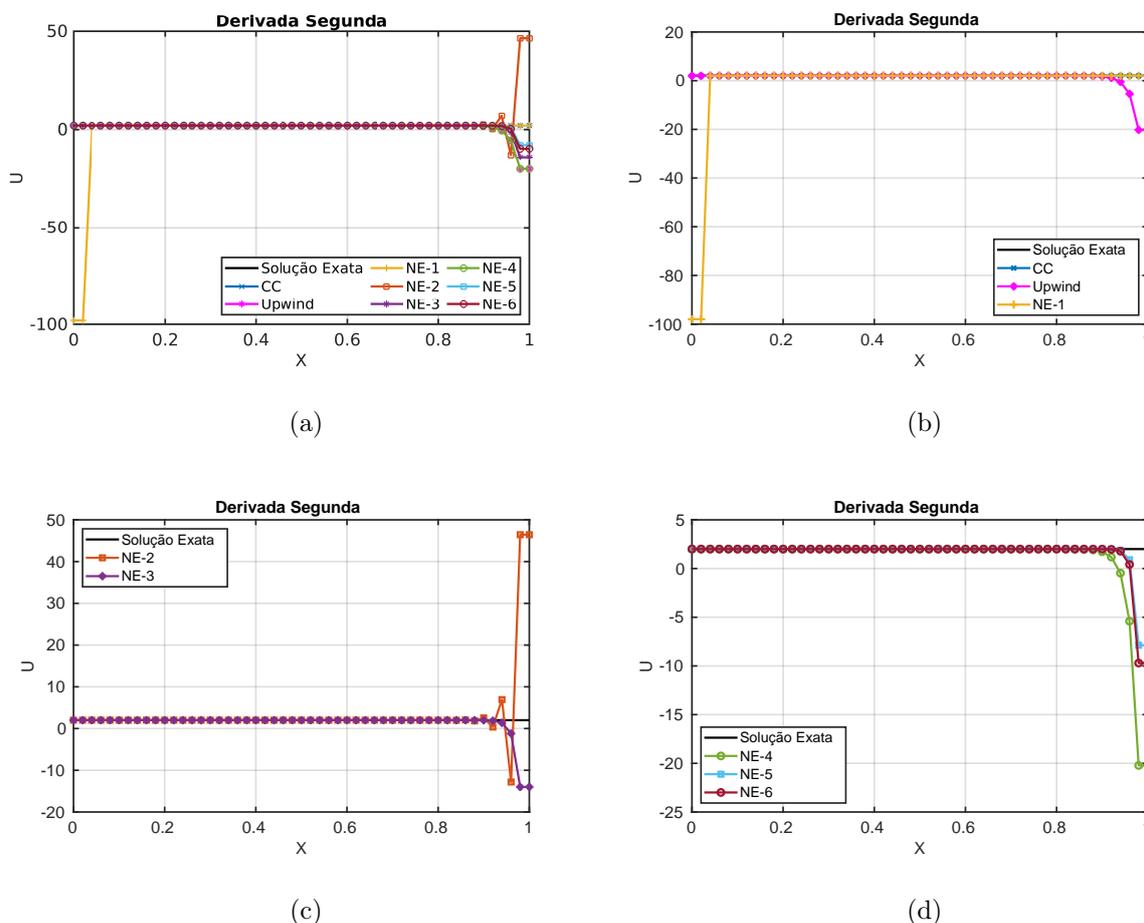


Figura 4.9: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.9 mostra a aproximação da segunda derivada utilizando $h = 0.02$ e tem $Pe = 1$. Nela, a figura 4.9(a) mostra o resultado com todos os métodos, e nas imagens seguintes são apresentados os métodos de forma separada para melhor visualização. Ainda na imagem mencionada, é notável que houve a melhora esperada em todos os métodos como consequência do refinamento. É válido lembrar que os resultados mais significativos para o trabalho são as aproximações no meio do gráfico, no qual os métodos estão adequados neste refinamento. Nas figuras 4.9(b) a 4.9(d) vê-se a melhora mencionada.

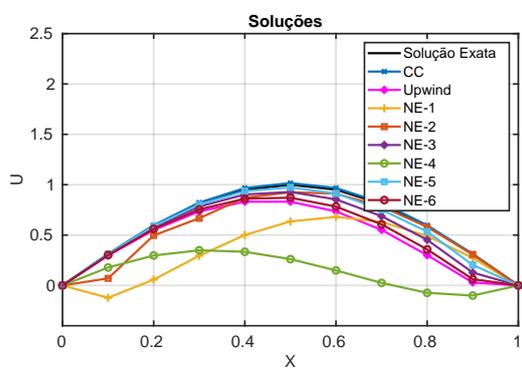
4.1.2 Solução Exata Suave Seno

A Solução Exata Suave para a Equação Difusiva-Convectiva que resulta em um seno pode ser expressa pela equação (4.6), acompanhada da fonte presente na equação (4.7), coeficiente difusivo $D = 10^{-2}$ e velocidade $\vec{v} = 1$. Para comparações, foram testados casos em que $h = 0.1$, $h = 0.04$ e $h = 0.02$. Esses valores geram, respectivamente, $Pe = 5$,

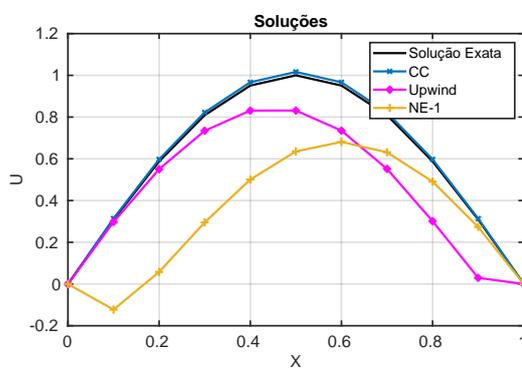
$Pe = 2$ e $Pe = 1$.

$$\begin{cases} u(x) = \sin(\pi x), \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

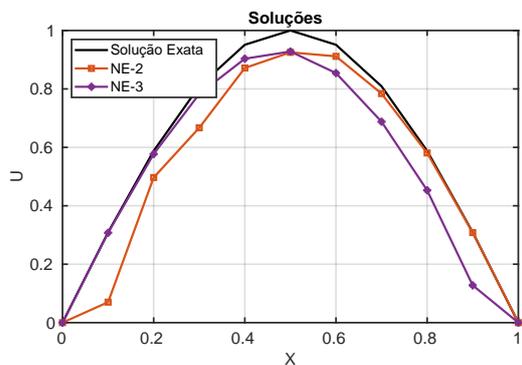
$$f(x) = \pi[D\pi \sin(\pi x) + v \cos(\pi x)]. \quad (4.7)$$



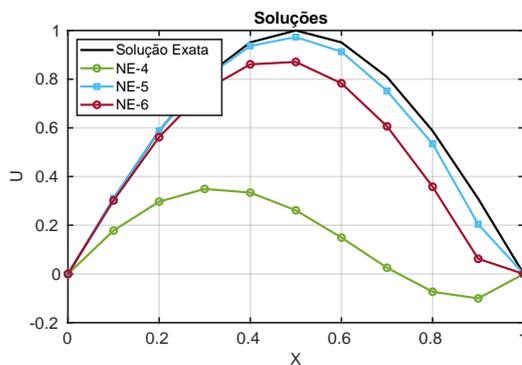
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.10: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.10 mostra os resultados dos métodos com $h = 0.1$ e tem $Pe = 5$. Nela, a figura 4.10(a) mostra o resultado com todos os métodos, e nas figuras que a seguem são apresentados os métodos de forma separada para melhor visualização. Na figura 4.10(b) é visível que CC já mostra uma proximidade com a solução exata mesmo nesta malha mais grosseira, enquanto NE-1 mostra uma distância maior. Na figura 4.10(c) ambos os

métodos apresentados são razoáveis. Na figura 4.10(d) nota-se que NE-4 é o método mais distante e com oscilações e NE-5 apresenta um resultado satisfatório para uma malha grossa. Assim, voltando para a figura 4.10(a), conclui-se que o método mais próximo da solução exata é o CC e o método mais distante é o NE-4, com NE-5 apresentando um resultado aceitável.

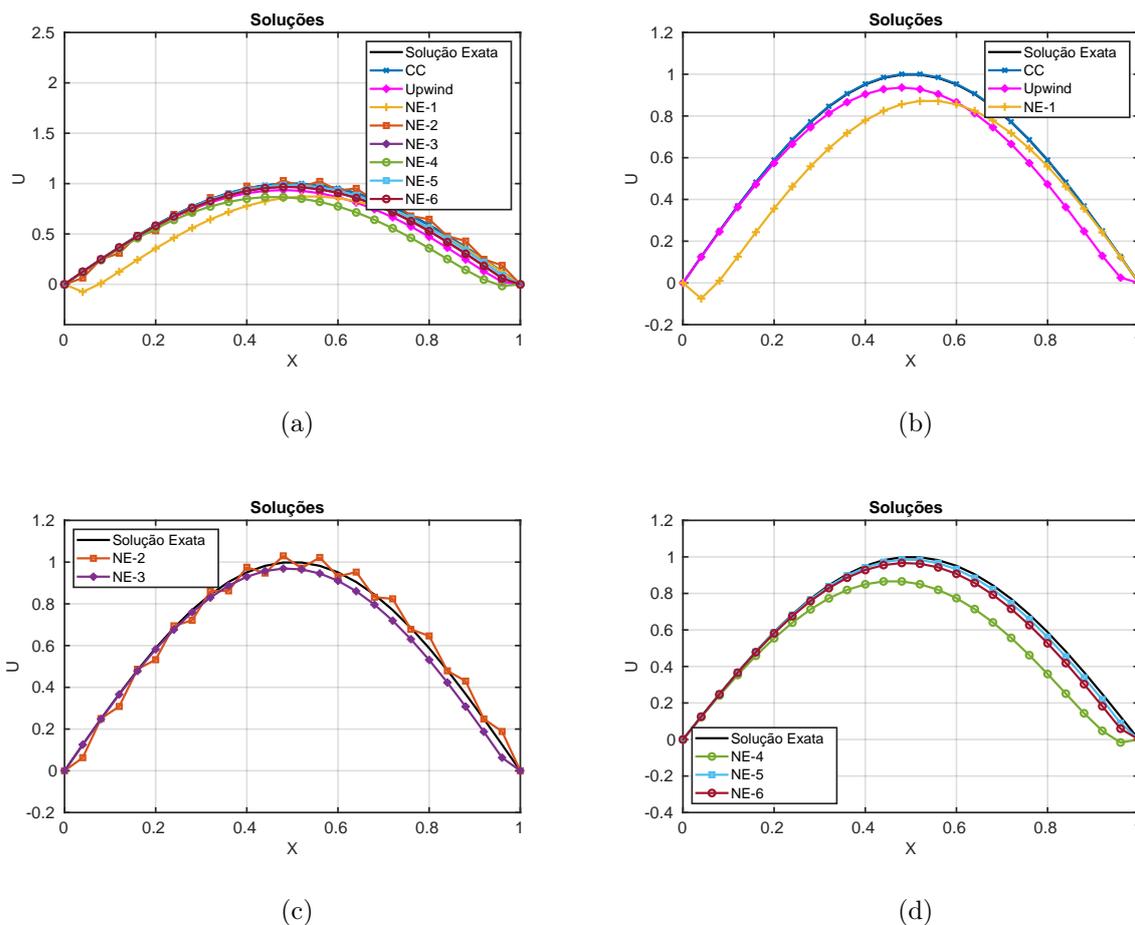


Figura 4.11: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.11 apresenta os resultados dos métodos no primeiro refinamento da malha, com $h = 0.04$ e tem $Pe = 2$. Nela, a figura 4.11(a) mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos de maneira separada para melhor visualização. A melhora dos resultados ocorre como esperado e pode ser vista nas figuras 4.11(b) e 4.11(d). Na figura 4.11(c) nota-se a oscilação em NE-2, que já vinha ocorrendo nesta malha nos outros casos. Assim, voltando para a figura 4.11(a), pode-se concluir que além da oscilação de NE-2, tem-se que CC se mantém como o método mais próximo da solução exata e que NE-1 e Ne-4 se mantêm como os métodos com aproximações mais distantes.

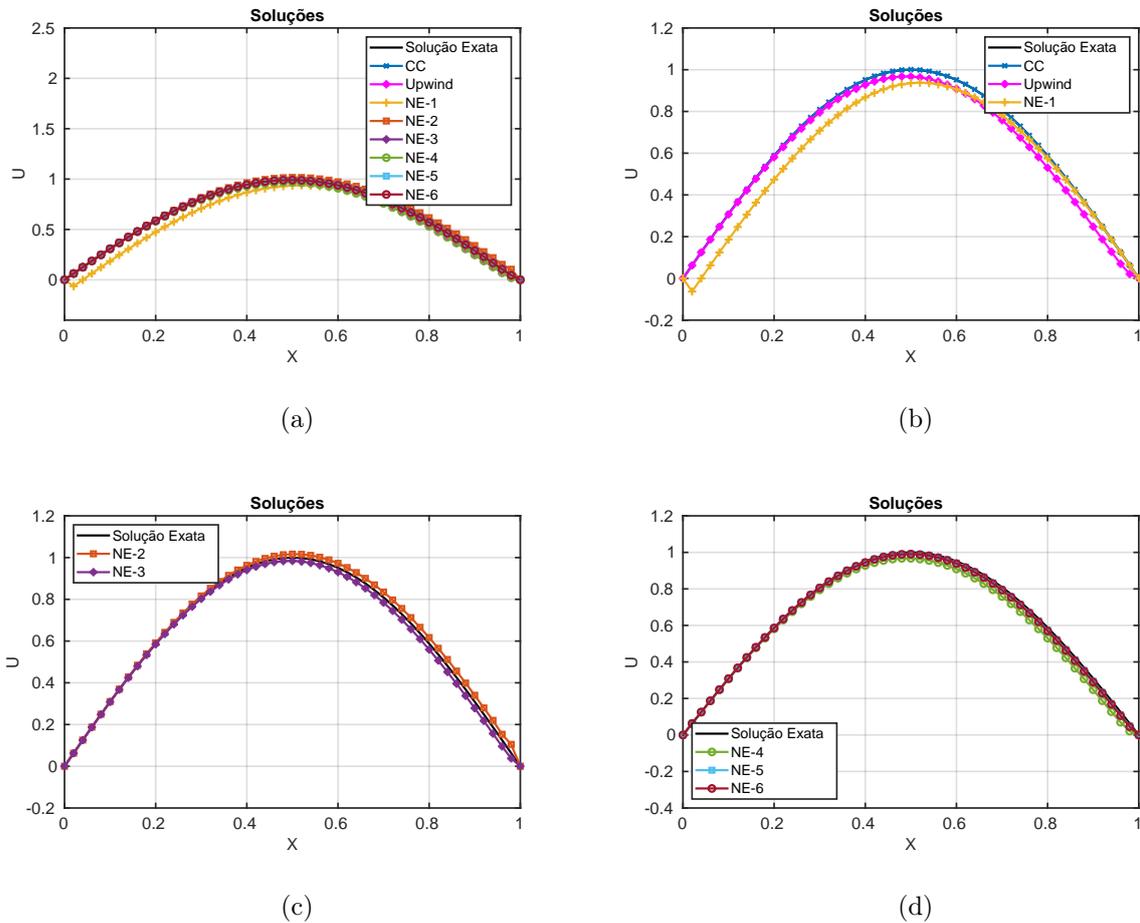


Figura 4.12: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.12 apresenta o último refinamento de malha, com $h = 0.02$ e tem $Pe = 1$. Nela, a figura 4.12(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos de maneira separada para garantir uma visualização mais favorável. A melhora dos resultados ocorre como esperado pelo refinamento da malha e pode ser vista nas figuras 4.12(b) a 4.12(d). Assim, voltando para a figura 4.12(a), chega-se a conclusão de que apenas NE-1 ainda se mantém consideravelmente distante quando comparado aos outros métodos e a oscilação em NE-2 vista na malha anterior, não ocorre mais.

- Aproximações das Derivadas Primeiras

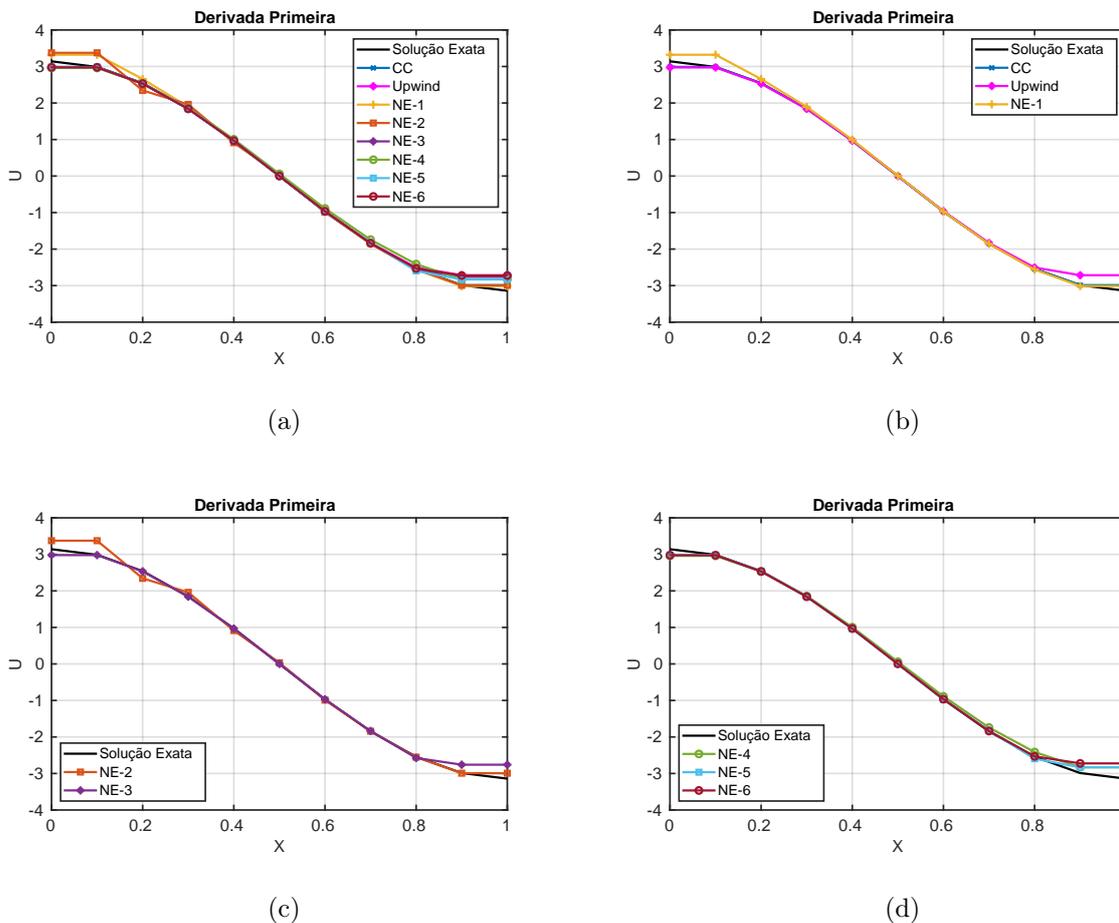


Figura 4.13: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.13 traz as aproximações da derivada primeira dos métodos, com $h = 0.1$ e tem $Pe = 5$. A figura 4.13(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos de maneira separada para garantir uma visualização mais favorável. Este caso, mesmo na malha mais grosseira, já mostra um bom resultado em todos os métodos e isso pode ser visto detalhadamente nas figuras 4.13(b) a 4.13(d). Assim, voltando para a figura 4.13(a), conclui-se que apenas os métodos NE-1 e NE-2 se mostram mais diferenciados em relação aos outros e mesmo assim, vale lembrar que o contorno não dá para ser aproximado corretamente através dos métodos e que o que interessa aqui, são os resultados do meio, ou seja, do interior.

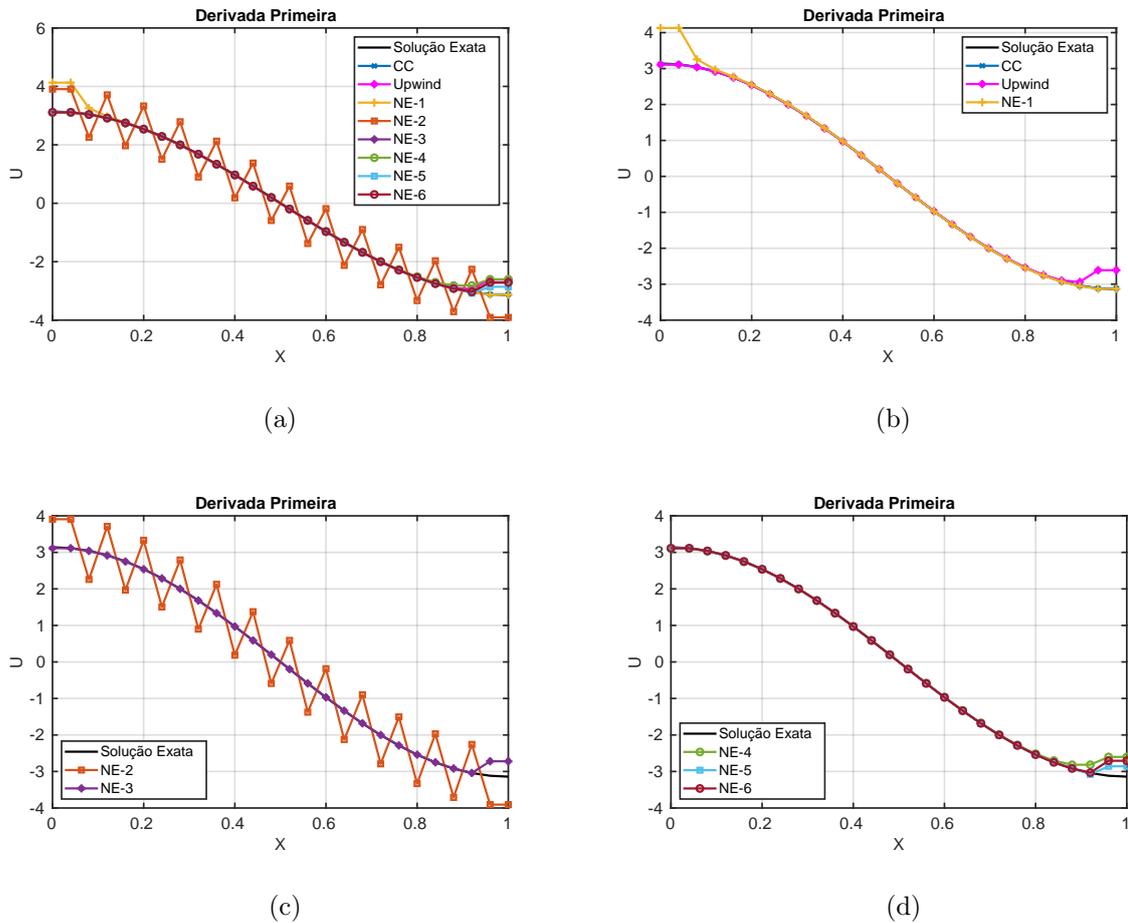


Figura 4.14: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.14 contém o primeiro refinamento de malha para as aproximações da derivada primeira dos métodos, com $h = 0.04$ e tem $Pe = 2$. A figura 4.14(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos de maneira separada para garantir uma visualização mais favorável. Este caso traz o resultado do primeiro refinamento de malha muito próximo visualmente da malha mais grossa e pode ser visto nas figuras 4.14(b) a 4.14(d). Assim, voltando para a figura 4.14(a), conclui-se que os resultados estão como esperados e sem muitas mudanças em relação a malha anterior, e ainda, como visto até aqui, há a oscilação em NE-2 neste valor de malha.

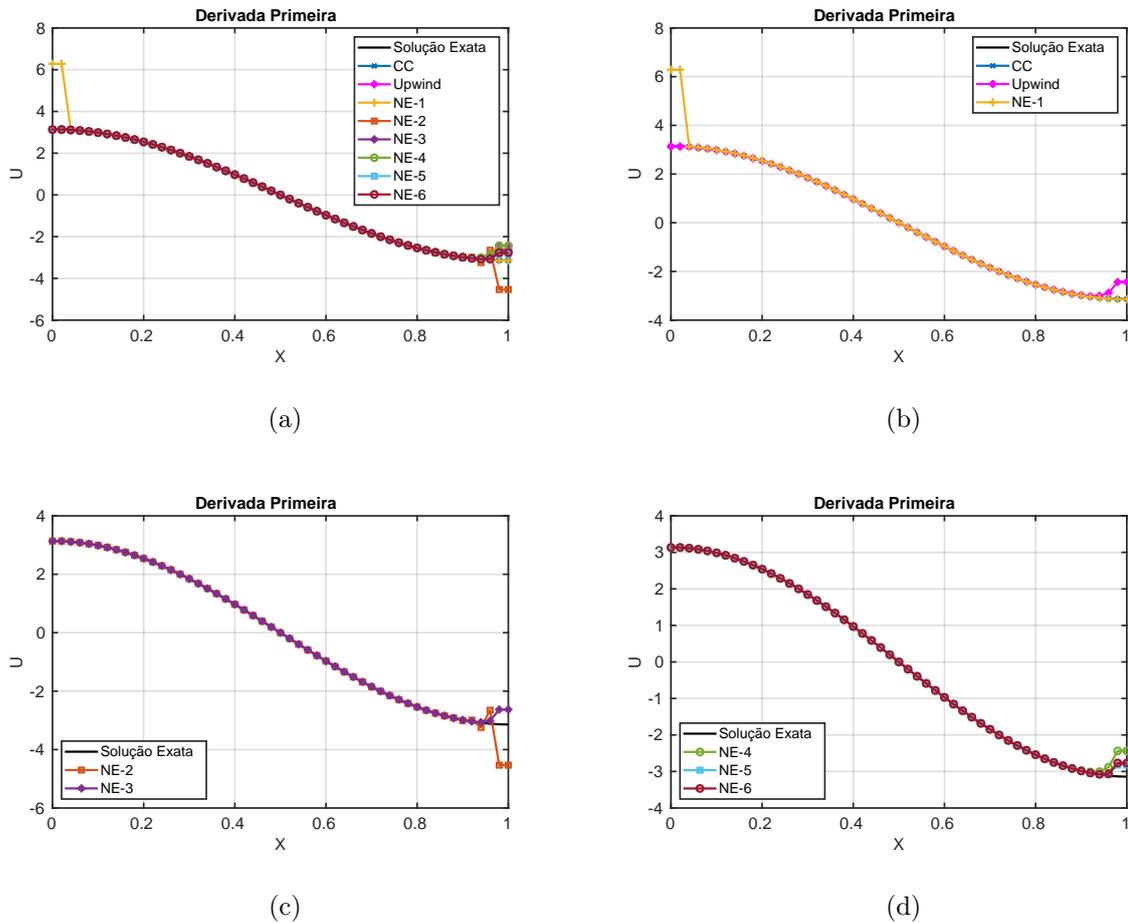


Figura 4.15: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.15 apresenta o último refinamento de malha para as aproximações da derivada primeira dos métodos, com $h = 0.02$ e tem $Pe = 1$. A figura 4.15(a), assim como nos casos anteriores, mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos de maneira separada para garantir uma visualização mais favorável. É notório a partir das figuras 4.15(b) a 4.15(d) que o refinamento traz uma pequena melhora, mas que na aproximação da primeira derivada em todas as malhas não trazem diferenças muito grandes. Ainda pode-se dizer que nessa malha não há as oscilações em NE-2.

- Aproximações das Derivadas Segundas

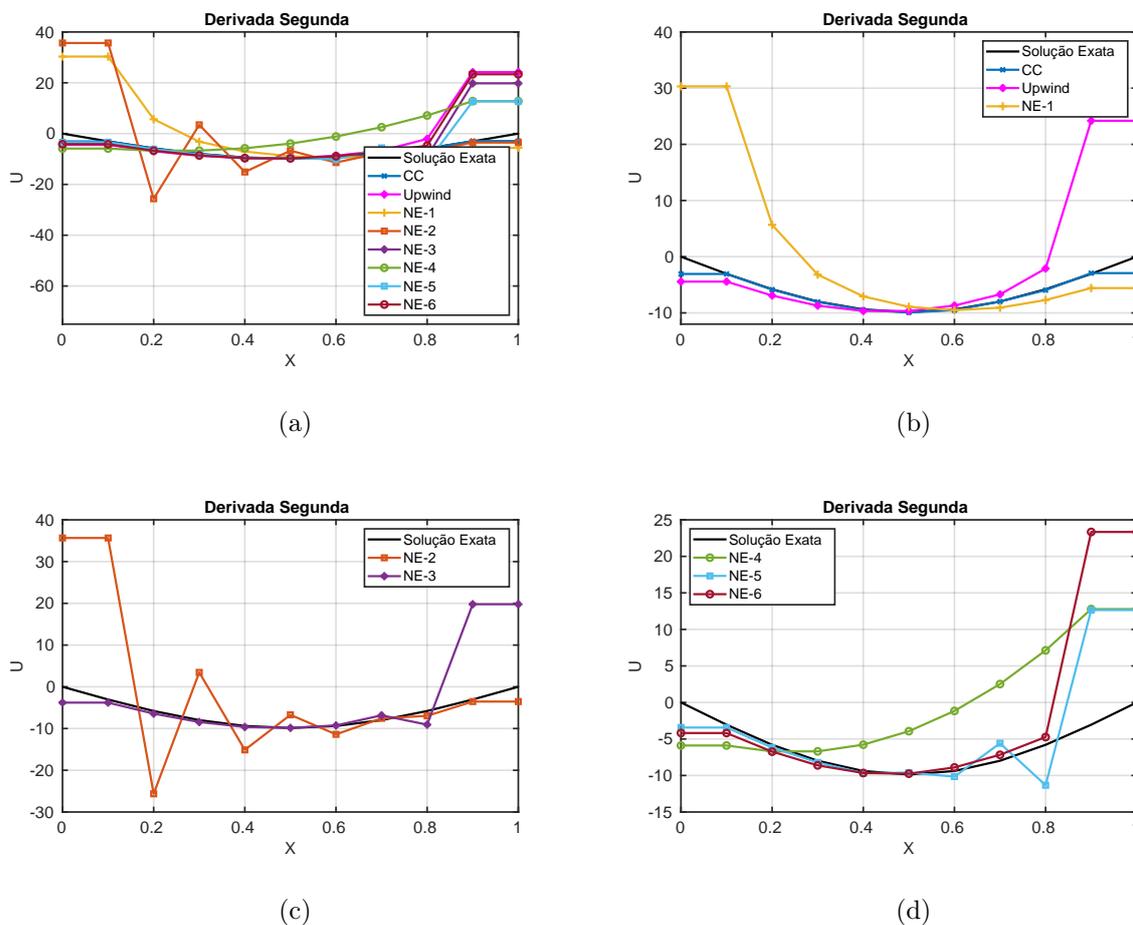


Figura 4.16: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.16 traz os resultados da segunda derivada com $h = 0.1$ e tem $Pe = 5$. A figura 4.16(a), assim como nos casos anteriores, mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos de maneira separada. Na figura 4.16(b) percebe-se que CC é o método que mais se aproxima da derivada segunda exata, enquanto NE-1 se mantém em grande parte distante do resultado exato. Na figura 4.16(c) NE-2 se mostra bem oscilante enquanto NE-3 apresenta poucas oscilações. Na figura 4.16(d) nota-se que NE-6 é o que apresenta menos oscilações, enquanto NE-4 se mostra distante da derivada exata. Assim, voltando para a figura 4.16(a), conclui-se que o método mais oscilante é o NE-2 e o mais próximo da derivada exata é o CC.

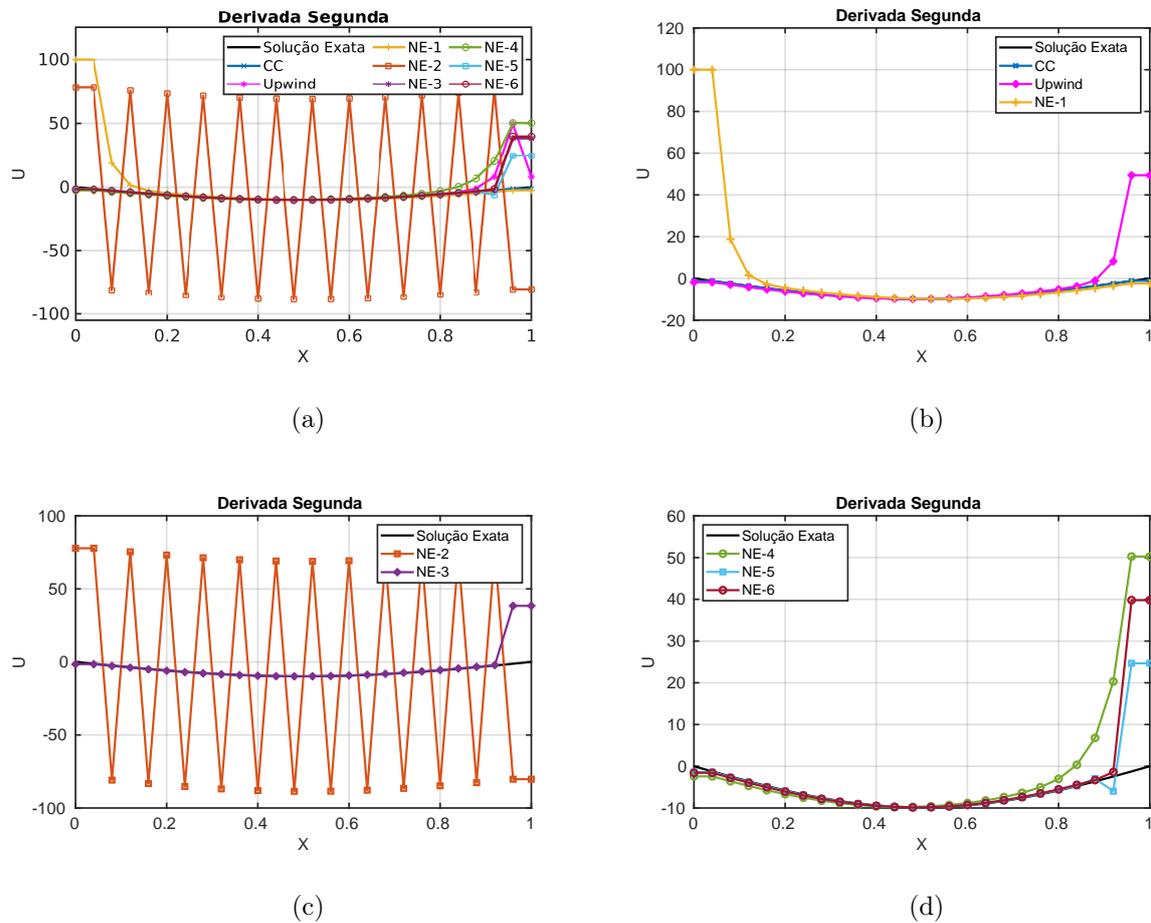


Figura 4.17: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.17 traz os resultados do primeiro refinamento de malha para a segunda derivada com $h = 0.04$ e tem $Pe = 2$. A figura 4.17(a), assim como nos casos anteriores, mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos de maneira separada. Como esperado pelo refinamento, houve a melhora nas oscilações e nas distâncias vistas no caso anterior nos métodos NE-1, NE-3, NE-4, NE-5 e NE-6. Esta melhora pode ser vista, respectivamente nas figuras 4.17(b) a 4.17(d). Porém, NE-2 aumenta suas oscilações, como notado em todos os casos em que se usa $h = 0.04$.

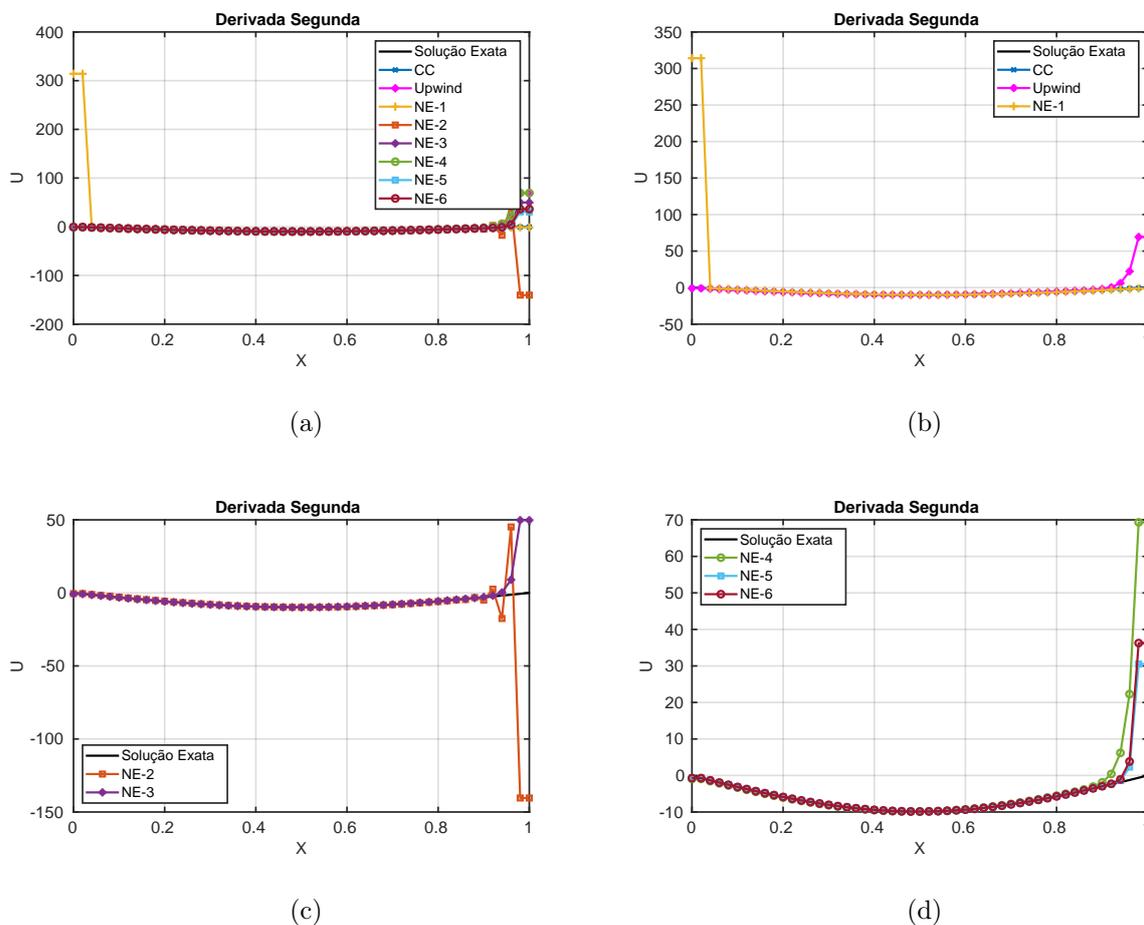


Figura 4.18: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.18 traz os resultados do último refinamento de malha para a segunda derivada com $h = 0.02$ e tem $Pe = 1$. A figura 4.18(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos separados. Como esperado pelo refinamento, houve a melhora nas oscilações e esta melhora pode ser vista nas figuras 4.18(b) a 4.18(d). Porém, é notório que NE-2 ainda apresenta oscilações em seu fim, mesmo com a malha ainda mais refinada.

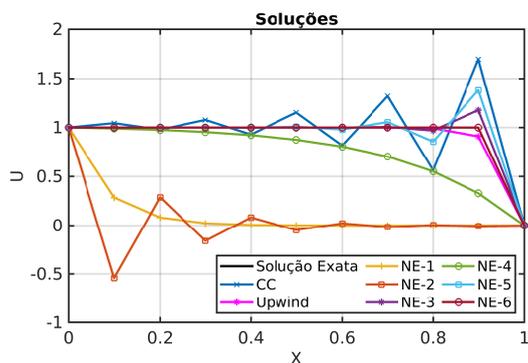
4.1.3 Solução Exata com Camada Limite Externa

4.1.3.1 Camada Limite Externa à Direita

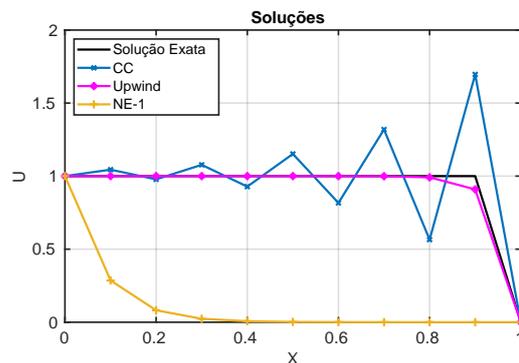
A Solução Exata com Camada Limite Externa à Direita pode ser expressa pela equação (4.8), com fonte nula, coeficiente difusivo $D = 10^{-2}$ e velocidade $\vec{v} = 1$. Para comparações, foram testados casos em que $h = 0.1$, $h = 0.04$ e $h = 0.02$. Esses valores geram, respectivamente, $Pe = 5$, $Pe = 2$ e $Pe = 1$. Esta solução é usada para escolher o

parâmetro α utilizado no NE-6.

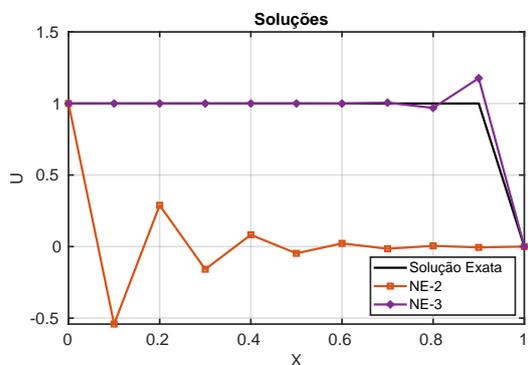
$$\begin{cases} u(x) = - \left(\frac{e^{-\frac{v}{D}(1-x)} - e^{-\frac{v}{D}}}{1 - e^{-\frac{v}{D}}} \right), \\ u(0) = 1, \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$



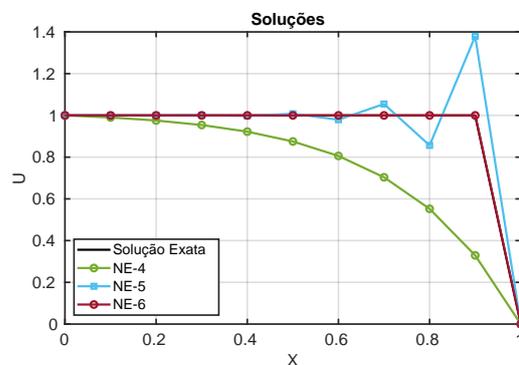
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.19: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.19 apresenta os resultados para a Camada Limite Externa à Direita, com $h = 0.1$ e tem $Pe = 5$. A figura 4.19(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos separados. Este caso tem um resultado muito interessante, já na figura 4.19(b) é mostrado que NE-1 é um método que ficou bem distante da solução exata, CC que é um método comumente usado apresenta muitas oscilações com esta malha, enquanto *Upwind*, como esperado pela literatura, apresenta um ótimo desempenho com esta malha grosseira. Na figura 4.19(c) vê-se que NE-2 ficou

bem distante da solução exata e ainda apresenta oscilações em seu resultado, enquanto NE-3 teve um desempenho muito bom e bem melhor que o comumente usado CC. E na figura 4.19(d) há o resultado muito próximo da solução exata através de NE-6, o resultado mais distante de NE-4 e algumas oscilações por NE-5, porém, oscilando menos que CC e mais que NE-3. Então, conclui-se que neste caso, há como melhores resultados o NE-6, que é o destaque deste caso, em seguida *Upwind* e NE-3 e os piores resultados são NE-2 e NE-1.

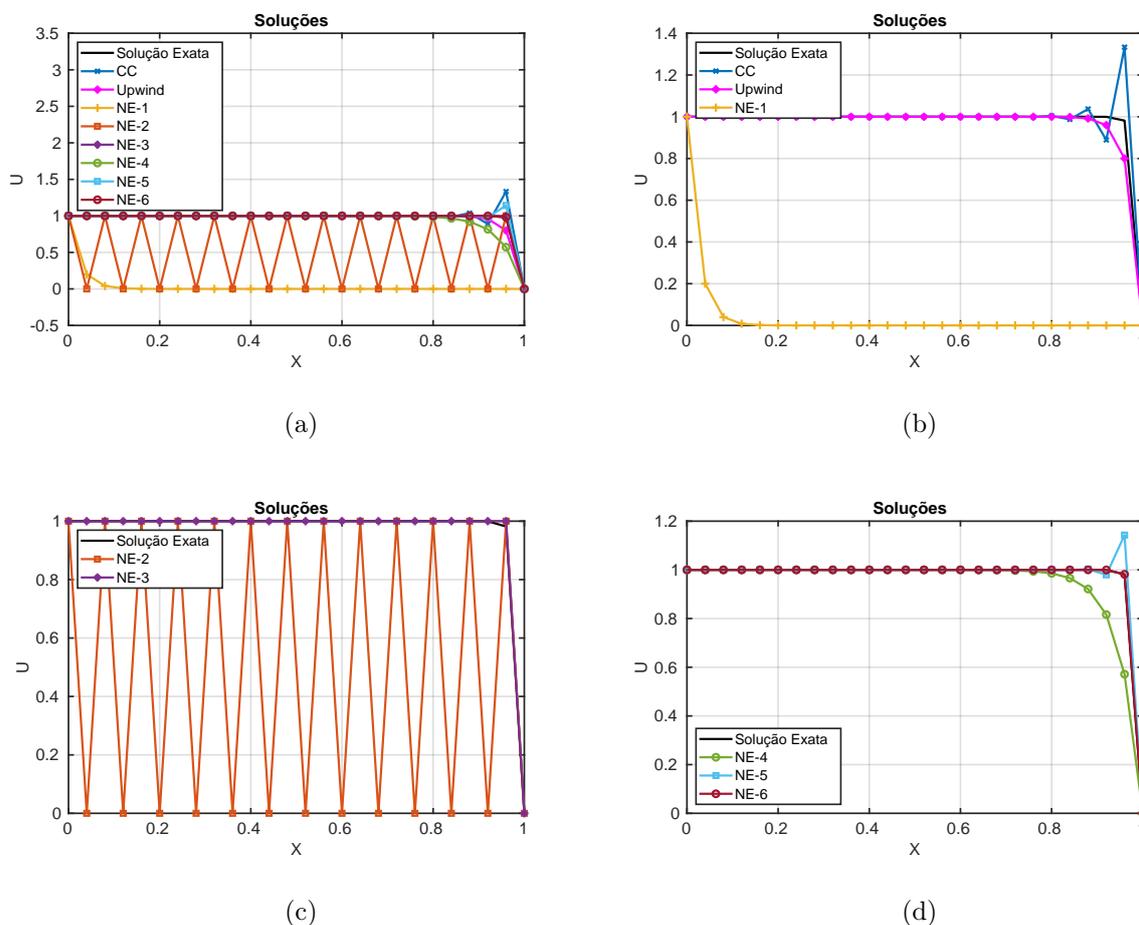


Figura 4.20: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.20 mostra os resultados para o primeiro refinamento de malha, com $h = 0.04$ e tem $Pe = 2$. A figura 4.20(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos separados. Como esperado, o refinamento de malha trouxe uma melhora nas oscilações de CC e manteve *Upwind* com uma aproximação perto da solução exata, porém, este primeiro refinamento não foi de grande ajuda para NE-1, que se manteve distante da solução exata, tais fatos podem ser observados na figura 4.20(b). Na figura 4.20(c), nota-se as oscilações de NE-2 e a melhora em NE-

3, tornando-o uma ótima aproximação da solução exata. Já na figura 4.20(d), NE-4 se aproxima um pouco da solução exata, NE-5 diminui suas oscilações e NE-6 se mantém parecido com a solução exata. Assim, conclui-se que para esta malha, os métodos que fazem as melhores aproximações, são, respectivamente, NE-6, NE-3 e *Upwind*.

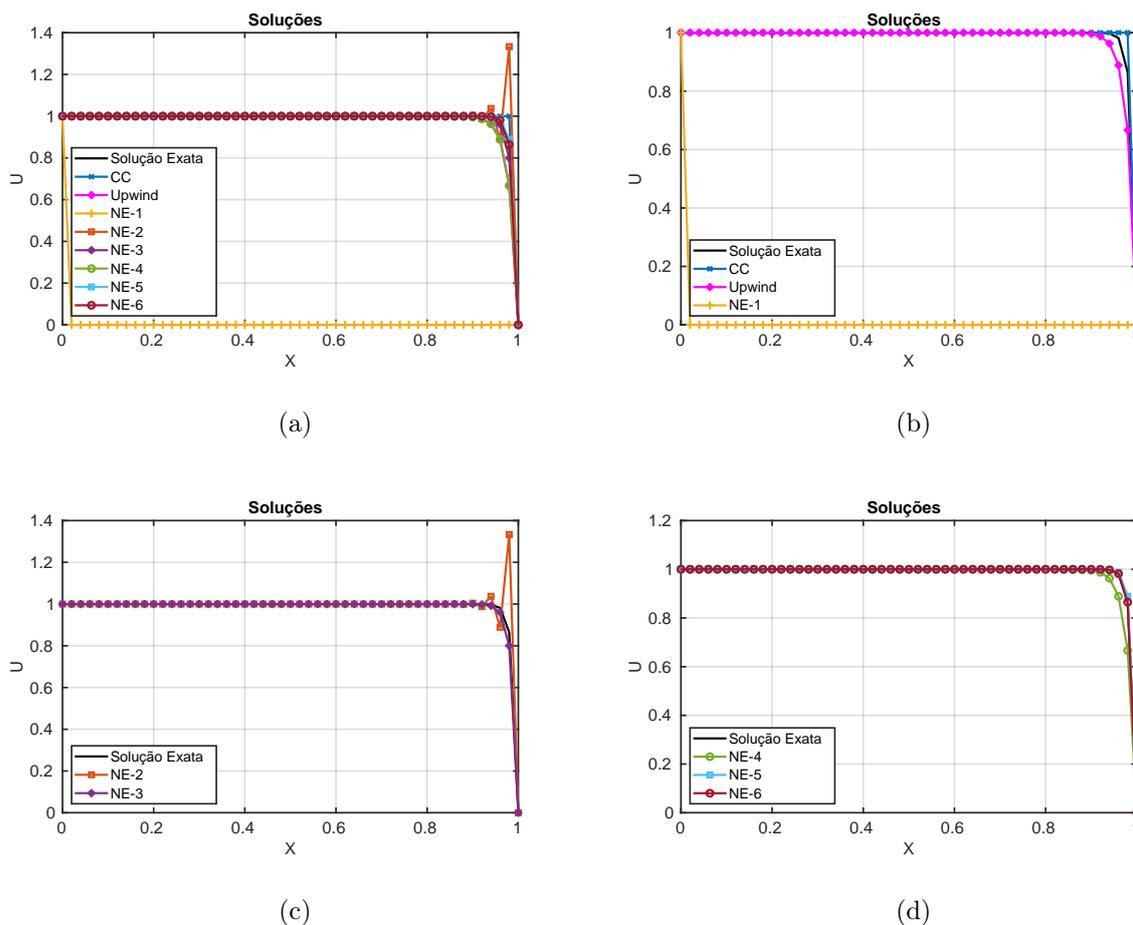


Figura 4.21: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.21 mostra os resultados para o último refinamento de malha, com $h = 0.02$ e tem $Pe = 1$. A figura 4.21(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos separados. Como esperado, o refinamento melhorou CC e *Upwind*, mas ainda não é uma boa malha para NE-1, que continua distante da solução exata, como pode ser visto na figura 4.21(b). Na figura 4.21(c), nota-se que comparada a malha anterior, houve diminuição considerável nas oscilações de NE-2, enquanto NE-3 continua uma boa aproximação e tem seu resultado melhorado pelo refinamento. Já na figura 4.21(d), os três métodos apresentam resultados bem satisfatórios pelo refinamento, com NE-4 estando um pouco distante e NE-6 se mantendo muito próximo da solução exata. Assim, conclui-se então, que NE-6 se mantém como melhor método, ape-

sar de agora outros serem satisfatórios também, e NE-1 se mantém como método menos adequado.

• Aproximações das Derivadas Primeiras

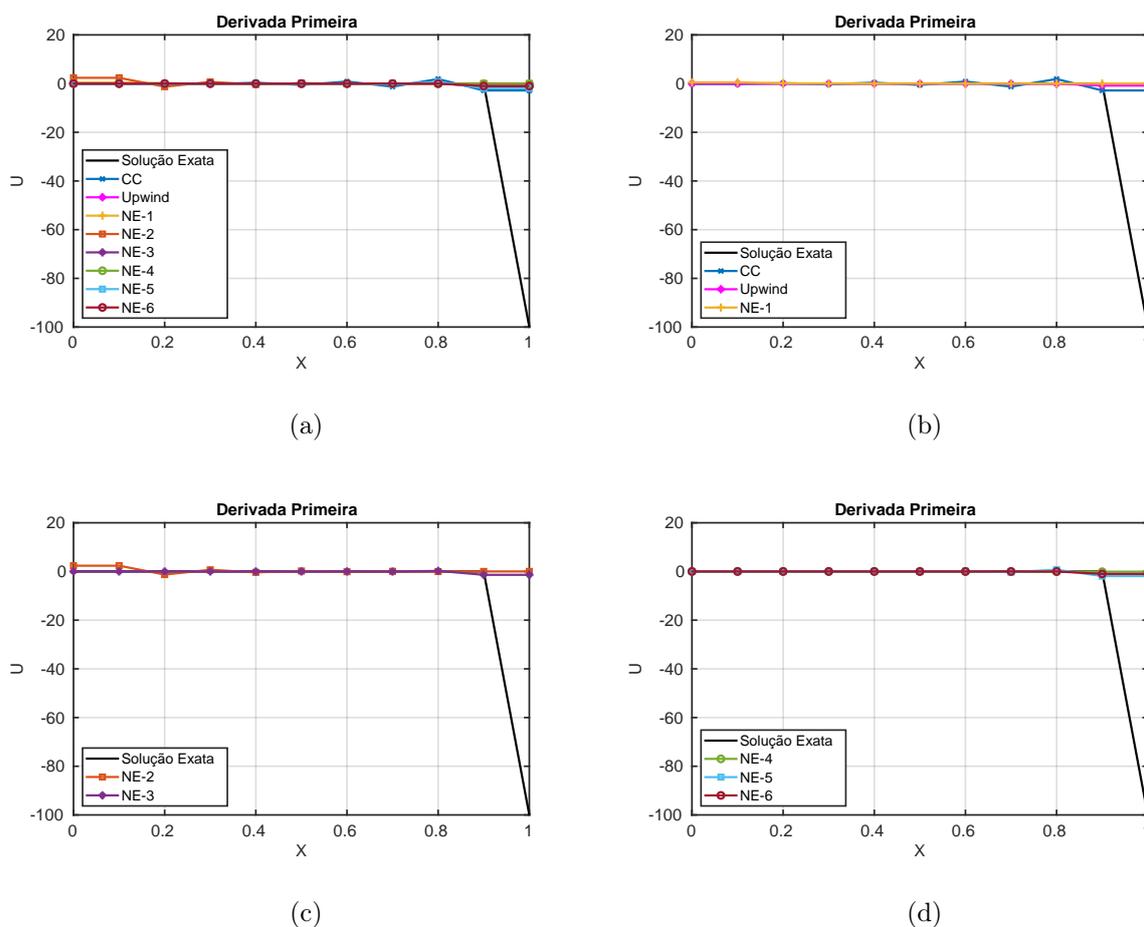


Figura 4.22: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.22 apresenta os resultados das aproximações dos métodos para a primeira derivada, com passo $h = 0.1$ e $Pe = 5$. Na figura 4.22(a), são exibidos os resultados combinados de todos os métodos. De maneira geral, os métodos produziram aproximações semelhantes, com destaque para o desempenho de NE-1, que, apesar de apresentar um desvio significativo na solução exata, apresenta uma melhoria notável na aproximação da derivada primeira. Contudo, algumas oscilações podem ser observadas, como mostrado na figura 4.22(b). Já na figura 4.22(c), o método NE-2 apresenta oscilações, enquanto na figura 4.22(d), os três métodos exibem resultados visualmente próximos entre si. Pode-se concluir que, no geral, os métodos apresentaram resultados consideravelmente próximos entre si, indicando consistência no comportamento das aproximações.

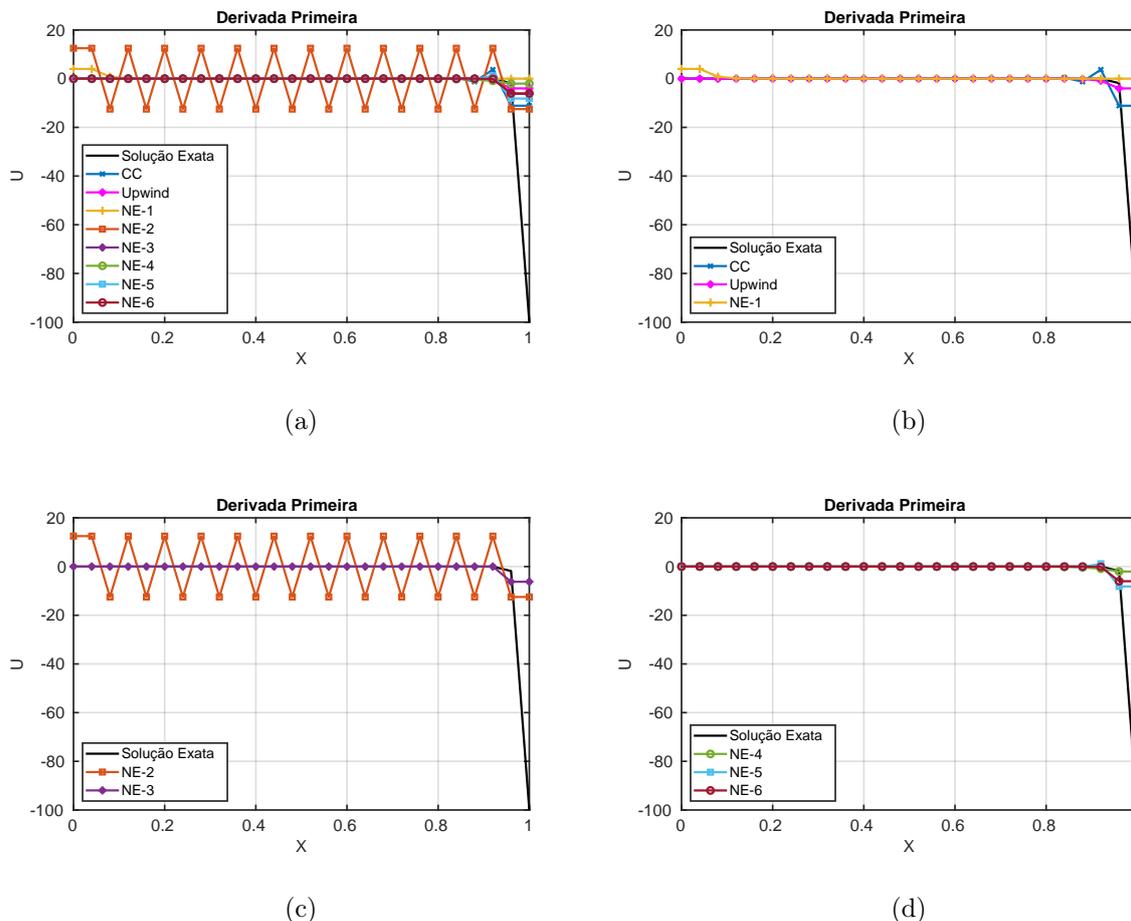


Figura 4.23: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.23 mostra os resultados das aproximações dos métodos para a primeira derivada, em seu primeiro refinamento de malha, com $h = 0.04$ e tem $Pe = 2$. A figura 4.23(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos separados. Na figura 4.23(b), vê-se que há algumas oscilações em CC. Na figura 4.23(c), nota-se as oscilações em NE-2 que são comuns com este espaçamento de malha. Já na figura 4.23(d), os métodos apresentam resultados próximos uns dos outros. Lembrando que os pontos de contorno não são devidamente aproximados pelos métodos, conclui-se que com esta malha, a maioria dos métodos apresentam resultados próximos e satisfatórios.

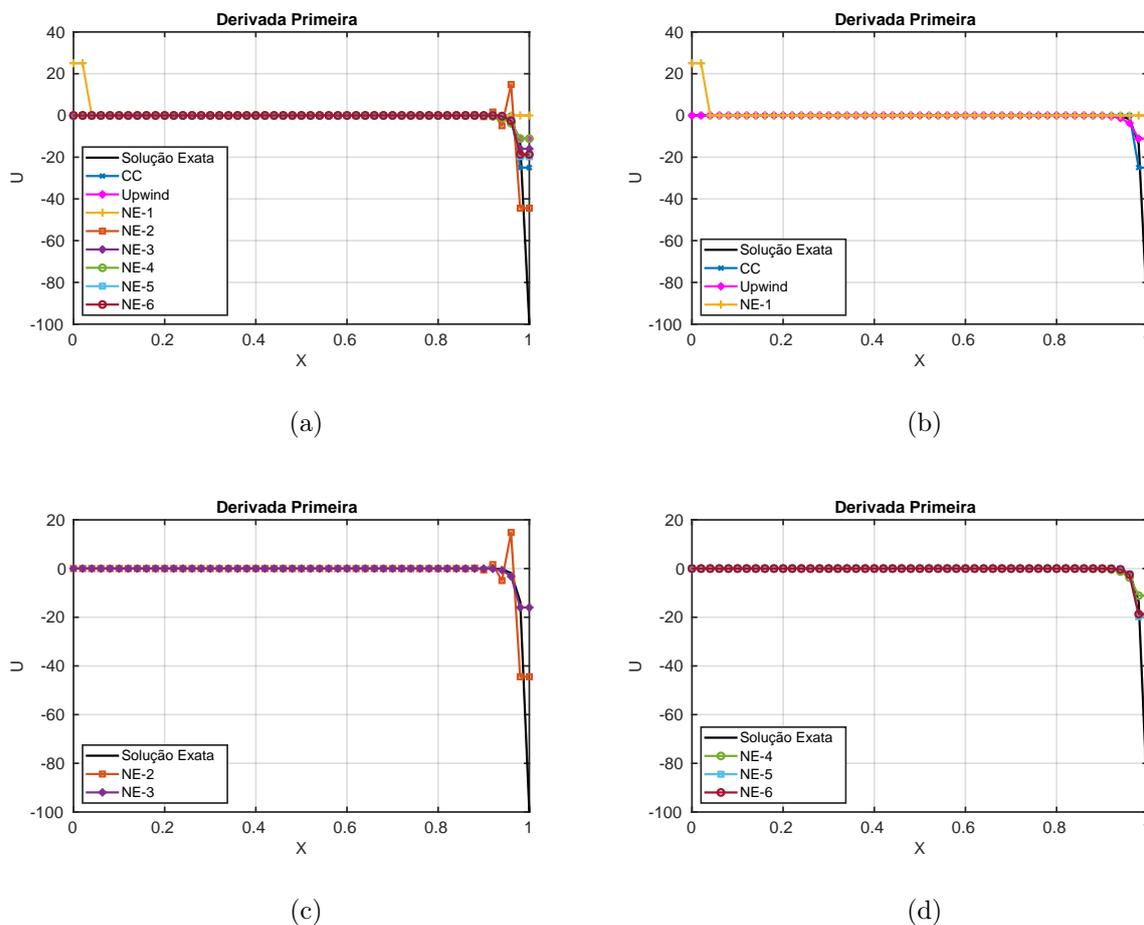


Figura 4.24: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.24 apresenta os resultados obtidos no último refinamento da malha para as aproximações da primeira derivada, com passo $h = 0.02$ e $Pe = 1$. Na figura 4.24(a), são exibidos os resultados consolidados de todos os métodos, enquanto nas figuras subsequentes, os métodos são apresentados separados. Observa-se, na figura 4.24(b), que o refinamento proporciona uma melhoria geral no desempenho de todos os métodos, conforme esperado. A figura 4.24(c) evidencia uma redução significativa nas oscilações do método NE-2. Por fim, na figura 4.24(d), os métodos demonstram resultados ainda mais próximos entre si, refletindo a eficácia do refinamento aplicado. Conclui-se que este refinamento melhora a precisão geral dos resultados, como previsto, embora o método NE-2 continue apresentando oscilações.

- Aproximações das Derivadas Segundas

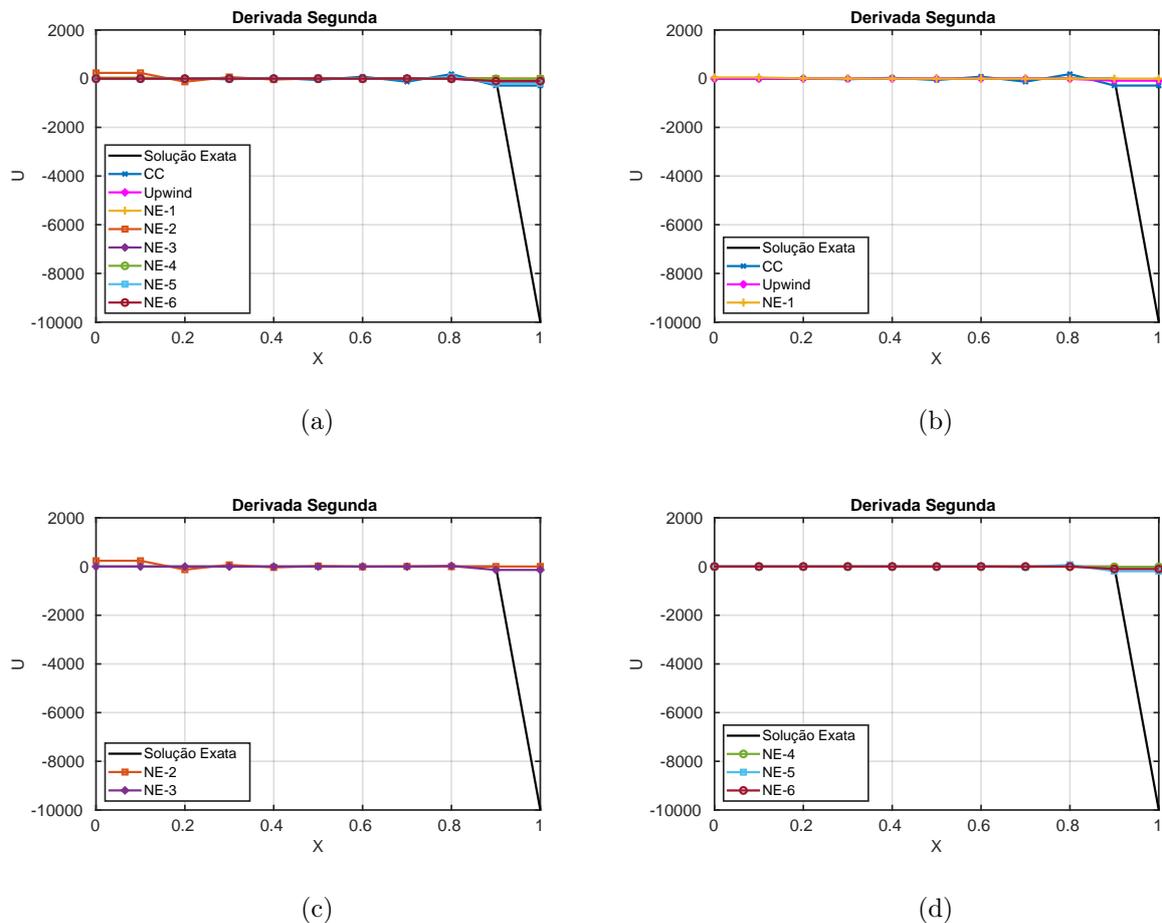


Figura 4.25: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.25 mostra os resultados para as aproximações da segunda derivada, com $h = 0.1$ e tem $Pe = 5$. A figura 4.25(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos separados. Na figura 4.25(b), nota-se, que há pequenas oscilações em CC, enquanto *Upwind* e NE-1 apresentam resultados parecidos. Na figura 4.25(c), mostra algumas pequenas oscilações em NE-2 e um bom desempenho de NE-3. Já na figura 4.25(d), os métodos apresentam boas aproximações mesmo nesta malha mais grosseira. Nota-se que os resultados para a segunda derivada são bem parecidos com os resultados da primeira derivada e conclui-se que em sua maioria, os métodos conseguem boas aproximações nesta malha grosseira.

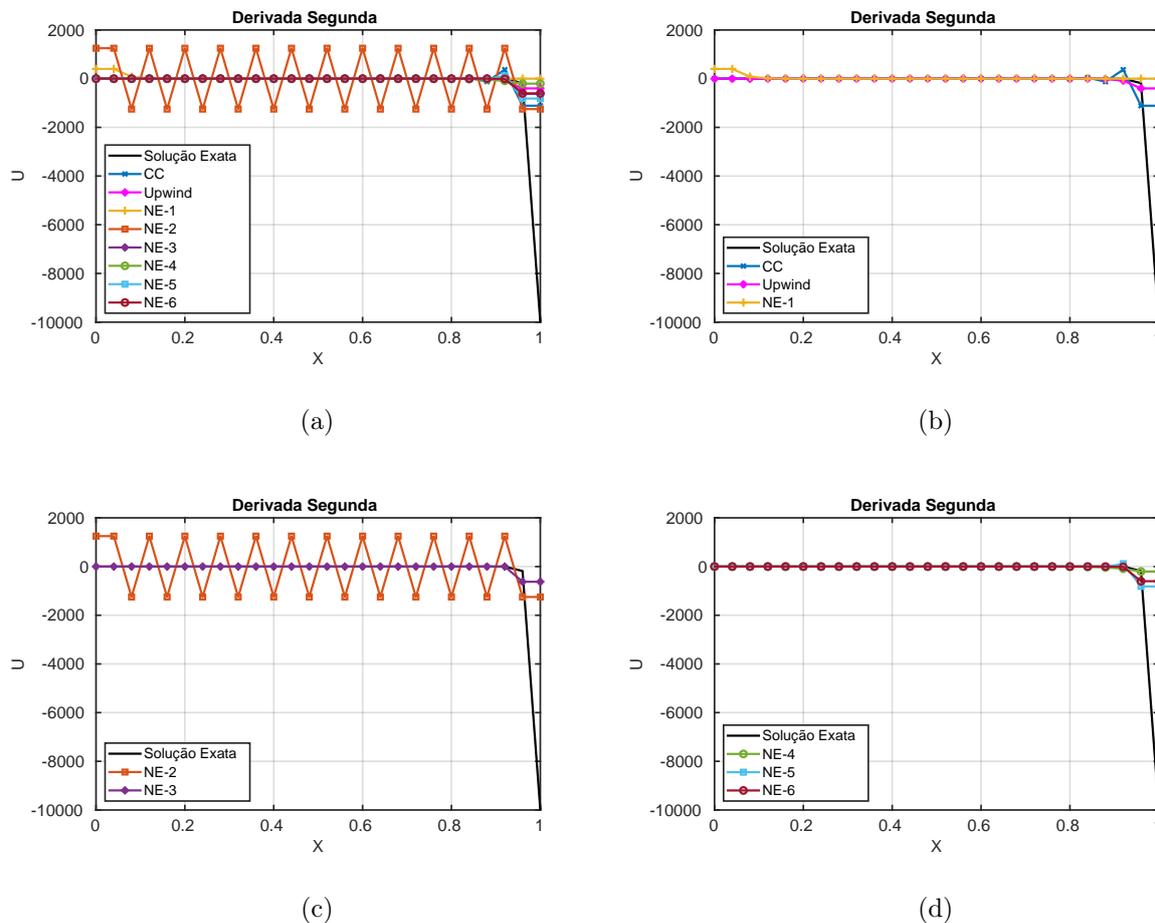


Figura 4.26: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.26 mostra os resultados do primeiro refinamento de malha para as aproximações dos métodos para a primeira derivada, com $h = 0.04$ e tem $Pe = 2$. A figura 4.26(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos separados. Na figura 4.26(b), nota-se algumas oscilações em CC. Na figura 4.26(c), tem-se as oscilações em NE-2 que são comuns com este espaçamento de malha. Já na figura 4.26(d), os métodos apresentam resultados próximos uns dos outros e considerados satisfatórios. Conclui-se que com este espaçamento de malha, a maioria dos métodos apresentam resultados próximos e satisfatórios. Além disso, também se aproximam dos resultados desta malha para as aproximações da primeira derivada.

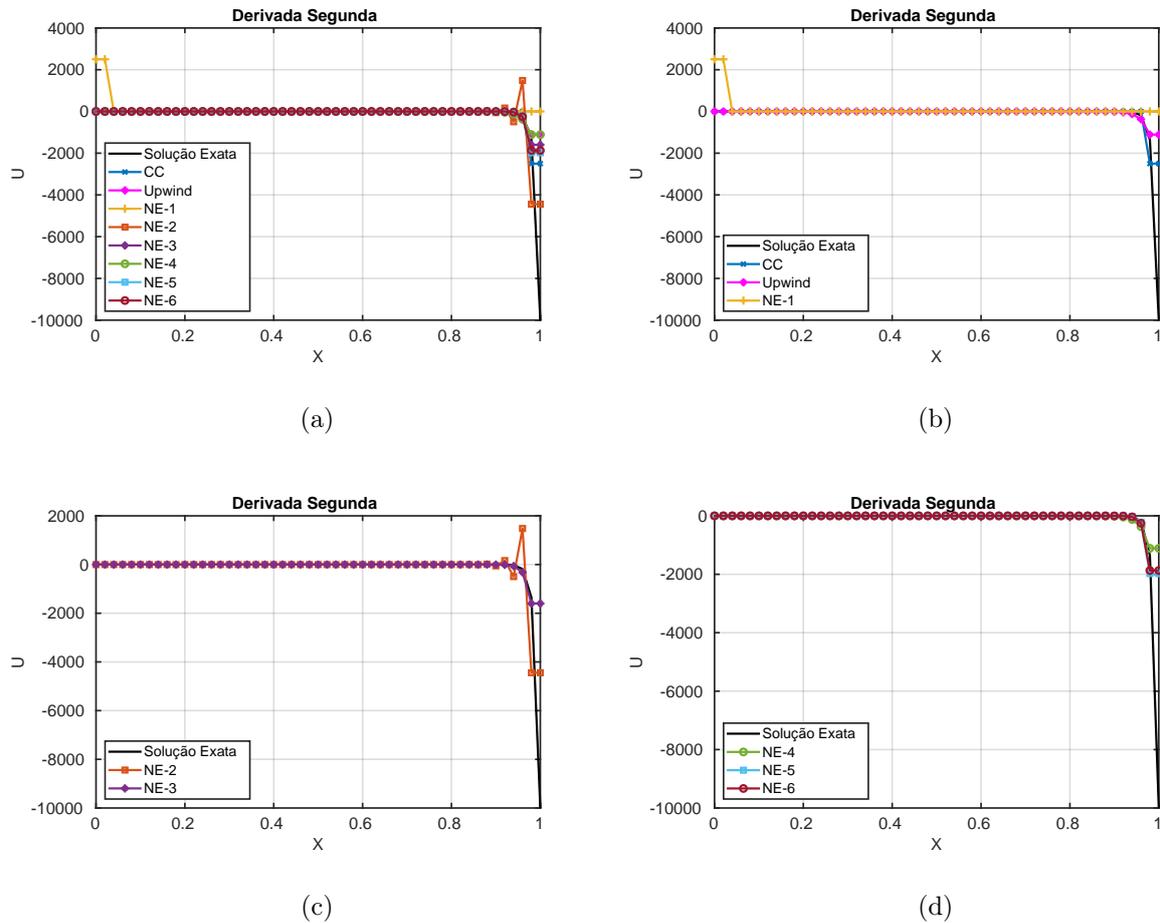


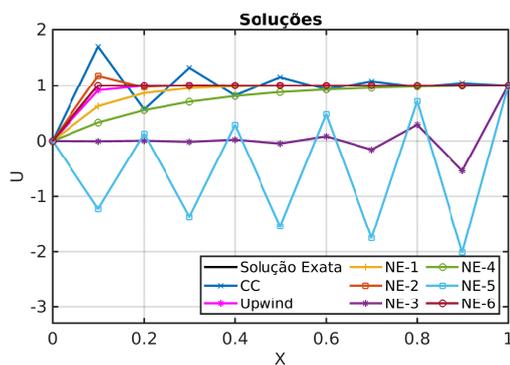
Figura 4.27: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.27 mostra os resultados do último refinamento de malha com as aproximações da segunda derivada, com $h = 0.02$ e tem $Pe = 1$. A figura 4.27(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos separados. Como esperado pelo último refinamento, na figura 4.27(b), nota-se a melhora no desempenho de todos os métodos. Na figura 4.27(c), há a melhora nas oscilações de NE-2 e os outros métodos também se aproximam mais da segunda derivada exata. Já na figura 4.27(d), os métodos apresentam resultados próximos uns dos outros e ainda mais próximo da segunda derivada exata, como consequência do refinamento. Conclui-se, então, que este refinamento traz resultados ainda mais adequados, e, como esperado, apenas NE-2 se destaca como um método que ainda apresenta oscilações. Este caso também apresenta resultados parecidos com $h = 0.02$ da derivada primeira.

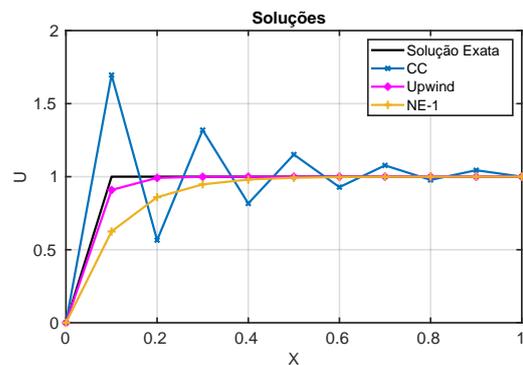
4.1.3.2 Camada Limite Externa à Esquerda

A Solução Exata com Camada Limite Externa à Esquerda pode ser expressa pela equação (4.9), com fonte nula, coeficiente difusivo $D = 10^{-2}$ e velocidade $\vec{v} = 1$. Para comparações, foram testados casos em que $h = 0.1$, $h = 0.04$ e $h = 0.02$. Esses valores geram, respectivamente, $Pe = 5$, $Pe = 2$ e $Pe = 1$.

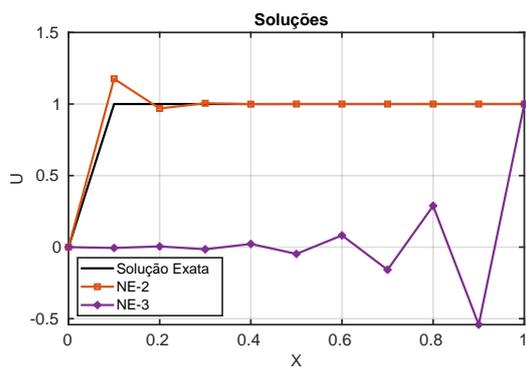
$$\begin{cases} u(x) = \left(\frac{e^{\frac{vx}{D}} - 1}{e^{\frac{v}{D}} - 1} \right), \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 1. \end{cases} \quad (4.9)$$



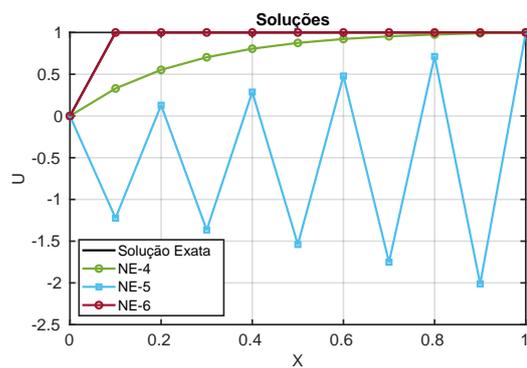
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.28: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.28 mostra os resultados para as aproximações da solução exata com $h = 0.1$ e tem $Pe = 5$. A figura 4.28(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos separados. Na figura 4.28(b), nota-se que *Upwind*

apresenta uma boa aproximação e suavizada, como esperado e CC apresenta oscilações na solução. Na figura 4.28(c), NE-2 apresenta uma aproximação razoável, enquanto NE-3 apresenta muitas oscilações com uma distância considerável da solução exata. Já na figura 4.28(d), vê-se que NE-5 apresenta muitas oscilações e assim como NE-3, apresenta uma distância da solução exata, enquanto NE-6 apresenta uma aproximação bem próxima da solução exata. Assim, pode-se concluir que NE-6, *Upwind* e NE-2 são métodos com aproximações melhores, enquanto NE-3 e NE-5 são as aproximações mais oscilantes e distantes.

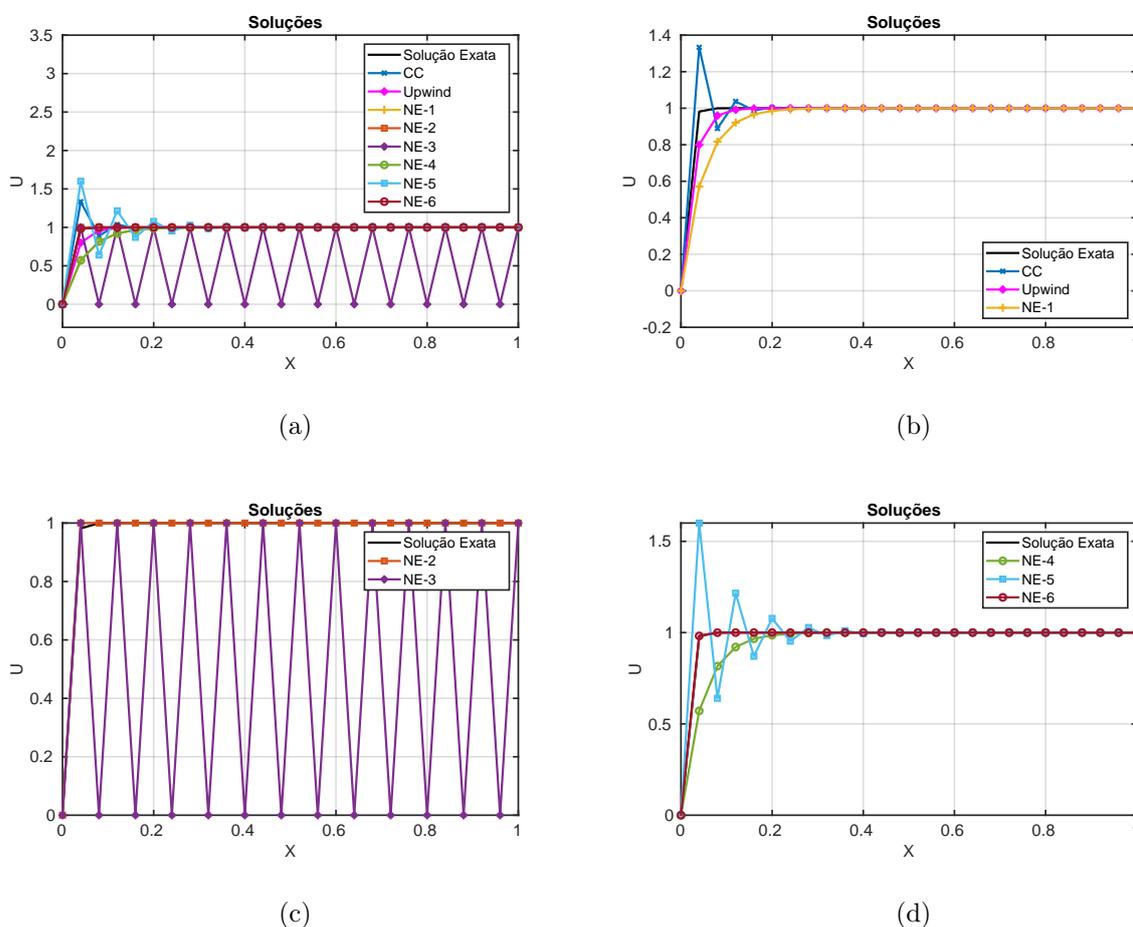


Figura 4.29: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.29 mostra os resultados do primeiro refinamento de malha para as aproximações da solução exata com $h = 0.04$ e tem $Pe = 2$. A figura 4.29(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos separados. Como esperado, o refinamento da malha trouxe várias melhorias, na figura 4.29(b), é possível perceber a melhora considerável nas oscilações de CC, mesmo que não tenham sumido completamente. Na figura 4.29(c), NE-2 se mantém como uma boa aproximação

e melhora, enquanto em NE-3 há o aumento de oscilações. Já na figura 4.29(d), nota-se que há também uma grande melhora em NE-5, pois agora ele está com a aproximação mais próxima da solução exata, apesar de ainda apresentar oscilações. Assim, pode-se concluir que, no geral, os métodos menos satisfatórios mesmo com refinamento de malha, são NE-3 e NE-5.

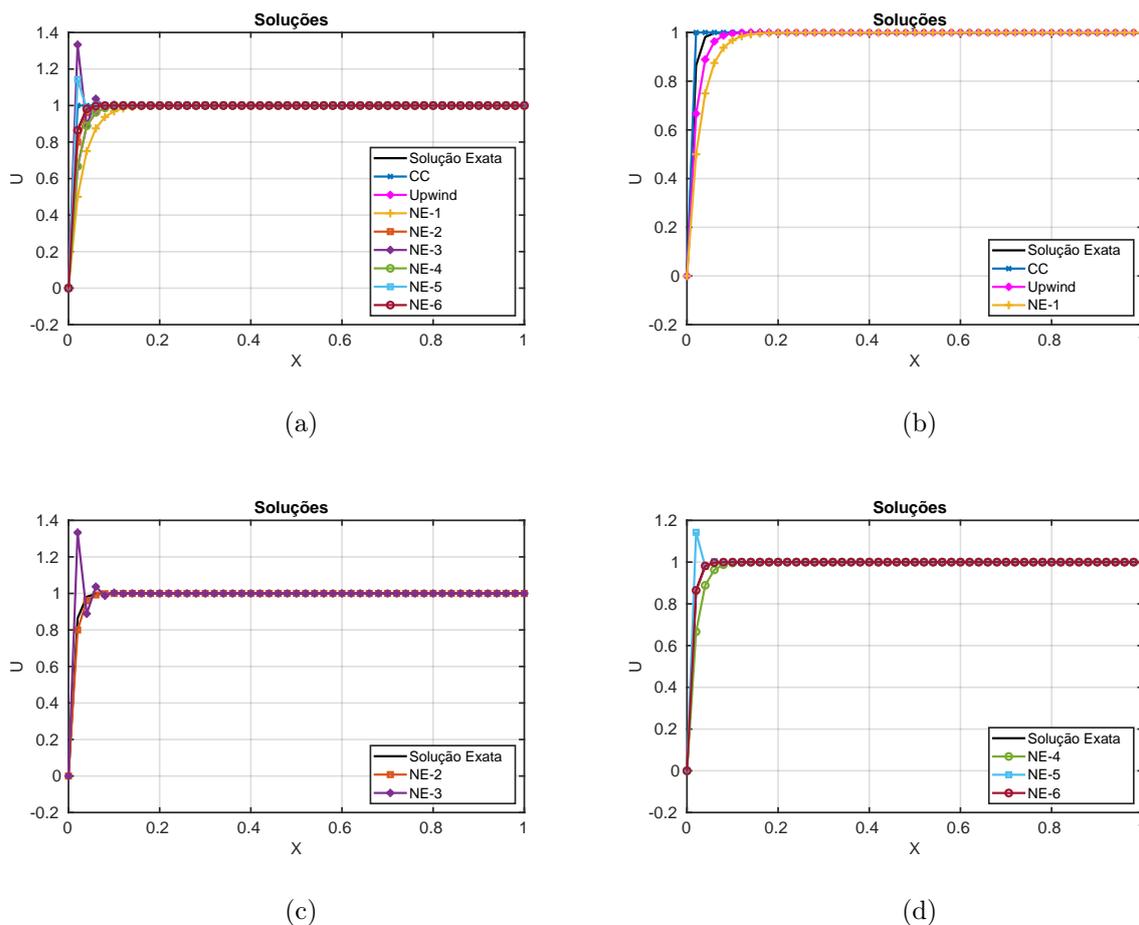


Figura 4.30: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.30 mostra os resultados do último refinamento de malha para as aproximações da solução exata com $h = 0.02$ e tem $Pe = 1$. A figura 4.30(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos separados. Como esperado, o último refinamento da malha melhorou todos os métodos, na figura 4.30(b), é possível perceber que não há mais oscilações em CC. Na figura 4.30(c), NE-2 se torna uma aproximação ainda melhor, enquanto em NE-3 há a diminuição considerável de oscilações. Já na figura 4.30(d), vê-se que em NE-5 também melhorou consideravelmente as oscilações. Sendo assim, apesar de NE-3 e NE-5 terem apenas algumas oscilações, houve melhora em todos os métodos.

• Aproximações das Derivadas Primeiras

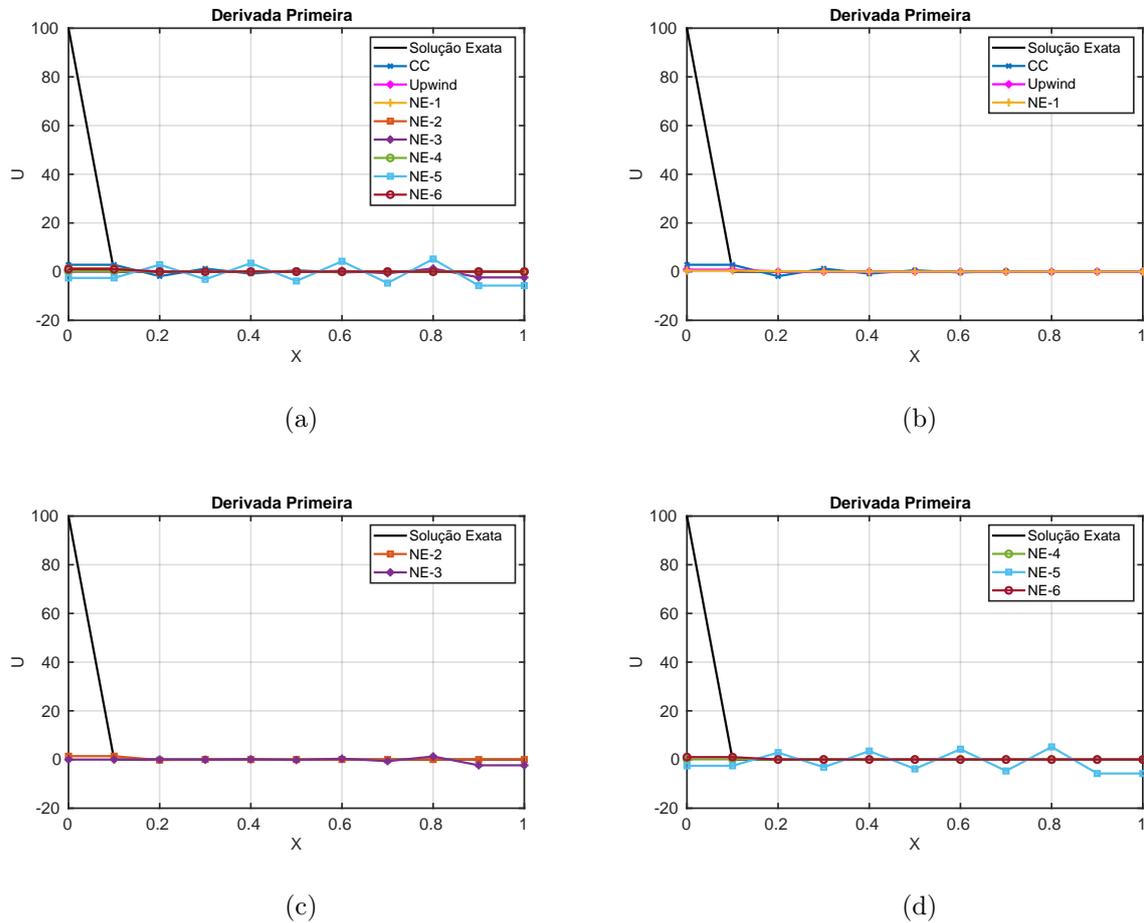


Figura 4.31: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.31 mostra os resultados da derivada primeira com $h = 0.1$ e tem $Pe = 5$. A figura 4.31(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos separados. Na figura 4.31(b), nota-se que os resultados de *Upwind* e NE-1 são parecidos e CC apresenta algumas oscilações. Na figura 4.31(c), NE-3 tem algumas oscilações enquanto NE-2 aparenta entregar uma boa aproximação. Já na figura 4.31(d), vê-se que NE-4 e NE-6 são resultados próximos e NE-5 apresenta oscilações. Então, conclui-se que os métodos apresentam aproximações próximas uns dos outros e NE-5 se destaca como o método mais oscilante.

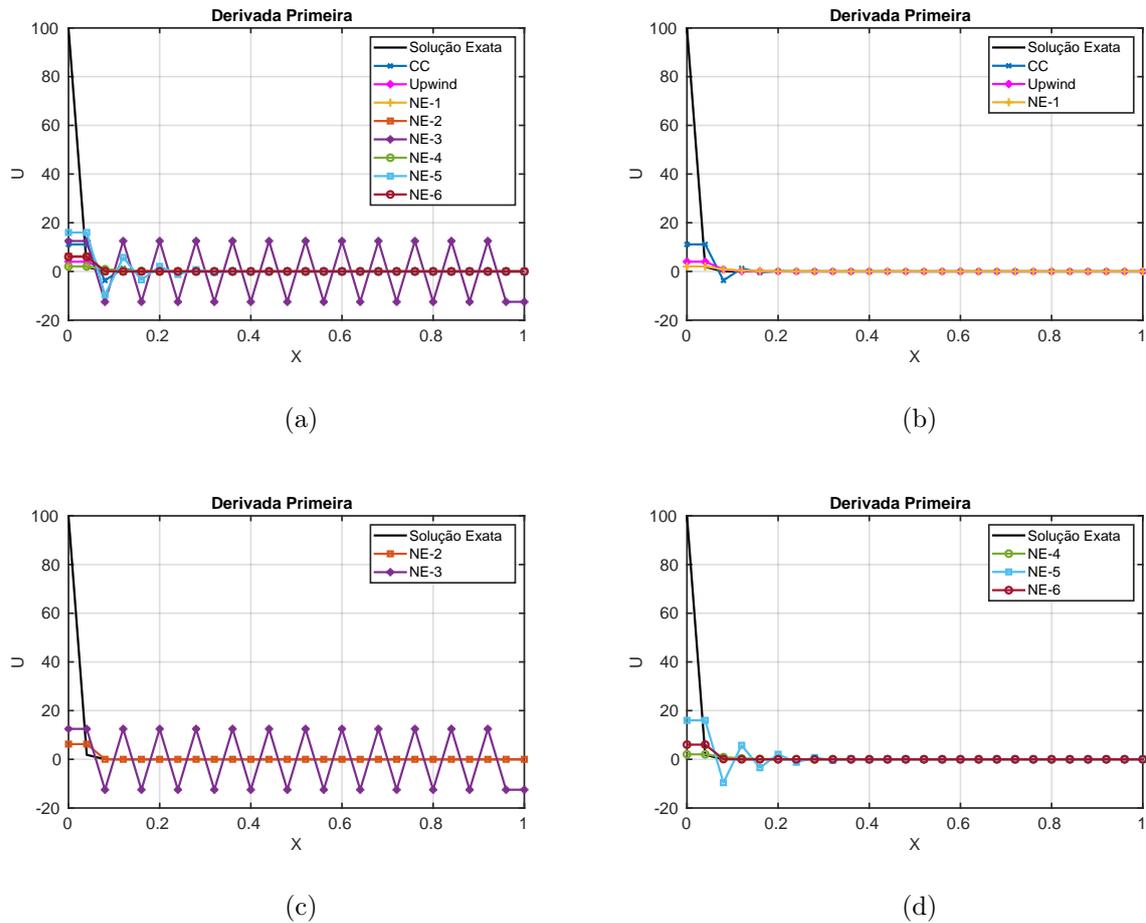


Figura 4.32: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.32 mostra os resultados do primeiro refinamento de malha para as aproximações da derivada primeira, com $h = 0.04$ e tem $Pe = 2$. A figura 4.32(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos separados. Como esperado, pelo refinamento da malha, há melhora nas aproximações dos métodos, na figura 4.32(b), vê-se a diminuição nas oscilações de CC. Na figura 4.32(c), NE-3 tem um aumento nas oscilações. Já na figura 4.32(d), nota-se que também há melhora nas oscilações de NE-5. Assim, o refinamento melhora os métodos, mas, este espaçamento de malha em específico traz oscilações para NE-3, que acaba sendo o método menos satisfatório neste caso.

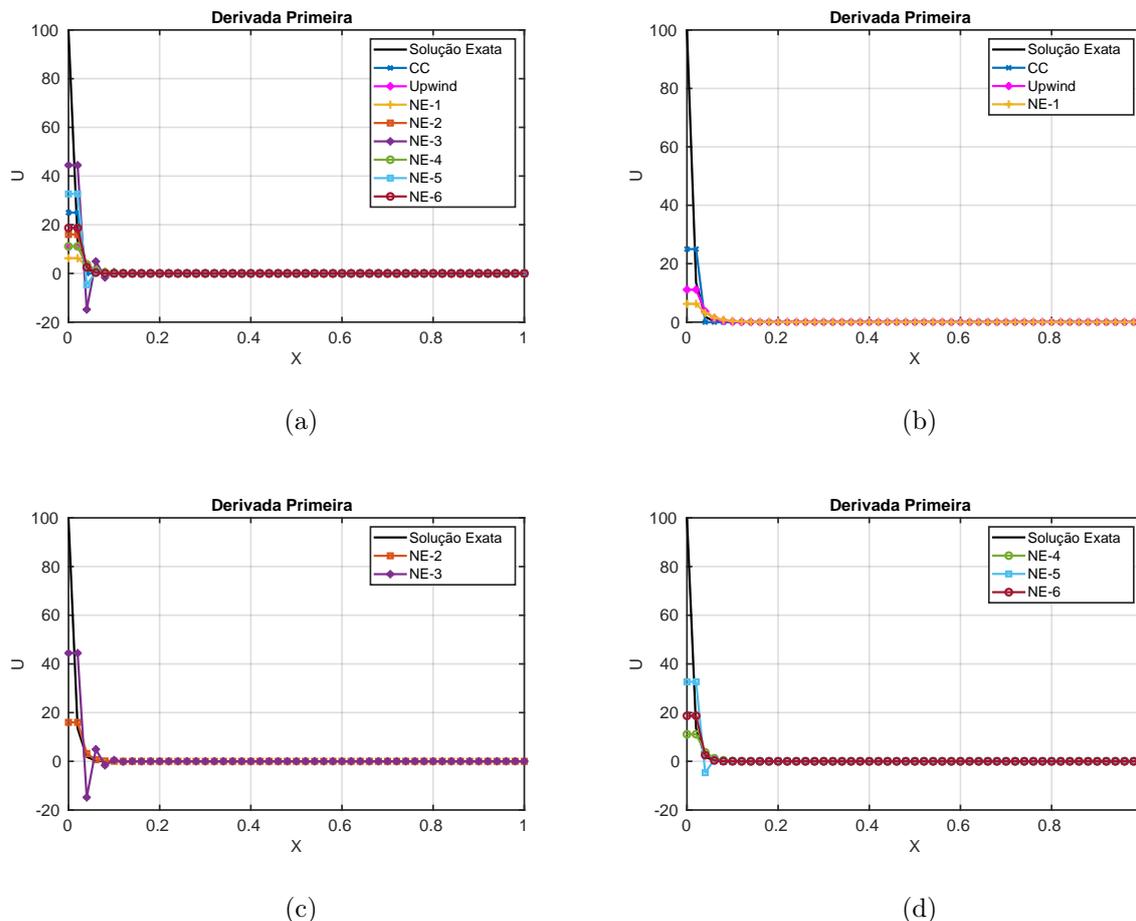


Figura 4.33: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.33 mostra os resultados do último refinamento de malha para as aproximações da derivada primeira, com $h = 0.02$ e tem $Pe = 1$. A figura 4.33(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos separados. Como esperado para este último refinamento, há melhora em todos os resultados, reduzindo ou até mesmo eliminando as oscilações, como em CC, na figura 4.33(b) em NE-3, na figura 4.33(c), e em NE-5 na figura 4.33(d). Este espaçamento de malha traz resultados satisfatórios em sua maioria.

- **Aproximações das Derivadas Segundas**

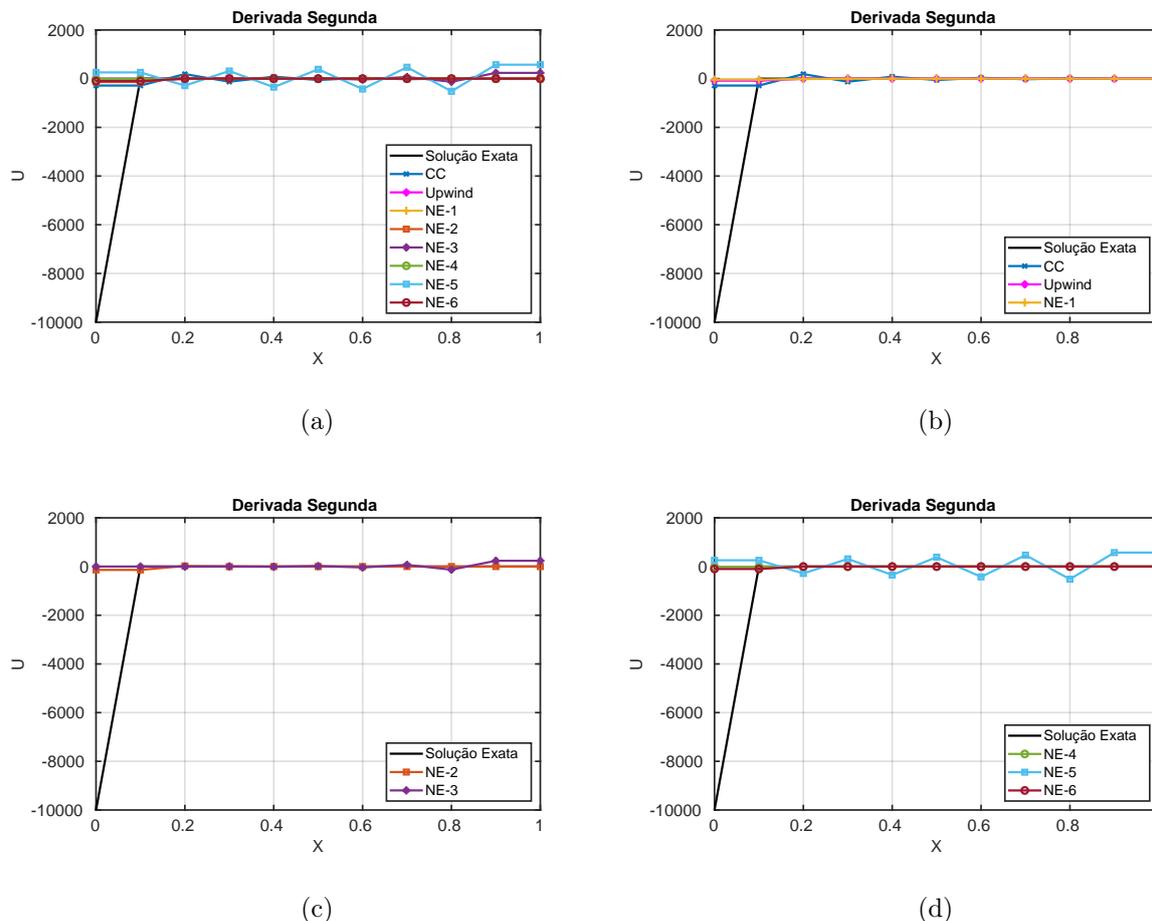


Figura 4.34: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.34 mostra os resultados das aproximações dos métodos para a segunda derivada, com $h = 0.1$ e tem $Pe = 5$. A figura 4.34(a), mostra o resultado com todos os métodos juntos e nas figuras seguintes os métodos são exibidos separados. Na figura 4.34(b) vê-se algumas oscilações em CC e resultados parecidos para *Upwind* e NE-1. Na figura 4.34(c) também pode-se notar poucas oscilações em NE-3. Já na figura 4.34(d) há consideráveis oscilações em NE-5. Conclui-se que grande parte dos métodos já demonstram resultados adequados e NE-5 precisa de refinamento de malha para ser mais satisfatório.

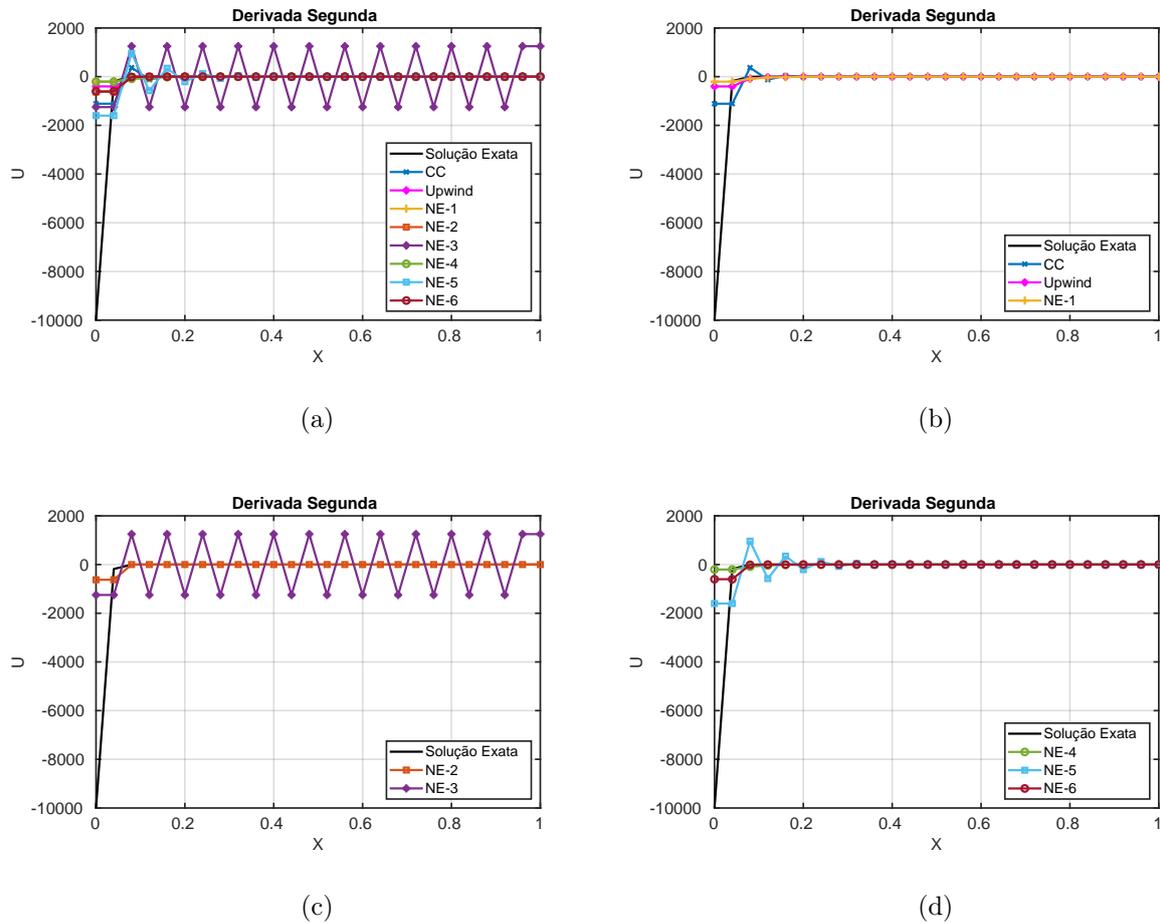


Figura 4.35: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.35 apresenta os resultados do primeiro refinamento de malha para as aproximações da derivada primeira, com $h = 0.04$ e $Pe = 2$. Na figura 4.35(a), são exibidos os resultados de todos os métodos em conjunto, enquanto nas subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Como esperado, devido ao refinamento da malha, há uma melhoria nas aproximações. Na figura 4.35(b), observa-se uma redução nas oscilações no método de CC. Já na figura 4.35(c), o método NE-3 apresenta um aumento nas oscilações. Na figura 4.35(d), verifica-se uma melhoria também nas oscilações do método NE-5. Portanto, o refinamento de malha proporciona melhorias nos métodos, embora, neste caso específico, o espaçamento adotado introduza oscilações no NE-3, tornando-o o método menos satisfatório neste caso. Os resultados obtidos também se assemelham ao resultado da derivada primeira associado a este espaçamento de malha.

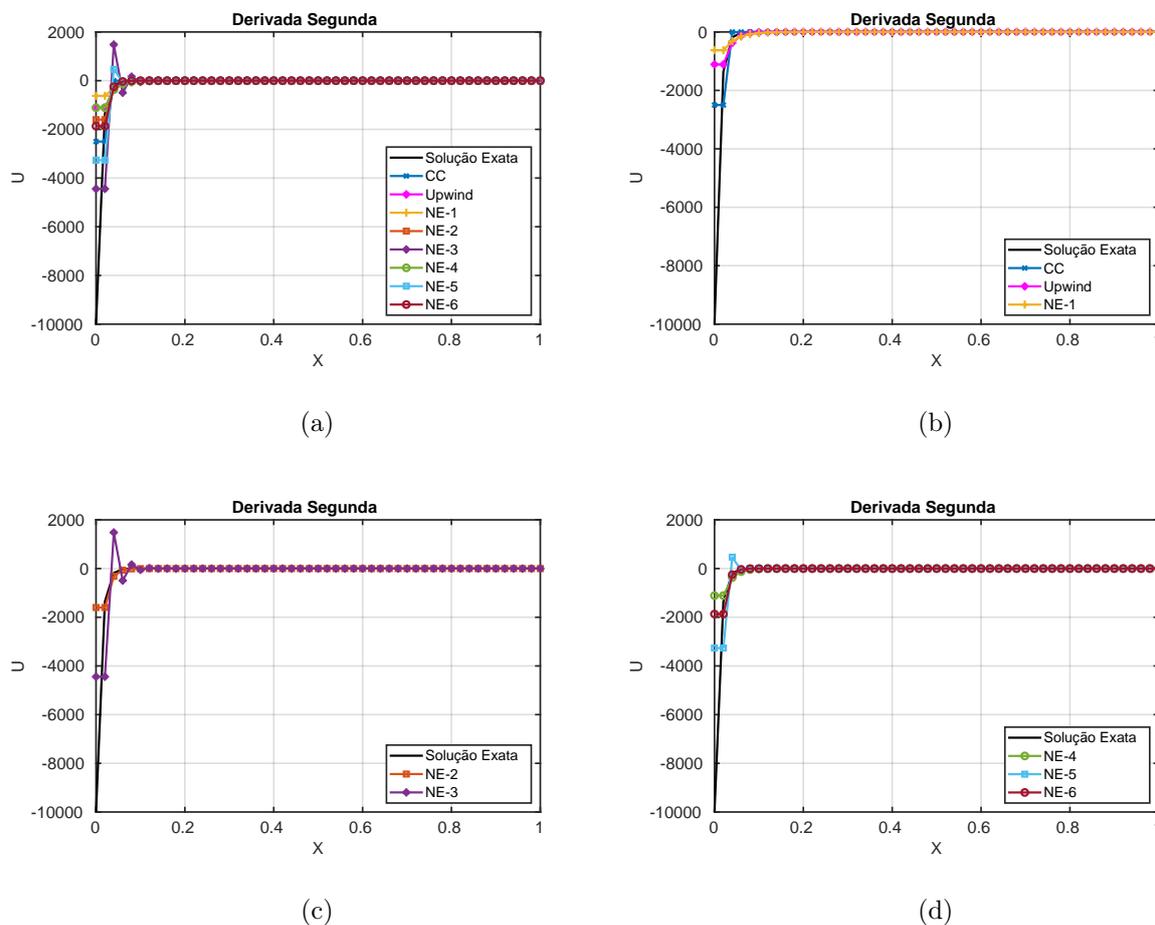


Figura 4.36: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.36 apresenta os resultados do último refinamento de malha para as aproximações da derivada primeira, com $h = 0.02$ e $Pe = 1$. A figura 4.36(a) exibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Como esperado pelo refinamento final, há uma melhora significativa em todos os resultados, com a redução ou até mesmo eliminação das oscilações, como observado no método CC na figura 4.36(b), no método NE-3 na figura 4.36(c) e no método NE-5 na figura 4.36(d). Este espaçamento de malha apresenta, em sua maioria, resultados satisfatórios e também traz resultados aproximados aos do mesmo espaçamento para a derivada primeira.

4.1.4 Solução Exata com Camada Limite Interna

A Solução Exata com Camada Limite Interna pode ser expressa pela equação (4.10), com fonte expressa pela equação (4.11), coeficiente difusivo $D = 10^{-2}$ e velocidade $\vec{v} = 1$.

Para comparações, foram testados casos em que $h = 0.1$, $h = 0.04$ e $h = 0.02$. Esses valores geram, respectivamente, $Pe = 5$, $Pe = 2$ e $Pe = 1$.

$$\begin{cases} u(x) = \frac{\bar{u}}{1+e^{-\lambda(x-\beta)}}, \\ u(0) = \frac{\bar{u}}{1+e^{\lambda\beta}}, \\ u(1) = \frac{\bar{u}}{1+e^{-\lambda(1-\beta)}}. \end{cases} \quad (4.10)$$

$$f(x) = \frac{\lambda\bar{u}e^{-\lambda(x-\beta)}[(D\lambda + v) + e^{-\lambda(x-\beta)}(-D\lambda + v)]}{(1 + e^{-\lambda(x-\beta)})^3}. \quad (4.11)$$

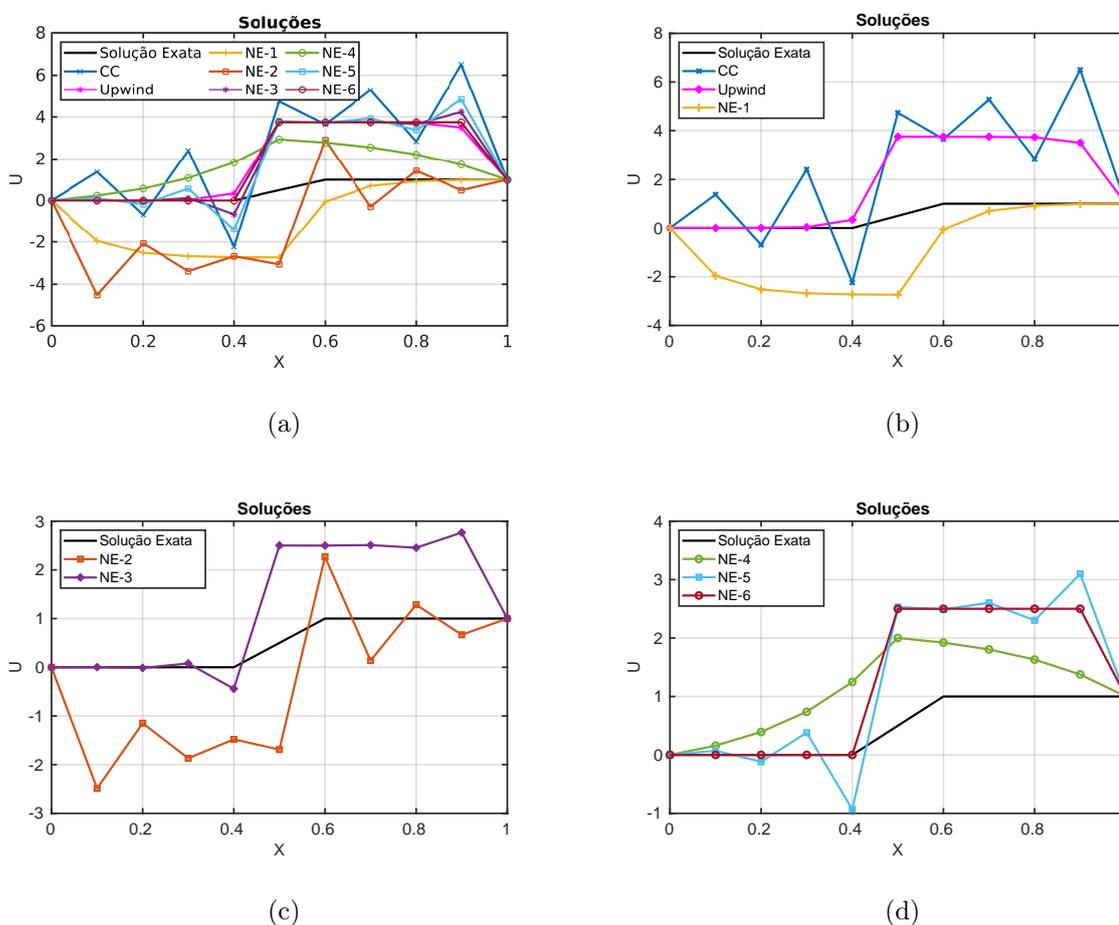


Figura 4.37: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.37 apresenta os resultados das aproximações com $h = 0.1$ e $Pe = 5$. A figura 4.37(a) exibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Na figura 4.37(b), nota-se que nenhum dos métodos está com a aproximação perto o suficiente da solução exata, CC

apresenta muitas oscilações e todos os métodos estão distantes. Na figura 4.37(c) mantém-se que os métodos estão oscilantes e distantes e isto também pode ser observado na figura 4.37(d). Logo, para este caso, é necessário refinamento de malha, pois nenhum método faz aproximação satisfatória nesta malha mais grosseira.

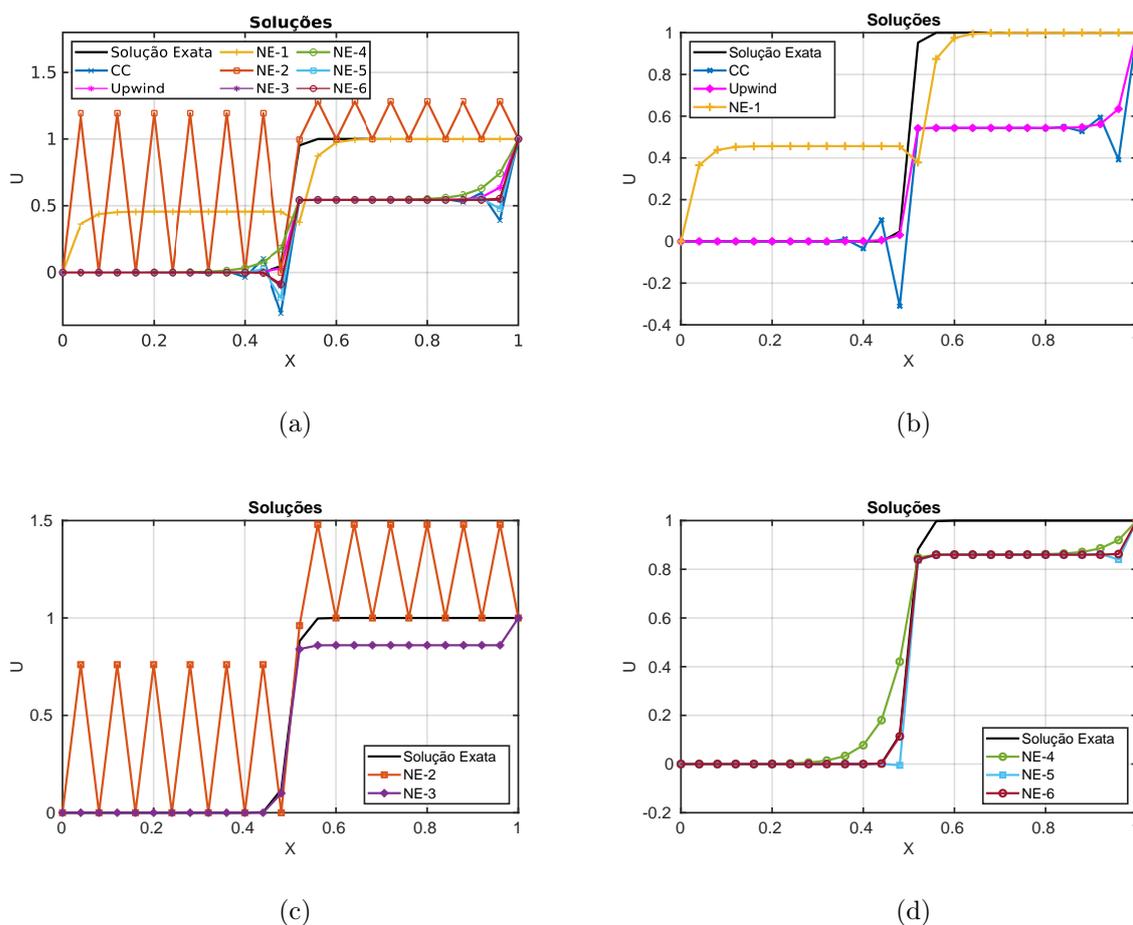


Figura 4.38: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.38 apresenta os resultados do primeiro refinamento para aproximações com $h = 0.04$ e $Pe = 2$. A figura 4.38(a) exibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Como esperado, os resultados começam a melhorar com este primeiro refinamento de malha, na figura 4.38(b), nota-se que os métodos oscilam menos e estão menos distantes da solução exata, porém, com resultados insatisfatórios. Na figura 4.38(c) NE-2 apresenta muitas oscilações, enquanto NE-3 apresenta uma melhora considerável em sua aproximação. Já na figura 4.38(d), há uma boa melhora em todos os métodos, apesar de não estarem tão próximos da solução exata, já demonstram melhora considerável. Logo, para este caso, ainda se faz necessário um novo refinamento para se ter melhores resultados, mas,

contudo, este espaçamento de malha já começa a apresentar aproximações bem melhores comparados a malha mais grosseira.

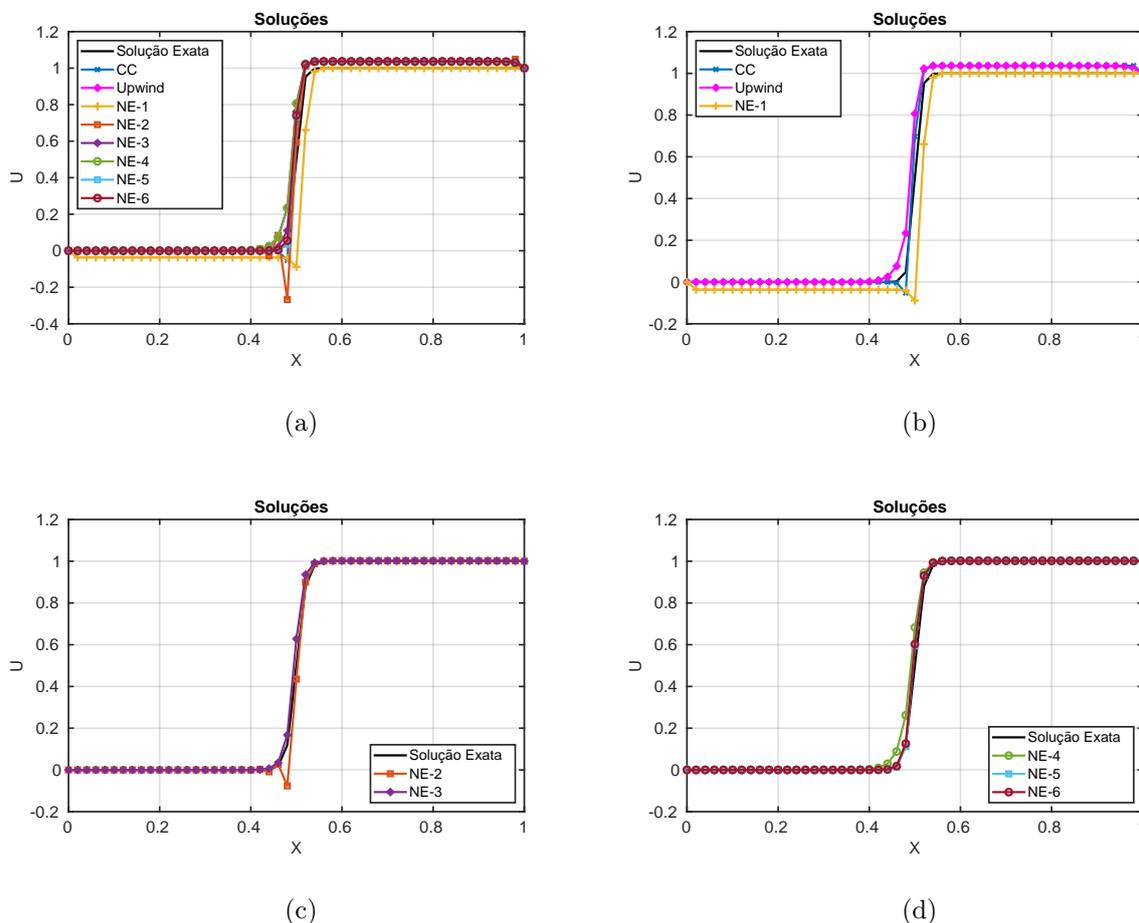


Figura 4.39: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.39 apresenta os resultados do último refinamento para as aproximações, com $h = 0.02$ e $Pe = 1$. A figura 4.39(a) exhibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Os resultados com este refinamento de malha, como esperado, são os melhores para as soluções, na figura 4.39(b), nota-se que os métodos estão bem próximos entre si, apenas com NE-1 ainda um pouco mais distante dos outros. Na figura 4.39(c) NE-2 apresenta uma pequena oscilação, enquanto NE-3 faz uma boa aproximação da solução exata. Já na figura 4.39(d), as aproximações estão melhores, trazendo resultados bem próximos da solução exata. Assim, pode-se concluir que para este caso, a malha mais refinada se faz necessária para a qualidade das aproximações, que não são satisfatórias nas malhas mais grosseiras.

• Aproximações das Derivadas Primeiras

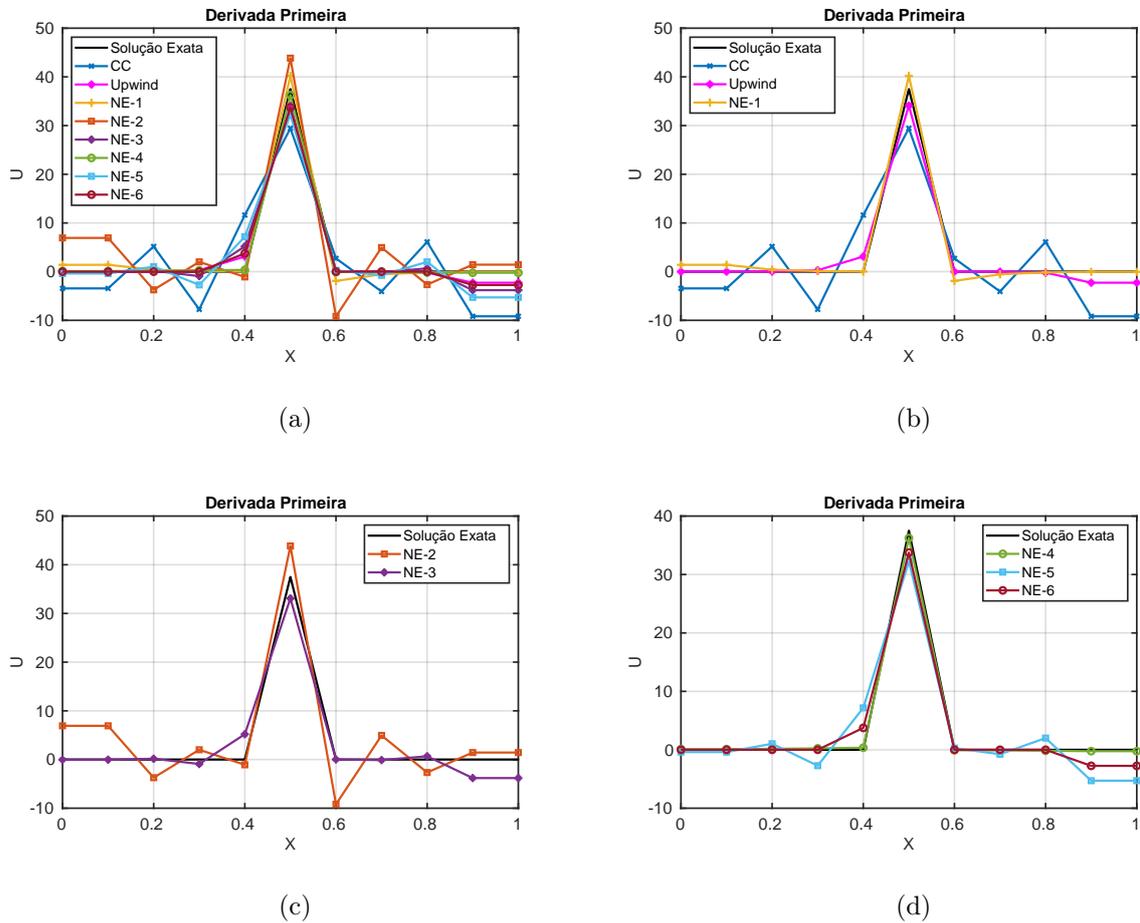


Figura 4.40: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.40 apresenta os resultados para as aproximações da derivada primeira com $h = 0.1$ e $Pe = 5$. A figura 4.40(a) exibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Na figura 4.40(b), percebe-se que CC apresenta muitas oscilações em sua aproximação e NE-1 apresenta o melhor resultado. Na figura 4.40(c) NE-2 apresenta oscilações consideráveis e NE-3 apresenta poucas oscilações. Já na figura 4.40(d), NE-4 apresenta uma aproximação satisfatória já nesta malha mais grosseira, NE-5 e NE-6 trazem aproximações com poucas oscilações, com resultados razoáveis. Conclui-se dentre todos os métodos, que a melhor aproximação é a apresentada por NE-4, NE-1 e NE-6 apresentam resultados aceitáveis, e as menos satisfatórias são as apresentadas por CC e NE-2.

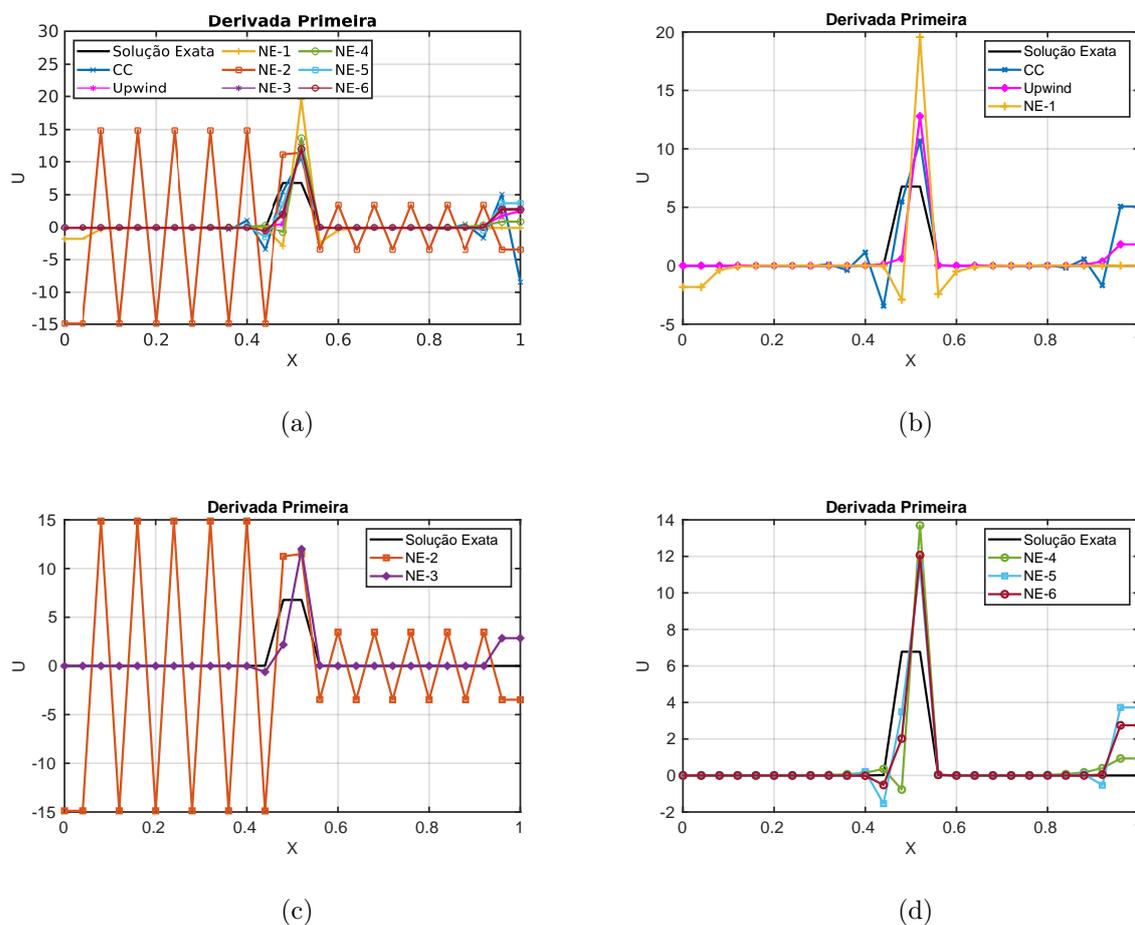


Figura 4.41: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.41 apresenta os resultados para o primeiro refinamento de malha nas aproximações da derivada primeira com $h = 0.04$ e $Pe = 2$. A figura 4.41(a) exibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Diferente do esperado, o refinamento de malha não melhorou as aproximações em relação ao resultado anterior, na figura 4.41(b), percebe-se que os métodos estão mais distantes da derivada primeira exata, até mesmo no NE-1, que anteriormente demonstrava ser uma boa aproximação. Na figura 4.41(c) NE-2 apresenta muitas oscilações. Já na figura 4.41(d), os métodos também seguiram o mesmo padrão, de distanciamento e de algumas oscilações. Conclui-se que este refinamento não ajudou os métodos em suas aproximações.

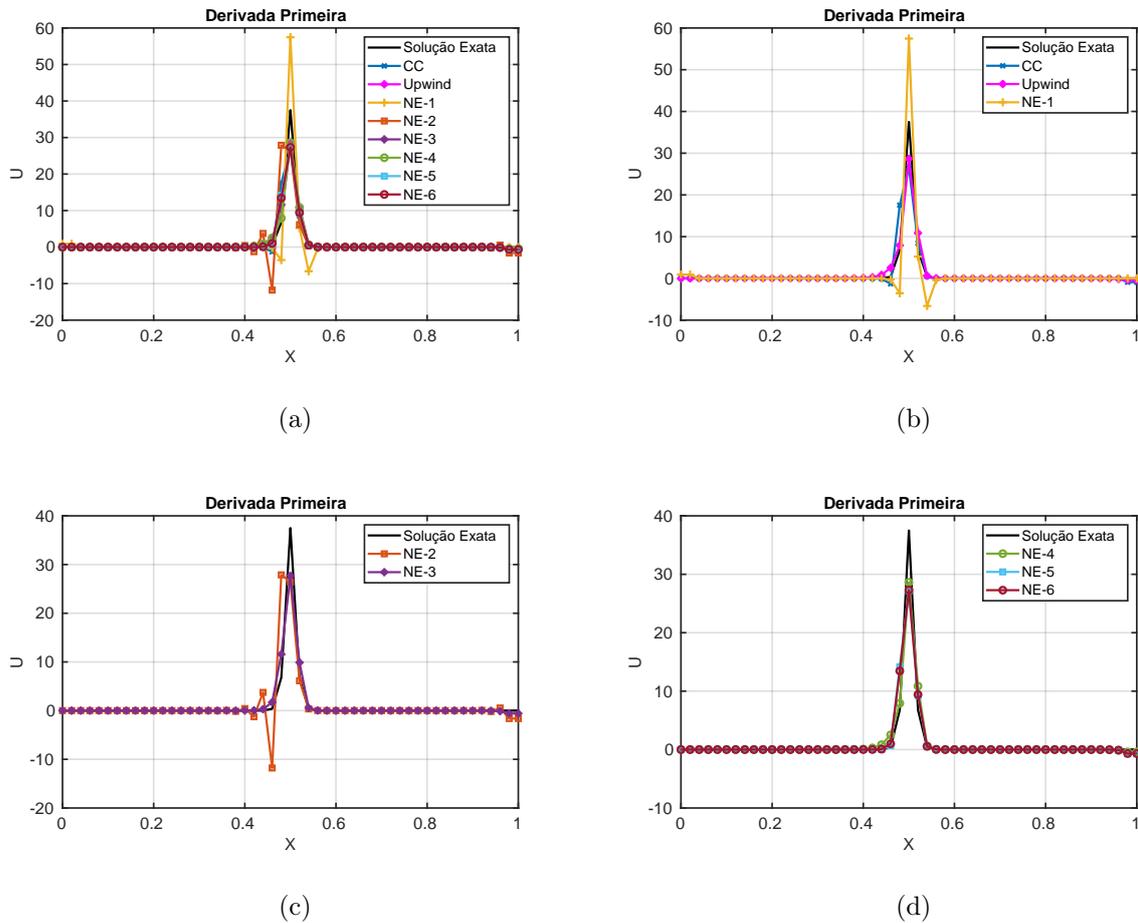


Figura 4.42: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.42 apresenta os resultados para o último refinamento de malha nas aproximações da derivada primeira com $h = 0.02$ e $Pe = 1$. A figura 4.42(a) exibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Este caso já traz um resultado mais próximo do esperado para um refinamento de malha, na figura 4.42(b), percebe-se que os métodos estão mais próximos da derivada exata, com poucas oscilações em NE-1. Na figura 4.42(c) NE-2 tem diminuição nas oscilações e NE-3 apresenta aproximação satisfatória. Já na figura 4.42(d), os métodos melhoraram e estão bem próximos entre si e da derivada exata. Conclui-se que com este refinamento de malha, os métodos melhoraram e apenas NE-1 e NE-2 ainda apresentam mais oscilações que o esperado.

- **Aproximações das Derivadas Segundas**

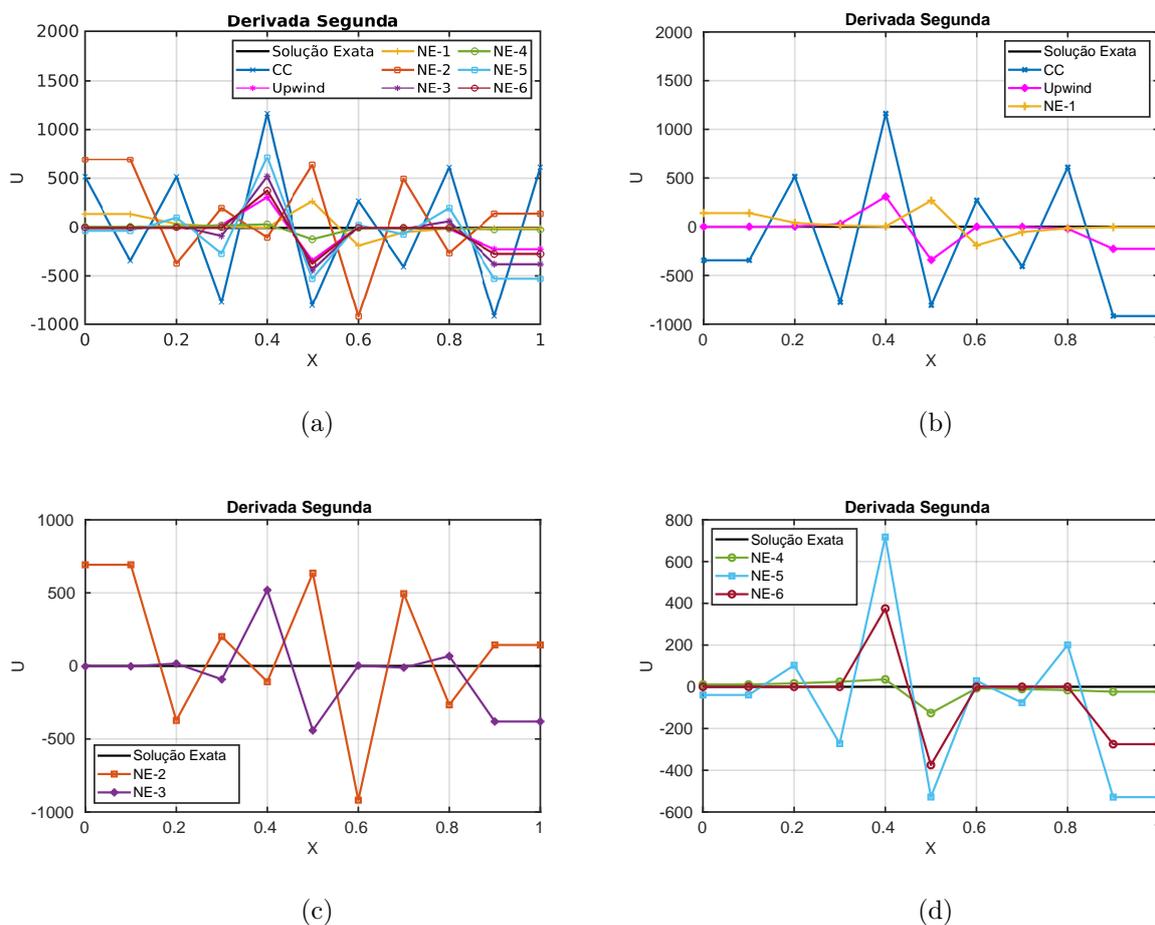


Figura 4.43: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.43 apresenta os resultados para as aproximações da derivada segunda, com $h = 0.1$ e $Pe = 5$. A figura 4.43(a) exhibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Na figura 4.43(b), nota-se que os resultados estão oscilando consideravelmente, com destaque para CC como o mais oscilante. Na figura 4.43(c) ambos os métodos estão bem oscilantes. Já na figura 4.43(d), o NE-4 é a exceção, pois, apresenta menos oscilações que os demais métodos. Então, conclui-se que as aproximações com esta malha mais grosseira não possui resultados satisfatórios, sendo necessário realizar um refinamento.

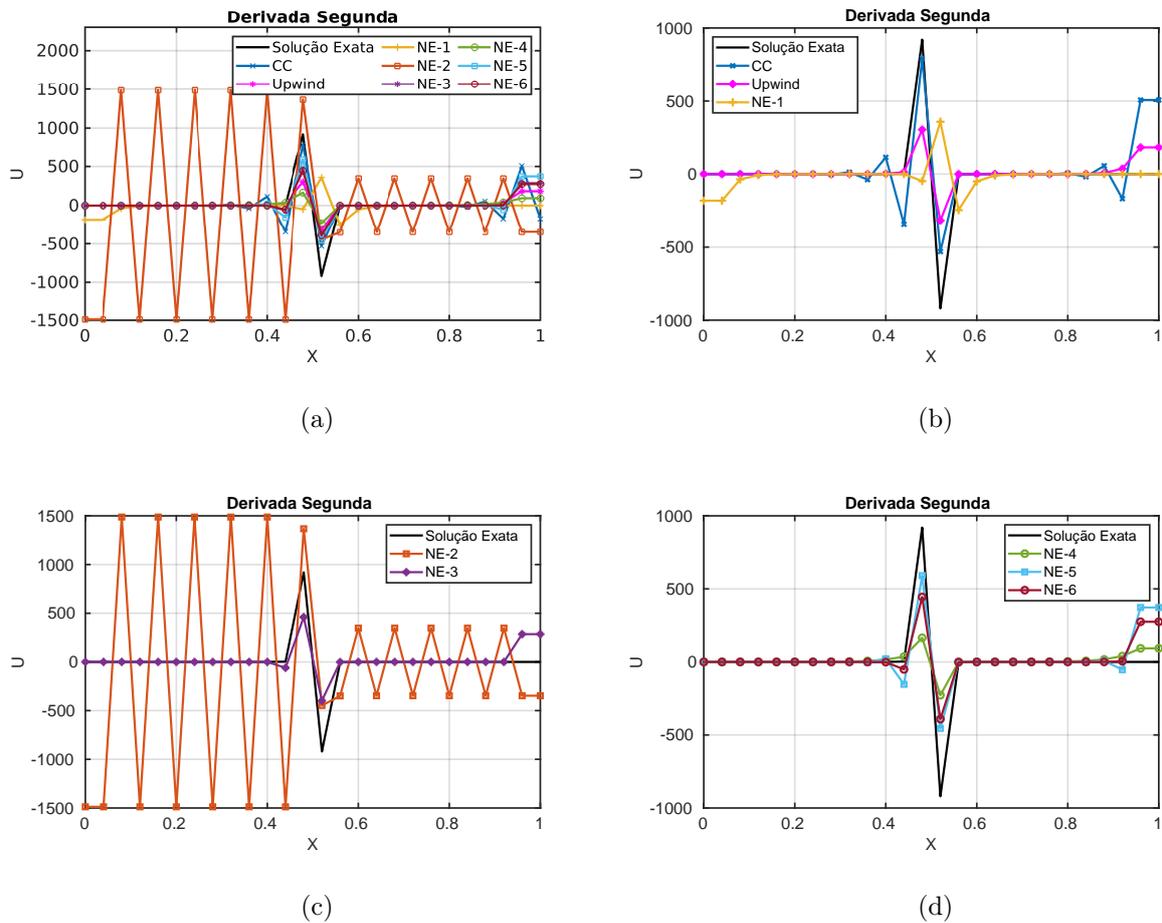


Figura 4.44: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.44 apresenta os resultados para o primeiro refinamento de malha para as aproximações da derivada segunda, com $h = 0.04$ e $Pe = 2$. A figura 4.44(a) exibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. O refinamento da malha, como esperado, trouxe melhorias para os métodos, na figura 4.44(b), nota-se a maior proximidade dos métodos com a derivada segunda exata e a diminuição de oscilações. Na figura 4.44(c) há o aumento de oscilações em NE-2 e a melhora na aproximação de NE-3. E na figura 4.44(d), os métodos também melhoraram as aproximações. Logo, conclui-se que o refinamento foi de grande ajuda na melhora dos resultados, que antes estavam distantes e bem oscilantes.

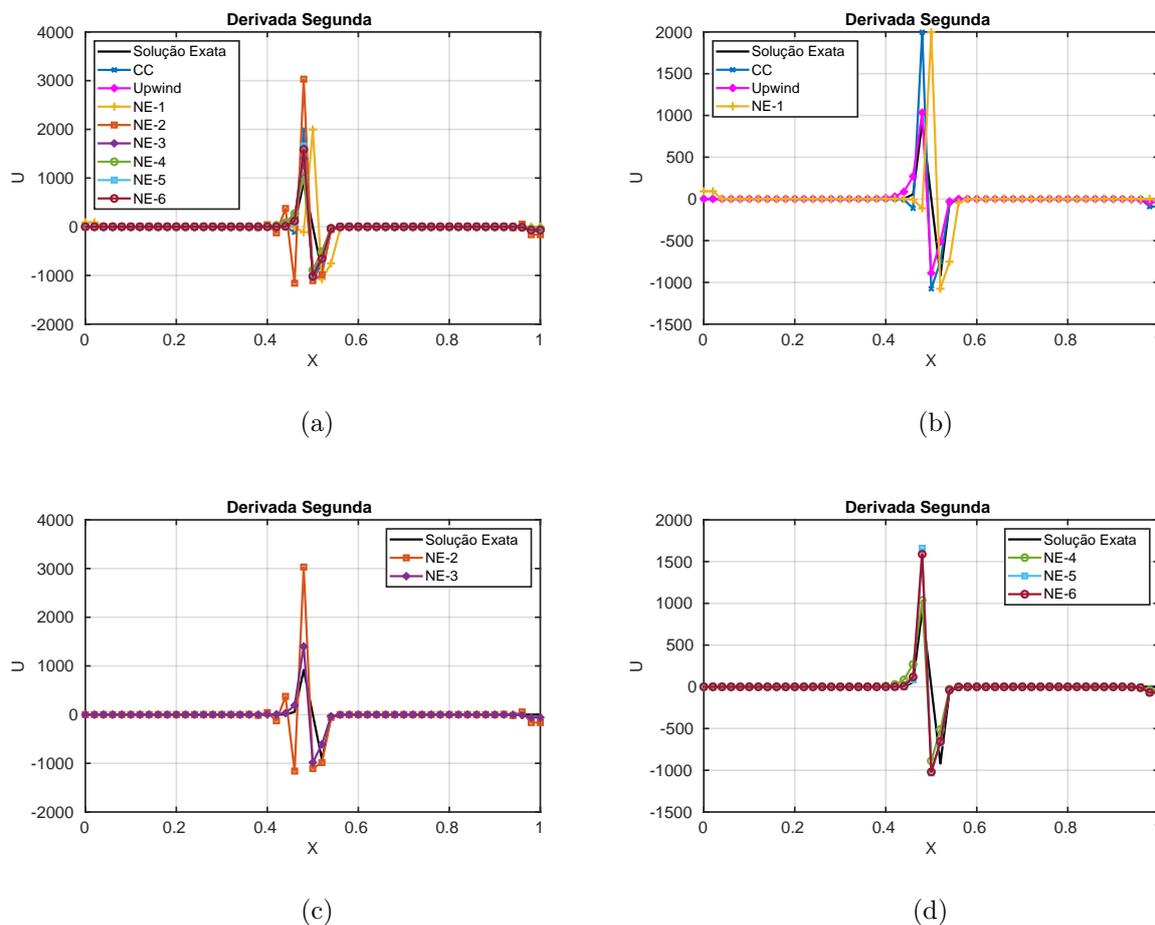


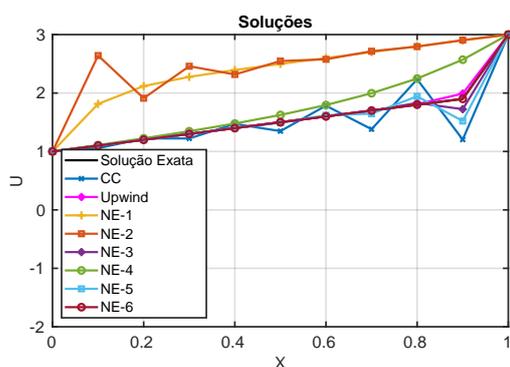
Figura 4.45: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.45 apresenta os resultados para o último refinamento de malha para as aproximações da derivada segunda, com $h = 0.02$ e $Pe = 1$. A figura 4.45(a) exhibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Na figura 4.45(b), percebe-se que o refinamento final não ajudou como esperado, visto que apesar da redução nas oscilações, o resultado visto no meio se mostra mais distante da derivada segunda exata. Na figura 4.45(c) há diminuição de oscilações em NE-2, mas o resultado no interior, ou seja, na região central do gráfico, também se mostra distante, como nos métodos mencionados anteriormente. Já na figura 4.45(d), apesar de um certo distanciamento no interior, os métodos se mostram mais próximos da derivada exata e sem a presença de oscilações, sendo métodos com aproximações mais aceitáveis para este caso, com destaque para NE-4, que se mostra o mais próximo da derivada exata. Assim, pode-se concluir que o método mais satisfatório neste refinamento foi NE-4, e como métodos aceitáveis tem-se NE-5, NE-6, NE-3 e *Upwind*.

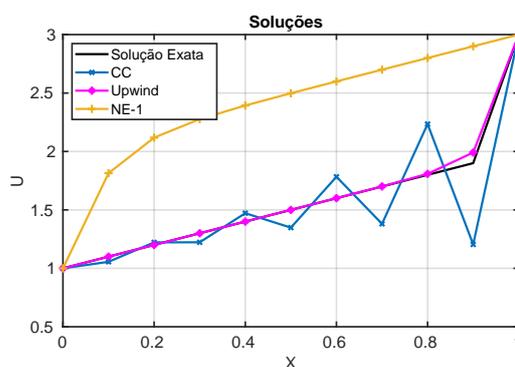
4.1.5 Solução Exata Proposta por LeVeque

A Solução Exata que LeVeque propõe em [20] para a Equação Difusiva-Convectiva é expressa pela equação (4.12), acompanhada da fonte $f(x) = -1$, coeficiente difusivo $D = 10^{-2}$ e velocidade $\vec{v} = 1$. Para comparações, foram testados casos em que $h = 0.1$, $h = 0.04$ e $h = 0.02$. Esses valores geram, respectivamente, $Pe = 5$, $Pe = 2$ e $Pe = 1$.

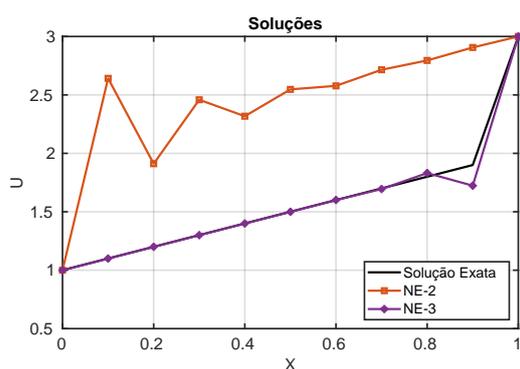
$$\begin{cases} u(x) = u(x) = 1 + x + \left(\frac{e^{\frac{vx}{D}} - 1}{e^{\frac{v}{D}} - 1} \right), \\ u(0) = 1, \\ u(1) = 3. \end{cases} \quad (4.12)$$



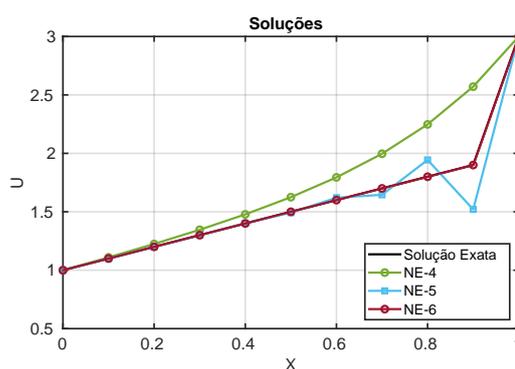
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.46: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.46 apresenta os resultados das aproximações dos métodos com $h = 0.1$ e $Pe = 5$. A figura 4.46(a) exibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Na figura 4.46(b),

percebe-se que NE-1 se mostra bem distante da solução exata, CC apresenta muitas oscilações e *Upwind* faz uma aproximação bem satisfatória. Na figura 4.46(c) NE-2 se mostra distante do resultado exato e com oscilações, enquanto NE-3 se mostra com boa aproximação. Já na figura 4.46(d), NE-4 está distante, NE-5 apresenta poucas oscilações e o destaque é para NE-6, que mostra sua aproximação muito próxima da solução exata. Logo, conclui-se que no geral, o melhor método é o NE-6, com boas aproximações de *Upwind* e NE-3, enquanto os resultados menos satisfatórios são de NE-2 e NE-1.

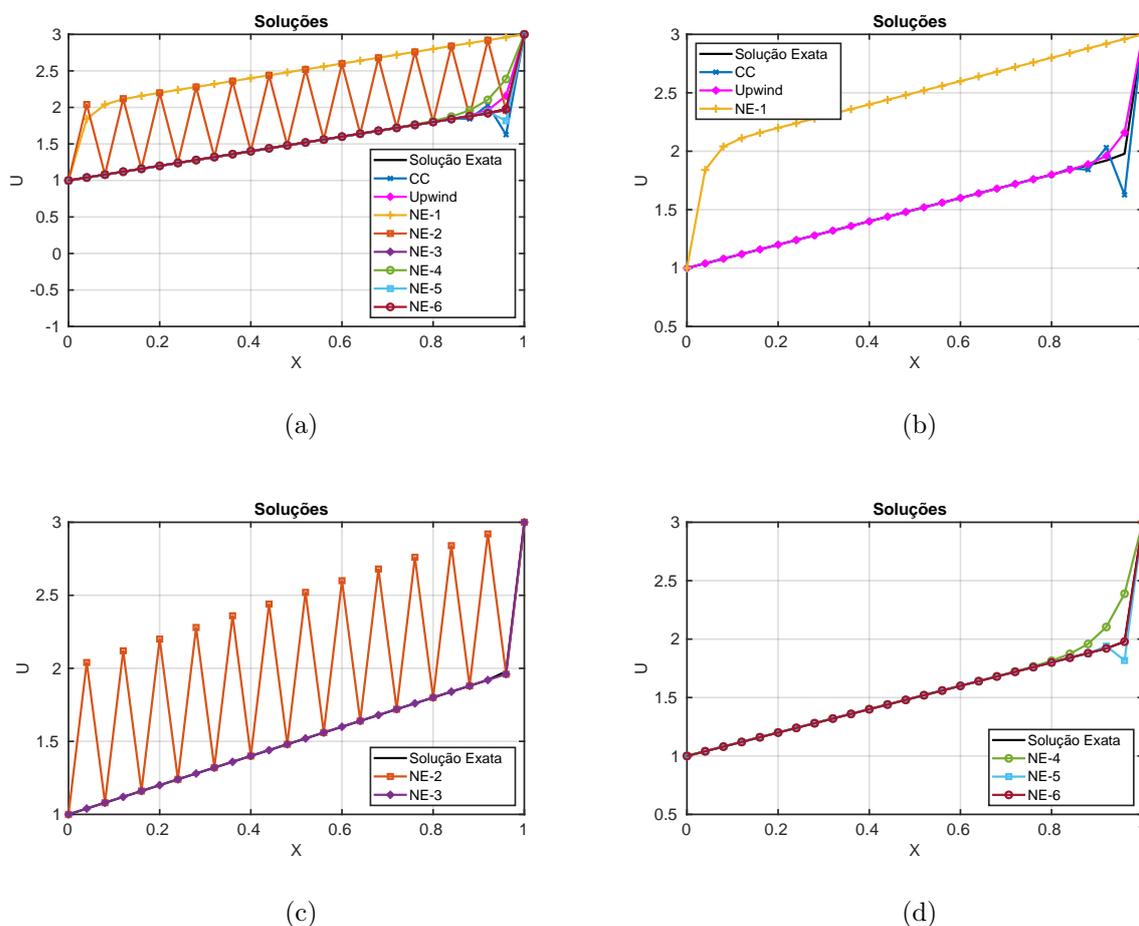


Figura 4.47: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.47 apresenta os resultados do primeiro refinamento de malha para as aproximações dos métodos com $h = 0.04$ e $Pe = 2$. A figura 4.47(a) exhibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Na figura 4.47(b), percebe-se, como esperado pelo refinamento, a melhora de *Upwind* e das oscilações de CC, porém, NE-1 continua afastado da solução exata. Na figura 4.47(c) NE-2 apresenta maiores oscilações, enquanto NE-3 agora se mostra muito próximo da solução exata. Já na figura 4.47(d), NE-4 se aproxima da

solução exata, NE-5 diminui as oscilações e NE-6 se mantém muito próximo da solução exata. Logo, conclui-se que apesar da melhora obtida pelo refinamento da malha, NE-1 e NE-2 ainda se mantêm distantes e com muitas oscilações, enquanto os outros métodos obtiveram melhoras consideráveis.

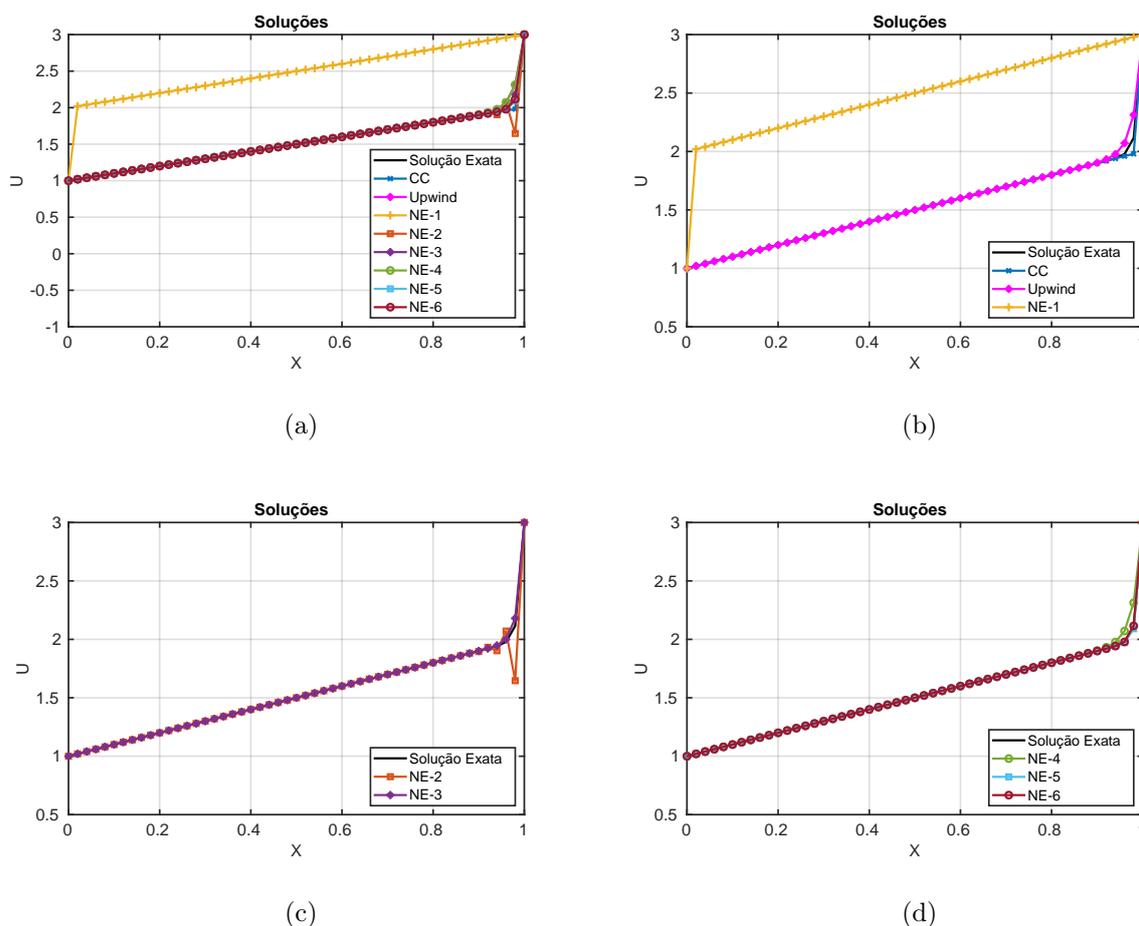


Figura 4.48: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.48 apresenta os resultados do último refinamento de malha para as aproximações dos métodos com $h = 0.02$ e $Pe = 1$. A figura 4.48(a) exibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Como esperado pela malha mais refinada, os métodos em sua maioria, apresentam resultados bem melhores e menos oscilantes. Na figura 4.48(b), nota-se a melhora de CC e *Upwind*, porém, NE-1 se mantém distante. Na figura 4.48(c) NE-2 diminui suas oscilações e NE-3 continua com sua boa aproximação. Já na figura 4.48(d), os métodos descritos melhoram e apresentam ótimas aproximações. Logo, pode-se concluir o mesmo que na malha anterior, apesar das melhorias pelo refinamento, NE-1 e NE-2 ainda são os resultados menos satisfatórios.

• Aproximações das Derivadas Primeiras

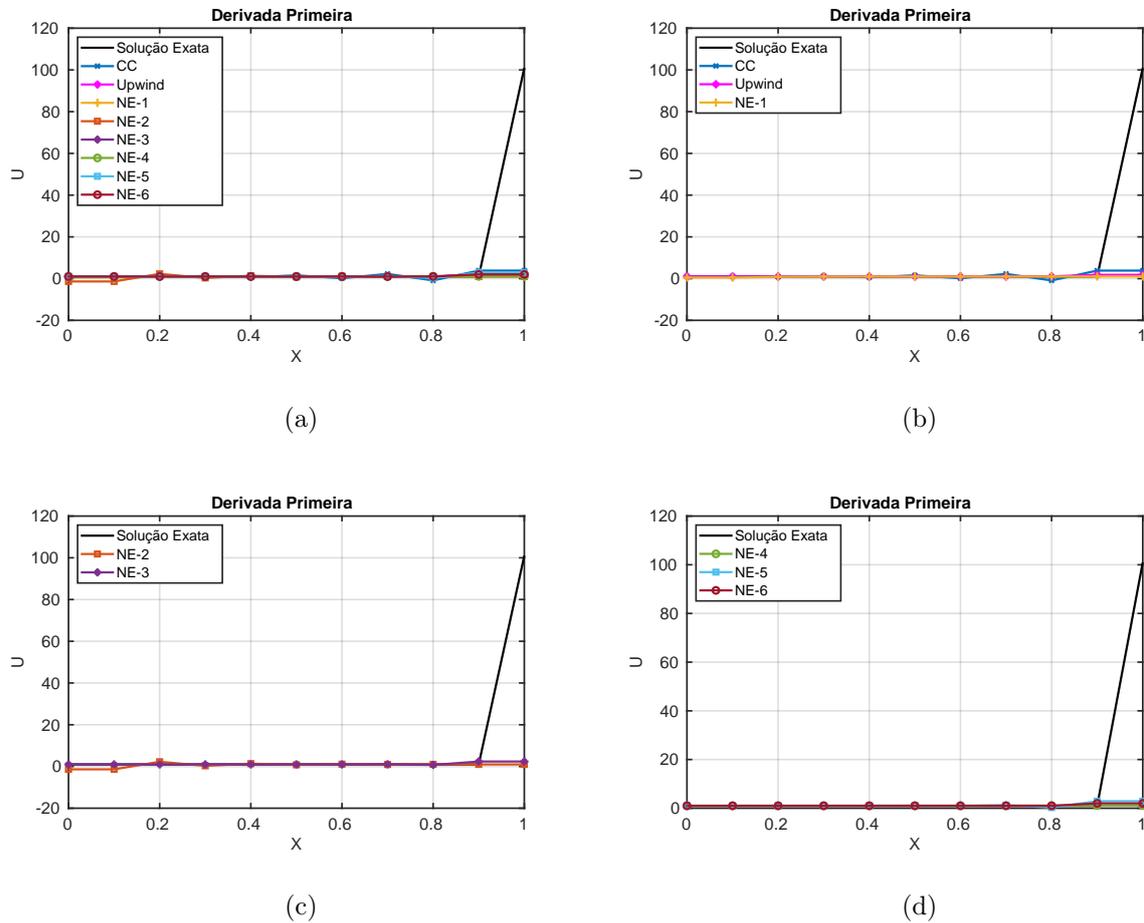


Figura 4.49: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.49 mostra os resultados para aproximações da derivada primeira, com $h = 0.1$ e $Pe = 5$. A figura 4.49(a) exhibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Nota-se nestes resultados, que os métodos estão próximos entre si. Os pontos mais notórios são as pequenas oscilações de CC na figura 4.49(b), de NE-2 nas figura 4.49(c) e na figura 4.49(d) todos estão próximos e sem oscilações.

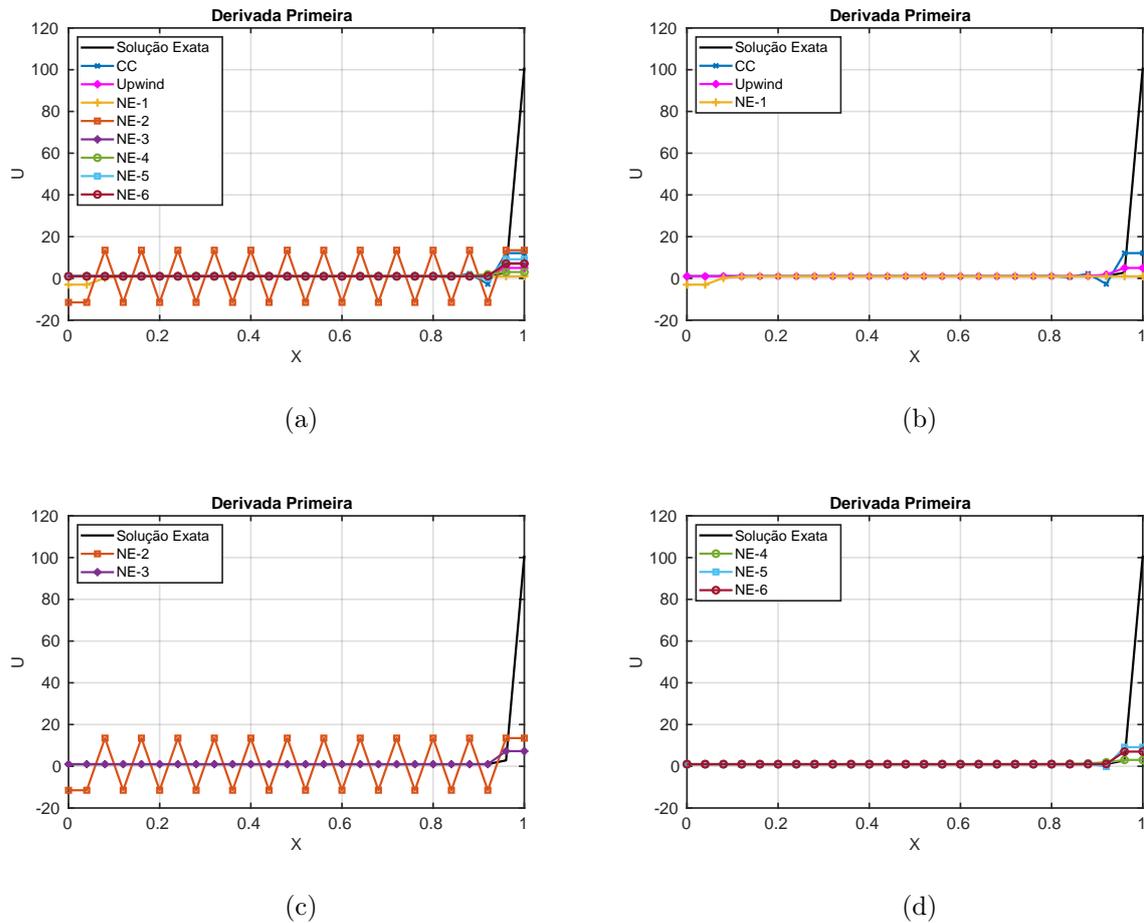


Figura 4.50: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.50 mostra os resultados para aproximações da derivada primeira em seu primeiro refinamento de malha, com $h = 0.04$ e $Pe = 2$. A figura 4.50(a) exibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Como consequência do refinamento de malha, há melhora em quase todos os métodos, que pode ser vista nas figuras 4.50(b) e 4.50(d), e apenas NE-2 que aumenta as oscilações, que podem ser vistas na figura 4.50(c). Assim, o refinamento melhora os resultados com exceção de NE-2.

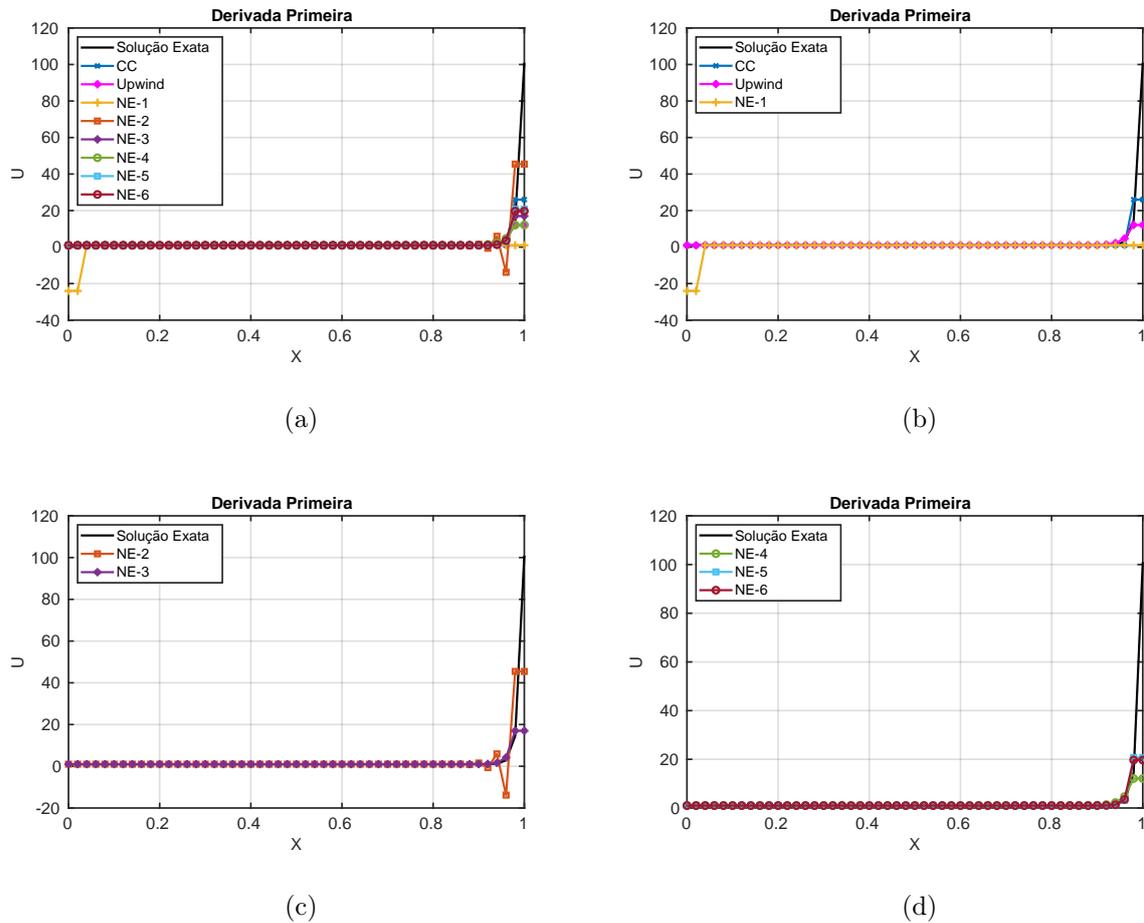


Figura 4.51: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.51 mostra os resultados para o último refinamento de malha da derivada primeira, com $h = 0.02$ e $Pe = 1$. A figura 4.51(a) exhibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Nota-se nestes resultados, como esperado pelo refinamento de malha, que todos os resultados parecem melhores e com menos oscilações. Tais melhorias podem ser notadas nas figuras 4.51(b) a 4.51(d). Assim, conclui-se que esta malha apresenta bons resultados para os métodos, como esperado.

- Aproximações das Derivadas Segundas

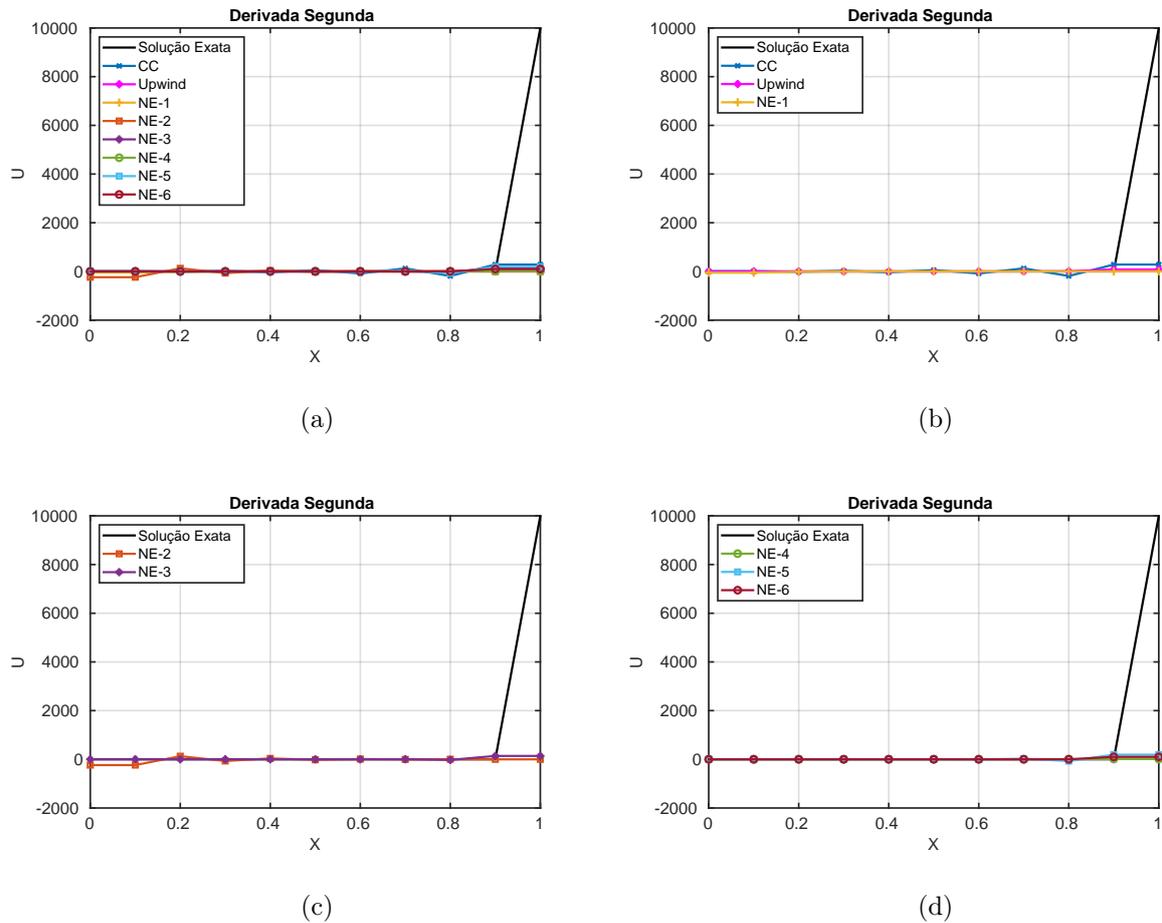


Figura 4.52: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.1$ e $Pe = 5$.

A figura 4.52 mostra os resultados para aproximações da derivada segunda, com $h = 0.1$ e $Pe = 5$. A figura 4.52(a) exhibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Nota-se nestes resultados, que os métodos estão próximos entre si e se parecem com os resultados obtidos por esta mesma malha na derivada primeira. Os pontos mais notórios são as pequenas oscilações de CC na figura 4.52(b), de NE-2 na figura 4.52(c) e na figura 4.52(d) os métodos estão bem próximos uns dos outros e sem oscilações indesejadas.

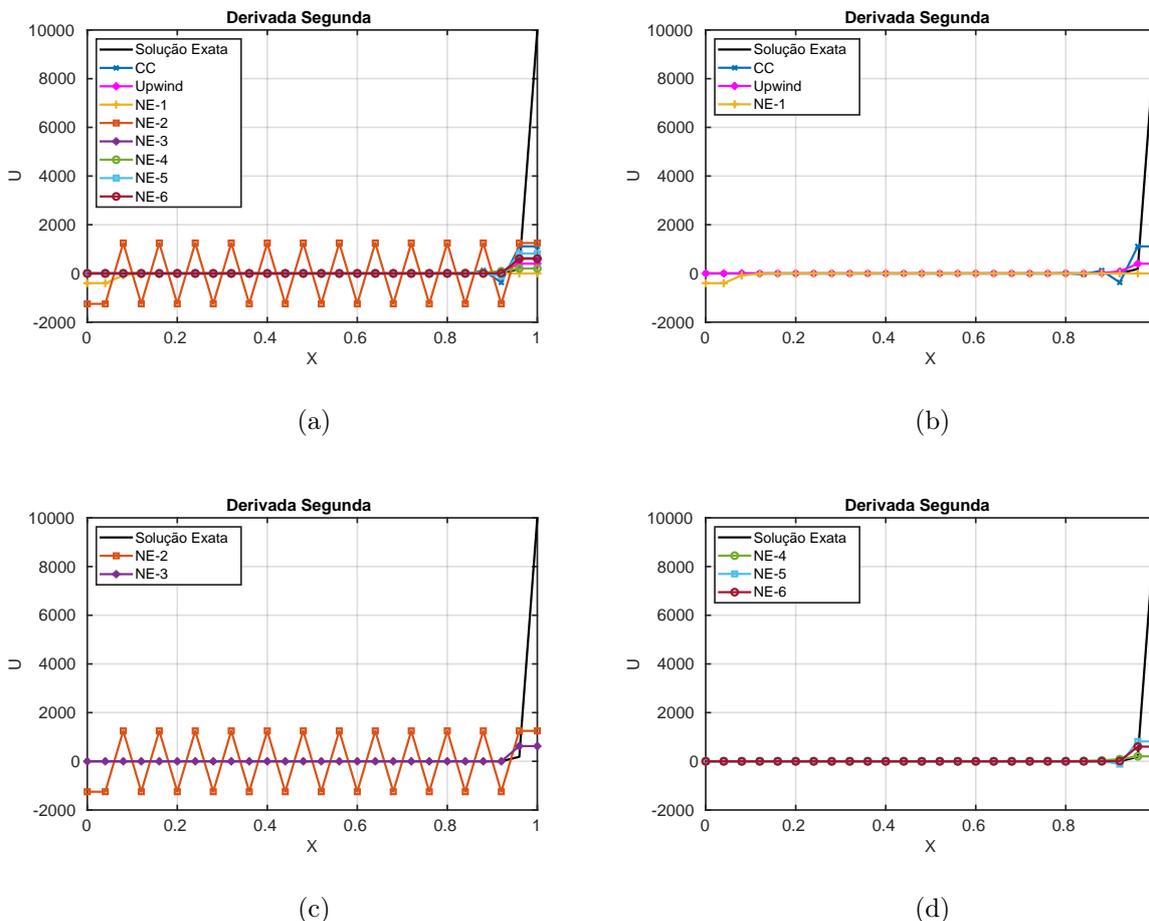


Figura 4.53: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.04$ e $Pe = 2$.

A figura 4.53 mostra os resultados para o primeiro refinamento de malha na aproximação da derivada segunda, com $h = 0.04$ e $Pe = 2$. A figura 4.53(a) exibe o resultado com todos os métodos combinados, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. O refinamento de malha traz melhora em quase todos os métodos, que pode ser vista nas figuras 4.53(b) e 4.53(d), e apenas NE-2 que aumenta as oscilações, que podem ser observadas na figura 4.53(c). Assim, o refinamento melhora os resultados com exceção de NE-2 e este caso também obtém resultados parecidos com os obtidos na mesma malha na derivada primeira.

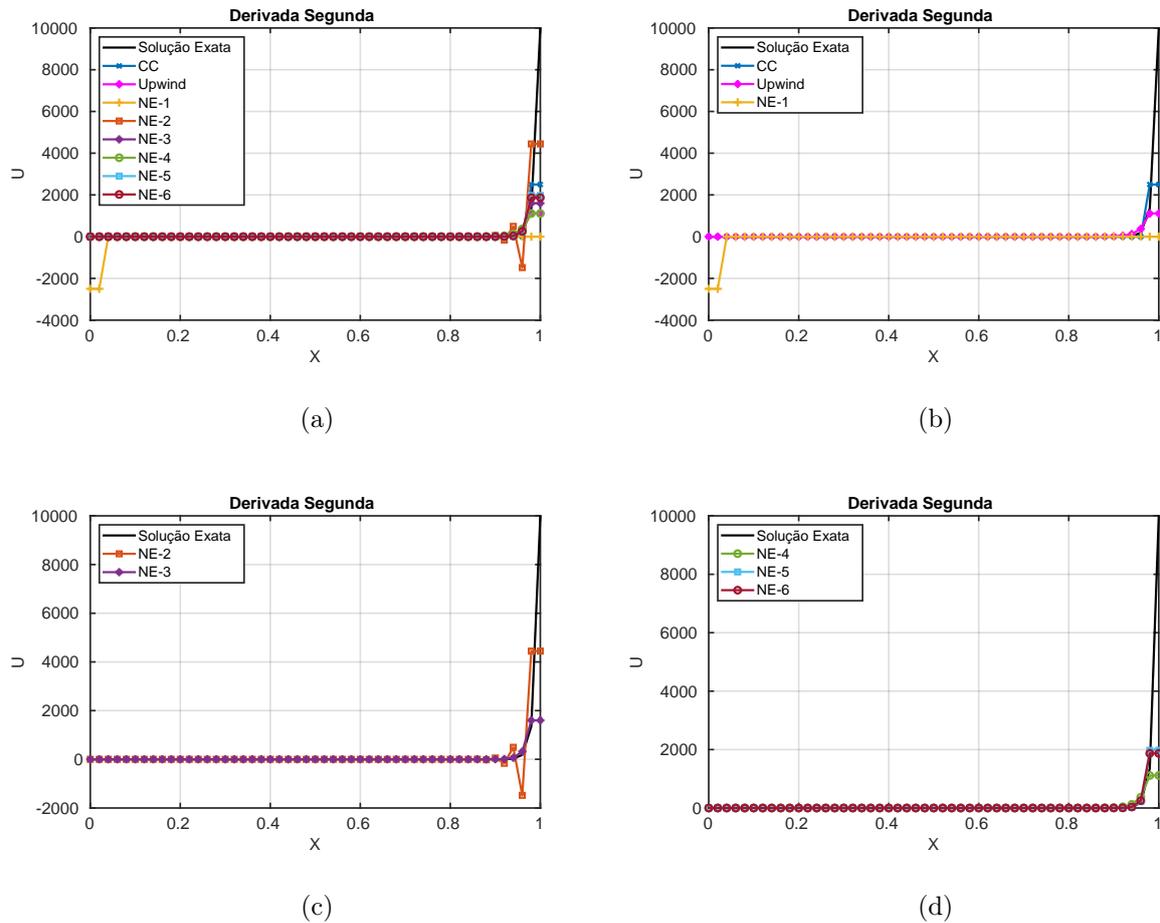


Figura 4.54: Soluções: $v = 1$, $D = 10^{-2}$, $h = 0.02$ e $Pe = 1$.

A figura 4.54 mostra os resultados para o último refinamento de malha da derivada segunda, com $h = 0.02$ e $Pe = 1$. A figura 4.54(a) exhibe o resultado com todos os métodos, enquanto nas figuras subsequentes os métodos são mostrados separadamente. Percebe-se nestes resultados, como esperado pelo refinamento de malha, que todos os resultados parecem melhores e com menos oscilações. Tais melhorias podem ser notadas nas figuras 4.54(b) a 4.54(d). Assim, conclui-se que esta malha apresenta bons resultados para os métodos, como esperado, e que os resultados obtidos também se aproximam dos resultados de mesma malha na derivada primeira.

4.1.6 Síntese dos Resultados Unidimensionais

Nos casos unidimensionais, foram analisadas soluções exatas suaves e com camadas limites, com o objetivo de testar a suavização excessiva e a estabilidade dos métodos numéricos implementados. De forma geral, os métodos se comportaram conforme o es-

perado, apresentando melhoria no desempenho à medida que o refinamento da malha foi realizado. Os resultados variaram entre os diferentes métodos aplicados, refletindo as particularidades de cada abordagem diante dos problemas testados.

O método NE-2 chamou atenção por ter apresentado oscilações maiores com o parâmetro de malha $h = 0.04$ nas aproximações das derivadas primeira e segunda. Porém, para entender os motivos de tal feito, seria necessário realizar uma análise de estabilidade mais detalhada, o que ainda não foi feito nesta dissertação, ficando para trabalhos futuros. O método NE-6 se destacou na maioria dos exemplos, demonstrando não apenas bom funcionamento, mas também alta precisão e consistência. Esse desempenho consistente torna o método NE-6 uma excelente opção para futuros aprimoramentos, sugerindo que ele possa ser mais aprofundado e explorado em trabalhos subsequentes, com o potencial de superar limitações encontradas em outros métodos e expandir suas aplicações em cenários mais complexos.

4.2 Resultados Bidimensionais

Nos problemas bidimensionais, os cenários foram especialmente configurados com base nas condições de contorno e nos parâmetros, como o campo de velocidades e o coeficiente de difusividade. Isso permitiu a criação de situações onde a convecção é o fenômeno predominante, ocasionando a presença de oscilações espúrias na solução.

Para lidar com esses desafios, métodos específicos e refinamentos de malha podem ser implementados a fim de minimizar as oscilações espúrias e obter soluções mais precisas. Além disso, é importante considerar o impacto dessas oscilações nos resultados finais, principalmente em problemas com camadas limites pronunciadas ou características de convecção marcadas. Os casos utilizados aqui também aparecem em [13, 7].

Na tentativa de buscar melhores resultados, foram implementados em duas dimensões os esquemas utilizados em uma dimensão. Porém, os resultados não foram satisfatórios conforme o esperado e, por isso, somente os resultados do método NE-6 é apresentado.

4.2.1 Caso Teste

O primeiro resultado obtido visou validar os códigos desenvolvidos ao aplicar condição de contorno em um plano inclinado partindo do eixo y , conforme descrito na equação (4.13), em conjunto com o campo de velocidade $\vec{v} = (1, 0)$ e uma malha quadrada de

$[20 \times 20]$.

$$\begin{cases} U(x, 0) = x \quad \forall x \in]0, 1[\\ U(x, 1) = x \quad \forall x \in]0, 1[\\ U(0, y) = 0 \quad \forall y \in]0, 1[\\ U(1, y) = 1 \quad \forall y \in]0, 1[\end{cases} \quad (4.13)$$

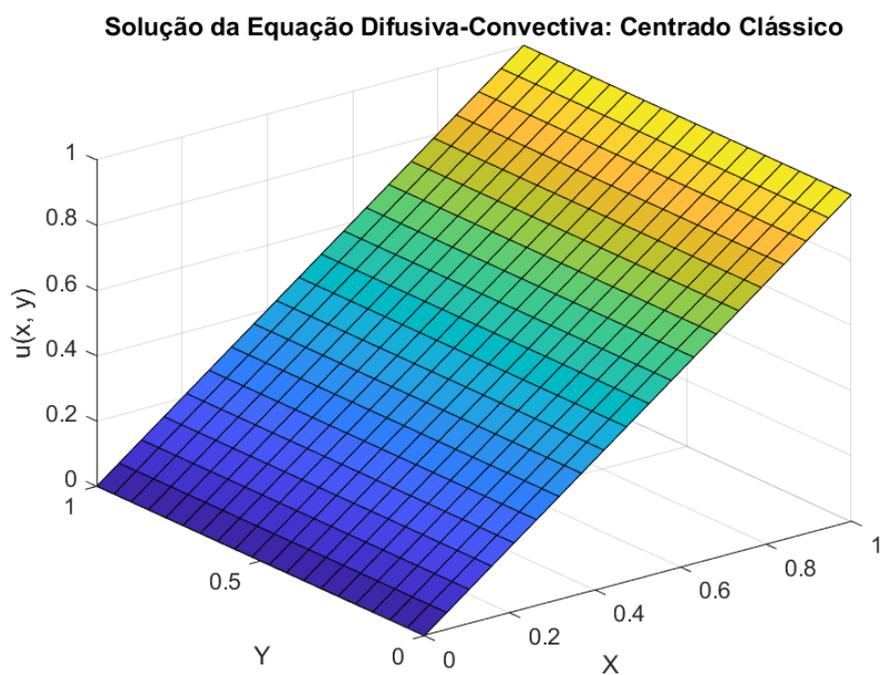


Figura 4.55: Solução: $D = 10^{-3}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 2,63 \cdot 10$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10$, $Pe_y = 0$ e malha de $[20 \times 20]$.

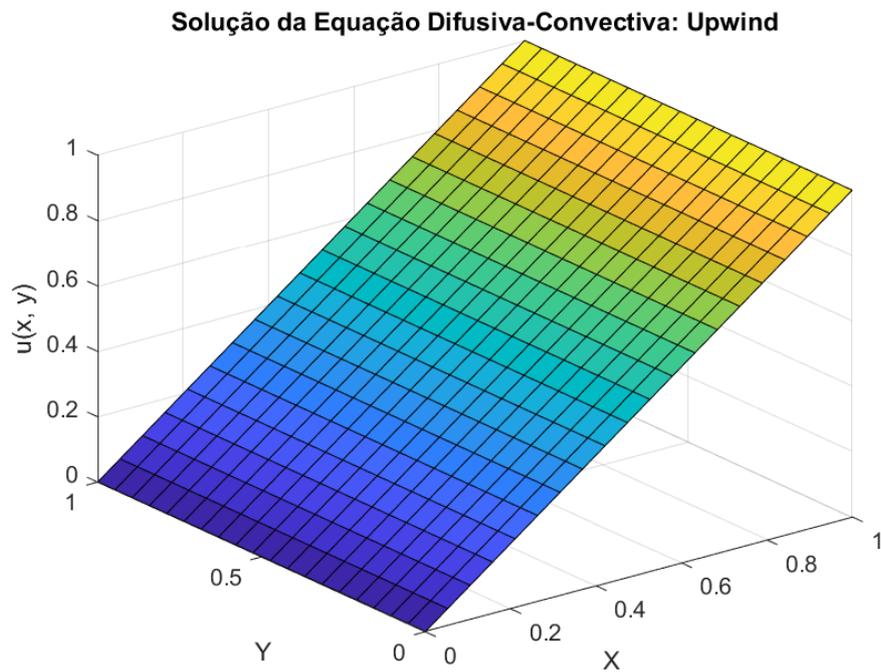


Figura 4.56: Solução: $D = 10^{-3}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 2,63 \cdot 10$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10$, $Pe_y = 0$ e malha de $[20 \times 20]$.

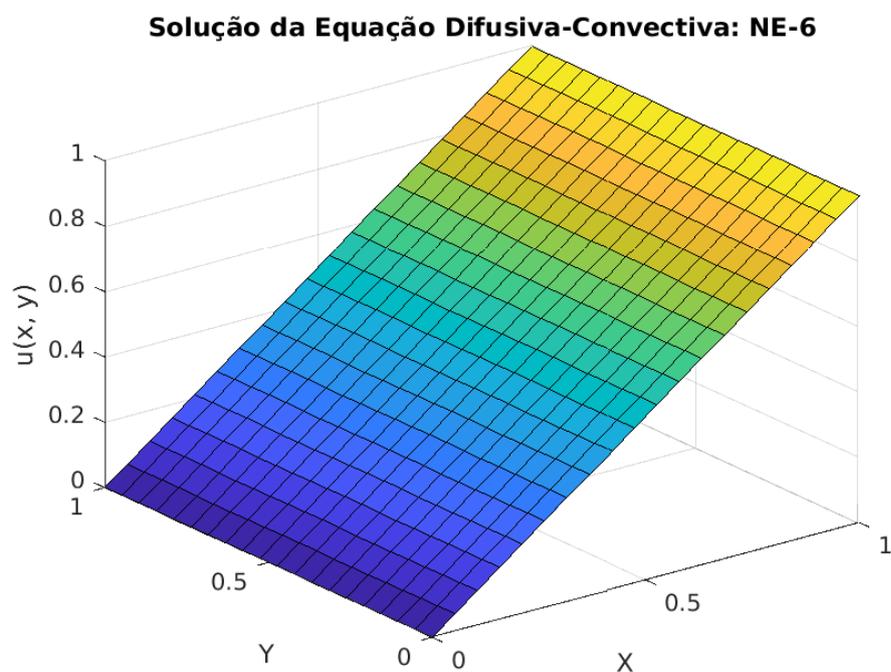


Figura 4.57: Solução: $D = 10^{-3}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 2,63 \cdot 10$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10$, $Pe_y = 0$, e malha de $[20 \times 20]$.

Dessa forma, sabendo que a solução para o plano inclinado deve permanecer inalterada

com variações de malha ou coeficiente de difusividade, pelas figuras 4.55 a 4.57, conclui-se que as soluções numéricas obtidas são adequadas. Assim, os códigos criados podem ser empregados para analisar a EDP difusivo-convectiva em outros cenários bidimensionais, utilizando condições de contorno de Dirichlet.

4.2.2 Caso I

Este caso tem como condição de contorno a equação (4.14) e foram utilizados campo de velocidade $\vec{v} = (1, 1)$, uma malha quadrada de $[20 \times 20]$ e para verificar a influência de modificações no coeficiente difusivos, foram utilizados $D = 10^{-1}$, $D = 10^{-3}$ e $D = 10^{-6}$.

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0 \quad \forall x \in]0, 0.2[, \\ U(x, 0) = 10(x - 0.2) \quad \forall x \in [0.2, 0.3], \\ U(x, 0) = 1 \quad \forall x \in]0.3, 1[, \\ U(x, 1) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[\\ U(0, y) = 0 \quad \forall y \in]0, 1[\\ U(1, y) = 1 \quad \forall y \in]0, 1[\end{cases} \quad (4.14)$$

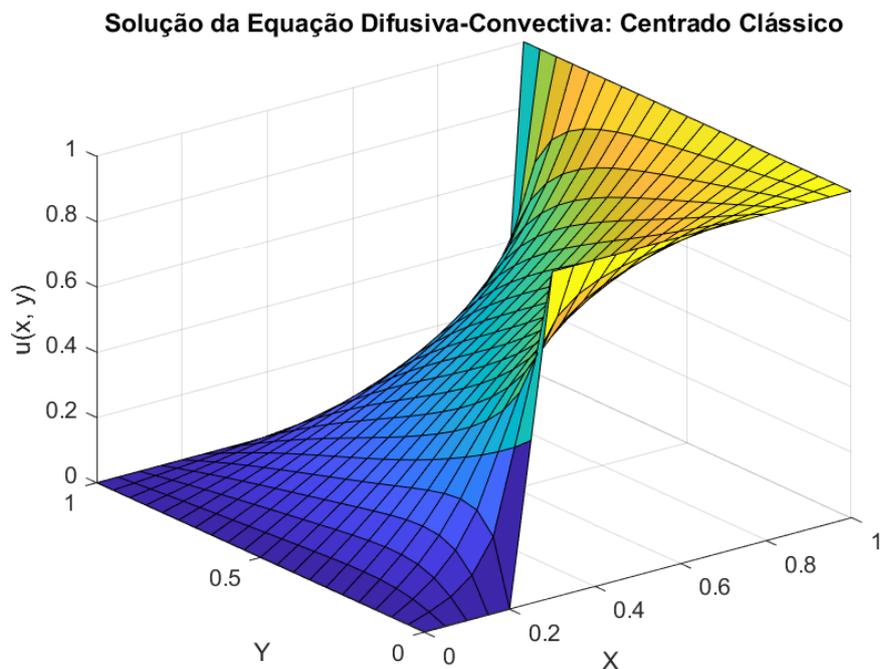


Figura 4.58: Solução: $D = 10^{-1}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10^{-2}$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10^{-2}$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10^{-2}$ e malha de $[20 \times 20]$.

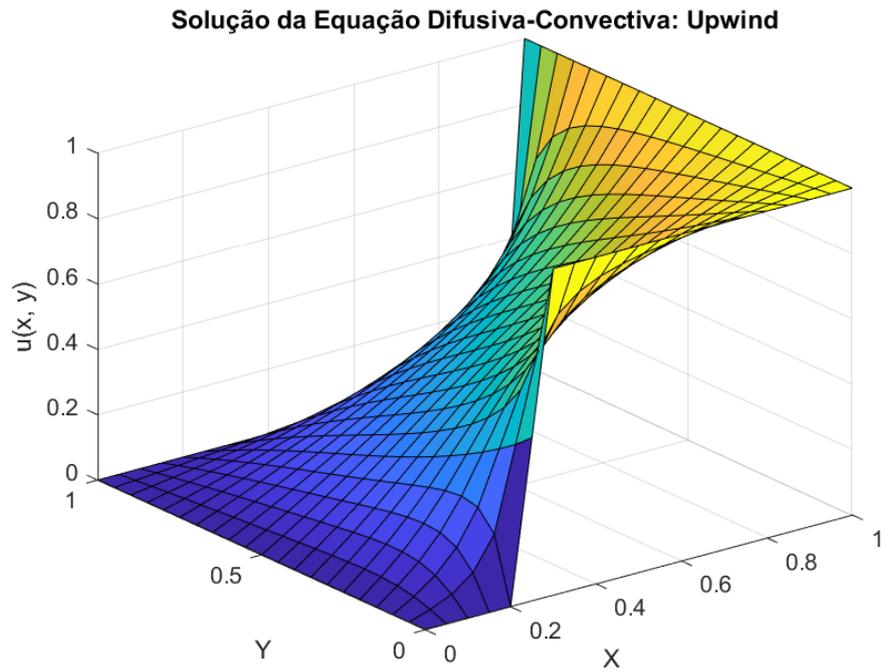


Figura 4.59: Solução: $D = 10^{-1}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10^{-2}$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10^{-2}$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10^{-2}$ e malha de $[20 \times 20]$.

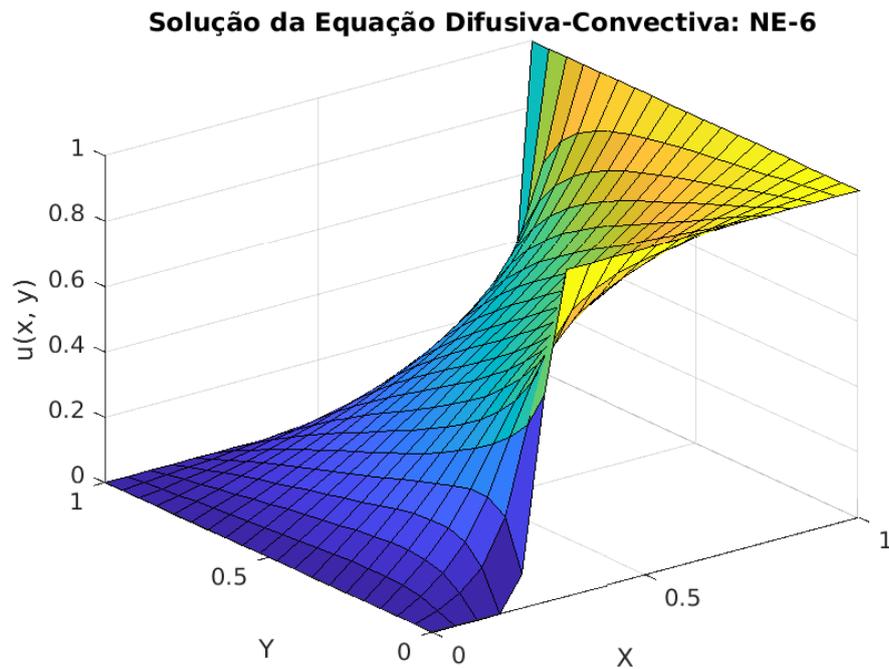


Figura 4.60: Solução: $D = 10^{-1}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10^{-2}$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10^{-2}$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10^{-2}$ e malha de $[20 \times 20]$.

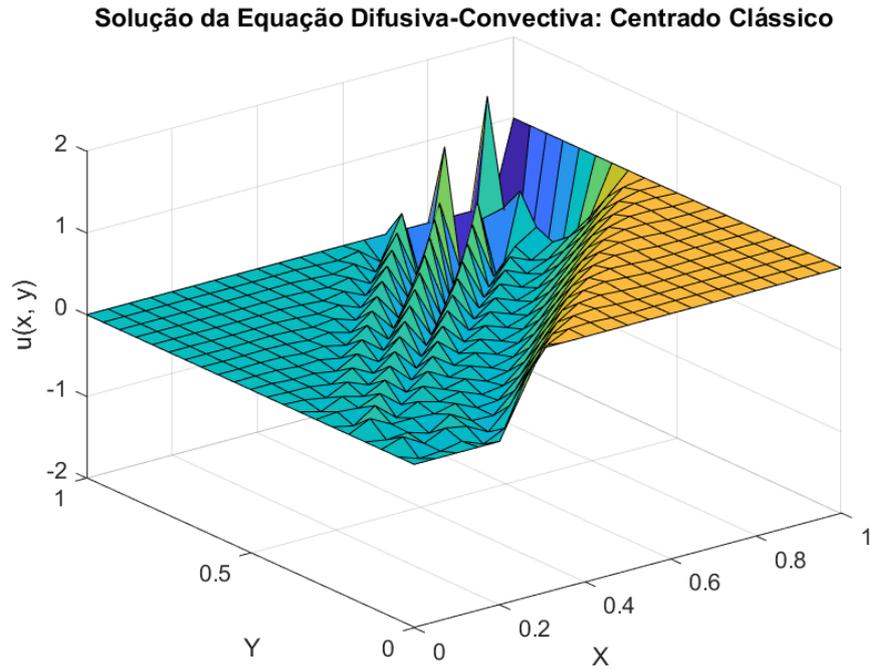


Figura 4.61: Solução: $D = 10^{-3}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10$ e malha de $[20 \times 20]$.

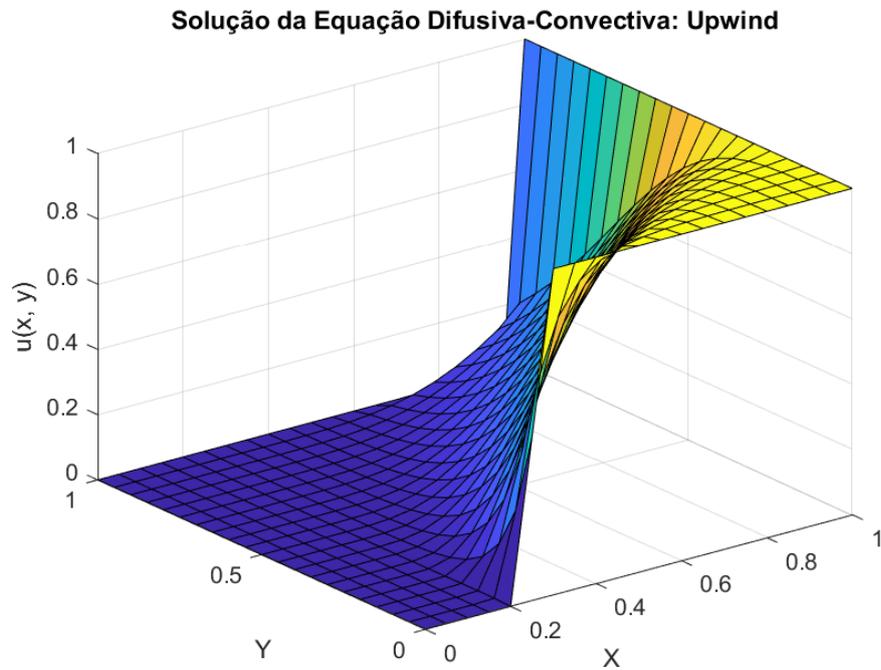


Figura 4.62: Solução: $D = 10^{-3}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10$ e malha de $[20 \times 20]$.

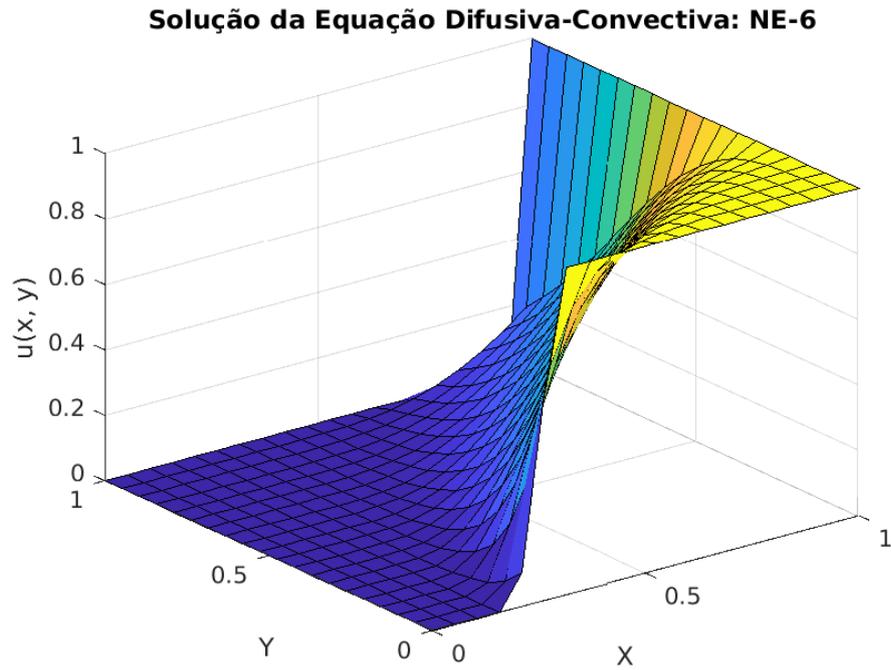


Figura 4.63: Solução: $D = 10^{-3}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10^3$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10^3$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10^3$ e malha de $[20 \times 20]$.

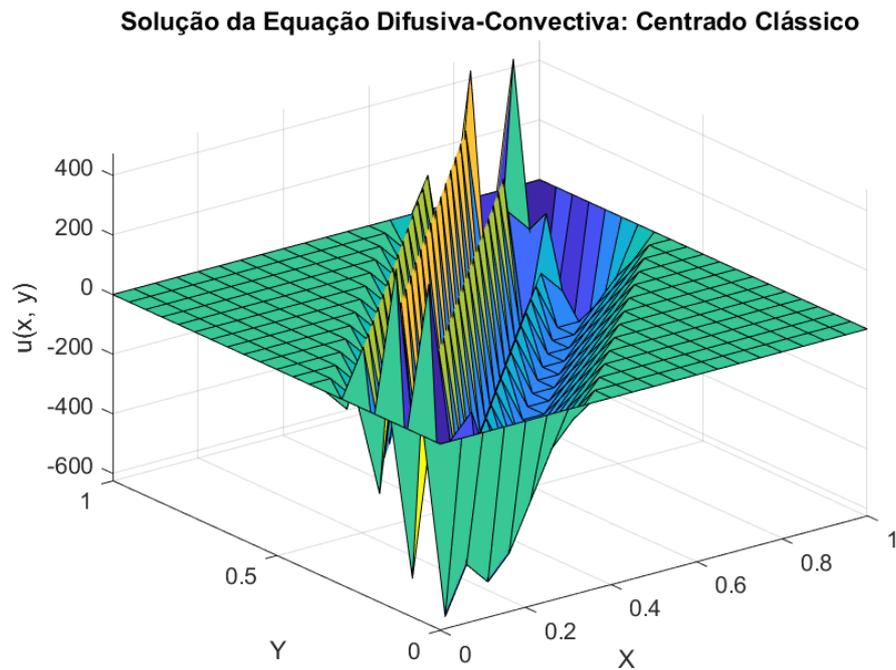


Figura 4.64: Solução: $D = 10^{-6}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10^4$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10^4$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10^4$ e malha de $[20 \times 20]$.

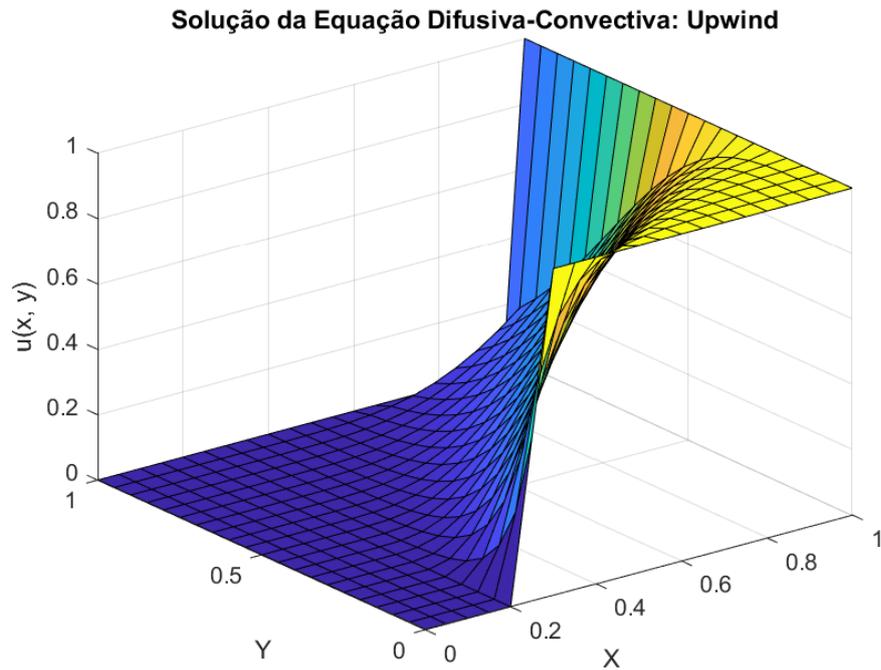


Figura 4.65: Solução: $D = 10^{-6}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10^4$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10^4$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10^4$ e malha de $[20 \times 20]$.

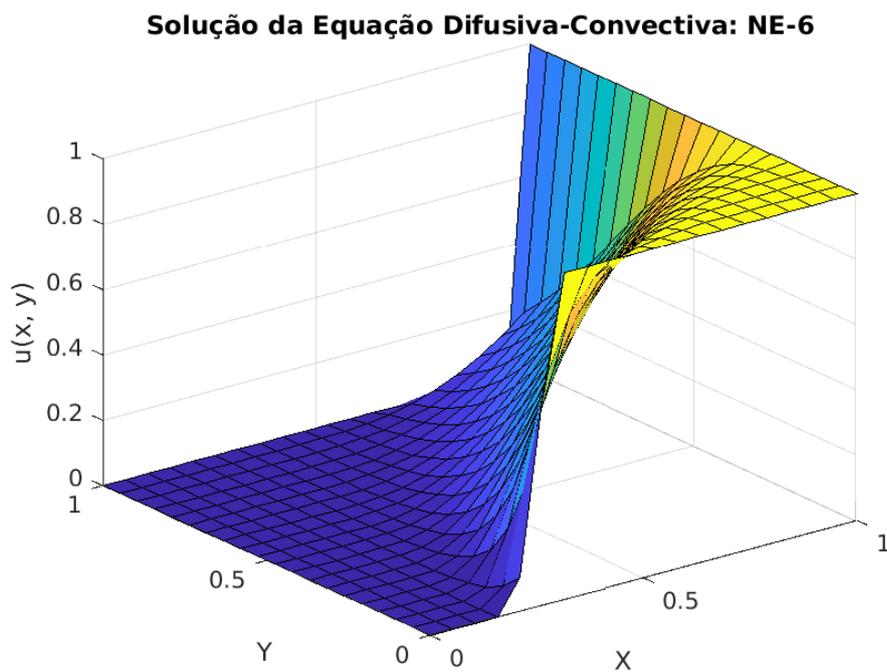


Figura 4.66: Solução: $D = 10^{-6}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10^4$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10^4$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10^4$ e malha de $[20 \times 20]$.

Os resultados obtidos pelas figuras 4.58 a 4.60, mostram que, com $D = 10^{-1}$, a

difusão é dominante entre os fenômenos de difusão e convecção, proporcionando soluções numéricas satisfatórias e semelhantes nos três métodos.

No entanto, à medida que D diminui, ocorre uma maior predominância da convecção, a figura 4.61 com $D = 10^{-3}$ oscilações começam a aparecer em grande parte da solução. Na figura 4.64, onde $D = 10^{-6}$, essa condição é ainda mais perceptível, que revela a região de camada limite com oscilações acentuadas.

Por outro lado, o Método de Diferenças Finitas *Upwind* e o NE-6, forneceram soluções sem oscilações para todos os valores de D analisados, não só para $D = 1$, mas também para $D = 10^{-3}$, como mostrado pelas figuras 4.62 e 4.63, e para $D = 10^{-6}$, mostrado pelas figuras 4.65 e 4.66, tornando-os para este caso, escolhas mais adequadas que o CC.

4.2.3 Caso II

Este caso tem como condição de contorno a equação (4.15) e foram utilizados campo de velocidade $\vec{v} = (1, 1)$, uma malha quadrada de $[20 \times 20]$ e para verificar a influência de modificações no coeficiente difusivos, foram utilizados $D = 10^{-1}$, $D = 10^{-3}$ e $D = 10^{-6}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x, 0) = 0 \quad \forall x \in]0, 0.2[, \\ U(x, 0) = 10(x - 0.2) \quad \forall x \in [0.2, 0.3], \\ U(x, 0) = 1 \quad \forall x \in]0.3, 1], \\ U(x, 1) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[\\ U(0, y) = 0 \quad \forall y \in]0, 1[\\ U(1, y) = 0 \quad \forall y \in]0, 1[\end{array} \right. \quad (4.15)$$

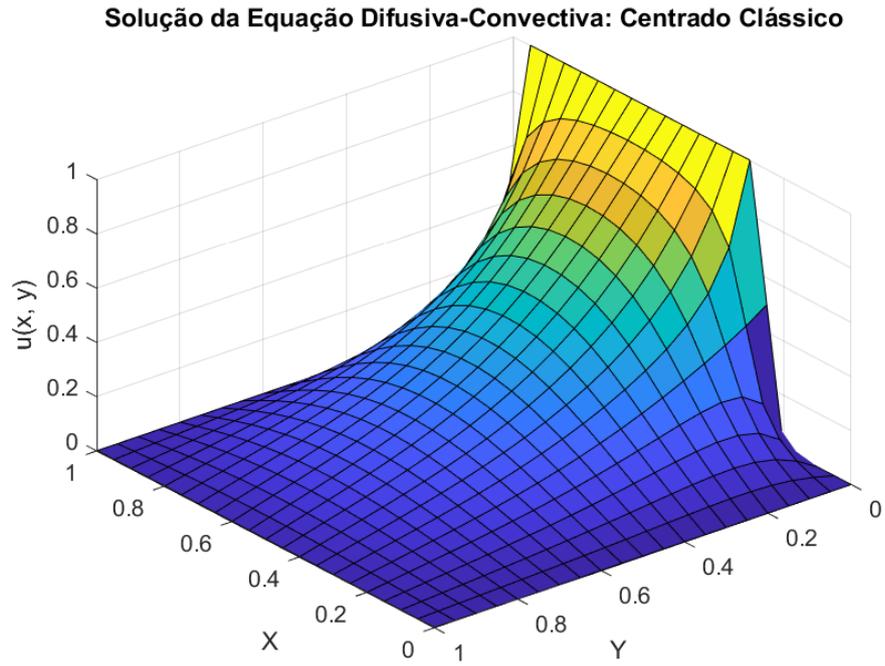


Figura 4.67: Solução: $D = 10^{-1}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10^{-2}$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10^{-2}$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10^{-2}$ e malha de $[20 \times 20]$.

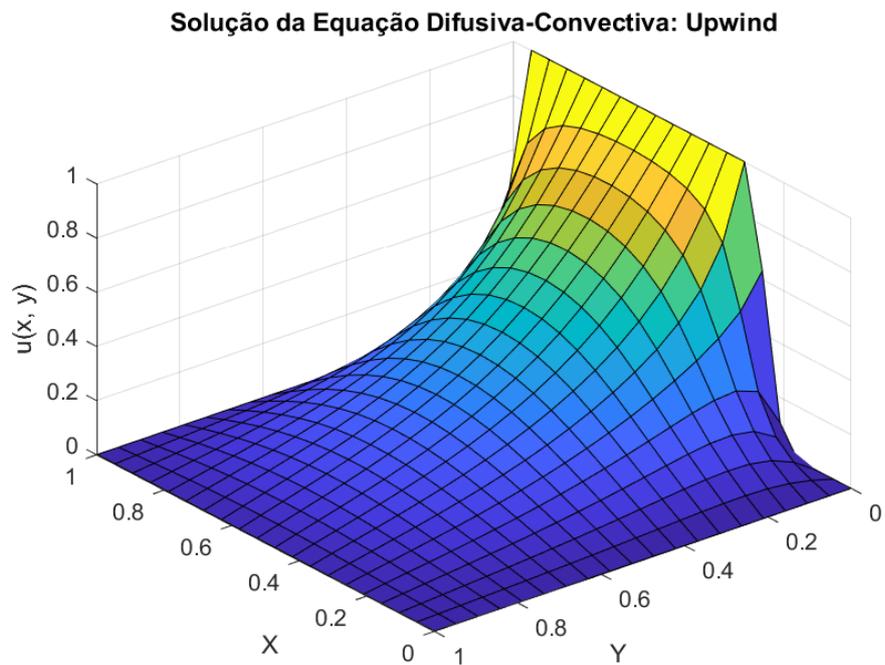


Figura 4.68: Solução: $D = 10^{-1}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10^{-2}$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10^{-2}$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10^{-2}$ e malha de $[20 \times 20]$.

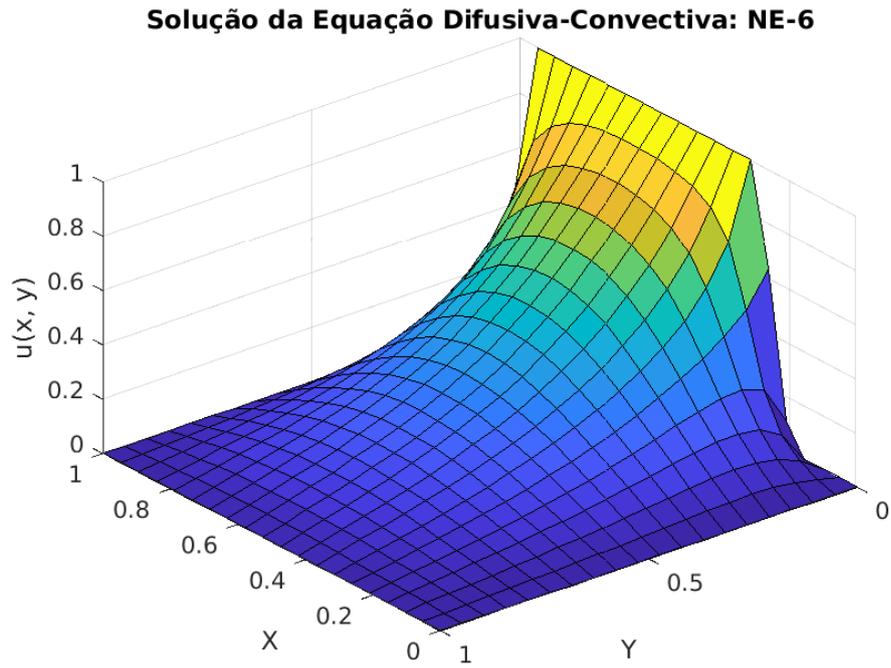


Figura 4.69: Solução: $D = 10^{-1}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10^{-2}$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10^{-2}$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10^{-2}$ e malha de $[20 \times 20]$.

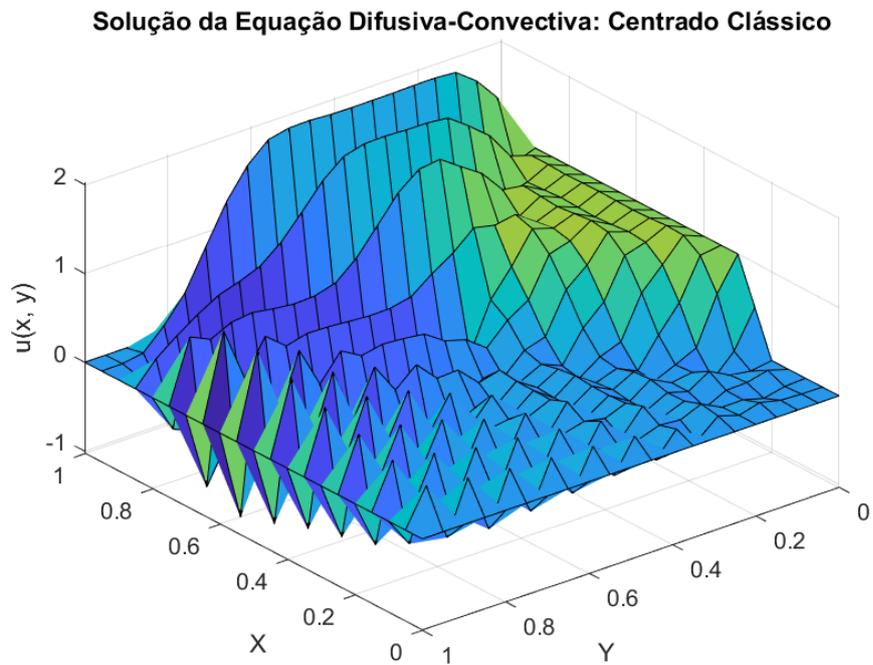


Figura 4.70: Solução: $D = 10^{-3}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10$ e malha de $[20 \times 20]$.

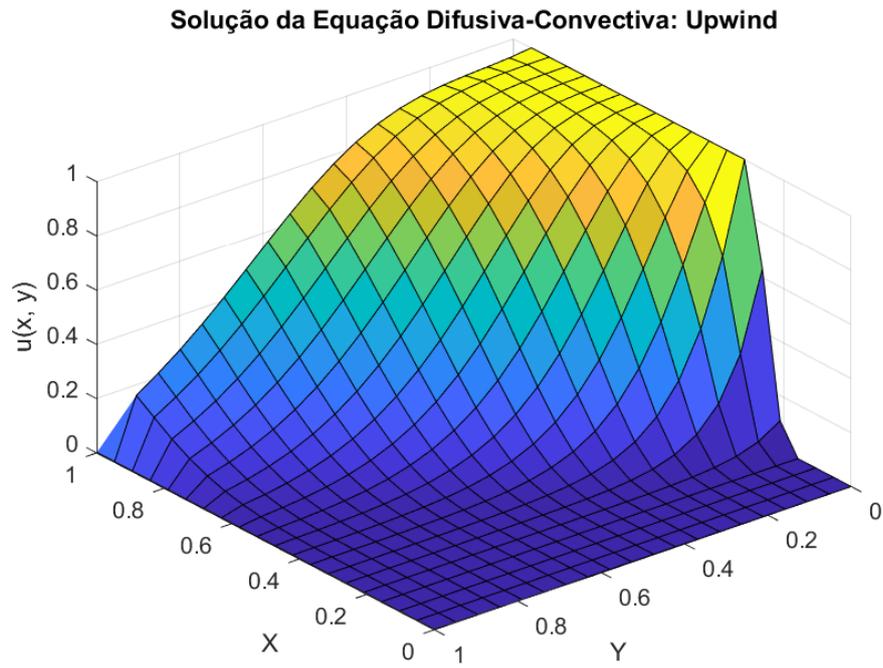


Figura 4.71: Solução: $D = 10^{-3}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10$ e malha de $[20 \times 20]$.

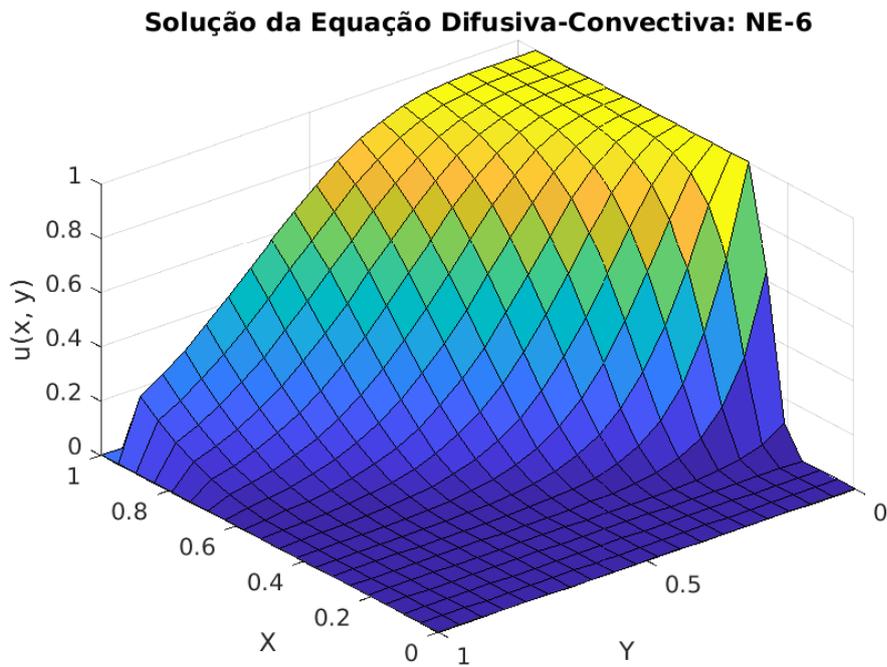


Figura 4.72: Solução: $D = 10^{-3}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10$ e malha de $[20 \times 20]$.

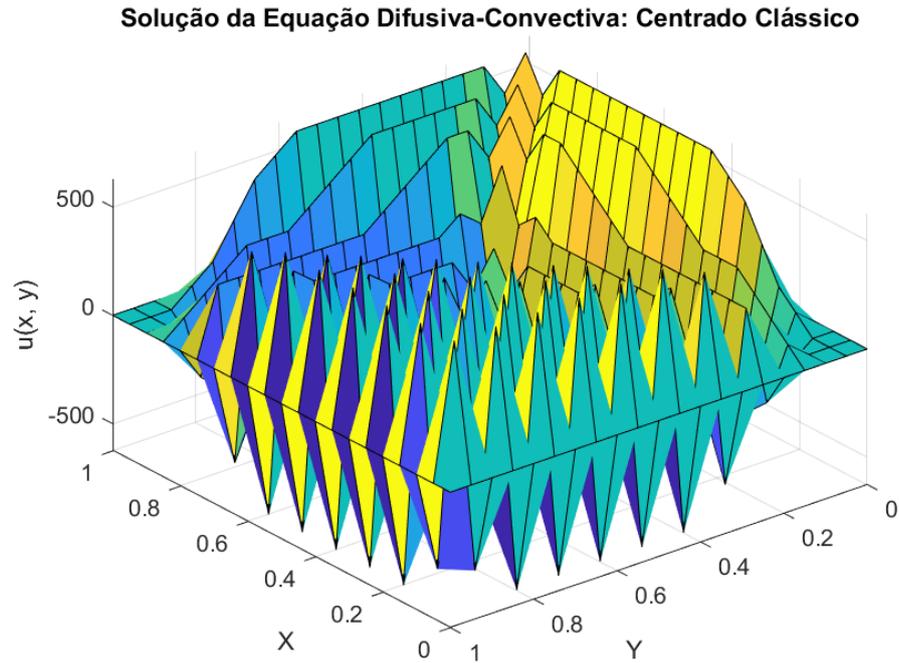


Figura 4.73: Solução: $D = 10^{-6}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10^4$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10^4$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10^4$ e malha de $[20 \times 20]$.

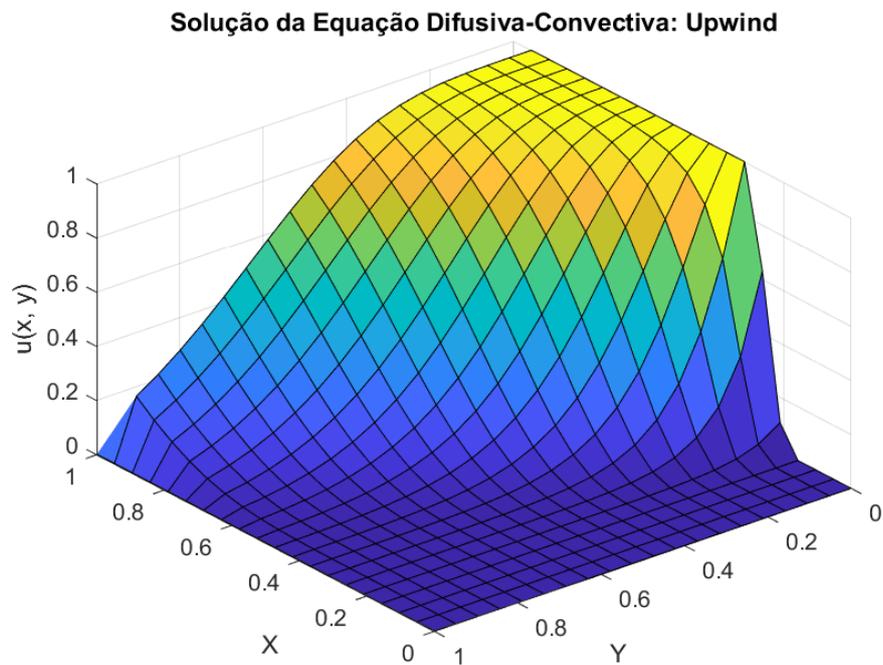


Figura 4.74: Solução: $D = 10^{-6}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10^4$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10^4$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10^4$ e malha de $[20 \times 20]$.

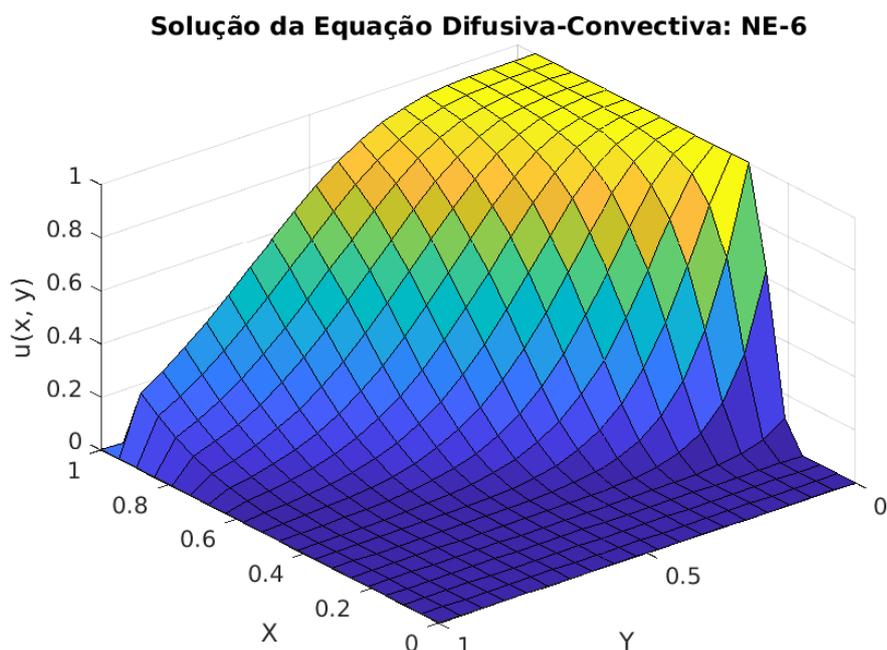


Figura 4.75: Solução: $D = 10^{-6}$, $v = (1, 1)$, $Pe = 3,72 \cdot 10^4$, $Pe_x = 2,63 \cdot 10^4$, $Pe_y = 2,63 \cdot 10^4$ e malha de $[20 \times 20]$.

Para o Caso II, as considerações são semelhantes às do Caso I, quando $D = 1$, as soluções numéricas são satisfatórias e semelhantes nos três métodos, como vê-se nas figuras 4.67 a 4.69. A diminuição do coeficiente difusivo D resulta em um cenário dominado pela convecção, causando oscilações indesejadas no Método de Diferenças Finitas Centradas, como mostrado nas figuras 4.70 e 4.73, onde essas oscilações produzem soluções insatisfatórias. Em contraste, o Método de Diferenças Finitas *Upwind* e o NE-6 mantiveram soluções livres de oscilações para os cenários testados, como mostram as figura 4.71), figuras 4.72, 4.74 e 4.75.

4.2.4 Caso III

Este caso tem como condição de contorno a equação (4.16) e foram utilizados campo de velocidade $\vec{v} = (1, 0)$, um termo fonte $f = 1$, coeficiente de difusividade $D = 10^{-2}$ e para verificar as alterações pelo refinamento da malha, foram utilizadas malhas quadradas de $[20 \times 20]$ e de $[60 \times 60]$.

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[, \\ U(x, 1) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[, \\ U(0, y) = 0 \quad \forall y \in]0, 1[, \\ U(1, y) = 0 \quad \forall y \in]0, 1[\end{cases} \quad (4.16)$$

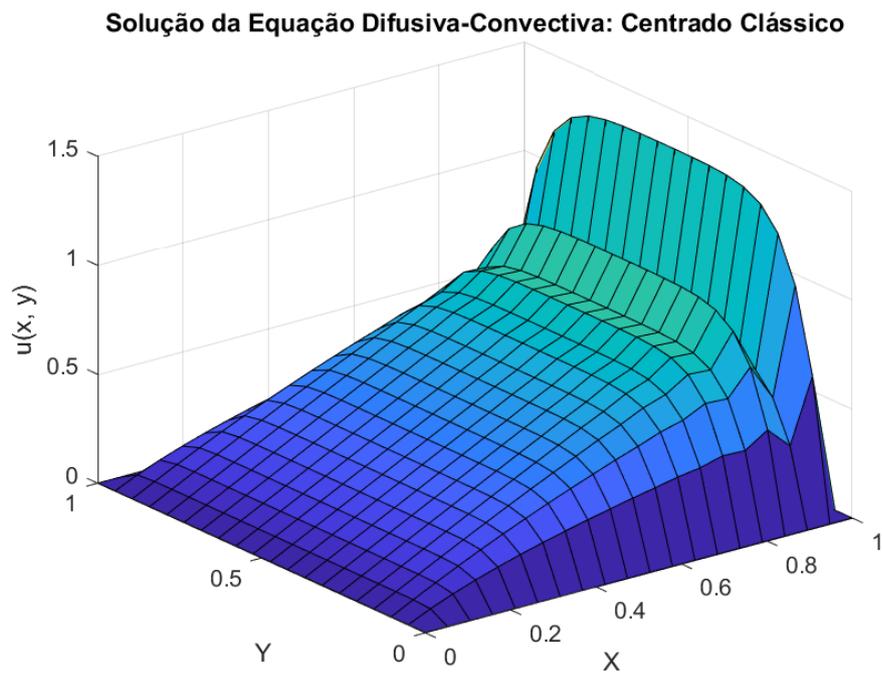


Figura 4.76: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 2,63$, $Pe_x = 2,63$, $Pe_y = 0$ e malha de $[20 \times 20]$.

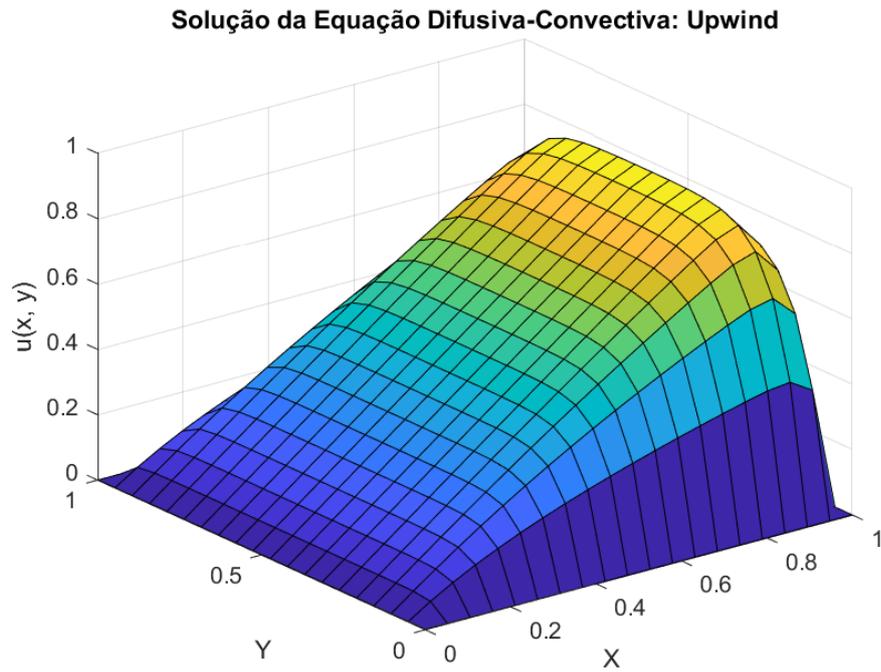


Figura 4.77: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 2,63$, $Pe_x = 2,63$, $Pe_y = 0$ e malha de $[20 \times 20]$.

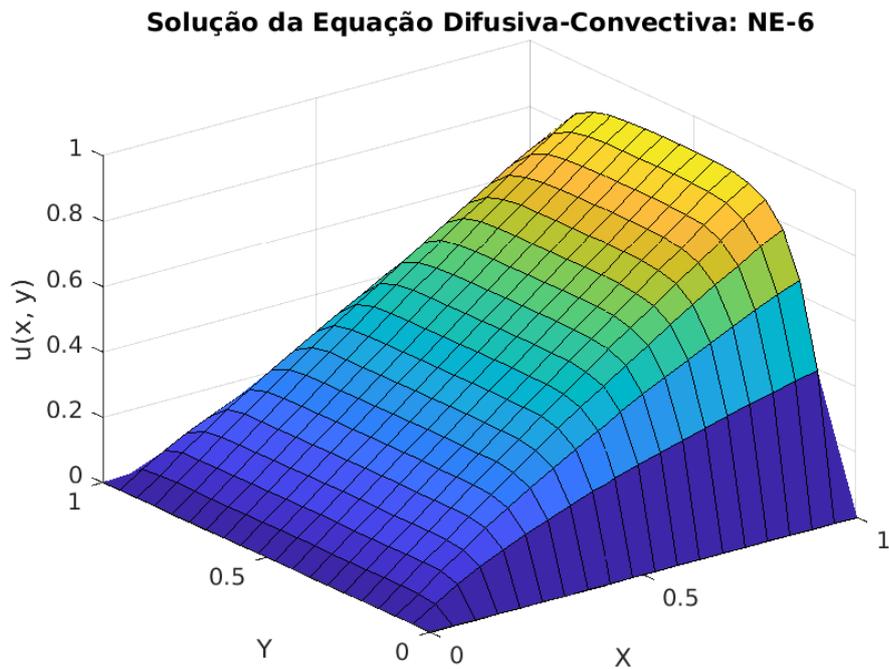


Figura 4.78: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 2,63$, $Pe_x = 2,63$, $Pe_y = 0$ e malha de $[20 \times 20]$.

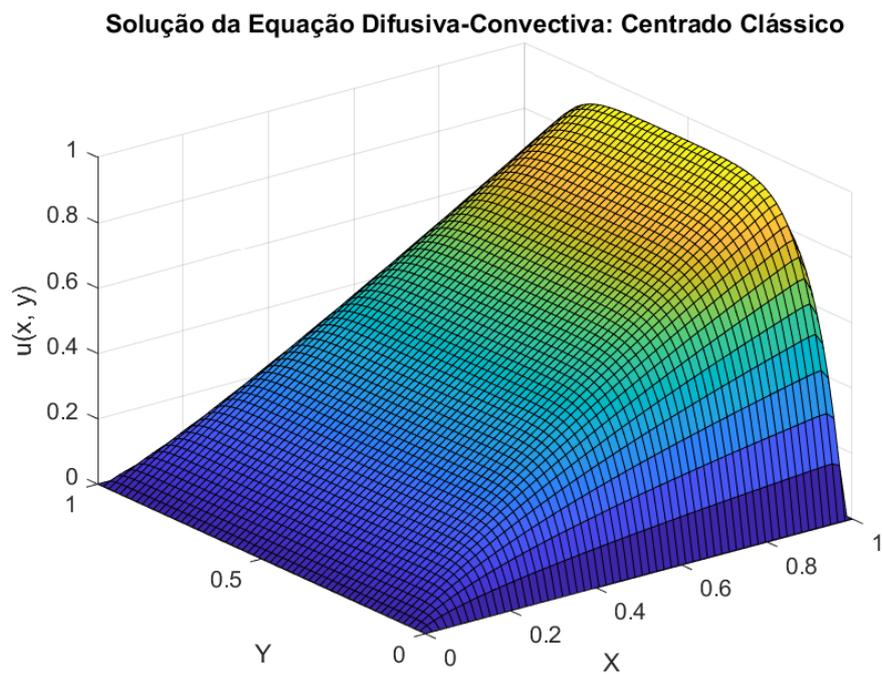


Figura 4.79: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_x = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_y = 0$ e malha de $[60 \times 60]$.

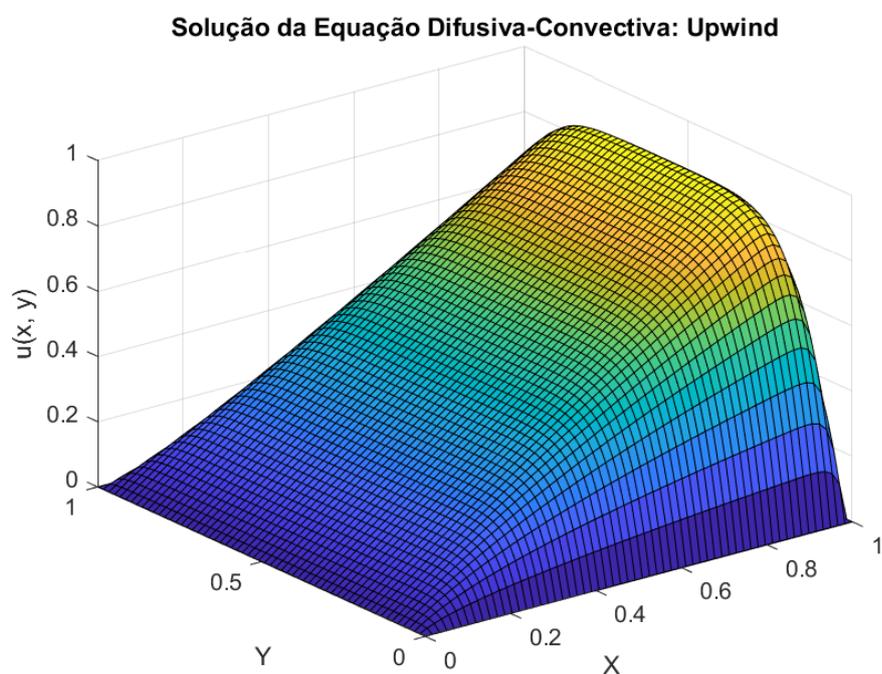


Figura 4.80: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_x = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_y = 0$ e malha de $[60 \times 60]$.

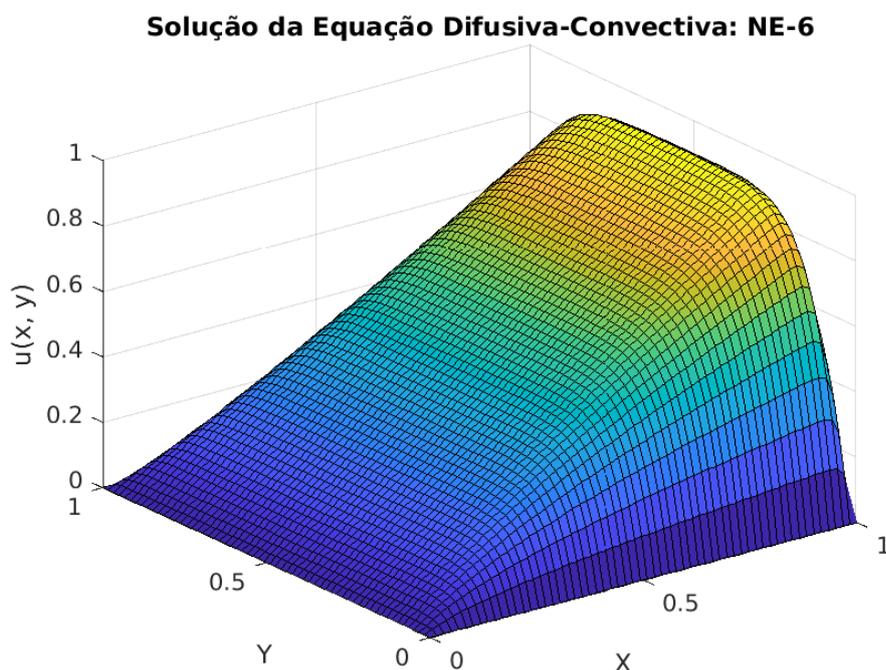


Figura 4.81: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_x = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_y = 0$ e malha de $[60 \times 60]$.

Os resultados apresentados pelo Método de Diferenças Finitas Centradas mostraram oscilações espúrias, como na figura 4.76. No entanto, ao refinar a malha houve uma redução significativa dessas oscilações, aproximando-se do resultado desejado. Na malha de $[60 \times 60]$, da figura 4.79 não foram observadas oscilações nas soluções.

O Método *Upwind* e o NE-6 mostraram resultados mais suavizados em ambas as malhas, porém, na malha mais grosseira, de $[20 \times 20]$, nota-se que a figura 4.78, referente ao NE-6, mostra que houve menos suavização do que o Método *Upwind* nas mesmas condições, descrito na figura 4.77. Na malha de $[60 \times 60]$ em relação ao *Upwind* e NE-6, mostrado respectivamente pelas figuras 4.80 e 4.81 também não são observadas oscilações nas soluções. Assim, os métodos *Upwind* e NE-6 forneceram resultados mais precisos e sem oscilações indesejadas.

4.2.5 Caso IV

Este caso tem como condição de contorno a equação (4.18), e foram utilizados campo de velocidade circular $\vec{v} = (y, -x)$, coeficientes de difusividade $D = 10^{-1}$, $D = 10^{-3}$ e $D = 10^{-6}$, uma malha quadrada de $[60 \times 60]$ e foi acrescentada a fonte descrita na equação (4.17).

$$f(x, y) = Ae^{-B[(x-0.5)^2+(y-0.5)^2]}, \quad A = \frac{1}{2\pi\sigma}, \quad B = \frac{1}{2\sigma}, \quad \sigma = 0.0001. \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[, \\ U(x, 1) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[, \\ U(0, y) = 0 \quad \forall y \in]0, 1[, \\ U(1, y) = 0 \quad \forall y \in]0, 1[\end{cases} \quad (4.18)$$

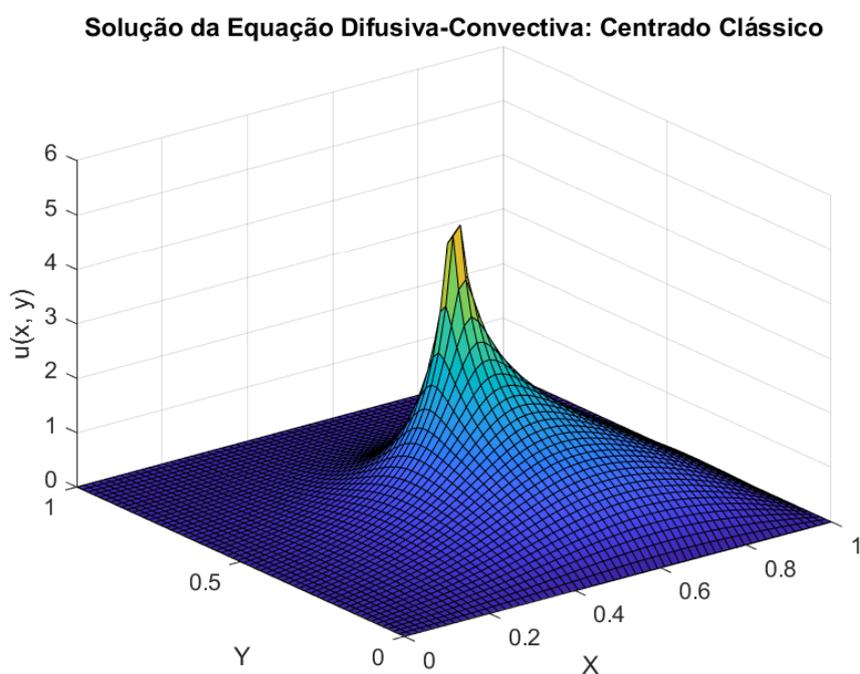


Figura 4.82: Solução: $D = 10^{-1}$, $v = (y, -x)$, $Pe = 1,2 \cdot 10^{-1}$, $Pe_x = 8 \cdot 10^{-2}$, $Pe_y = -8 \cdot 10^{-2}$ e malha de $[60 \times 60]$.

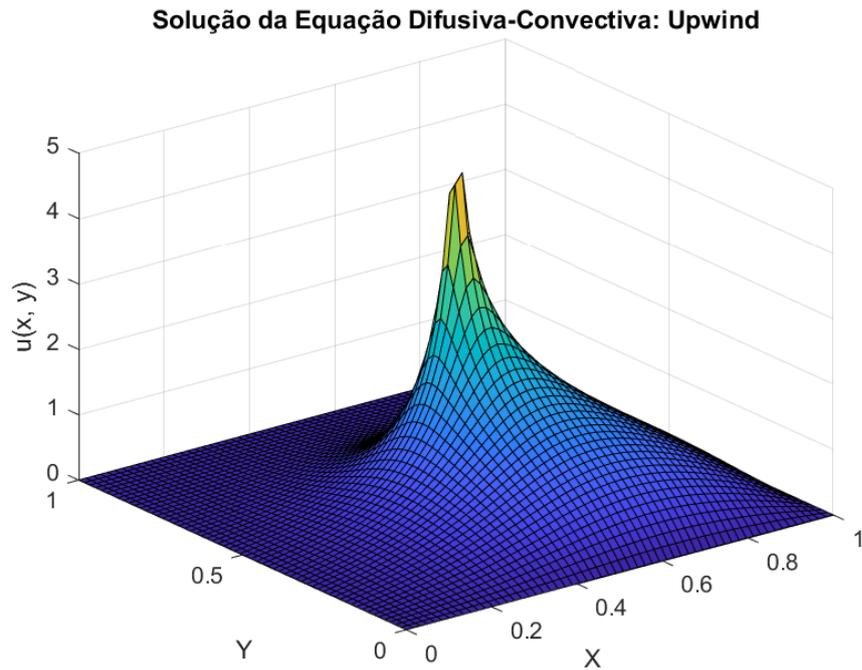


Figura 4.83: Solução: $D = 10^{-1}$, $v = (y, -x)$, $Pe = 1,2 \cdot 10^{-1}$, $Pe_x = 8 \cdot 10^{-2}$, $Pe_y = -8 \cdot 10^{-2}$ e malha de $[60 \times 60]$.

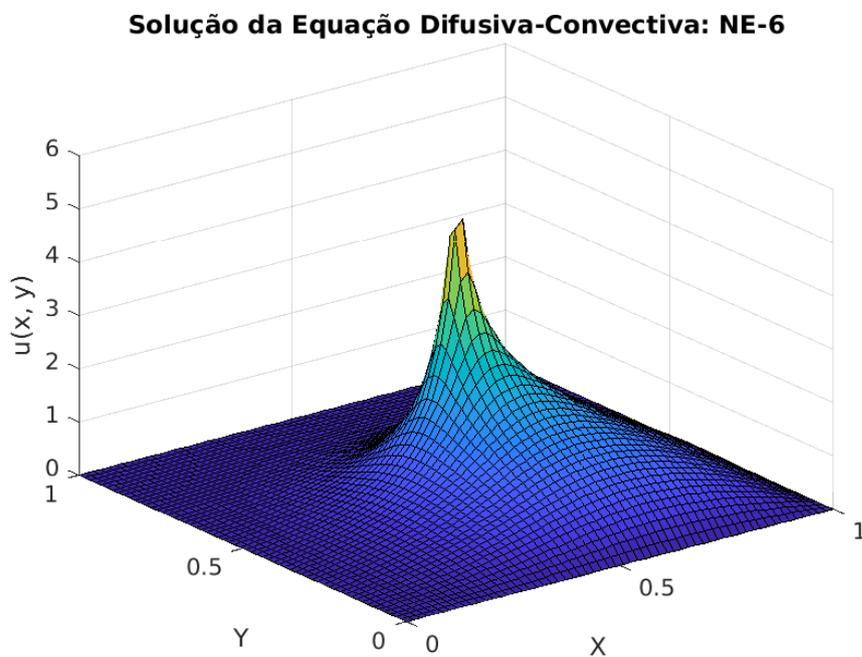


Figura 4.84: Solução: $D = 10^{-1}$, $v = (y, -x)$, $Pe = 1,2 \cdot 10^{-1}$, $Pe_x = 8 \cdot 10^{-2}$, $Pe_y = -8 \cdot 10^{-2}$ e malha de $[60 \times 60]$.

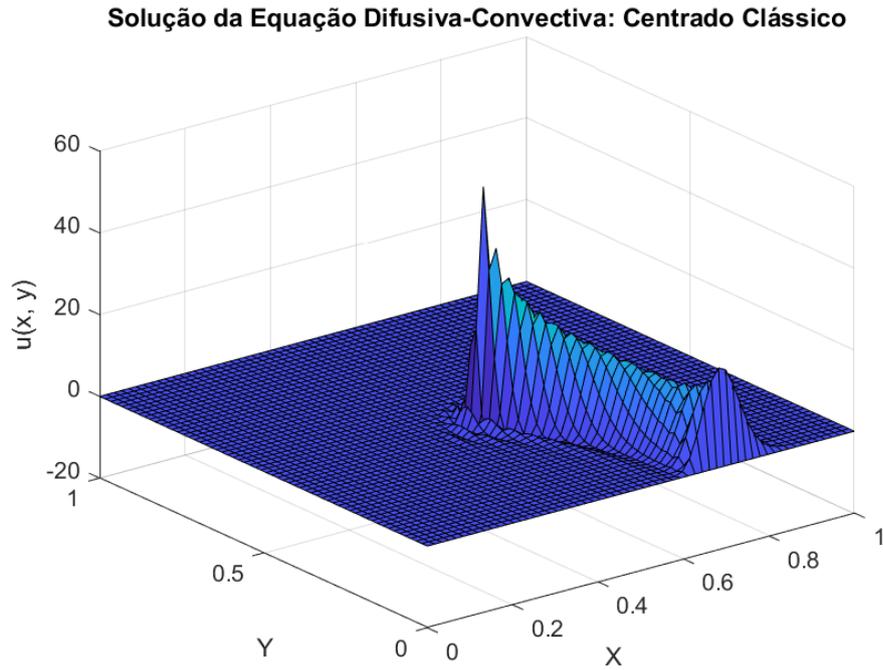


Figura 4.85: Solução: $D = 10^{-3}$, $v = (y, -x)$, $Pe = 1,2 \cdot 10$, $Pe_x = 8,47$, $Pe_y = -8,47$ e malha de $[60 \times 60]$.

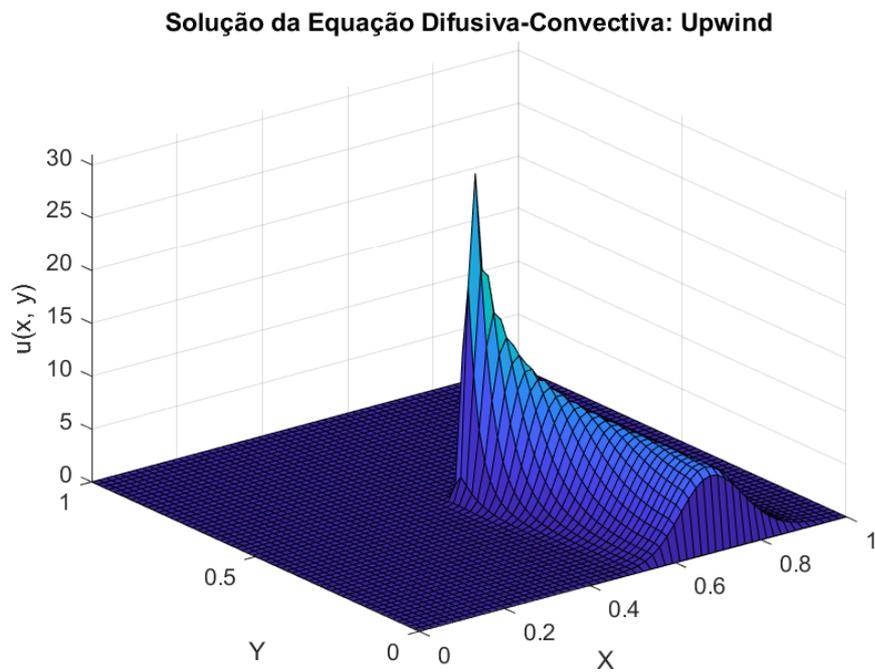


Figura 4.86: Solução: $D = 10^{-3}$, $v = (y, -x)$, $Pe = 1,2 \cdot 10$, $Pe_x = 8,47$, $Pe_y = -8,47$ e malha de $[60 \times 60]$.

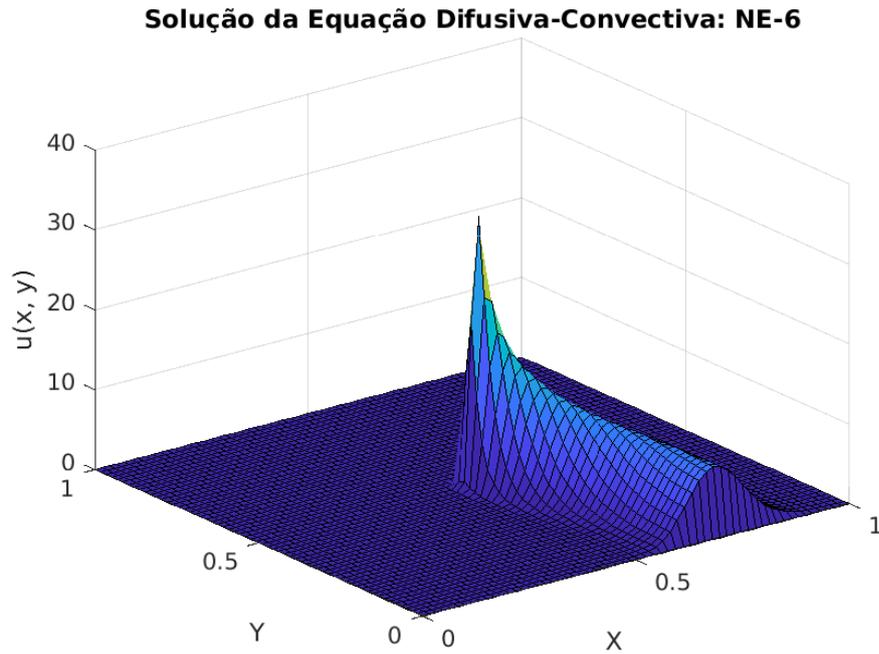


Figura 4.87: Solução: $D = 10^{-3}$, $v = (y, -x)$, $Pe = 1,2 \cdot 10$, $Pe_x = 8,47$, $Pe_y = -8,47$ e malha de $[60 \times 60]$.

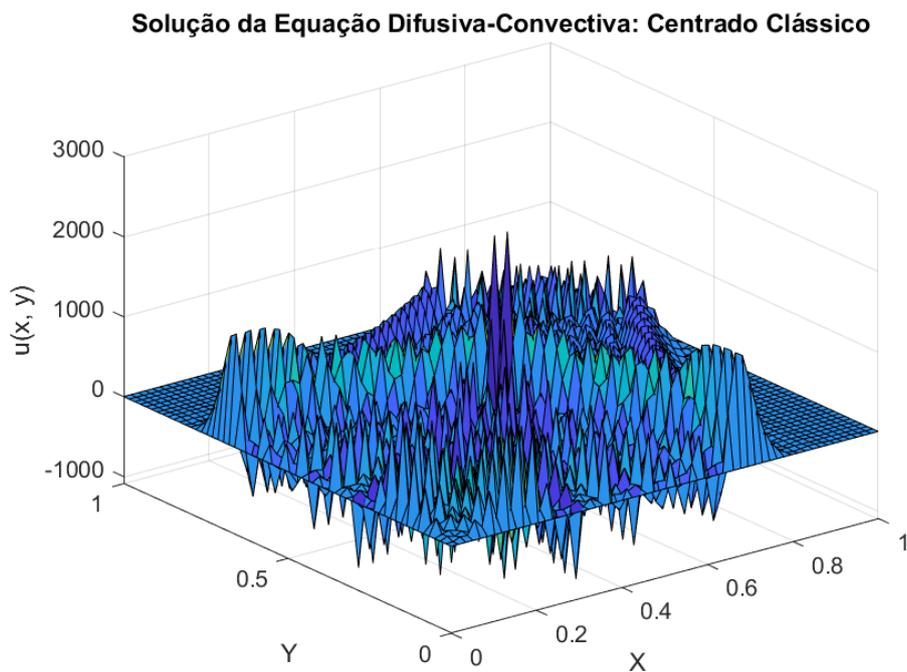


Figura 4.88: Solução: $D = 10^{-6}$, $v = (y, -x)$, $Pe = 1,2 \cdot 10^4$, $Pe_x = 8,47 \cdot 10^4$, $Pe_y = -8,47 \cdot 10^4$ e malha de $[60 \times 60]$.

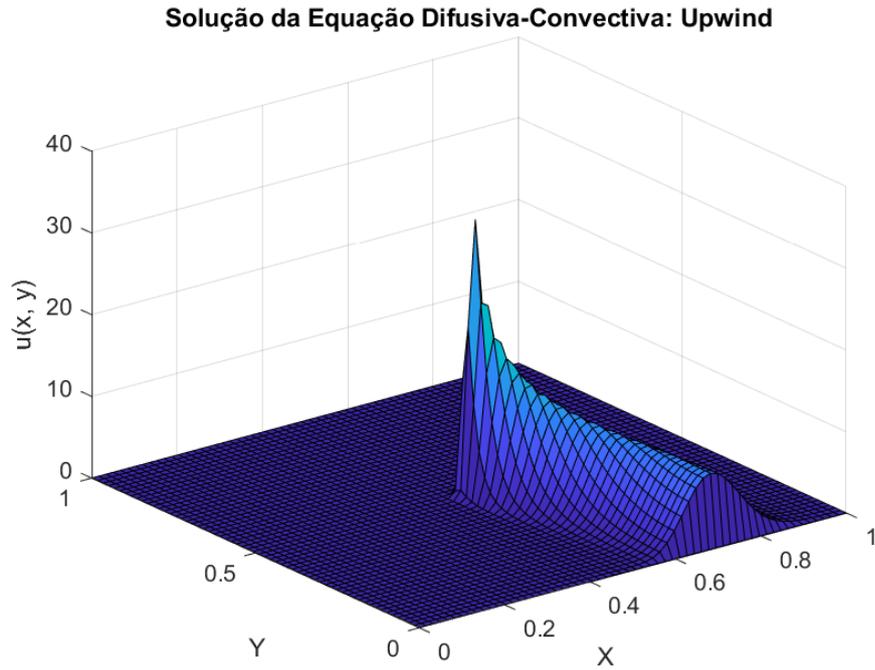


Figura 4.89: Solução: $D = 10^{-6}$, $v = (y, -x)$, $Pe = 1,2 \cdot 10^4$, $Pe_x = 8,47 \cdot 10^4$, $Pe_y = -8,47 \cdot 10^4$ e malha de $[60 \times 60]$.

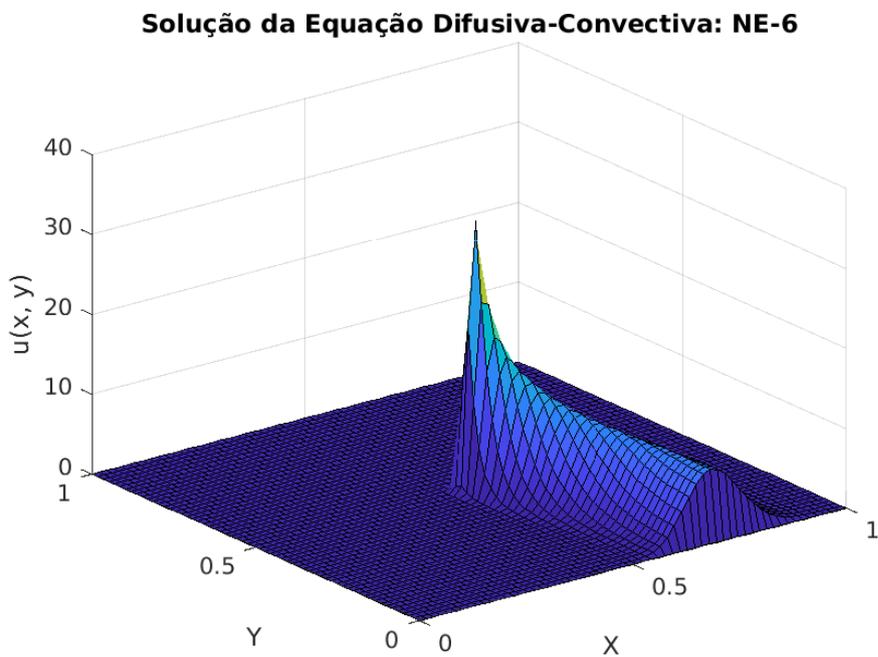


Figura 4.90: Solução: $D = 10^{-6}$, $v = (y, -x)$, $Pe = 1,2 \cdot 10^4$, $Pe_x = 8,47 \cdot 10^4$, $Pe_y = -8,47 \cdot 10^4$ e malha de $[60 \times 60]$.

Quando $D = 10^{-1}$, as soluções numéricas são satisfatórias e se aproximam nos três

métodos, como mostram as figuras 4.82 a 4.84. À medida que o coeficiente difusivo é reduzido, o problema passa a ser cada vez mais dominado pelo fenômeno convectivo, resultando em uma maior concentração de U na direção do campo de velocidade circular imposto. Observa-se, através da figura 4.85, que, para $D = 10^{-3}$, o Método de Diferenças Finitas Centradas apresenta algumas oscilações não desejadas, enquanto para $D = 10^{-6}$, como mostra a figura 4.88, a solução está repleta de oscilações, em linha com o que é esperado conforme a literatura especializada. O Método *Upwind* e o NE-6 apresentaram resultados sem oscilações, conforme mostram as figuras 4.86, 4.87, 4.89 e 4.90.

4.2.6 Caso V

Este caso tem como condição de contorno a equação (4.20), fonte Gaussiana descrita pela equação (4.19), coeficiente difusivo $D = 10^{-2}$, campo de velocidade $\vec{v} = (1, 0)$ e para comparação, foram utilizadas malhas $[20 \times 20]$ e $[60 \times 60]$.

$$f(x, y) = Ae^{-B[(x-0.5)^2+(y-0.5)^2]}, \quad A = \frac{1}{2\pi\sigma}, \quad B = \frac{1}{2\sigma}, \quad \sigma = 0.005. \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[, \\ U(x, 1) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[, \\ U(0, y) = 0 \quad \forall y \in]0, 1[, \\ U(1, y) = 0 \quad \forall y \in]0, 1[\end{cases} \quad (4.20)$$

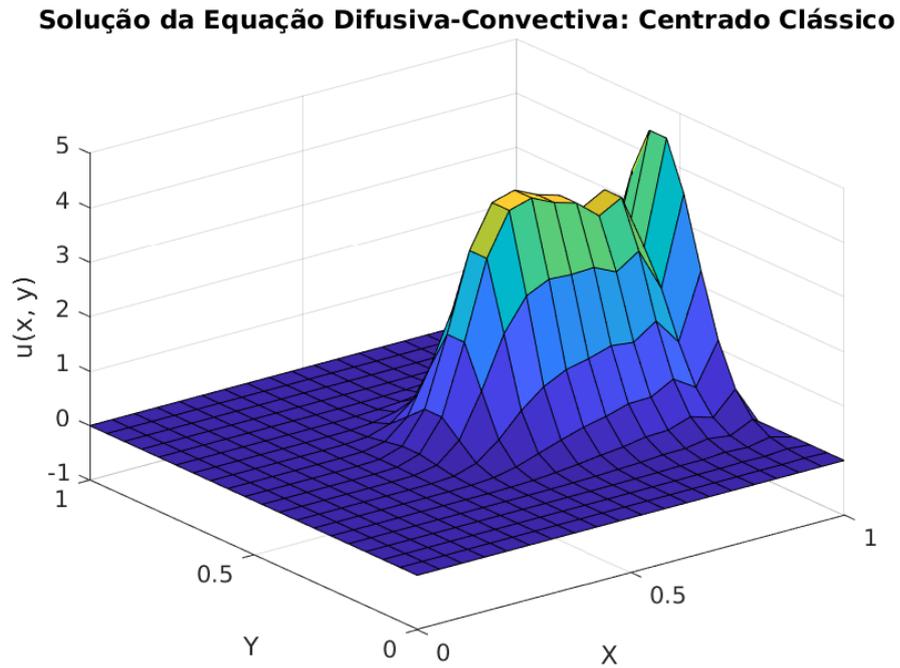


Figura 4.91: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 2,63$, $Pe_x = 2,63$, $Pe_y = 0$ e malha de $[20 \times 20]$.

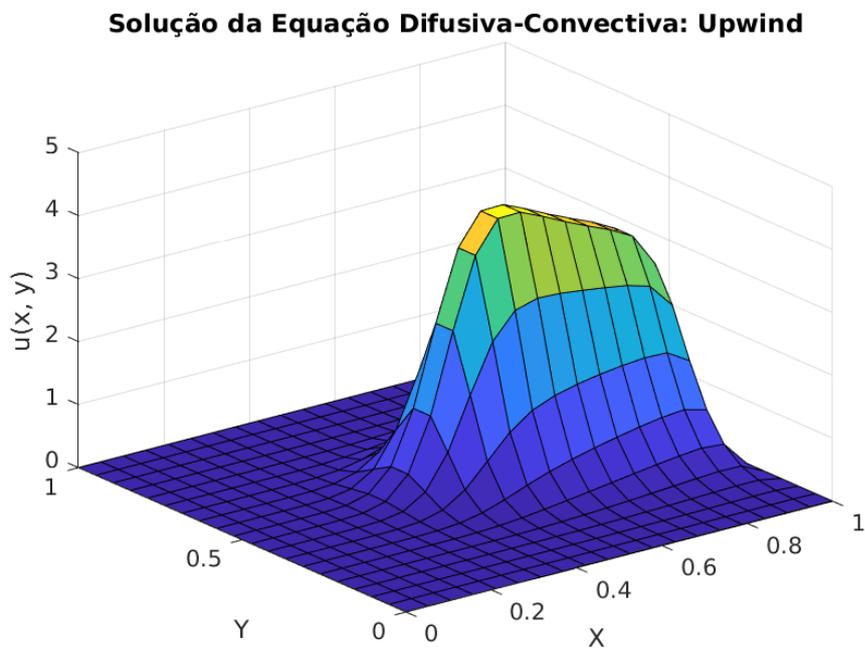


Figura 4.92: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 2,63$, $Pe_x = 2,63$, $Pe_y = 0$ e malha de $[20 \times 20]$.

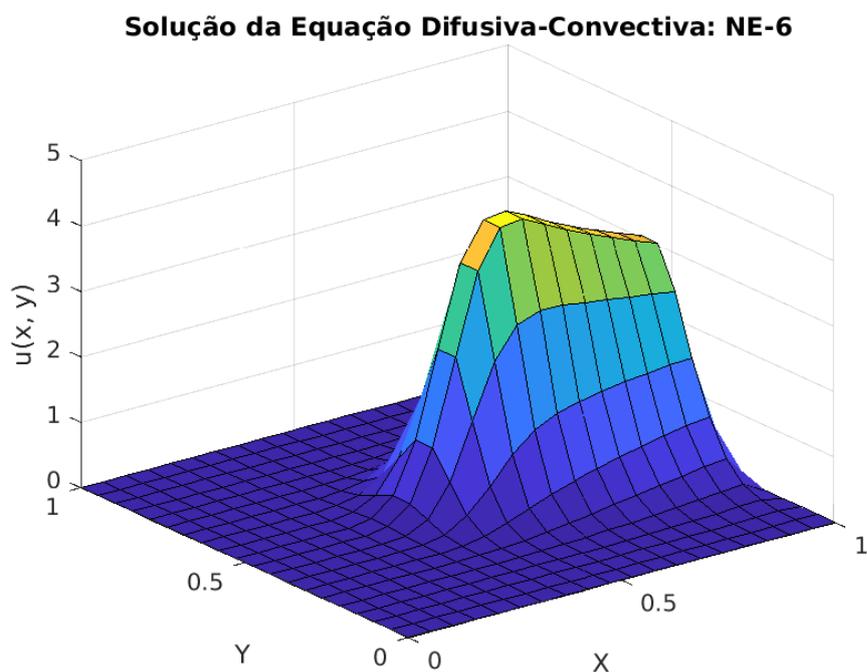


Figura 4.93: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 2,63$, $Pe_x = 2,63$, $Pe_y = 0$ e malha de $[20 \times 20]$.

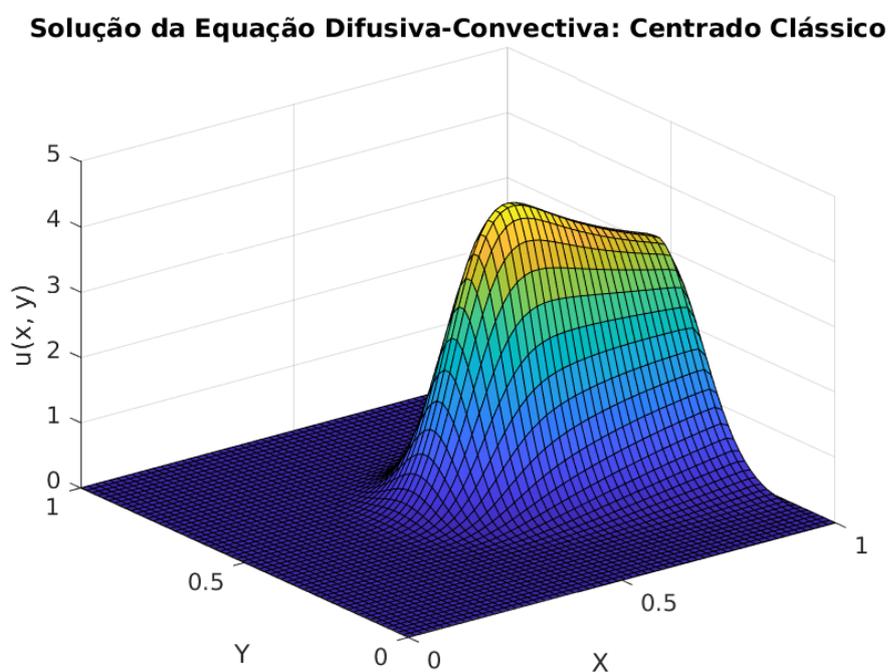


Figura 4.94: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_x = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_y = 0$ e malha de $[60 \times 60]$.

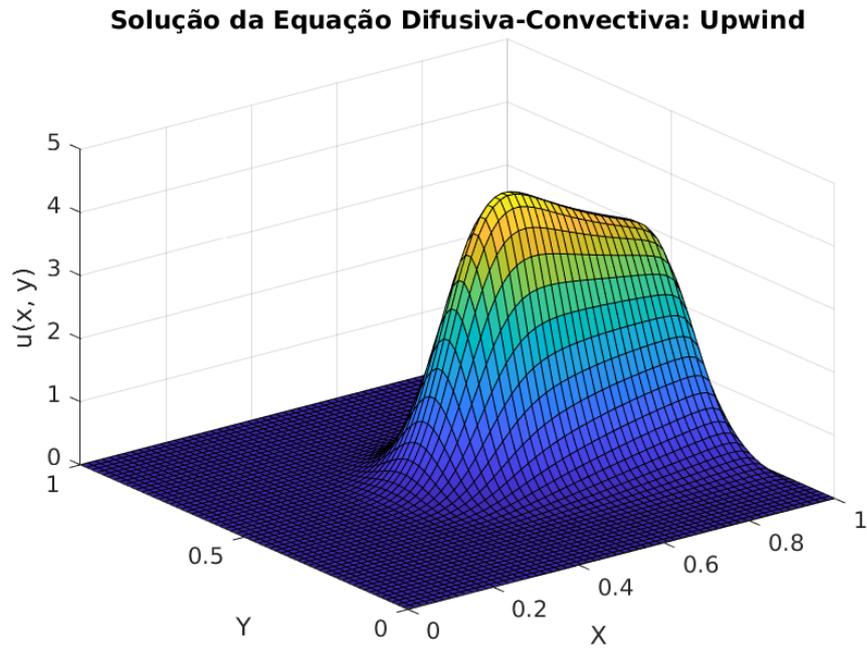


Figura 4.95: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_x = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_y = 0$ e malha de $[60 \times 60]$.

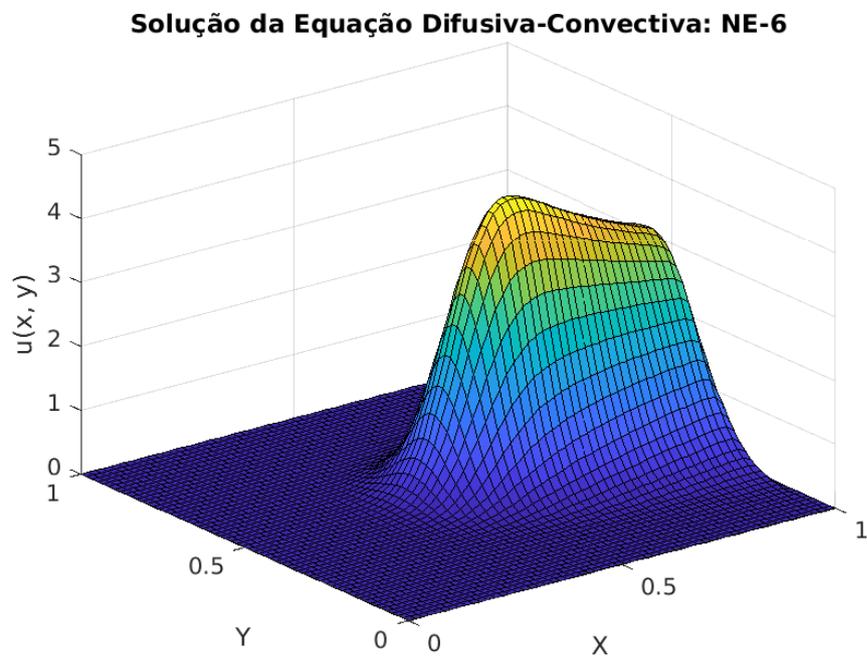


Figura 4.96: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_x = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_y = 0$ e malha de $[60 \times 60]$.

Neste caso, nota-se que na malha mais grosseira, o Método de Diferenças Finitas

Centrado Clássico apresenta oscilações, como mostrado na figura 4.91, precisando ser refinado, como na figura 4.94. Enquanto o Método *Upwind* e o NE-6 apresentam soluções suavizadas em ambas as malhas, como pode ser visto nas figuras 4.92, 4.93, 4.95 e 4.96, com o NE-6 suavizando um pouco menos que o *Upwind*.

4.2.7 Caso VI

Para este caso, foram feitas pequenas modificações dos dois casos anteriores, ele tem como condição de contorno a equação (4.22), fonte Gaussiana descrita pela equação (4.21), coeficiente difusivo $D = 10^{-2}$, velocidade $\vec{v} = (1, 0)$ e para comparação, foram utilizadas malhas $[20 \times 20]$ e $[60 \times 60]$.

$$f(x, y) = Ae^{-B[(x-0.5)^2+(y-0.5)^2]}, \quad A = \frac{1}{2\pi\sigma}, \quad B = \frac{1}{2\sigma}, \quad \sigma = 0.0001. \quad (4.21)$$

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[\\ U(x, 1) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[\\ U(0, y) = 0 \quad \forall y \in]0, 1[\\ U(1, y) = 0 \quad \forall y \in]0, 1[\end{cases} \quad (4.22)$$

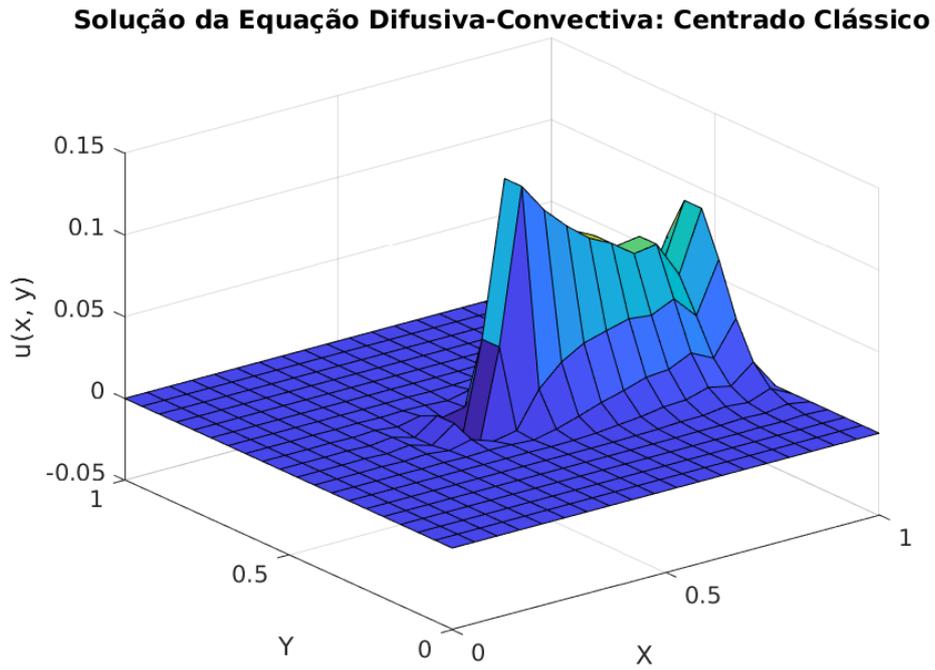


Figura 4.97: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 2,63$, $Pe_x = 2,63$, $Pe_y = 0$ e malha de $[20 \times 20]$.

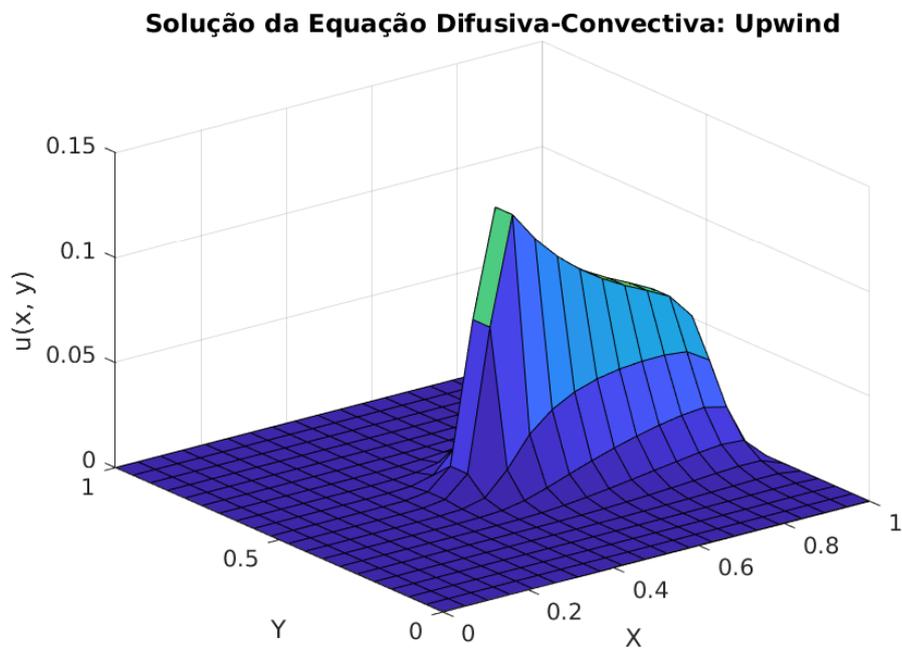


Figura 4.98: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 2,63$, $Pe_x = 2,63$, $Pe_y = 0$ e malha de $[20 \times 20]$.

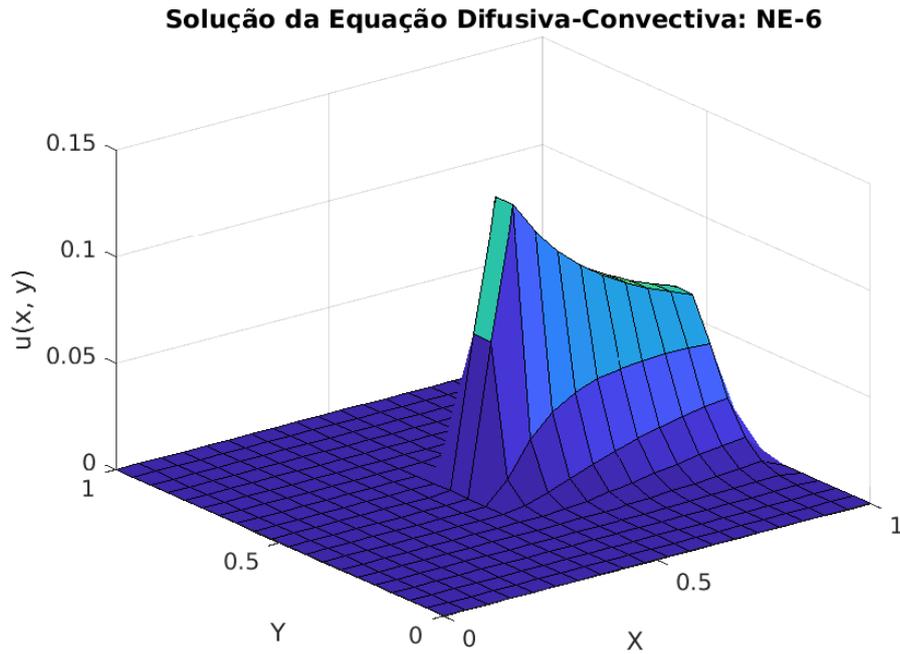


Figura 4.99: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 2,63$, $Pe_x = 2,63$, $Pe_y = 0$ e malha de $[20 \times 20]$.

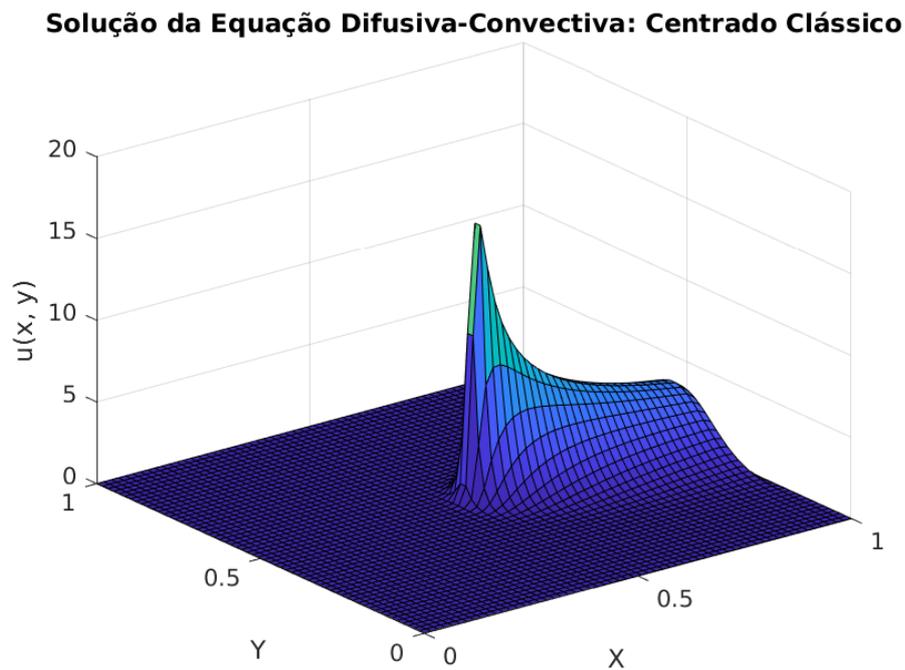


Figura 4.100: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_x = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_y = 0$ e malha de $[60 \times 60]$.

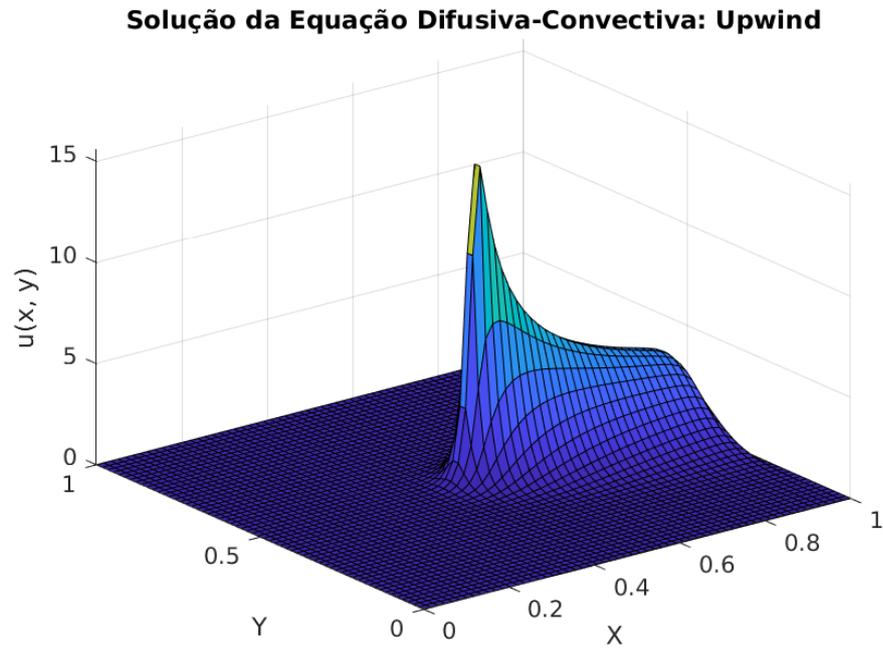


Figura 4.101: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_x = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_y = 0$ e malha de $[60 \times 60]$.

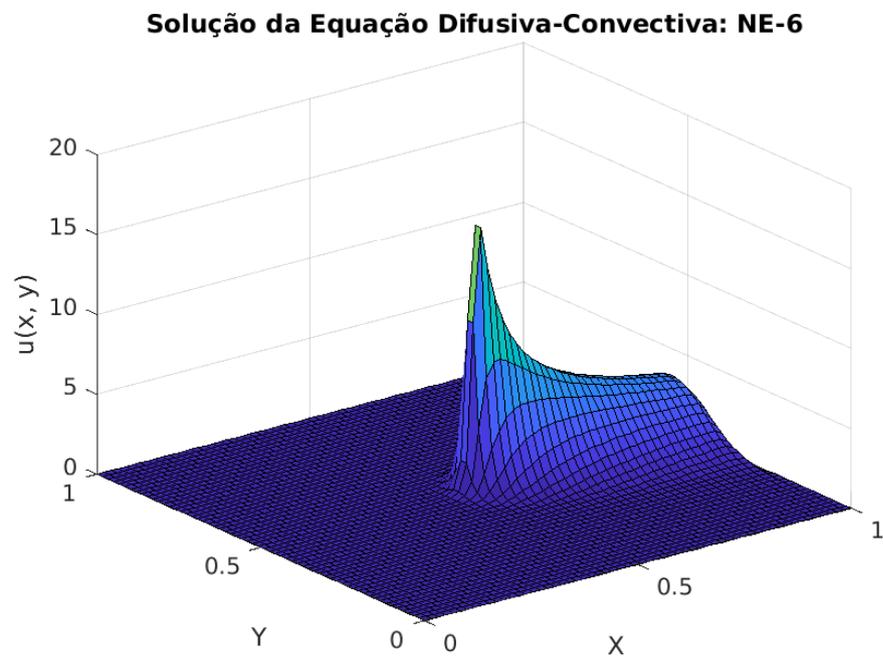


Figura 4.102: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (1, 0)$, $Pe = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_x = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_y = 0$ e malha de $[60 \times 60]$.

Observa-se que a presença de uma função Gaussiana com um gradiente mais acentuado

perto de seu centro tende a gerar oscilações espúrias nos resultados obtidos pelo Método de Diferenças Finitas Centradas. Essas oscilações, apresentadas na figura 4.97, são evidentes especialmente nas proximidades da condição de contorno oposta à direção do campo de velocidade, bem como nas regiões próximas ao pico da curva. No entanto, ao refinarmos a malha, como na figura 4.100, notamos que as oscilações desaparecem. Por outro lado, o Método de Diferenças Finitas *Upwind* e o NE-6 produzem soluções sem oscilações espúrias para ambos os tamanhos de malha, como visto nas figuras 4.98, 4.99, 4.101 e 4.102, embora o Método *Upwind* suavize ainda mais os resultados que o NE-6.

4.2.8 Caso VII

Este caso tem como condição de contorno a equação (4.23) e foram utilizados campo de velocidade $\vec{v} = (y, -x)$, fonte nula, coeficiente difusivo $D = 10^{-2}$ e para comparações, malhas quadradas de $[20 \times 20]$ e $[60 \times 60]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [0, 1], \\ U(x, 1) = 1 \quad \forall x \in [0, 1], \\ U(1, y) = 0 \quad \forall y \in [0, 1], \\ U(0, y) = 0 \quad \forall y \in [0, 0.6[, \\ U(0, y) = y - 0.6 \quad \forall y \in [0.6, 0.65[, \\ U(0, y) = 18(y - 0.65) + 0.05 \quad \forall y \in [0.65, 0.70[, \\ U(0, y) = (y - 0.70) + 0.95 \quad \forall y \in [0.70, 0.75[, \\ U(0, y) = 1 \quad \forall y \in [0.75, 1]. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

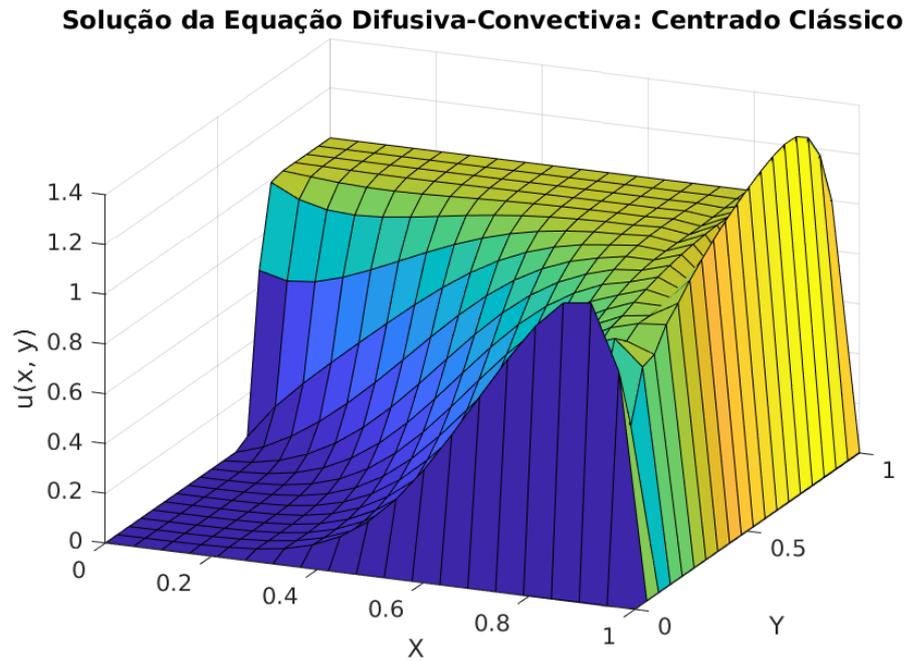


Figura 4.103: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (y, -x)$, $Pe = 3,72$, $Pe_x = 2,63$, $Pe_y = -2,63$ e malha de $[20 \times 20]$.

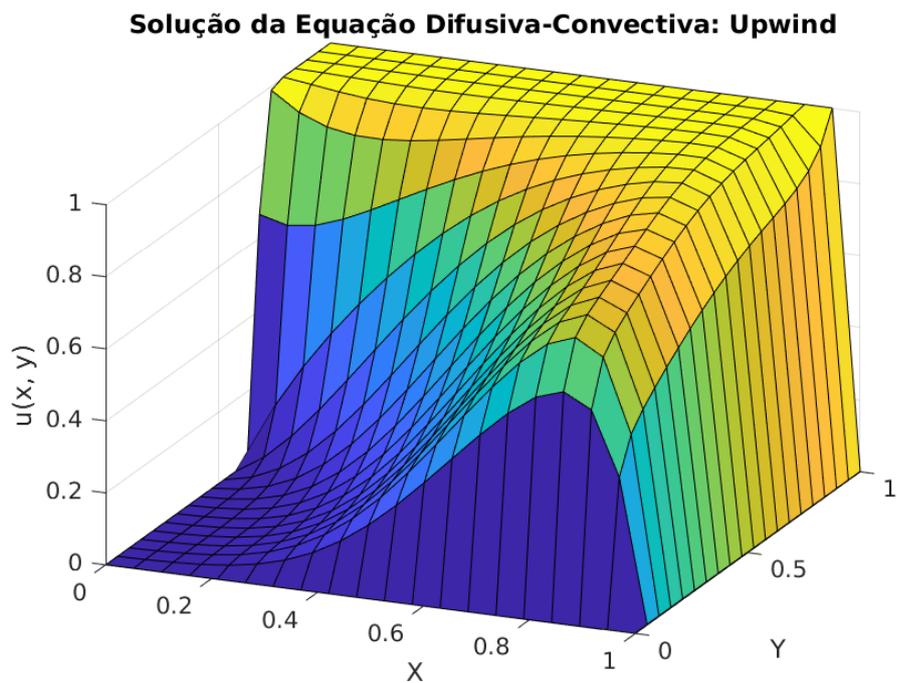


Figura 4.104: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (y, -x)$, $Pe = 3,72$, $Pe_x = 2,63$, $Pe_y = -2,63$ e malha de $[20 \times 20]$.

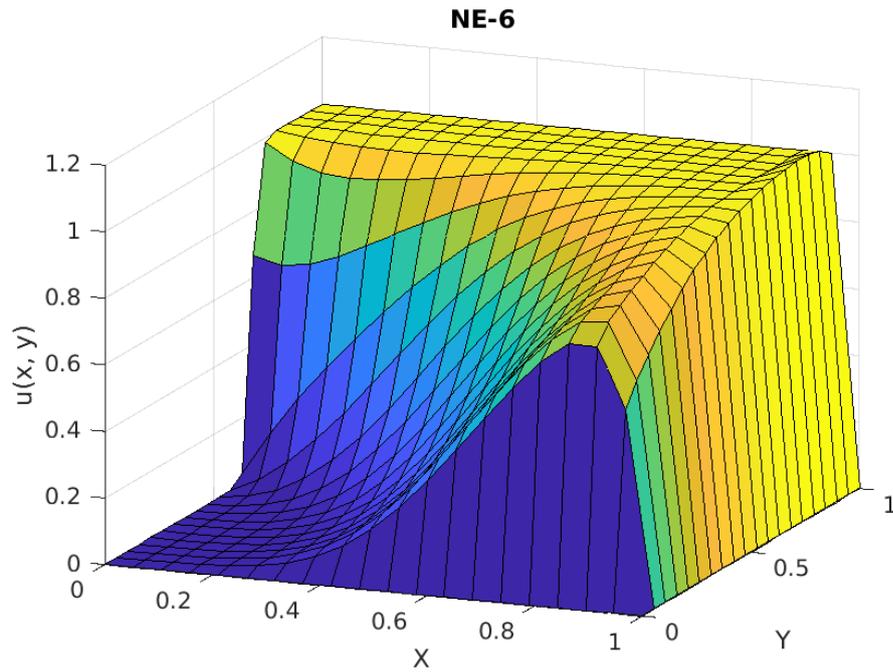


Figura 4.105: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (y, -x)$, $Pe = 3,72$, $Pe_x = 2,63$, $Pe_y = -2,63$ e malha de $[20 \times 20]$.

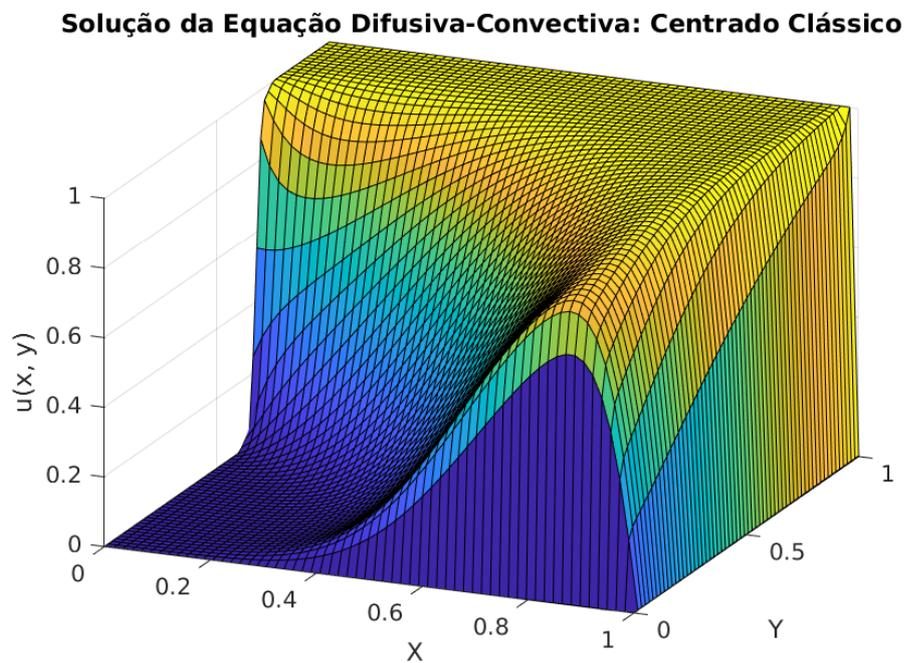


Figura 4.106: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (y, -x)$, $Pe = 1,2$, $Pe_x = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_y = -8,5 \cdot 10^{-1}$ e malha de $[60 \times 60]$.

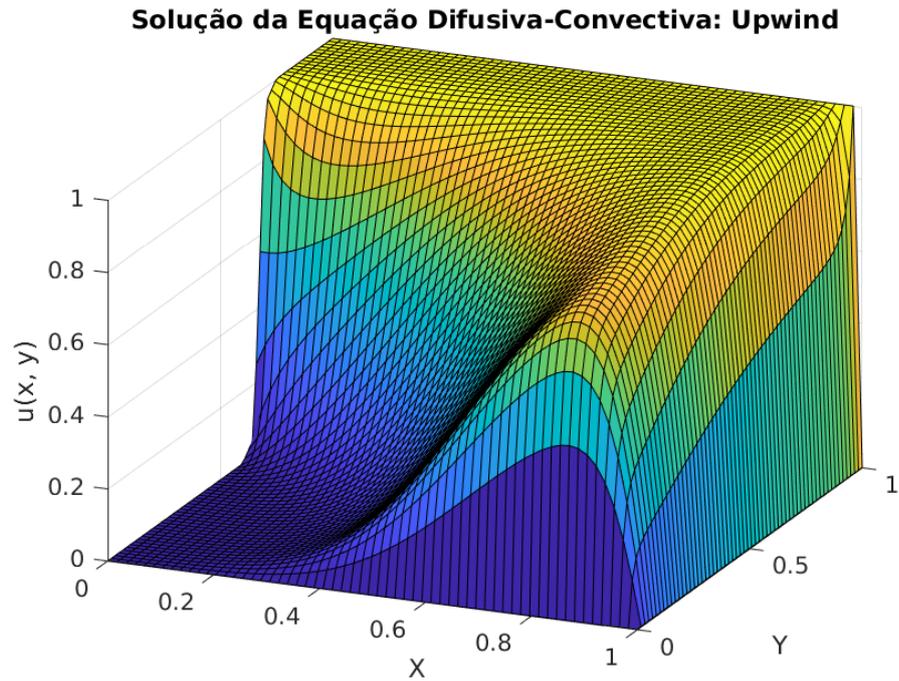


Figura 4.107: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (y, -x)$, $Pe = 1,2$, $Pe_x = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_y = -8,5 \cdot 10^{-1}$ e malha de $[60 \times 60]$.

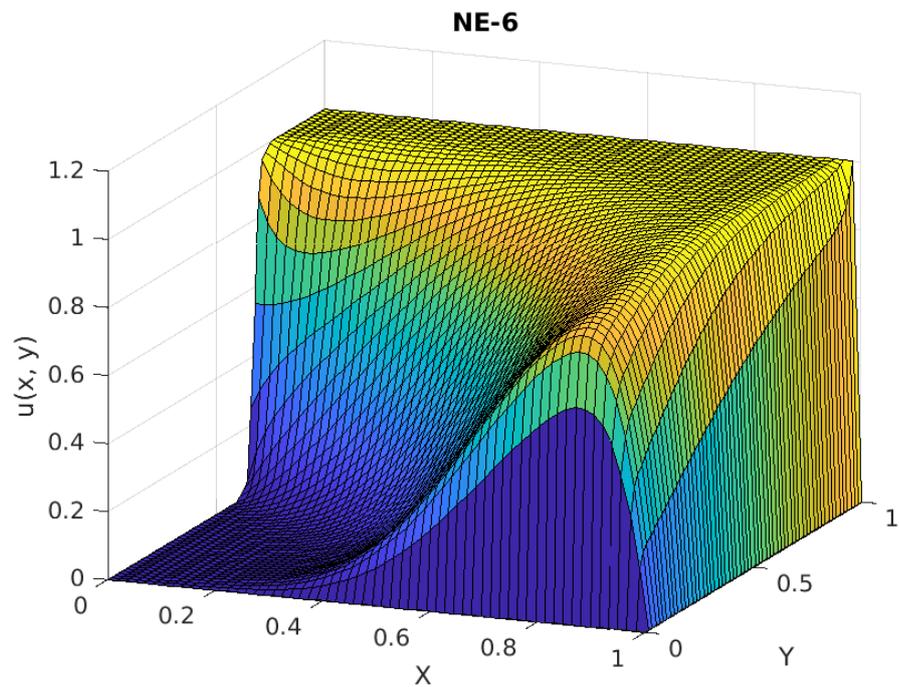


Figura 4.108: Solução: $D = 10^{-2}$, $v = (y, -x)$, $Pe = 1,2$, $Pe_x = 8,5 \cdot 10^{-1}$, $Pe_y = -8,5 \cdot 10^{-1}$ e malha de $[60 \times 60]$.

Na malha mais grosseira deste caso, o Centrado Clássico apresenta oscilações, como

visto na figura 4.103 sendo necessário o refinamento da malha para um melhor resultado, como mostra a figura 4.106. O Método *Upwind* e o NE-6 apresentam resultados suavizados em ambas as malhas, como visto nas figuras 4.104, 4.105, 4.107 e 4.108, porém, o NE-6 suaviza menos seus resultados, podendo estar entre o CC e o *Upwind*.

4.2.9 Caso VIII

No último problema analisado para o caso bidimensional, foi selecionado um cenário sem camadas limite na solução. Para isso, definiu-se um domínio de $(-0.5 \leq x \leq 0.5, -0.5 \leq y \leq 0.5)$, com um campo de velocidades definido por $\vec{v} = (-y, x)$ e condição de contorno zero em todo o domínio. O coeficiente difusivo foi fixado em $D = 10^{-10}$.

Além disso, uma condição interna foi estabelecida pela função seno $f(0, y) = \sin(2\pi y)$ para todos os valores de $y \in [-0.5, 0]$. Foram utilizadas malhas quadradas de $[20 \times 20]$ e de $[60 \times 60]$ para esta análise.

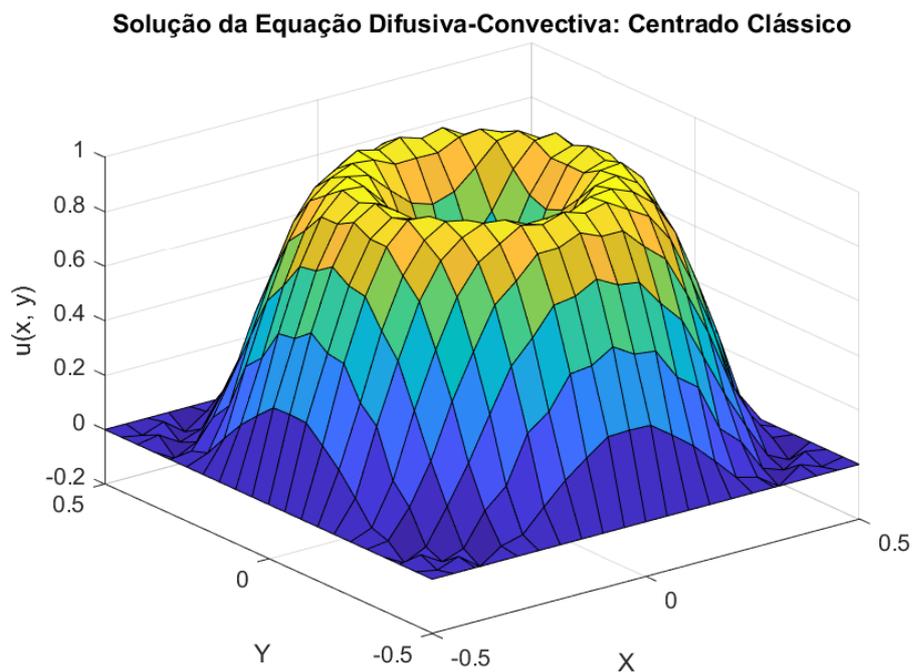


Figura 4.109: Solução: $D = 10^{-10}$, $v = (-y, x)$, $Pe = 1,77 \cdot 10^8$, $Pe_x = -1,25 \cdot 10^8$, $Pe_y = 1,25 \cdot 10^8$ e malha de $[20 \times 20]$.

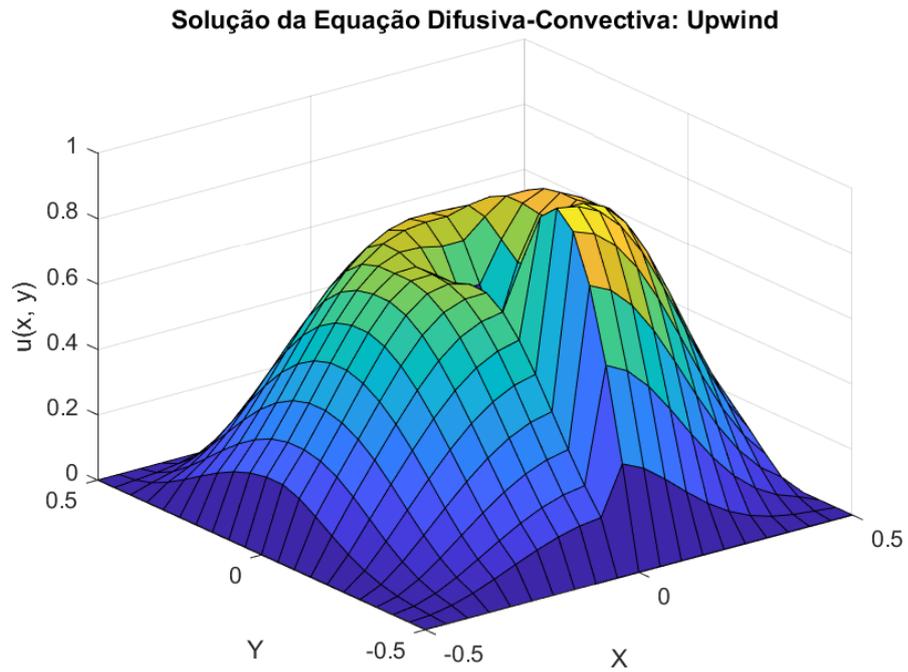


Figura 4.110: Solução: $D = 10^{-10}$, $v = (-y, x)$, $Pe = 1,77 \cdot 10^8$, $Pe_x = -1,25 \cdot 10^8$, $Pe_y = 1,25 \cdot 10^8$ e malha de $[20 \times 20]$.

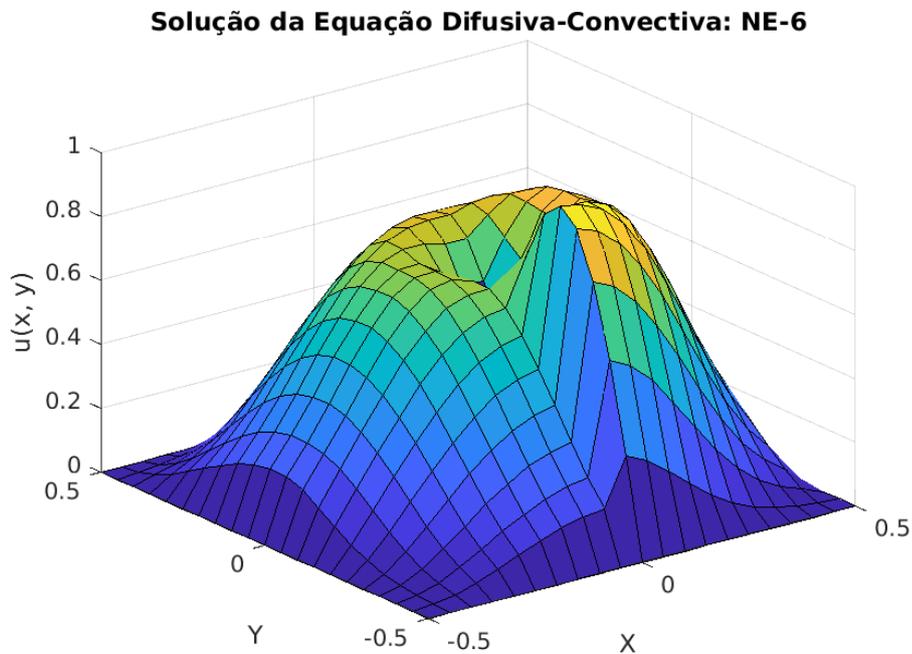


Figura 4.111: Solução: $D = 10^{-10}$, $v = (-y, x)$, $Pe = 1,77 \cdot 10^8$, $Pe_x = -1,25 \cdot 10^8$, $Pe_y = 1,25 \cdot 10^8$ e malha de $[20 \times 20]$.

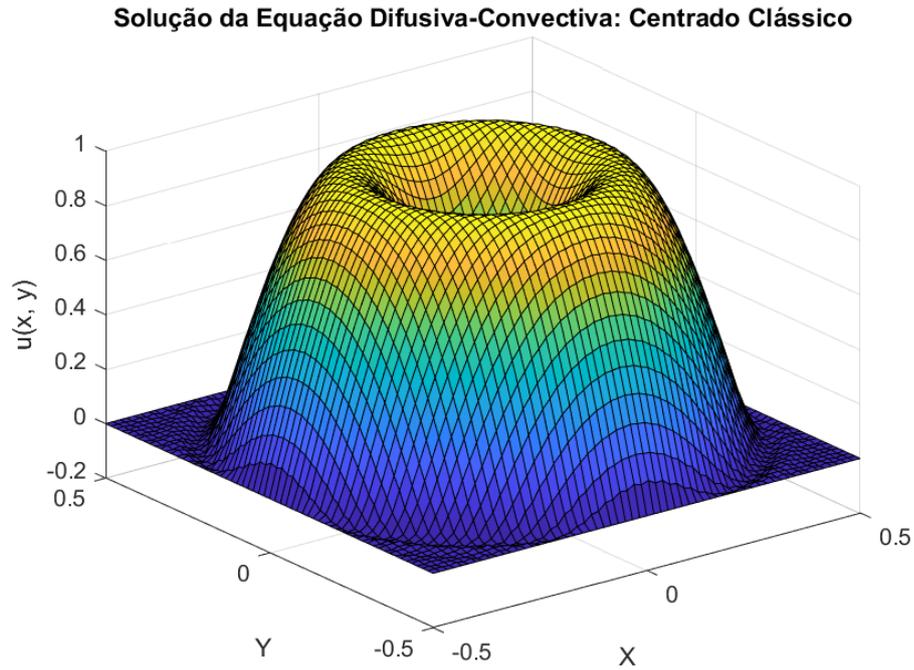


Figura 4.112: Solução: $D = 10^{-10}$, $v = (-y, x)$, $Pe = 5,9 \cdot 10^7$, $Pe_x = -4,17 \cdot 10^7$, $Pe_y = 4,17 \cdot 10^7$ e malha de $[60 \times 60]$.

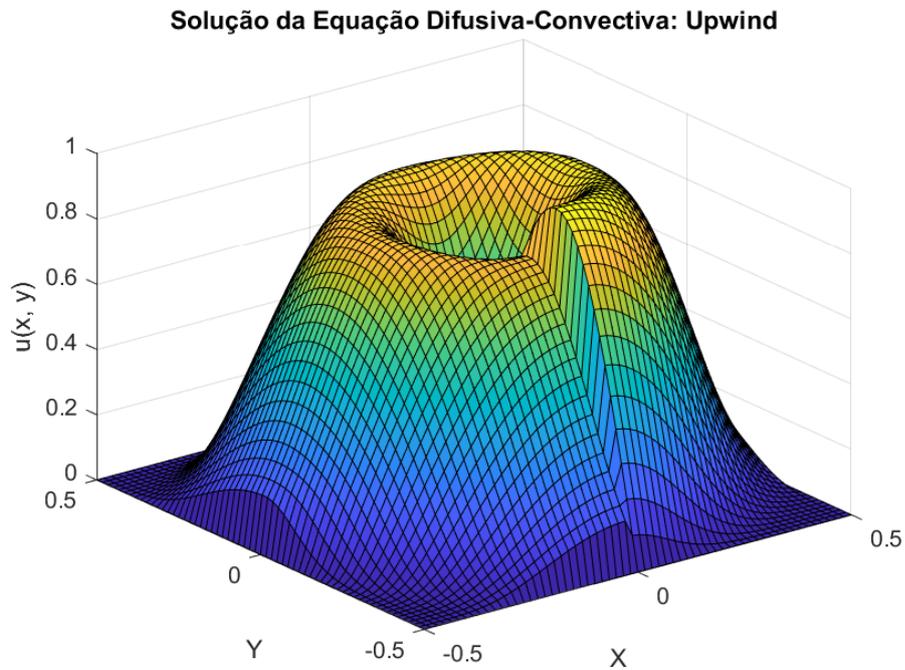


Figura 4.113: Solução: $D = 10^{-10}$, $v = (-y, x)$, $Pe = 5,9 \cdot 10^7$, $Pe_x = -4,17 \cdot 10^7$, $Pe_y = 4,17 \cdot 10^7$ e malha de $[60 \times 60]$.

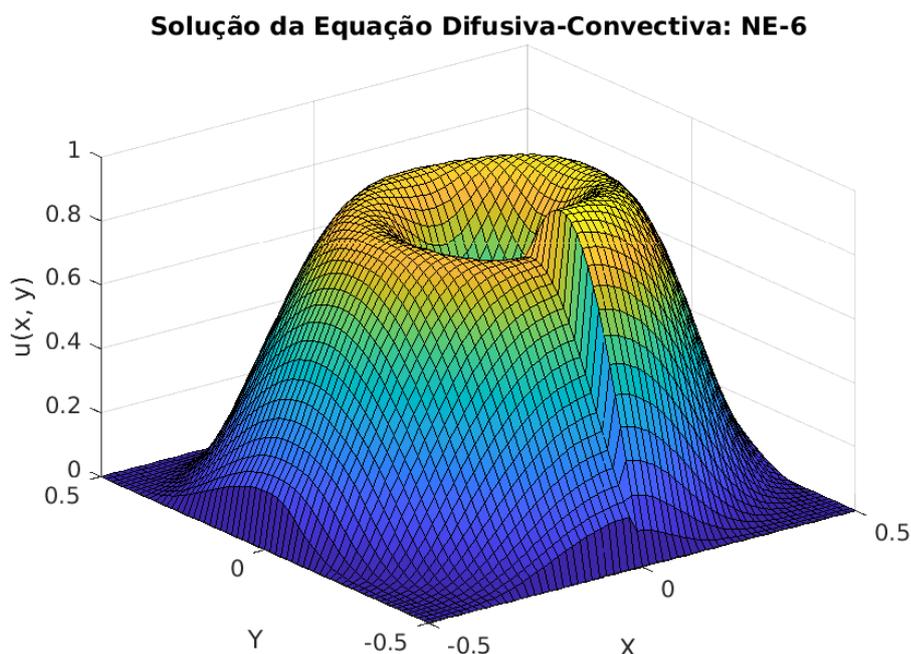


Figura 4.114: Solução: $D = 10^{-10}$, $v = (-y, x)$, $Pe = 5,9 \cdot 10^7$, $Pe_x = -4,17 \cdot 10^7$, $Pe_y = 4,17 \cdot 10^7$ e malha de $[60 \times 60]$.

Neste problema, as soluções geradas pelo Método de Diferenças Finitas *Upwind* e pelo NE-6 exibiram dispersão numérica significativa, que pode ser visto nas figuras 4.110 e 4.111, evidenciada pela presença de um degrau próximo à condição interna imposta. Através das figuras 4.113 e 4.114 observa-se que, embora o refinamento da malha diminua a diferença percebida na região de $y \in [-0.5, 0]$, o degrau não é completamente eliminado.

Por outro lado, através das figuras 4.109 e 4.112, observa-se que as soluções obtidas pelo Método de Diferenças Finitas Centradas foram coerentes com as expectativas, sem a presença do degrau mencionado. Isso ocorre devido à tendência do Método de Diferenças Finitas *Upwind* em suavizar as soluções, o que, neste caso, resultou em uma diferença significativa em relação ao resultado esperado.

4.2.10 Síntese dos Resultados Bidimensionais

Os casos bidimensionais possuem seus resultados apresentados apenas pelos métodos clássicos, Centrado (CC) e *Upwind*, além do NE-6. A escolha do NE-6 para a análise deve-se ao fato de este novo método ter apresentado o melhor desempenho, ou pelo menos desempenho aceitável, justificando sua inclusão neste trabalho. Os métodos CC e *Upwind* demonstraram resultados consistentes com a literatura, comportando-se conforme o espe-

rado em termos de precisão e estabilidade.

Por outro lado, o método NE-6, embora tenha apresentado dispersão numérica no Caso VIII, mostrou-se promissor em termos de estabilidade e precisão nos demais casos analisados. Esse comportamento positivo confirma também que se mantém o bom desempenho observado no contexto unidimensional. Tal resultado pode ser explicado pelo fato de o NE-6 ser uma generalização dos demais esquemas numéricos propostos, contendo-os como casos particulares. Em particular, a escolha de valores específicos para o parâmetro α no NE-6 permite a obtenção dos outros novos esquemas.

4.3 Análise do Custo Temporal

Para garantir uma análise consistente do desempenho dos códigos implementados, foi utilizado o recurso de cronometragem do *MATLAB*[®], por meio dos comandos `tic` e `toc`. Esses comandos permitem mensurar o tempo de execução de trechos específicos do código, registrando o intervalo de tempo, em segundos, entre o início (`tic`) e o final (`toc`) da execução.

4.3.1 Unidimensional

Nos casos dos problemas unidimensionais, devido à simplicidade, os tempos de execução individuais são extremamente curtos, o que dificulta uma análise precisa do desempenho. Para contornar essa limitação, optou-se por executar o código 10.000 vezes consecutivas, acumulando os tempos de cada execução. Com isso, foi possível calcular a soma total do tempo de processamento dessas 10.000 repetições, permitindo uma aproximação mais robusta e confiável do custo computacional associado ao método numérico implementado. Essa abordagem minimiza flutuações aleatórias nos tempos de execução e possibilita uma análise mais precisa da eficiência do algoritmo.

A figura 4.115 apresenta os resultados obtidos por meio da implementação descrita. Essa figura está dividida em todos os casos discutidos na seção 4.1. Na figura 4.115(a), está ilustrado o caso da Solução Suave Parábola; na figura 4.115(b), o caso da Solução Suave Seno; na figura 4.115(c), o caso da Camada Limite Externa à Direita; na figura 4.115(d), o caso da Camada Limite Externa à Esquerda; na figura 4.115(e), o caso da Camada Limite Interna; e, por fim, na figura 4.115(f), o caso da Solução Proposta por LeVeque.

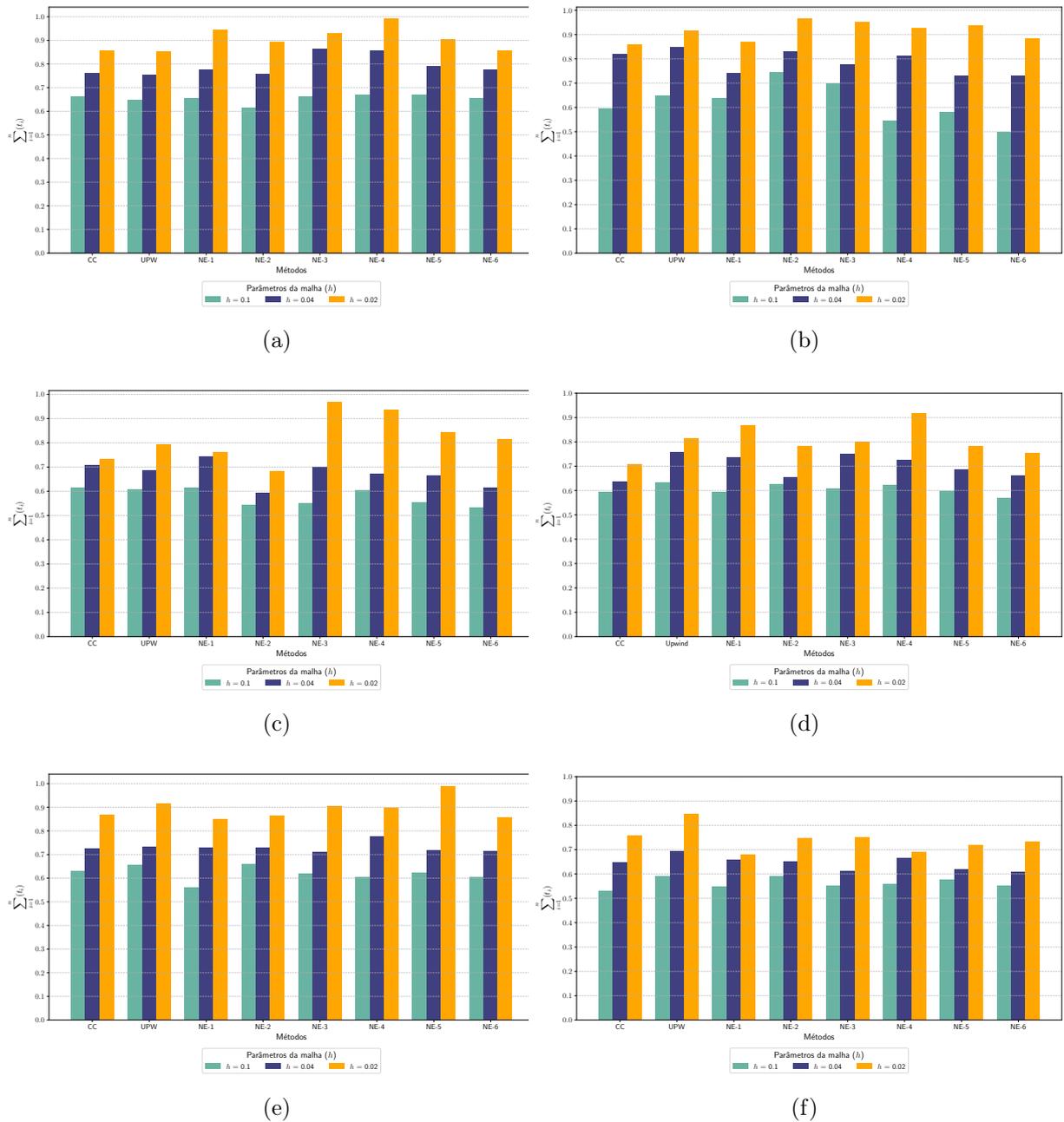


Figura 4.115: Soma dos tempos em uma dimensão.

Os resultados apresentados na figura 4.115 evidenciam que os métodos implementados seguem a teoria de que o tempo computacional aumenta conforme a malha é refinada. Esse comportamento é esperado, uma vez que a redução do parâmetro h implica um aumento no número de pontos discretizados e, conseqüentemente, no número de operações necessárias para resolver o problema. Observa-se, entretanto, que cada caso analisado apresenta uma variação específica no desempenho dos métodos, com um método se destacando como o mais rápido ou o mais lento dependendo do problema em questão.

Além disso, a análise não permite afirmar categoricamente que um método é consistentemente o mais eficiente em todos os cenários, tampouco que um único método é sempre o menos eficiente. Por exemplo, em casos com soluções suaves, o comportamento dos métodos pode diferir significativamente daquele observado em problemas envolvendo camadas limites. Este comportamento reforça a importância de considerar tanto as características da solução quanto a configuração da malha ao selecionar o método mais adequado para uma determinada aplicação. De maneira geral, os resultados ressaltam a complexidade da análise de desempenho dos métodos numéricos em diferentes contextos, destacando a necessidade de avaliações específicas para cada tipo de problema e configuração de malha.

4.3.2 Bidimensional

Nos casos bidimensionais, devido à maior complexidade computacional, os tempos de execução são significativamente maiores em comparação com os problemas unidimensionais. Para garantir uma análise robusta do desempenho, optou-se por executar o código 10.000 vezes consecutivas e acumular os tempos de cada execução, tanto para os casos unidimensionais quanto para os casos bidimensionais. A soma dos tempos foi utilizada para aproximar o custo computacional associado ao método numérico implementado. No entanto, em duas dimensões, devido à maior variação nos tempos, foi escolhida a representação do logaritmo da soma dos tempos, o que facilita a visualização e comparação dos resultados.

A figura 4.116 apresenta os resultados obtidos por meio da implementação descrita. Essa figura está dividida em todos os casos discutidos na seção 4.2. Na figura 4.116(a), está ilustrado o Caso I; na figura 4.116(b), o Caso II; na figura 4.116(c), o Caso III; na figura 4.116(d), o Caso IV; na figura 4.116(e), o Caso V; na figura 4.116(f), o Caso VI; na figura 4.116(g), o Caso VII; e, por fim, na figura 4.116(h), o Caso VIII.

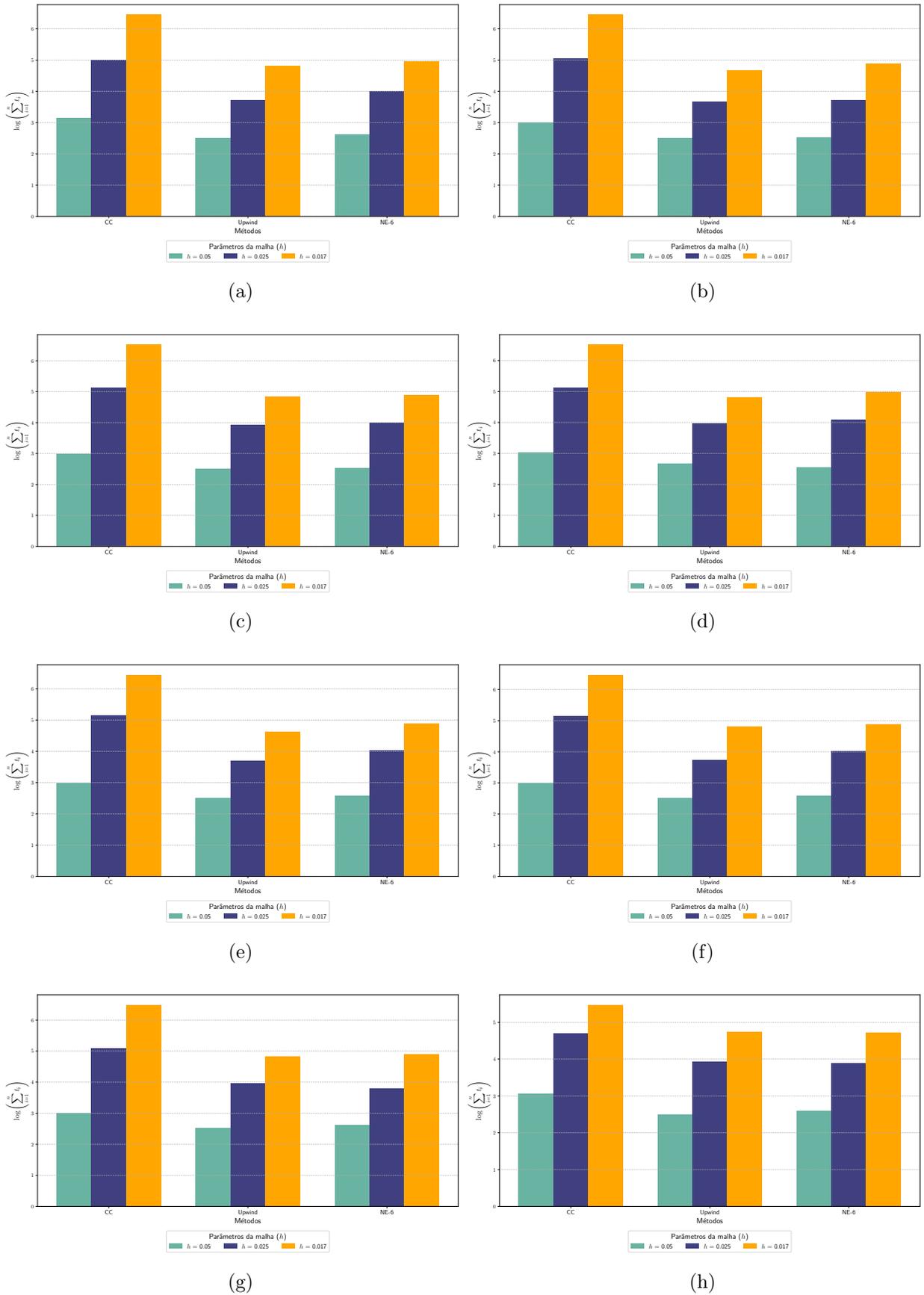


Figura 4.116: Log da soma dos tempos em duas dimensões.

A figura 4.116 mostra que os casos bidimensionais, os métodos seguem a teoria de que o tempo computacional aumenta com o refinamento da malha, refletindo a maior complexidade associada à resolução numérica em duas dimensões. Em comparação com os problemas unidimensionais, a transição para duas dimensões exige maior capacidade computacional, dada a maior quantidade de pontos na malha e a interação entre as variáveis nos dois eixos espaciais. As figuras mostram que o Método Centrado Clássico (CC) apresenta tempos ligeiramente superiores, o que pode ser atribuído ao custo adicional de sua formulação, especialmente em contextos mais complexos, onde a necessidade de garantir uma solução simétrica e conservativa leva a um maior número de cálculos. Já o método *Upwind*, por sua natureza dissipativa, exige menos cálculos, pois prioriza informações unilaterais, resultando em menor custo computacional. O método NE-6, por sua vez, segue com resultados próximos aos do *Upwind*.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

5.1 Conclusões

Nesta dissertação, foram apresentados os principais resultados da pesquisa que buscou aumentar a eficiência e superar as dificuldades de precisão e estabilidade na resolução de problemas de difusão-convecção, evitando a necessidade de grandes refinamentos de malha. O objetivo central foi propor novos esquemas de diferenças finitas para a equação de difusão-convecção com convecção dominante, alcançado por meio do estudo e aprimoramento de esquemas existentes para o desenvolvimento de novos esquemas originais.

Nos resultados em uma dimensão, foi possível identificar esquemas que se mostraram eficazes em malhas mais grosseiras, tanto na solução do problema, quanto nas aproximações das derivadas primeira e segunda, como é o caso do NE-6 na maioria dos exemplos, no qual conseguiu apresentar um resultado mais preciso que os métodos clássicos CC e *Upwind*. Tal fato demonstra um avanço significativo em direção à formulação de esquemas mais estáveis e precisos. Portanto, esses resultados contribuem para o estudo e aplicação da equação difusiva-convectiva, uma vez que os esquemas aqui propostos são inéditos e apresentam grande potencial.

Apesar das contribuições, esta pesquisa também enfrentou algumas limitações, especialmente em relação à adaptação dos métodos para duas dimensões, onde apenas o esquema NE-6 apresentou resultados satisfatórios comparados aos outros métodos desenvolvidos. Esse desafio pode ser explorado em pesquisas futuras, que poderão investigar combinações entre os diferentes esquemas, buscando resultados ainda mais estáveis e próximos da solução exata.

Por fim, espera-se que este trabalho tenha contribuído para o desenvolvimento de

novos esquemas aplicados à equação difusiva-convectiva e que suas implicações possam ser valiosas tanto para a comunidade acadêmica quanto para profissionais que utilizam essa equação em suas práticas.

5.2 Trabalhos Futuros

Recomendações para trabalhos futuros:

- Aplicação dos esquemas para casos com condições de contorno diferentes das utilizadas;
- Buscar soluções exatas em 2D para aplicação dos esquemas;
- Combinar os esquemas apresentados para criar outros métodos;
- Extensão para malhas não uniformes;
- Ampliação para casos em 3D.

Referências

- [1] ALVAREZ, G. B., DA F. NUNES, H. Novos esquemas de diferenças finitas para a equação de helmholtz. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática* 10 (2024), 1–18.
- [2] ALVAREZ, G. B., DA F. NUNES, H., MENEZES, W. A. Complete centered finite difference method for helmholtz equation. *Annals of the Brazilian Academy of Sciences* 96 (2024), 1–35.
- [3] ALVAREZ, G. B., DA FONSECA, J. M., DE SOUSA, P. A. P., STAMPA, C. S. New vector norms and seminorms, errors and exact solutions as a benchmark for the steady-state convection-diffusion equation with dominant convection. *Annals of the Brazilian Academy of Sciences* (2025), Submetido.
- [4] BABUŠKA, I., STROUBOULIS, T. The finite element method and its reliability: a posteriori error estimation and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14, 5 (1978), 671–696.
- [5] BEAM, R. M., WARMING, R. F. An implicit factored scheme for the compressible navier-stokes equations. *AIAA Journal* 16, 4 (1976), 393–402.
- [6] BROOKS, A. N., HUGHES, T. J. R. Streamline upwind/galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 32 (1982), 75–103.
- [7] CORRÊA, C. Métodos de diferenças finitas e volumes finitos para problemas convectivos difusivos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense, Brasil, 2013.
- [8] DA F. NUNES, H. Método completo de diferenças finitas centradas para a equação de helmholtz. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense, Brasil, 2024.
- [9] DEVLOO, P. R. B., FORTI, T., GOMES, S. M. A combined continuous-discontinuous finite element method for convection-diffusion problems. *Latin American Journal of Solids and Structures* (2007), 229–246.
- [10] DO CARMO, E. G. D., ALVAREZ, G. B. A new stabilized finite element formulation for scalar convection–diffusion problems: the streamline and approximate upwind/Petrov–Galerkin method. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 192 (2003), 3379–3396.

- [11] FERREIRA, V. G., KUROKAWA, F. A., QUEIROZ, R. A. B., KAIBARA, M. K., OISHI, C. M., CUMINATO, J. A., CASTELO, A., TOMÉ, M. F., MCKEE, S. Assessment of a high-order finite difference upwind scheme for the simulation of convection–diffusion problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 60 (2009), 1–26.
- [12] FERZIGER, J. H., PERIĆ, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd ed. Springer, Berlin, 2002. ISBN: 9783540420743.
- [13] FREITAS, V. S. C. Problemas difusivos-convectivos abordados pelo método das diferenças finitas centradas e upwind. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense, Brasil, 2023.
- [14] GODUNOV, S. K. A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations. *Matematicheskii Sbornik* 89 (1959), 271–306.
- [15] HIRSCH, C. *Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2007.
- [16] JEON, Y., TRAN, M. L. The upwind hybrid difference methods for a convection-diffusion equation. *Applied Numerical Mathematics* (2018), 1–14.
- [17] JOE F. THOMPSON, B. K. S., WEATHERILL, N. P. *Handbook of Grid Generation*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.
- [18] KNUPP, P., STEINBERG, S. The fundamentals of grid generation. *Journal of Computational Physics* 107, 2 (1993), 200–213.
- [19] LEVEQUE, R. J. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser, 1992.
- [20] LEVEQUE, R. J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. SIAM, 2007.
- [21] MOHAMED, N. A. E. D. *Efficient Multigrid Techniques for the Solution of Fluid Dynamics Problems*. PhD thesis, Zagazig University Faculty of Engineering, 2013.
- [22] PATANKAR, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. CRC Press, Boca Raton, 1980. ISBN: 9780891165224.
- [23] RAITHBY, G. D. A critical evaluation of upstream differencing applied to problems involving fluid flow. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 9 (1976), 75–103.
- [24] SENGUPTA, T., LAKSHMANAN, V., VIJAY, V. A new combined stable and dispersion relation preserving compact scheme for non-periodic problems. *Journal of Computational Physics* 228 (2009), 3048–3071.
- [25] SHU, C.-W., OSHER, S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics* 77, 2 (1988), 439–471.
- [26] TANNEHILL, J. C., ANDERSON, D. A., PLETCHER, R. H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor Francis, 1997.

APÊNDICE A – Códigos

Este apêndice apresenta exemplos dos códigos desenvolvidos para a implementação dos esquemas numéricos descritos nesta dissertação, abrangendo casos unidimensionais e bidimensionais. Para os exemplos, foram escolhidos um caso unidimensional e um caso bidimensional, ambos exemplificados com o Método de Diferenças Finitas Centrado Clássico.

O exemplo unidimensional contém a solução exata, a implementação do esquema centrado clássico, bem como as aproximações para a derivada primeira e segunda. Já para o caso bidimensional, apresenta-se um exemplo completo utilizando o esquema centrado clássico, considerando todos os elementos necessários para a solução numérica.

Os códigos foram estruturados de forma a facilitar sua adaptação para diferentes condições de contorno, parâmetros do problema e configurações específicas. Dessa forma, além de ilustrar os conceitos apresentados nesta dissertação, os exemplos fornecem uma base para aplicações futuras da metodologia.

A.1 Unidimensional

O caso utilizado abaixo como exemplo é a Solução Suave Parábola.

```
1 clc;
2 clear all;
3
4 % Espaçamento na malha
5 nx = 10;
6 dx = (1 / nx);
7
8 % Valores de x no eixo
9 x = 0:dx:1;
```

```
10 x = x';
11
12 % Coeficientes difusivo e convectivo
13 k = 10^(-2);
14 w = 1.0;
15
16 % Parâmetros
17 a=1;
18 b=1;
19
20 % Cálculo da solução exata
21 Uex = zeros(nx + 1, 1);
22
23 for i = 1:(nx + 1)
24     Uex(i) = a*x(i)^2+b*x(i)+1;
25 end
26
27 % Derivada primeira
28 for i = 1:(nx + 1)
29     Uex1(i) = 2*a*x(i)+b;
30 end
31
32 % Derivada segunda
33 for i = 1:(nx + 1)
34     Uex2(i) = 2*a;
35 end
36
37 % Número de Pe
38 Pe = (w*dx)/(2*k)
39
40 % Fonte
41 for j=2:(nx)
42 f(j) = ((2*a)*(-k+w*x(j)))+(w*b);
43 end
44 f(1) = 1;
```

```
45 f(nx + 1) = a+b+f(1);
46 f=reshape(f,nx+1,1);
47
48
49 % Construindo a matriz do método centrado clássico
50 A = -k / (dx^2) - w / (2 * dx);
51 B = (2 * k) / (dx^2);
52 C = -k / (dx^2) + w / (2 * dx);
53
54 M = spdiags([A * ones(nx + 1, 1), B * ones(nx + 1, 1), C *
             ones(nx + 1, 1)], -1:1, nx + 1, nx + 1);
55
56 % Adicionando condições de contorno
57 BoundaryIndex = [1, nx + 1];
58 I = speye(nx + 1);
59 M(BoundaryIndex, :) = I(BoundaryIndex, :);
60
61 % Resolvendo o sistema linear
62 u_cc = M \ f;
63
64
65 % Aproximação Derivada primeira
66 Ui_e=u_cc(1);
67 Ui=u_cc(2);
68 Ui_d=u_cc(3);
69 dU_aproxg1(1)=(1/(2*dx))*(-Ui_e+Ui_d);
70 Ui_e = u_cc(nx-1);
71 Ui = u_cc(nx);
72 Ui_d = u_cc(nx+1);
73 dU_aproxg1(nx+1)=(1/(2*dx))*(-Ui_e+Ui_d);
74 for m=2:nx
75     Ui_e=u_cc(m-1);
76     Ui=u_cc(m);
77     Ui_d=u_cc(m+1);
78     dU_aproxg1(m)=(1/(2*dx))*(-Ui_e+Ui_d);
```

```
79 end
80
81 % Aproximação Derivada Segunda
82 Ui_e=u_cc(1);
83 Ui=u_cc(2);
84 Ui_d=u_cc(3);
85 d2U_aproxg1(1)=(1/(dx^2))*(Ui_e-2*Ui+Ui_d);
86 Ui_e = u_cc(nx-1);
87 Ui = u_cc(nx);
88 Ui_d = u_cc(nx+1);
89 d2U_aproxg1(nx+1)=(1/(dx^2))*(Ui_e-2*Ui+Ui_d);
90 for o=2:nx
91     Ui_e=u_cc(o-1);
92     Ui=u_cc(o);
93     Ui_d=u_cc(o+1);
94     d2U_aproxg1(o)=(1/(dx^2))*(Ui_e-2*Ui+Ui_d);
95 end
96
97
98 % Para plotar os resultados
99 fig=figure(1);
100 plot(x, Uex, 'k-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Exata');
101 hold on;
102 plot(x, u_cc, '-x', 'Color', [0 0.4470 0.7410], 'LineWidth',
      2, 'DisplayName', 'CC');
103 xlabel('X');
104 ylabel('U');
105 title('');
106 l=legend('Location', 'Southeast');
107 grid on;
108 hold off;
```

A.2 Bidimensional

O caso abaixo, utilizado como exemplo, é o Caso II.

```
1  clc;
2  clear all;
3
4  Lx = 1;
5  Ly = 1;
6
7  % Malha
8  Nx = 19;
9  Ny = 19;
10
11 nx = Nx + 1;
12 ny = Ny + 1;
13
14 dx = Lx / Nx;
15 dy = Ly / Ny;
16
17 x = 0:dx:Lx;
18 y = 0:dy:Ly;
19
20
21 % Parâmetros da equação
22 k = 1;
23 a1 = 1.0;
24 a2 = 1.0;
25
26 % Número de Pe
27 Pe=(sqrt(a1^2+a2^2)*dx)/(2*k)
28 Pex= (a1*dx)/(2*k)
29 Pey= (a2*dx)/(2*k)
30
31 % Diagonais CC
32 A = -k / (dy^2) - a2 / (2 * dy);
33 B = -k / (dx^2) - a1 / (2 * dx);
34 C = 2 * k / (dx^2) + 2 * k / (dy^2);
35 D = -k / (dx^2) + a1 / (2 * dx);
```

```
36 E = -k / (dy^2) + a2 / (2 * dy);
37
38
39 e = ones(nx * ny, 1);
40
41 % Adicionando condições de contorno
42 index_frenteira = [1:nx, 1:nx:1+(ny-1)*nx, 1+(ny-1)*nx:nx*ny,
    nx:nx:nx*ny];
43 diagonals = [A * e, B * e, C * e, D * e, E * e];
44 M = spdiags(diagonals, [-nx, -1, 0, 1, nx], nx*ny, nx*ny);
45 I = speye(nx*ny);
46 M(index_frenteira,:) = I(index_frenteira,:);
47
48 % Construção do vetor fonte b
49 b = zeros(nx, ny);
50
51 % Base (y=0)
52 for i = 1:nx
53     if x(i) > 0 && x(i) < 0.2
54         b(i, 1) = 0; % Para x no intervalo ]0, 0.2[
55     elseif x(i) >= 0.2 && x(i) <= 0.3
56         b(i, 1) = 10 * (x(i) - 0.2); % Para x no intervalo [0.2,
    0.3]
57     elseif x(i) > 0.3 && x(i) <= 1
58         b(i, 1) = 1; % Para x no intervalo ]0.3, 1]
59     end
60 end
61 % Topo (y=1)
62 b(:, ny) = 0;
63 % Lateral Esquerda (x=0)
64 b(1,ny) = 0;
65 % Lateral Direita (x=1)
66 b(nx, :) = 0;
67
68 b = reshape(b, nx * ny, 1);
```

```
69
70 % Resolvendo o sistema
71 U = M \ b;
72 U_matrix = reshape(U, nx, ny);
73
74
75
76 % Gráfico da superfície 3D
77 [X, Y] = meshgrid(x, y);
78 figure;
79 surf(X, Y, U_matrix');
80 title('CC');
81 xlabel('X');
82 ylabel('Y');
83 zlabel('u(x, y)');
```