

Universidade Federal Fluminense

DAGER MOREIRA DA SILVA

**Modelagem Matemática Aplicada ao Controle e
Manejo Integrado de Pragas em Lavouras do Milho**

VOLTA REDONDA

2019

DAGER MOREIRA DA SILVA

**Modelagem Matemática Aplicada ao Controle e
Manejo Integrado de Pragas em Lavouras do Milho**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional. Área de Concentração: Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados à Engenharia e Ciência.

Orientador:

Yoisell Rodríguez Núñez

Coorientador:

Panters Rodríguez Bermúdez

Universidade Federal Fluminense

Volta Redonda

2019

Ficha catalográfica automática - SDC/BEM
Gerada com informações fornecidas pelo autor

S586m Silva, Dager Moreira da
Modelagem Matemática Aplicada ao Controle e Manejo
Integrado de Pragas em Lavouras do Milho / Dager Moreira da
Silva ; Yoisell Rodríguez Núñez, orientador ; Panters
Rodríguez Bermúdez, coorientador. Volta Redonda, 2019.
116 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Volta Redonda, 2019.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPG-MCCT.2019.m.01969514884>

1. Modelagem Matemática e Computacional. 2. Controle
Biológico de Pragas. 3. Sistema de EDO's Lotka-Volterra. 4.
Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman e Controle Ótimo. 5.
Produção intelectual. I. Núñez, Yoisell Rodríguez,
orientador. II. Bermúdez, Panters Rodríguez, coorientador.
III. Universidade Federal Fluminense. Escola de Engenharia
Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda. IV. Título.

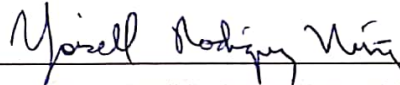
CDD -

Modelagem Matemática Aplicada ao Controle e Manejo Integrado de
Pragas em Lavouras do Milho

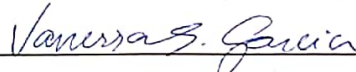
Dager Moreira da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional. Área de Concentração: Métodos Matemáticos e Computacional Aplicado à Engenharia e Ciência.

Aprovada por:



Prof. Yoissell Rodríguez Núñez, D.Sc. /
MCCT-UFF(Presidente)



Profa. Vanessa da Silva Garcia, D.Sc. / MCCT-UFF



Prof. Andrey Dione Ferreira, D.Sc. / IFRJ

Volta Redonda, 01 de março de 2019.

O bom mesmo é ir à luta, abraçar a vida com paixão, perder com humildade, e vencer com ousadia, sorrir pelos amigos, amar a família, valorizar o ar que respira, pois sobreviver é para quem se atreve: a vida é muito para ser insignificante.

Charles Chaplin, por mim adaptado.

Agradecimentos

A vida, que a tudo transforma.

A meus pais que me deram a oportunidade de gostar de estudar.

A minha esposa Eliana e aos meus filhos, Ellen e Dager, por sonharem os mesmos sonhos e realizações.

Aos familiares pelo carinho e apoio.

Aos orientadores, Prof. Yoisell e Prof. Panters meus respeitos e admiração, pela a oportunidade, pelos ensinamentos, as críticas e sugestões à elaboração deste trabalho.

A banca de professores, pela disponibilidade e profissionalismo.

A todos os professores do PG-MCCT, muito além, por todos os momentos que dividiram os conhecimentos, experiências, o tempo dedicado a todos os alunos, exemplo de profissionalismo e, principalmente por compartilharem a amizade.

A Camile, pela forma sempre tranquila e educada em nos receber.

Aos colegas de turma e curso, pelo companheirismo, trocas de conhecimentos e estudos, por dividirem as conversas que sempre acabavam em incentivos e apoios mútuos.

A todos os amigos a quem convivo e àqueles a quem convivi por minha vida, a lembrança e o carinho.

Resumo

Um dos maiores problemas de uma lavoura, do ponto de vista econômico e ambiental, é quando a área cultivada está infestada de pragas. Uma estratégia para resolver este problema seria incluir inimigos naturais, é o controle biológico de pragas aplicado capaz de manter a população de pragas a um nível sustentável, e os riscos abaixo do nível de danos econômicos da lavoura e garantir o sucesso do empreendimento do agronegócio do campo. Este trabalho investiga a densidade da população de pragas da lavoura do milho, por exemplo, a lagarta *Spodoptera frugiperda* e a *Helicoverpa armigera*, e propõe o controle biológico de pragas por inserção de inimigos naturais: a vespa parasitoide *Trichogramma* e o predador natural *Doru luteipes*, com objetivo de auxiliar os técnicos e agricultores na tomada de decisões para o correto manejo integrado de pragas. Através da modelagem matemática e computacional do sistema Lotka-Volterra: presa-predador, sujeitas aos controles tipo linear e não-linear, por uso da programação dinâmica e resolução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, estabelece a lei de controle ótimo capaz de manter a população de pragas abaixo do nível de danos econômicos exigidos. O controle ótimo é aplicado aos cenários: uma presa e um predador, duas presas e um predador, duas presas e dois predadores. As simulações numéricas combinadas entre as estratégias de controle ótimo foram realizadas e verificaram a eficácia dos resultados obtidos, para os diversos cenários descritos acima.

Abstract

One of the biggest problems of a crop, from an economic and environmental point of view, is when the cultivated area is infested with pests. One strategy to address this problem would be to include natural enemies, is the applied biological pest control capable of keeping the pest population at a sustainable level, and the risks below the level of economic damage to the crop and ensure the success of the agribusiness enterprise of the field. This work investigates the population density of corn crop pests, for example, the *Spodoptera frugiperda* caterpillar and the *Helicoverpa armigera*, and proposes the biological control of pests by insertion of natural enemies: the parasitoid *Trichogramma* wasp and the natural predator *Doru luteipes*, with the objective of assisting technicians and farmers in making decisions for the correct integrated pest management. Through the mathematical and computational modeling of the Lotka-Volterra: prey-predator system, subject to linear and nonlinear controls, by using the dynamic programming and resolution of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation, it establishes the optimal control law capable of maintaining the pest population below the level of economic damage required. The optimal control is applied to the scenarios: one prey and one predator, two prey and one predator, two prey and two predators. The combined numerical simulations between the optimal control strategies were performed and verified the efficacy of the results obtained for the different scenarios described above.

Palavras-chave

1. Modelagem Matemática e Computacional
2. Controle Biológico de Pragas
3. Sistema de EDO's Lotka-Volterra
4. Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman
5. Controle Ótimo

Glossário

EDO's	:	<i>Equações Diferenciais Ordinárias</i>
EDP's	:	<i>Equações Diferenciais Parciais</i>
EMBRAPA	:	<i>Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária</i>
FCL	:	<i>Funções de Controle Lyapunov</i>
HJB	:	<i>Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman</i>
LRQ	:	<i>Regulador Linear Quadrático</i>
L-V	:	<i>Sistema de Lotka-Volterra</i>
MATLAB [®]	:	<i>Software The MathWorks, Inc.</i>
MIP	:	<i>Manejo Integrado de Pragas</i>
ODE45	:	<i>Função residente do MATLAB de cálculo de EDO's</i>
RK4	:	<i>Método Numérico de Runge-Kutta de quarta ordem</i>

Sumário

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xvii
1 INTRODUÇÃO	18
1.1 Motivação	19
1.2 Justificativa	20
1.3 Objetivos	22
1.3.1 Objetivo geral	22
1.3.2 Objetivos específicos	22
1.4 Organização da dissertação	23
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	25
2.1 Biologia dos insetos em Lavouras	25
2.1.1 Ciclo de vida da lagarta <i>Spodoptera frugiperda</i>	26
2.1.2 Ciclo de vida da lagarta <i>Helicoverpa armigera</i>	28
2.1.3 Parasitoide vespa <i>Trichogramma</i>	29
2.1.4 Predador natural <i>Doru luteipes</i>	30
2.2 Modelagem Matemática	31
2.2.1 Modelo da Dinâmica da População de n Espécies	31
2.2.2 Modelo Lotka-Volterra	32
2.2.3 Estabilidade e Linearização	36
2.2.4 Análise de estabilidade do Modelo de L-V de uma presa e um predador	36

2.2.5	Análise de estabilidade do Modelo de L-V para sistemas não-lineares	42
2.3	Controle Ótimo e Aplicações a Sistemas Biológicos	44
2.3.1	Sistema autônomo	44
	Conjunto Controle Admissível	45
	Processos Admissíveis	45
	Controlabilidade Local e Global	46
2.3.2	Funções de Controle de Lyapunov	47
2.3.3	Controle Ótimo	48
	Função de Bellman	49
	Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman	50
3	METODOLOGIA	51
3.1	Formulação do problema Lotka-Volterra com controle ótimo linear	52
3.2	Formulação do problema Lotka-Volterra com controle ótimo não-linear	55
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	62
4.1	Análise qualitativa e controle ótimo para o sistema com uma presa e um predador	63
4.1.1	Sistema sem controle	63
4.1.2	Sistema com controle ótimo linear	67
4.1.3	Sistema com controle ótimo não-linear	72
4.2	Análise qualitativa e controle ótimo para o sistema com duas presas e um predador	76
4.2.1	Sistema sem controle	76
4.2.2	Sistema com controle ótimo linear	79
4.2.3	Sistema com controle ótimo não-linear	86
4.3	Análise qualitativa e controle ótimo para o sistema com duas presas e dois predadores	92

4.3.1	Sistema sem controle	92
4.3.2	Sistema com controle ótimo linear	95
4.3.3	Sistema com controle ótimo não-linear	101
5	CONCLUSÕES	110
	Referências	112

Lista de Figuras

1.1	Danos na lavoura do milho pela lagarta <i>Spodoptera frugiperda</i>	19
1.2	Campanha da Rede Globo de Televisão.	19
1.3	Manejo Integrado de Pragas - Lagarta do Cartucho.	21
2.1	Ciclo de vida da <i>Spodoptera frugiperda</i>	27
2.2	Pupa de <i>Spodoptera frugiperda</i>	27
2.3	Adultos de <i>Spodoptera frugiperda</i>	27
2.4	Ciclo de vida da <i>Helicoverpa armigera</i>	28
2.5	Ciclo de vida da <i>Trichogramma</i>	29
2.6	Ciclo de vida da <i>Doru luteipes</i>	30
2.7	Método gráfico de Volterra.	34
2.8	Método gráfico por análise dos fluxos.	35
2.9	Plano de Fase.	35
2.10	Ponto de Sela.	38
2.11	(a) Nó repulsor instável (b) Nó atrator estável.	38
2.12	Centro.	39
2.13	Espiral instável.	39
2.14	Espiral estável.	39
2.15	Diagrama de Estabilidade.	42
2.16	Diagrama de malha fechada.	45
2.17	Diagrama de processos ótimos.	46
2.18	Convergência de Lyapunov.	46
3.1	Fluxograma básico para a Programação Dinâmica.	52

4.1	Dinâmica da densidade populacional do sistema uma presa e um predador com competição entre as espécies, condição inicial $(1, 1)$	67
4.2	Plano de fase do sistema L-V: uma presa e um predador, sem controle e espiral estável em $P_{eq} = (66, 67; 2, 5)$	67
4.3	Dinâmica do sistema uma presa e um predador com controle linear, condição inicial $(1, 1)$	71
4.4	Plano de fase do sistema L-V: uma presa e um predador, com controle linear e nó estável em $P_{eq} = (6, 4)$	71
4.5	Trajetória do sistema uma presa e um predador com controle linear, condição inicial $(1, 1)$ e ponto final $(6, 4)$	72
4.6	Dinâmica do sistema uma presa e um predador com controle não-linear, condição inicial $(2, 2)$	74
4.7	Plano de fase do sistema L-V: uma presa e um predador, com controle não-linear e nó estável em $P_{eq} = (6, 4)$	75
4.8	Trajetória do sistema uma presa e um predador com controle não-linear, condição inicial $(2, 2)$ e ponto de equilíbrio $(6, 4)$	75
4.9	Dinâmica da densidade populacional do sistema duas presas e um predador com competição entre as espécies, condição inicial $(10, 20, 1)$	78
4.10	Comportamento caótico do sistema L-V: duas presas e um predador, sem controle.	78
4.11	Plano de fase do sistema L-V: duas presas e um predador, sem controle e ponto de equilíbrio instável $P_{eq} = (118, 42; 815, 78; 6, 57)$	79
4.12	Dinâmica da densidade populacional do sistema duas presas e um predador com competição entre as espécies, condição inicial $(10, 20, 1)$	84
4.13	Plano de fase do sistema L-V: duas presas e um predador, com controle linear e ponto de equilíbrio assintoticamente estável $P_{eq} = (8, 10, 4)$	84
4.14	Trajetória do sistema duas presas e um predador com controle linear, condição inicial $(10, 20, 1)$ e ponto final $(8, 10, 4)$	85
4.15	Plano de fase nas espécies x_2 e x_3 , ponto de estabilidade assintótica $P_{eq} = (8, 10, 4)$	85
4.16	Dinâmica do sistema duas presas e um predador com controle não-linear, condição inicial $(10, 20, 10)$	90

4.17	Plano de fase do sistema L-V: duas presas e um predador, com controle não-linear e ponto de equilíbrio assintoticamente estável $P_{eq} = (4, 10, 5)$	91
4.18	Trajatória do sistema duas presas e um predador com controle não-linear, condição inicial $(10, 20, 10)$ e ponto final $(4, 10, 5)$	91
4.19	Plano de fase nas espécies x_1 e x_3 , nó estável $P_{eq} = (4, 10, 5)$	91
4.20	Dinâmica da densidade populacional do sistema duas presas e dois predadores, com competição entre as espécies, condição inicial $(1, 1, 1, 2)$	93
4.21	Dinâmica da densidade populacional do sistema duas presas e dois predadores, com competição entre as espécies (ampliada), condição inicial $(1, 1, 1, 2)$	94
4.22	Trajatória do sistema duas presas e dois predadores sem controle, sobre o espaço $\mathbb{R}^3_{x_1x_2x_4}$, condição inicial $(1, 1, 1, 2)$	94
4.23	Dinâmica temporal do sistema duas presas e dois predadores com controle linear, condição inicial $(30, 40, 120, 140)$	98
4.24	Trajatória do sistema duas presas e dois predadores com controle linear, sobre o espaço $\mathbb{R}^3_{x_1x_2x_3}$, condição inicial $(30, 40, 120, 140)$ e ponto final $(9; 9; 89, 32; 8, 88)$	100
4.25	Trajatória do sistema duas presas e dois predadores com controle linear, sobre o espaço $\mathbb{R}^3_{x_1x_2x_4}$, condição inicial $(30, 40, 120, 140)$ e ponto final $(9; 9; 89, 32; 8, 88)$	100
4.26	Dinâmica com controle linear sobre a presa 1 (<i>Spodoptera frugiperda</i>), condição inicial $(1, 1, 1, 2)$	105
4.27	Dinâmica com controle linear sobre a presa 2 (<i>Helicoverpa armigera</i>), condição inicial $(1, 1, 1, 2)$	105
4.28	Dinâmica com controle linear sobre o predador 1 (vespa <i>Trichogramma</i>), condição inicial $(1, 1, 1, 2)$	106
4.29	Dinâmica com controle linear sobre o predador 2 (inseto <i>Doru luteipes</i>), condição inicial $(1, 1, 1, 2)$	106
4.30	Dinâmica com controle não-linear sobre a presa 1 (<i>Spodoptera frugiperda</i>), condição inicial $(5, 5; 5, 4; 1; 2)$	107
4.31	Dinâmica com controle não-linear sobre a presa 2 (<i>Helicoverpa armigera</i>), condição inicial $(5, 5; 5, 4; 1; 2)$	107

-
- 4.32 Dinâmica com controle não-linear sobre o predador 1 (vespa *Trichogramma*), condição inicial $(5, 5; 5, 4; 1; 2)$ 108
- 4.33 Dinâmica com controle não-linear sobre o predador 2 (inseto *Doru luteipes*), condição inicial $(5, 5; 5, 4; 1; 2)$ 108

Lista de Tabelas

4.1	Valores dos coeficientes do modelo simples, uma presa e um predador com competição. .	64
4.2	Classificação dos pontos críticos para o sistema L-V uma presa e um predador, sem controle.	66
4.3	Valores dos coeficientes do modelo simples, duas presas e um predador com competição.	77
4.4	Coefficientes matriz peso Q para as simulações duas presas e um predador com controle não-linear.	89
4.5	Valores dos coeficientes do modelo simples, duas presas e dois predadores com competição.	93
4.6	Valores dos parâmetros da variável de estado x_1 : lagarta <i>Spodoptera frugiperda</i>	97
4.7	Valores dos parâmetros da variável de estado x_2 : lagarta <i>Helicoverpa armigera</i>	97
4.8	Valores dos parâmetros da variável de estado x_3 : vespa <i>Trichogramma</i>	97
4.9	Valores dos parâmetros da variável de estado x_4 : inseto <i>Doru luteipes</i>	98

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O estudo da Biomatemática começa no século passado, por volta de 1925, com as pesquisas de dois ilustres pesquisadores Lotka e Volterra, precursores do modelo matemático que leva seus nomes, estudaram o crescimento populacional de espécies biológicas e as interações entre espécimes. Estes estudos podem ser generalizados a diversas outras áreas e aplicações.

No processo de desenvolvimento e pesquisa, encontramos por volta dos anos 60, com o crescimento da indústria aeroespacial, o estudo da Otimização ligada a processos industriais, primeiramente com aporte formalmente a estudos das Ciências Físicas, depois com a Economia e Administração, em destaque, o controle ótimo de sistemas caóticos, como é o caso do modelo de sistema de equações diferenciais ordinárias de Lotka-Volterra para estudos biológicos [12], [39], [45]. Atualmente, almejamos adaptar o mundo de forma sustentável e em equilíbrio, cuja função principal é a valorização da sobrevivência das espécimes e influências, que sustentem a saúde e manutenção da vida no planeta. Não seria diferente, no agronegócio do campo.

No campo, a agricultura sofre diversas interferências entre espécies, por questões de sobrevivência, algumas delas são consideradas pragas pelo teor de prejuízos causados à lavoura, como exemplo, a lavoura de milho que é atacada por diversas pragas, das quais a mais temida é a lagarta *Spodoptera frugiperda*, [13], [18], [19], [30], [36], figura 1.1. Presentemente no Brasil, temos cerca de 10 milhões de hectares em plantações onde se pratica a técnica do controle biológico de pragas [6], [8]. O faturamento do setor da cultura do milho está próximo a 47 bilhões de reais anuais, dados do Ministério da Agricultura, no ano de 2018 [10]. O fator de destruição da lavoura por conta da lagarta-do-cartucho de milho, a *Spodoptera frugiperda*, fica em torno de 34% dos plantios [18], o quê fomenta o reforço em pesquisas no controle às pragas no campo.



Figura 1.1: Danos na lavoura do milho pela lagarta *Spodoptera frugiperda*
Fonte: [7].

Nas últimas décadas, a EMBRAPA pesquisou diversas alternativas aos inseticidas químicos e detectou algumas espécies de inimigos naturais de pragas nas lavouras em diversas culturas, inclusive para a lagarta-do-cartucho do milho *Spodoptera frugiperda*. Como exemplo, podem ser citados, o inimigo biológico natural que parasita os ovos da lagarta impedindo seu desenvolvimento à fase adulta e reduzindo os níveis de danos biológicos na lavoura, a vespa do grupo *Trichogramma* spp, um tipo de inimigo natural parasitoides da *Spodoptera frugiperda*, ou ainda, o inimigo natural predador: *Doru luteipes*, conhecido por tesourinha, que utiliza-se da presa como fonte alimentar de sobrevivência. A inserção de inimigos biológicos são estratégias possíveis de controle e manejo integrado de pragas (MIP) em lavouras [18], [19], [36].

1.1 Motivação

A motivação deste trabalho ocorreu por dois fatores: o artigo de Jéssica C. S. Bueno, Alexandre Molter e Luciana R. Piovesan: Modelagem matemática aplicada ao controle biológico de pragas em lavouras de milhos [15], apresentado no XX Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul (2014) e ainda, o forte apelo da mídia, a Rede Globo de Televisão, com as propagandas da campanha do Agronegócio do campo no Brasil, em particular a respeito do controle biológico, figura 1.2, no início do ano de 2018 [6].



Figura 1.2: Campanha da Rede Globo de Televisão.

1.2 Justificativa

O impacto das pragas nas lavouras, particularmente do milho, exigem pesquisas em compreender o crescimento da população de insetos, e os mecanismos inter e intraespecíficos das espécies que ocupam o espaço da cultura do plantio. Com áreas cada vez maiores de plantios, a rotatividade de culturas, o agroecossistema das lavouras sofrem a interferência de pragas, caso a densidade de população de pragas ultrapasse o nível de danos econômicos e biológicos na lavoura, a plantação corre sérios riscos de destruição. Porque isso acontece? Pela monocultura de plantio por extensas áreas, desequilíbrio e uso intensivo de inseticidas por longos períodos, há um natural sistema adaptativo dos insetos resistindo aos agentes químicos dos inseticidas, uma resistência natural em prol da sobrevivência da espécie [5].

Uma alternativa a esses insumos inseticidas, que são caros ao agricultor e perigosos ao meio ambiente e aos seres humanos, tanto aos agentes que os manuseiam, quanto aos consumidores das culturas produzidas, é o uso do manejo integrado de pragas, que prescreve o controle biológico das espécies que prejudicam a lavoura por inserção de inimigos naturais, competindo com eles por espaço e sobrevivência [36]. A estratégia é contrapor inimigos naturais, parasitoides ou predadores, como medidas de controle, para manter estabilizadas a população de pragas da lavoura a níveis adequados à sua própria existência com riscos abaixo do nível de danos econômicos. Além de não permitir que os predadores cresçam desordenadamente. Essa estratégia de controle, entre presas-predadores, é suficiente à manutenção e equilíbrio da cadeia biológica e ambiental [18].

O controle biológico de pragas pode ser realizado por algumas das técnicas de controle, com aplicações de inimigos naturais, como por exemplo, predadores naturais que atacam suas presas alimentando-se delas, ou ainda, por meio de parasitoides, que são outros insetos que se aproveitam das pragas. Os parasitoides atacam, preferencialmente nas fases do ciclo de vida das presas mais susceptíveis, na fase de óvulos das presas; alguns insetos parasitoides não possuem um sistema próprio de postura de ovos capaz de se manter e sobreviver livre em meio ambiente, por isso necessitam de um hospedeiro que possam postar no interior seus óvulos, daí, crescem dentro do óvulo do hospedeiro, por exemplo, os ovos da lagarta *Spodoptera frugiperda*. Uma vez dentro dos ovos do hospedeiro, os parasitoides se desenvolvem utilizando-se dos nutrientes contidos nos ovos do hospedeiro. Os ovos das lagartas, naturalmente não vingam ou não nascem da forma esperada, podendo gerar novas lagartas doentes que não sobrevivem.

As pesquisas de controle biológico de pragas apontam às novas tecnologias no campo, e geram oportunidades para o desenvolvimento de laboratórios comerciais de produção e auxílio do controle biológico aplicado, além do descrito acima no tocante aos inimigos naturais, mas com outras estratégias de controles, a partir das técnicas de bioinseticidas, por bactérias, fungos, e feromônios, ou ainda, técnicas de controle através dos inseticidas botânicos [18], [19], [36].

Este trabalho é restrito ao uso de inimigos naturais, predadores e parasitoides. A praga do cartucho-do-milho representada pela *Spodoptera frugiperda* será controlada biologicamente pelos inimigos naturais: o parasitoide vespa *Trichogramma* e o predador, *Doru luteipes* (a tesourinha), veja figura 1.3.

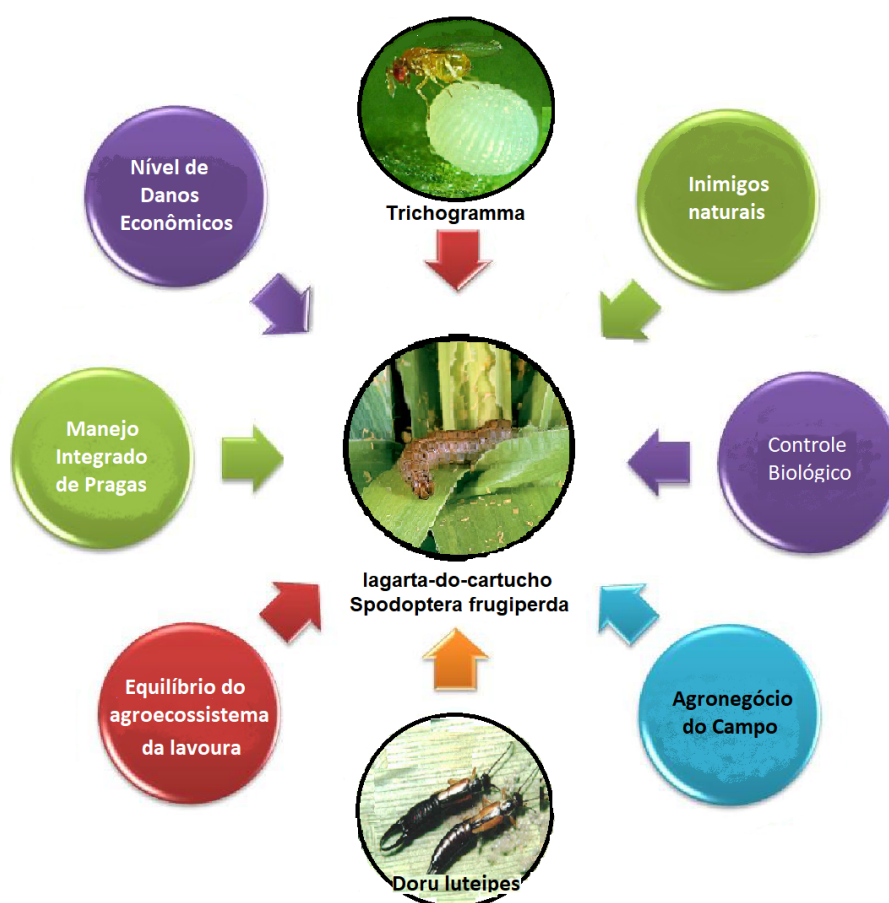


Figura 1.3: Manejo Integrado de Pragas - Lagarta do Cartucho.
Fonte: autoria própria.

Neste trabalho, as pragas e os inimigos naturais escolhidos, serão tratados como presas e predadores respectivamente. Os objetivos dos predadores: controlar a densidade da população das presas a valores abaixo do nível de danos econômicos e ambientais no espaço da lavoura. Certamente vão exigir por parte dos técnicos e agricultores o correto

tratamento do manejo integrado dessas pragas, fator preponderante à manutenção do equilíbrio da cadeia biológica e ambiental, e ainda, garantir o sucesso do empreendimento no agronegócio do campo.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho consiste em mostrar que o modelo matemático de sistema dinâmico não-linear de Lotka-Volterra, conhecido por presa-predador é útil em representar a dinâmica de crescimento da população de espécies biológicas, insetos-pragas (lagarta *Spodoptera frugiperda*, e adicionalmente, a lagarta *Helicoverpa armigera*) e insetos inimigos naturais (parasitoide vespa *Trichogramma* e o predador *Doru luteipes*), em ambiente de competição interespecíficas na lavoura do milho.

Verificar se o modelo de sistema L-V com controle: linear e não-linear, por inserção de inimigos naturais (controle biológico aplicado) serve como ferramenta auxiliar prévio ao manejo integrado de pragas na lavoura do milho.

Implementar e simular computacionalmente o modelo matemático de Lotka-Volterra, por base no sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias não-lineares, que representem as interações entre pragas e os insetos inimigos naturais que coexistem livremente na lavoura, e o caso onde é necessário aplicar o controle biológico das pragas. Ao interesse de servirem, na tomada de decisões dos agentes do manejo integrado de pragas, uma ferramenta auxiliar e útil de previsão e economia: financeira, tempo e recursos de energia disponíveis, visando ao equilíbrio do ecossistema e ao sucesso do agronegócio e cultivo da lavoura do milho.

1.3.2 Objetivos específicos

Entre os objetivos específicos:

- Verificar se a programação dinâmica do controle ótimo via equação de Hamilton-Jacobi-Bellman é capaz de solucionar os problemas de controle biológicos de pragas em lavouras do milho, para os cenários: uma presa e um predador, duas presas e um predador e duas presas e dois predadores.
- Verificar e validar se as simulações dos problemas de controle biológico de pragas

para os diversos cenários servem a auxiliar à tomada de decisões dos agentes e agricultores ao correto manejo integrado de pragas.

1.4 Organização da dissertação

Além do Capítulo 1: Introdução, formulamos os seguintes capítulos e temas abordados:

No Capítulo 2 - Fundamentação Teórica: há abordagens a respeito da Biologia de pragas em lavouras, envolvendo o ciclo de vida das lagartas *Spodoptera frugiperda*, *Helicoverpa armigera*, e a Biologia dos inimigos naturais: a vespa parasitoide *Trichogramma* e o inseto predador *Doru luteipes*.

Apresentamos o modelo matemático com base em Lotka-Volterra, conhecido sistema autônomo presa-predador, com o desenvolvimento do estudo na forma generalizada e a notação de Kolmogorov. Em seguida, o estudo das condições de estabilidade do sistema L-V, e o processo de linearização equivalente para sistemas autônomos dinâmicos não-lineares.

A partir deste ponto, o destaque na estabilidade do modelo de Lotka-Volterra: uma presa e um predador, com a apresentação de exemplos para os pontos críticos estáveis e instáveis, bem como, a análise de estabilidade do modelo não-linear de Lotka-Volterra.

Finalizando, descrição da Teoria do Controle Ótimo, seus conceitos, suas principais notações, funções envolvidas: função de Lyapunov e função Bellman, os tipos de controles: linear e não-linear, e a descrição básica da programação dinâmica de Bellman, a equação de Hamilton-Jabobi-Bellman.

No Capítulo 3 - Metodologia: tratamos em detalhes a análise dos modelos de Lotka-Volterra, com e sem controle, realizamos a análise dos cenários de controles tipo linear e não-linear. A fim de dar sustentação aos assuntos do Capítulo 4, executamos a formulação dos problemas do sistema de equações diferenciais ordinárias alvo das simulações computacionais deste trabalho.

No Capítulo 4 - Resultados numéricos: há aplicações e análises das simulações para o sistema de Lotka-Volterra aos cenários: uma presa e um predador, duas presas e um predador, duas presas e dois predadores, em variações de situações: sem uso de controle, com uso de controles linear e não-linear, e verificação dos objetivos, comparações entre os cenários, tendo por base, os dados experimentais fornecidos pela EMBRAPA no que

diz respeito ao agroecossistema do campo e, aos estudos preliminares [15], [17], [31], [32], [37], [43], [45], ainda, verificação das vantagens e desvantagens, e fatores característicos que podem influir nos resultados.

No Capítulo 5 - Conclusões: apresentamos a utilidade e eficácia do modelo estudado de Lotka-Voterra, com controle ótimo. Uma síntese das conclusões gerais deste trabalho e sugestões a trabalhos futuros.

Capítulo 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Biologia dos insetos em Lavouras

De início iremos estabelecer a necessidade do controle de pragas em lavouras, especificamente na lavoura de milho. O Brasil é maior produtor mundial de milho, a área de plantio é cerca de 13 milhões de hectares, e a produção anual é estimada de 41,5 milhões de toneladas de grãos, o que justifica a necessidade de controle de pragas uma prioridade [36]. A literatura trata este tema, o controle de pragas, em conjunto a diversas outras atividades e monitoramentos, este rol de estratégias é chamado de manejo integrado de pragas (MIP), pois o que se depara *in situ*, é exatamente uma infestação de pragas na lavoura de forma avassaladora e fora de controle, ocasionando prejuízos econômicos e ambientais aos empreendimentos dos agronegócios do campo [23], [36].

De acordo com Norris et al. (2003), o significado da palavra *pragas*, quer dizer quaisquer corpos ou organismos capazes de interferir num sistema, que causem algum dano ou lesão, e em função disto, tornam o sistema de baixo rendimento ou de baixa qualidade na produção. Em agroecossistemas de lavouras trazem prejuízos potencialmente elevados, nos custos da produção e ao meio ambiente, afastando os agentes de negócios, os produtores e o mercado dos consumidores. Justificando um intensivo esforço de pesquisa e práticas de MIP, com o controle biológico equilibrado e eficaz que limite os danos econômicos nas lavouras, pela atuação conjunta de órgãos governamentais e privados, em todos os países.

No Brasil, a tarefa e contribuição de pesquisas ficam a cargo das universidades e da EMBRAPA - Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária. No manejo integrado de pragas podemos encontrar diversas estratégias de controle, por exemplo, uso de

inseticidas ou através da aplicação dos inimigos naturais, com importância nos custos versus benefícios, sejam eles dos produtores, do meio ambiente ou da sociedade. O MIP exige não apenas estratégias de controle biológico de pragas e dos recursos disponíveis, mas planejamentos que envolvem a criação de uma legislação própria e cuidadosa, às mudanças no comportamento cultural dos cultivos, às pesquisas em estudos de resistência das plantas (plantas transgênicas e plantas inseticidas), às intempéries climáticas, ao uso de hormônios, feromônios, esterilização de insetos (autocida), de controles biológicos, químicos, genéticos e físicos [18], [36]. Neste trabalho, o nosso interesse será restrito ao controle biológico de pragas, introduzindo no sistema, um inimigo natural que seja capaz de controlar os níveis de pragas, a valores aceitáveis e que minimizem os danos econômicos e ecológicos nas lavouras.

2.1.1 Ciclo de vida da lagarta *Spodoptera frugiperda*

A praga mais temida na cultura do milho é a espécie *Spodoptera frugiperda*, só este inseto-praga reduz a produção em cerca de 34%, com prejuízos aproximados a 400 milhões de dólares, e nos últimos anos vem piorando, devido ao desequilíbrio ecológico e a falta dos inimigos naturais [36]. Por prática, os agricultores tem utilizado inseticidas agrícolas para o combate da espécie agressora, mas em médio prazo causam o desequilíbrio biológico, e ao invés de corrigir, acaba por favorecer a resistência da espécie. Na fase larval, a praga é vulgarmente chamada lagarta-do-cartucho, apresenta alta taxa de sobrevivência frente as disponibilidades de alimento e baixa susceptibilidade aos predadores naturais. Causam danos a diversas lavouras (23 famílias de plantas) além do milho, como por exemplo, o algodão, arroz, alfafa, amendoim, abóbora, batata, couve, espinafre, feijão, repolho, sorgo, trigo e tomate [18], [36].

Abaixo, está descrito o ciclo de vida da *Spodoptera frugiperda* [19], figura 2.1: a mariposa coloca seus ovos em posturas de cerca de 100 ovos nas folhas do milho, podendo alcançar até 2000 ovos por fêmea. Em temperaturas variando entre 25°C e 30°C, o período de incubação dura em torno de 3 dias, possivelmente 10 dias em temperaturas inferiores. Após a fase de incubação eclodem as lagartas, que começam a devorar as partes verdes das plantas deixando rastros de folhas raspadas. Com o seu desenvolvimento vão se dirigindo à região do cartucho, e ali chegando provocam sérios danos. A fase larval dura em média cerca de 15 dias, e as lagartas chegam ao tamanho aproximado de 50 mm. Após o período larval, as lagartas penetram no solo e transformam-se em pupa, figura 2.2.

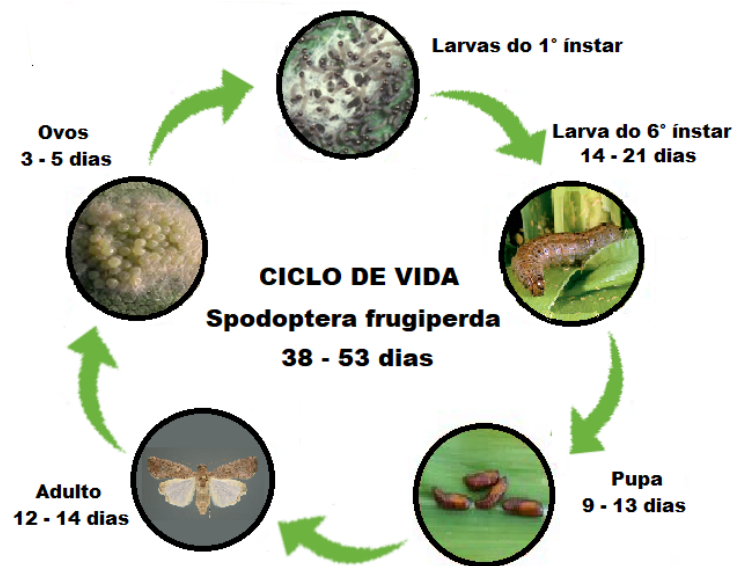


Figura 2.1: Ciclo de vida da *Spodoptera frugiperda*.
Fonte: [3]-adaptada.



Figura 2.2: Pupa de *Spodoptera frugiperda*.
Fonte: [9].

Na fase adulta transformam-se em mariposas de aproximadamente 40 mm de envergadura, figura 2.3. Verificando um ciclo total de vida, conforme figura 2.1, seguindo a produção de várias gerações durante o ano [19].



Figura 2.3: Adultos de *Spodoptera frugiperda*
a) macho (32 mm de envergadura). b) fêmea (35 mm de envergadura).
Fonte: [1].

2.1.2 Ciclo de vida da lagarta *Helicoverpa armigera*

No ecossistema do campo há uma rica biodiversidade de espécies sobreviventes, as mais temidas pragas inclusive. Na cultura do milho existem variedades dessas pragas, uma bem conhecida e estudada é a *Helicoverpa armigera*, figura 2.4. Esta espécie tem grande potencial de resistência, e uma vez presente, alto risco de danos econômicos ao cultivo do milho. Possui alto poder dispersivo e reprodutivo na lavoura infestada, acarretando perdas na colheita em torno de 30%. Em concomitância com a *Spodoptera frugiperda* apresentam altos riscos de prejuízos aos agricultores [42].

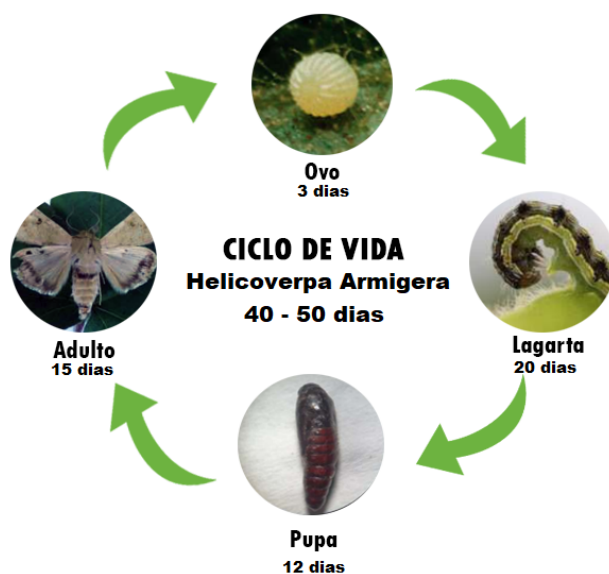


Figura 2.4: Ciclo de vida da *Helicoverpa armigera*.
Fonte: [2]-adaptada.

Para um correto manejo integrado de pragas mais eficiente recomenda-se a aplicação de inimigos naturais, especialmente na fase de ovos para as lagartas, com a introdução de parasitoides ou predadores de ovos da lagarta *Helicoverpa armigera* [23], [42].

Biologia do Inimigo Natural

Através das pesquisas da EMBRAPA - Centro Nacional de Pesquisa de Milho e Sorgo, boas contribuições de estudos e escolhas de inimigos naturais ao controle da lagarta *Spodoptera frugiperda* já foram catalogadas. Os predadores alimentando-se de ovos ou atacados pelos parasitoides, constituem-se ótimos inimigos naturais da lagarta. Neste trabalho iremos escolher como representantes parasitoide, a vespa *Trichogramma*, isoladamente ou conjuntamente ao predador inseto *Doru luteipes*. Cada qual, interferindo no ciclo de existência da lagarta *Spodoptera frugiperda* ou da *Helicoverpa armigera*, de

forma eficaz e atuando com características diferentes. As formulações matemáticas e simulações computacionais que descrevem estas interações populacionais, têm por base os dados da EMBRAPA [19] e os estudos preliminares dos trabalhos [15], [31], [32], [37], [43], [45].

2.1.3 Parasitoide vespa *Trichogramma*

A vespa *Trichogramma* não é nem um pouco elitista, parasitam os ovos de diversas espécies de insetos, e são facilmente manipuladas e produzidas em laboratórios. As fêmeas adultas colocam seus ovos no interior do hospedeiro, após 3 dias, os parasitoides se desenvolvem. Esta fase é facilmente detectável, pois há uma ligeira mudança de tonalidade e coloração dos ovos parasitados. O ciclo do parasitoide é cerca de 10 dias, em média. Em geral, o número de ovos parasitados permanece na faixa de 20 a 120 ovos por fêmea [19], figura 2.5.

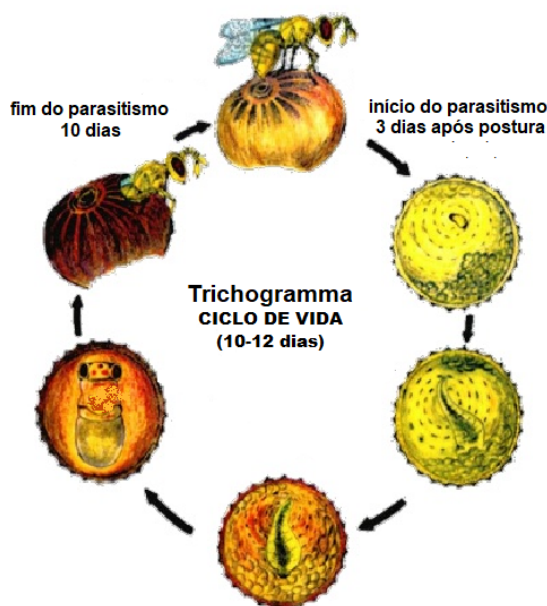


Figura 2.5: Ciclo de vida da *Trichogramma*.

Fonte: [4]-adaptada.

Alguns problemas que afetam a eficiência deste processo são a determinação da quantidade de vespas que serão liberadas na lavoura, associadas à quantidade de lagartas existentes, condições climáticas, os inimigos naturais presentes, a resistência e qualidade da linhagem, a maneira como serão distribuídas no espaço, e outras mais. A EMBRAPA recomenda, em média, a liberação de cerca de 100.000 indivíduos predadores por hectare, associados à densidade de pragas existentes, além de diversas operações e orientações necessárias à manutenção e eficiência do processo [19].

Existem diversos laboratórios que produzem de forma industrial os ovos parasitados da lagarta, geralmente os ovos contaminados são escurecidos, uma boa indicação do sucesso da postura dos ovos do parasitoide no interior dos ovos do hospedeiros: a lagarta. Entre muitas outras formas, são distribuídas cartelas onde os ovos parasitados são colados, e até dispositivos adaptados a drones são utilizados, na distribuição uniforme dos parasitoides ou dos predadores naturais, há técnicas de espaçamento e varredura prescritas na cultura do milho. A distribuição do *Trichogramma* no campo fica condicionada ao aparecimento dos primeiros ovos e/ou adultos da lagarta, isso depende da boa inspeção e monitoramento do agricultor através da colocação de armadilhas e equipes técnicas de manejo e tratamentos das pragas, formas na soltura e inundação das vespas do parasitoide, com uma frequência de 4 a 7 dias, dependendo do grau de infestação dos ovos observados das pragas na lavoura, além de alguns outros fatores que afetam a eficiência do controle de pragas, por exemplo, climáticos, temperatura e umidade [5].

2.1.4 Predador natural *Doru luteipes*

O inseto predador *Doru luteipes* na fase adulta é apresentada na figura 2.6, ela possui uma metamorfose incompleta. A média de ovos por postura é de cerca de 25 ovos. Em aproximadamente 7 dias após o período de incubação, eclodem as ninfas, que começam a se alimentar dos ovos e de lagartas pequenas dos insetos, este período varia entre 35 a 45 dias. O ciclo total do inseto, em média, é de 210 dias com consumo médio de 40 ovos e aproximadamente 20 larvas por dia [36].

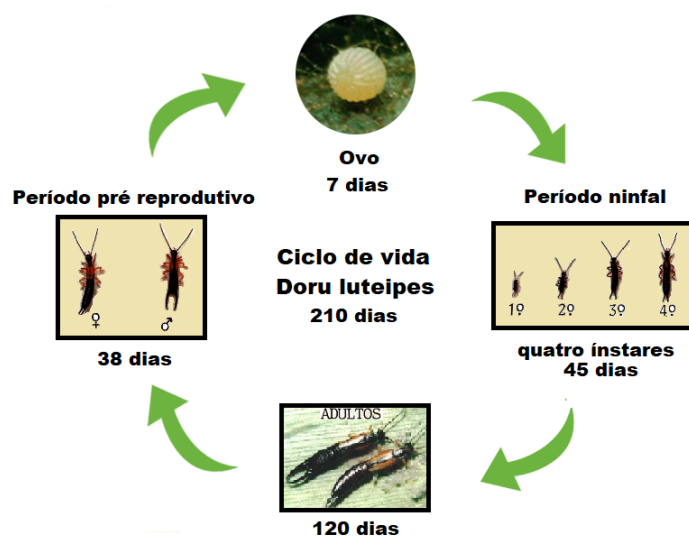


Figura 2.6: Ciclo de vida da *Doru luteipes*.

Fonte: autoria própria-adaptada.

2.2 Modelagem Matemática

Esta seção apresenta um levantamento histórico do desenvolvimento da modelagem matemática, especialmente ao tratamento de populações de espécies e suas interações.

A modelagem matemática é um dos campos de maior crescimento e interesse, nas últimas décadas, um verdadeiro desafio das ciências da natureza em tentar produzir resultados sofisticados e relevantes na busca da qualidade de vida da humanidade. Entre tantos trabalhos importantes, revelamos estudos sobre o comportamento do crescimento de células tumorais e correspondentes tratamentos e diagnósticos, o estudo de dispersão de poluentes em rios e bacias hidrográficas, o tratamento de imagens para os estúdios cinematográficos, e em diversas outras importantes áreas da medicina, engenharia, economia, seja qual for o desafio a superar. Um problema, em geral, não necessita exclusivamente de uma coletânea de dados sofisticados e complexos para se mostrar útil, ao contrário, se for possível reduzir os dados de entrada à sua essencial importância e significado, o propósito da modelagem vai se tornar cada vez mais interessante em revelar e compreender os objetivos e mostrar a validade da solução ao problema de origem [16].

Nas seções seguintes iremos aprofundar e descrever os principais modelos até chegar ao modelo proposto para esse trabalho acadêmico.

2.2.1 Modelo da Dinâmica da População de n Espécies

Na busca de um modelo matemático que pudesse traduzir o comportamento da dinâmica de população de uma espécie, várias estratégias foram implementadas entre modelos determinísticos e estocásticos. Daqui por diante, vamos descrever o desenvolvimento dos modelos determinísticos contínuos; não cabe a discussão de qual seja a melhor entre as estratégias, contínua ou a discreta, pois ambas são válidas e aceitas.

No âmbito das pesquisas, muitas questões devem ser colocadas:

O que acontece se houverem interações entre espécies?

Que tipo de interações entre espécies podem ocorrer: homogêneas ou heterogêneas?

De que forma as espécies interagem: colaborativamente, em competição ou ambas?

Como elas podem de forma sistemática influenciar na dinâmica da população entre várias espécies?

Essas novas questões obrigaram estudos que enriqueceram o debate, e se desenvolvem

ao longo do tempo. O modelo adotado é do tipo determinístico e um dos mais importantes e amplamente comprovados, o sistema de Lotka-Volterra: presa-predador.

2.2.2 Modelo Lotka-Volterra

O modelo tem por base estudos ecológicos da natureza, os primeiros trabalhos consistiram em avaliar o sistema presa-predador, espécies heterogêneas agindo em competição entre elas.

Vamos introduzir a notação de Kolmogorov:

$$\frac{dX_i}{dt} = X_i \mathbf{F}_i(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

onde X_i são as variáveis de estado, este sistema é definido como uma EDO autônoma, portanto não depende da variável t , apenas da variável de estado X , representadas pelas presas e predadores.

O termo do lado direito $\mathbf{F}_i(X_i)$, é um vetor que representa a “taxa de crescimento intrínseco densidade-dependente” de população da espécie, ou seja, descreve as interações entre as espécies com componentes de polinômios não-lineares. Assim sendo, na maioria dos casos, a solução analítica nem sempre será possível e dessa forma a única ferramenta capaz de resolvê-la seria os métodos numéricos e computacionais que possam traduzir e representar como cada componente do vetor se comporta qualitativamente. Portanto, é natural estabelecer como este processo se estrutura, e aprofundar este tema. De início, iremos apresentar um exemplo típico, o caso simples de um sistema: uma presa e um predador.

Curiosamente, esse sistema foi desenvolvido independentemente por Lotka (1925) e Volterra (1926), que estudando a dinâmica de populações em Ecologia, observaram que as presas cresciam livremente sem a presença do predador, caso contrário, as presas sendo fonte principal de recursos alimentares e energéticos dos predadores, ficariam susceptíveis, a cada possível encontro entre as espécies, por um forte decréscimo populacional de presas. Em contrapartida, se as presas forem reduzidas abaixo de um nível de sustentabilidade e equilíbrio biológico, os predadores correriam sérios riscos de extinção. Daí, o elo mais importante para entendermos a conservação do bioma, através da lei de ação das massas [34], [40].

Dessas observações, resultaram o sistema de equações envolvendo as taxas de crescimento da população de cada espécie, onde $x(t)$ identifica as presas, e $y(t)$ representa

os predadores:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, & a, b > 0 \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy, & c, d > 0 \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

O coeficiente (a) mede a taxa de nascimento da população de presas, o coeficiente representado por (b) mede a taxa de decréscimo da população de presas, que traduz a susceptibilidade dessa espécie ante às inserções bem sucedidas dos predadores, o coeficiente (c) representa a taxa de mortalidade dos predadores, visto que eles se alimentam exclusivamente das presas, e na ausência delas os predadores tendem à extinção, o coeficiente (d) mede a taxa de crescimento, exatamente pelas habilidades predatórias bem sucedidas, no espaço considerado [35].

O desenvolvimento analítico da solução desse sistema pode ser encontrado em [24], e expresso como:

$$y^a e^{-by} = K x^{-c} e^{dx}, \quad (2.3)$$

onde

$$K = y_0^a x_0^c e^{-by_0} e^{-dx_0}.$$

O valor de K obtido é função das condições iniciais (x_0, y_0) arbitradas do problema. O fato é que o resultado da equação (2.3) está numa forma implícita, restando apenas uma análise gráfica da solução. Volterra representou a solução gráfica através de um método gráfico construído por suas componentes equações básicas (lado direito e lado esquerdo, sistema (2.2)), com referência nos pontos críticos estudados, conhecidos por singularidades.

A curva para esse sistema é representado no diagrama conhecido por plano de fase. O lugar geométrico dos pontos que satisfazem as duas equações que compõem o sistema determinado por Lotka-Volterra [21], [33], [40]. O diagrama é uma conjugação dos pontos do plano, uma das equações determinam os pontos no eixo das abscissas e a outra conjuga os pontos correspondentes no eixo das ordenadas e, resultando os pontos coincidentes na área central do diagrama, conforme figura 2.7.

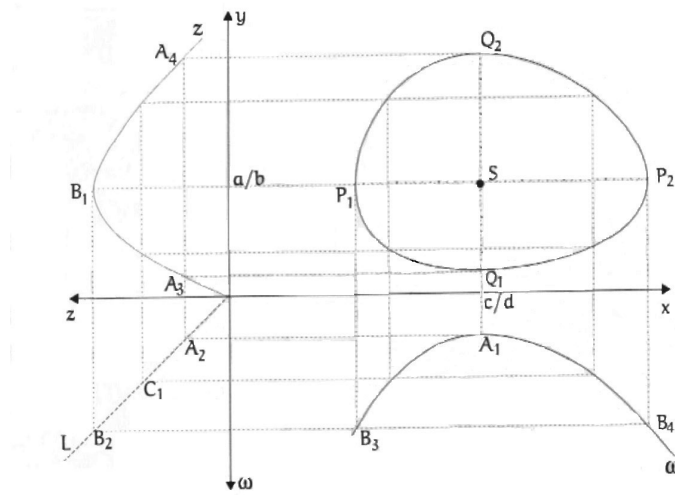


Figura 2.7: Método gráfico de Volterra.

Fonte: [30].

Há ainda, uma alternativa viável para processar esse resultado de forma mais simples, a análise qualitativa dos fluxos em torno dos pontos críticos. Descrita a seguir:

- (i) Trace a “trajetória nula”, que é simplesmente fazer $f(x, y) = 0$, e também $g(x, y) = 0$, funções que representam as expressões que constituem o lado direito do sistema (2.2).
- (ii) Separe as regiões que a “trajetória nula” divide, ou seja, onde a região é $f(x, y) > 0$ e onde é $f(x, y) < 0$, o mesmo para a região da “trajetória nula” $g(x, y)$.
- (iii) Encontre os pontos críticos, o lugar geométrico onde cruzam as “trajetórias nulas”, ou onde as “trajetórias nulas” intersectam os eixos cartesianos.
- (iv) Em cada região, conjugue os sinais obtidos em (ii).
- (v) Monte um vetor, por exemplo um vetor unitário, para indicar os sinais de cada região, conjugando f e g e avalie a resultante. Essa resultante será o vetor do fluxo correspondente naquela região, conforme podemos observar na figura 2.8.
- (vi) Repita os casos anteriores (iv) e (v), nas regiões restantes.
- (vii) A partir dos fluxos resultantes é possível avaliar, de forma qualitativa, qual será a curva resultante dominante [14], [29], [30].

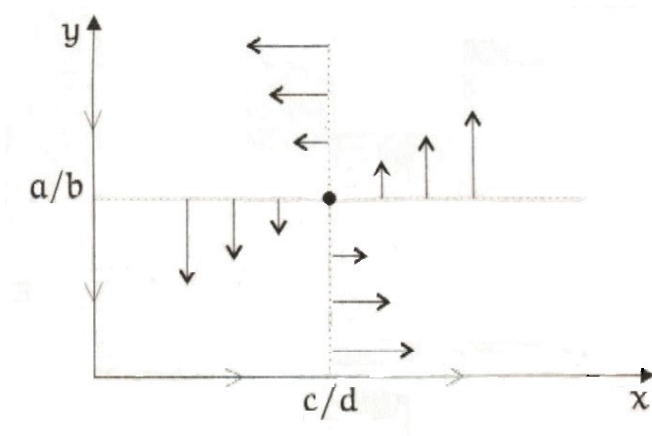


Figura 2.8: Método gráfico por análise dos fluxos.

Fonte: [24].

Conforme as trajetórias de valor nulo (*isóclinas nulas*) estão distribuídas, outros tipos padrões de curvas resultam.

Para o presente caso, sistema (2.2) de Lotka-Volterra, resulta no plano de fase uma curva fechada, ilustrada na figura 2.9, observa-se uma família de curvas periódicas. As curvas são chamadas de *órbitas*, e cada uma das famílias de órbitas são distintas conforme os pontos das condições iniciais (x_0, y_0) .

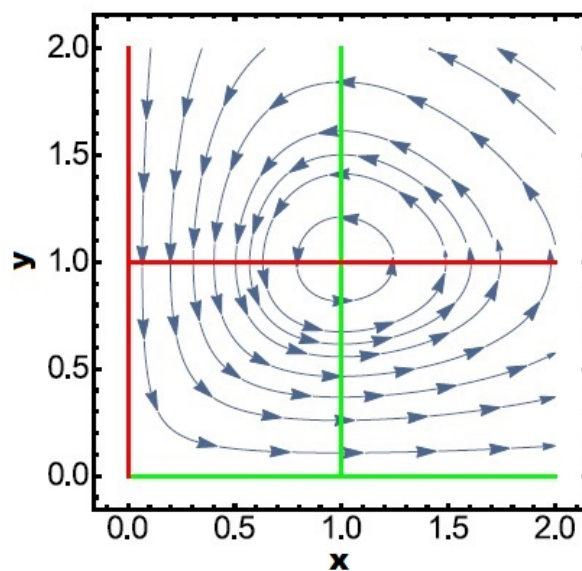


Figura 2.9: Plano de Fase.

Fonte: [30]-adaptada.

2.2.3 Estabilidade e Linearização

O estudo da estabilidade dos sistemas dinâmicos, de maneira geral, está intimamente ligado à procura dos pontos críticos do sistema. A partir deles, é possível inferir qual o comportamento da solução das equações diferenciais que modelam o sistema. A ideia é simular uma pequena perturbação em torno do ponto crítico considerado, e verificar se o sistema perturbado, em algum tempo posterior, é capaz de convergir novamente para esse ponto, e alcançar a estabilidade; ou divergir dele, gerado por alguma instabilidade.

Em particular, vamos iniciar com um problema relacionado a um sistema simples Lotka-Volterra, uma presa e um predador. Não obstante, por se tratar de um sistema de EDO's não-linear, o que faremos aqui será aplicar o processo de linearização. O processo de linearização aplicado a sistemas não-lineares tornam possível adaptar os problemas semelhantemente a casos lineares, uma técnica útil e eficaz. Este processo consiste em aplicar o tratamento da série de Taylor às equações não-lineares perturbadas. Por truncamento dos termos iguais ou superiores de grau quadrado da série, satisfeita pela condição de pequenas perturbações, as equações originais serão tratadas aproximadamente por termos lineares [21], [22], [33], [40].

2.2.4 Análise de estabilidade do Modelo de L-V de uma presa e um predador

Podemos usar a seguinte notação para denotar a generalização do sistema (2.1), um sistema autônomo não-linear para n populações de espécies:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Lembrando a dificuldade de resolvermos este sistema de equações analiticamente [29], [35], [46], faremos primeiramente o processo de linearização, nos pontos críticos do sistema (2.4).

Por padrão, faremos:

$$f_i(x_i) = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

funções contínuas diferenciáveis.

Nosso objetivo é encontrar as variáveis de estado dos pontos críticos (\bar{x}_i) que satisfazem:

$$f_i(\bar{x}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

A seguir, será verificado qual o comportamento da solução próxima dos pontos críticos, se serão pontos estáveis ou instáveis. Por exemplo, para duas populações de espécies, poderíamos substituir (2.4) à forma matricial equivalente:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Se fizermos a transformação de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

A matriz P é invertível e transforma os autovetores em novas coordenadas. Consequentemente as novas coordenadas (v, w) satisfazem o sistema original, simplificado:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad \text{onde } \mathbf{J} = P^{-1}AP. \quad (2.7)$$

A matriz \mathbf{J} é equivalente a A , pois possui os mesmos autovalores. O sistema (2.4) é transformado no sistema (2.7), e possuem os mesmos espaços de configurações [20], [44].

Descrita na forma:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

caso possua os dois autovalores reais e distintos, ou na forma:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

ou com dois autovalores conjugados complexos: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$.

Ocorrendo os autovalores $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ o espaço de configuração de (2.8) é conhecido como ponto de SELA, e ilustrado pela figura 2.10(a). O espaço de configuração do sistema (2.4), no plano x, y , está ilustrado na figura 2.10(b), um ponto de SELA, causado pela transformação das coordenadas (2.6) [20], [44]. Se os autovalores distintos forem ambos positivos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$, teremos o chamado NÓ repulsor instável, figura 2.11(a).

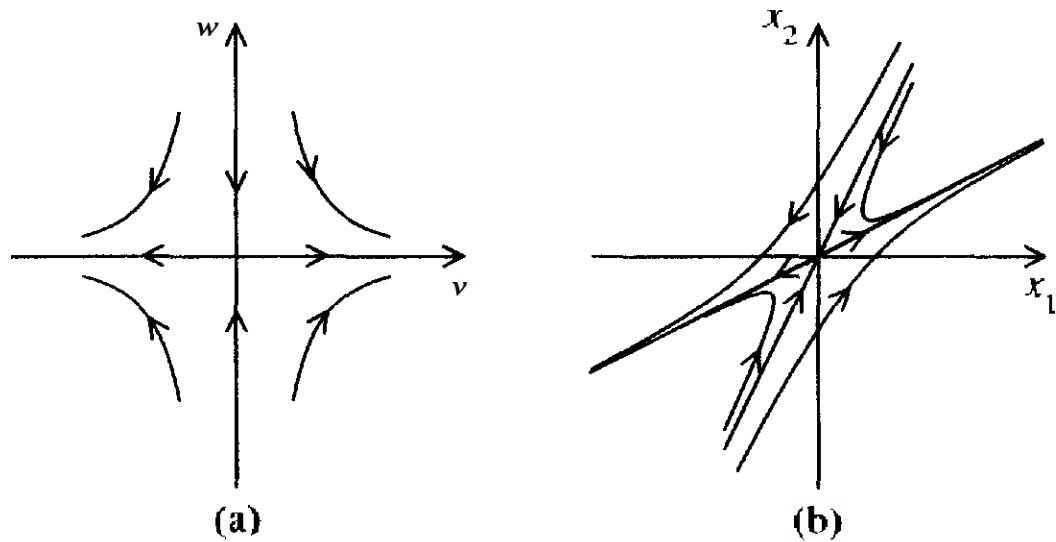


Figura 2.10: Ponto de Sela.

Fonte: [44]-adaptado.

Caso os autovalores forem distintos e ambos negativos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, teremos o chamado NÓ atrator estável, figura 2.11(b).

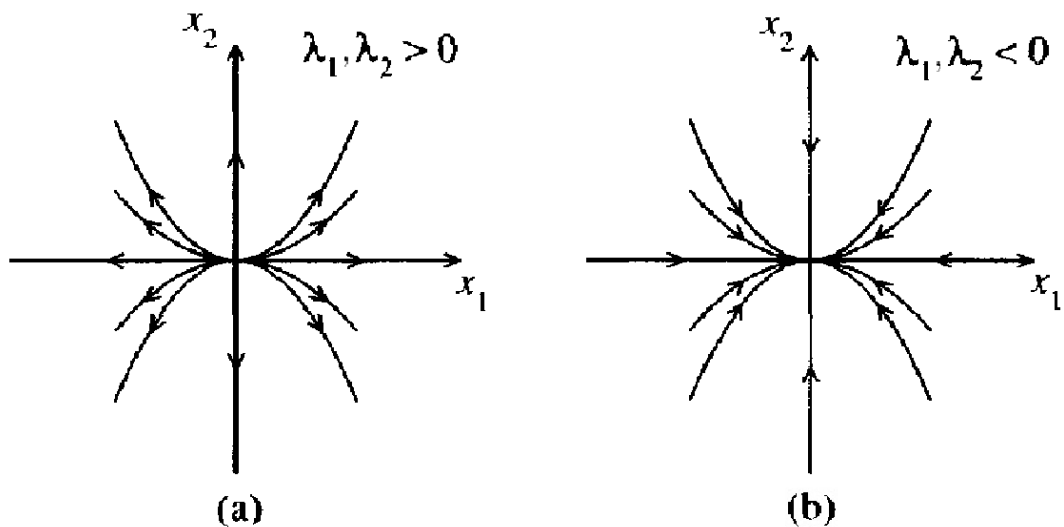


Figura 2.11: (a) Nó repulsor instável (b) Nó atrator estável.

Fonte: [44]-adaptado.

Ainda resta descrever o comportamento, dos autovalores conjugados complexos. Eles geram curvas periódicas, no plano de fases, e oscilam periodicamente no tempo. Podemos dividir esses casos, em função de α :

(a) Caso $\alpha = 0$, o espaço de configuração formado será um ponto de CENTRO, curvas fechadas no plano de fases, ilustrada na figura 2.12. Em relação ao tempo, oscilam com mesmo período.

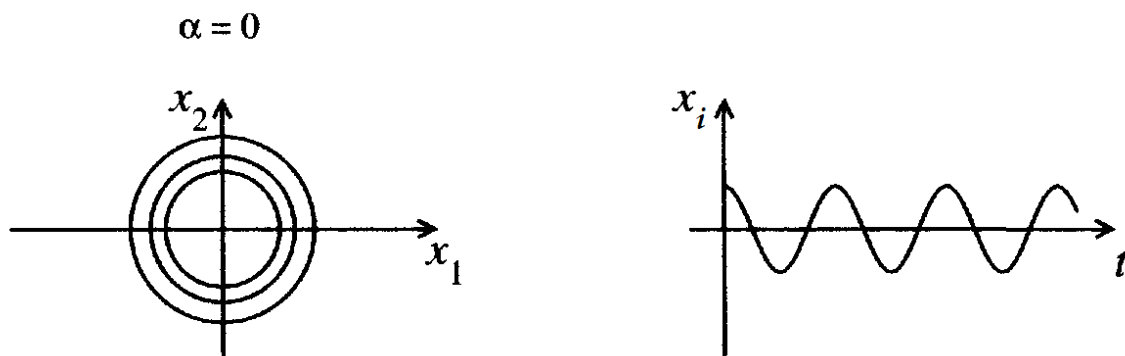


Figura 2.12: Centro.
Fonte: [44]-adaptado.

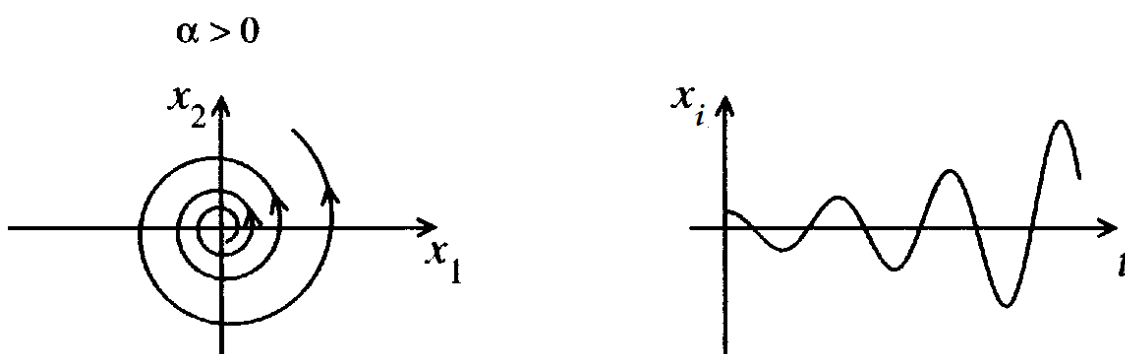


Figura 2.13: Espiral instável.
Fonte: [44]-adaptado.

(b) Caso $\alpha > 0$, o espaço de configuração forma um ponto ESPIRAL instável, ilustrado pela figura 2.13. Em relação ao tempo oscilam com aumento das cotas nas amplitudes.

(c) Caso $\alpha < 0$, o espaço de configuração forma um ponto ESPIRAL estável, ilustrado pela figura 2.14. É também conhecido por ponto espiral assintoticamente estável.

Em relação ao tempo oscilam com diminuição das cotas nas amplitudes, e levam o sistema ao estado de equilíbrio ou estacionário.

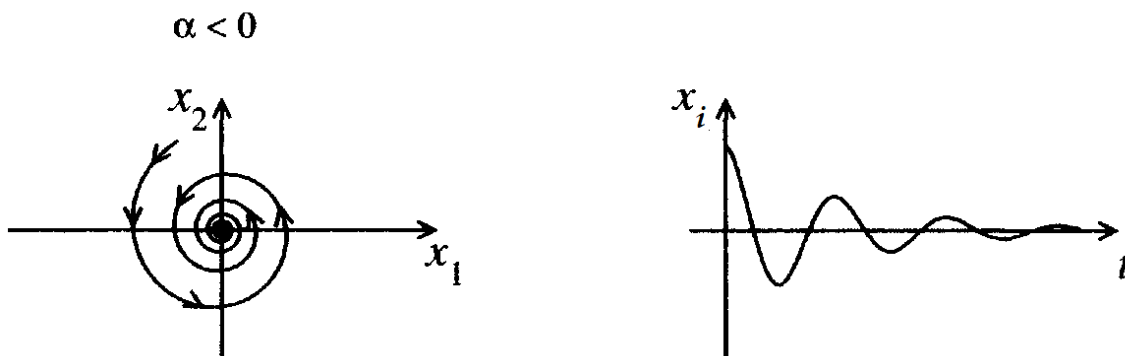


Figura 2.14: Espiral estável.
Fonte: [44]-adaptado.

Algumas vezes é mais conveniente descrever a equação característica de A , do sistema (2.5), a partir dos autovetores $\boldsymbol{\nu}$:

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{\nu} &= \lambda\boldsymbol{\nu} \\ (A - \lambda I)\boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

e, o cálculo do determinante:

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (2.10)$$

produz a equação característica do segundo grau:

$$\lambda^2 - \beta\lambda + \gamma = 0$$

onde:

$$\begin{aligned} \beta &= (a + d) = \text{Tr}(A), \\ \gamma &= (ad - bc) = \det(A), \end{aligned}$$

onde β é o traço da matriz A , e γ o determinante da matriz A . A solução, utilizando a fórmula para a equação do segundo grau, é expressa:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}(A)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\text{Tr}(A))^2 - 4 \det(A)}. \quad (2.11)$$

Lembrando que para mais de duas espécies, o determinante em (2.10) gera a equação característica com ordens elevadas, e não há fórmulas simples que expressem as suas raízes.

Para concluir, vamos resumir os casos para sistemas lineares envolvendo duas espécies [11], [14], [20], [30] [44]:

1. Se $\gamma < 0$, o $\det(A) < 0$.

Então $(\text{Tr}(A))^2 - 4 \det(A) > (\text{Tr}(A))^2$.

Da equação (2.11) verifica-se que λ_1 e λ_2 terão sinais opostos. Logo, o ponto crítico $(0, 0)$ será um ponto de SELA.

2. Se o $\det(A) > 0$.

Devemos considerar os seguintes casos possíveis:

(a) $(\text{Tr}(A))^2 > 4 \det(A)$.

Neste caso os autovalores serão números reais, e nestes casos devemos avaliar as possibilidades:

(i) $\text{Tr}(A) < 0$.

A solução é do tipo ponto NÓ estável. O que corresponde à região (I), da figura 2.15.

$$(ii) \operatorname{Tr}(A) > 0.$$

A solução é do tipo NÓ instável. O que corresponde à região (II), da figura 2.15.

$$(b) (\operatorname{Tr}(A))^2 < 4 \det(A).$$

Neste caso os autovalores serão números complexos, daí devemos avaliar as possibilidades:

$$(i) \operatorname{Tr}(A) < 0.$$

As soluções serão pontos oscilatórios assintoticamente estáveis. No plano de fase serão pontos ESPIRAIS estáveis convergentes a $(0,0)$. O que corresponde à região (I), da figura 2.15.

$$(ii) \operatorname{Tr}(A) > 0.$$

As soluções no tempo serão oscilações crescentes, portanto instáveis. No plano de fase serão pontos ESPIRAIS divergentes a partir de $(0,0)$. O que corresponde à região (I), da figura 2.15.

$$(c) (\operatorname{Tr}(A))^2 = 4 \det(A).$$

As soluções no tempo serão oscilações periódicas, com amplitudes constantes. O que corresponde à região sobre a parábola da figura 2.15 .

3. Se o $\det(A) > 0$, mas $\operatorname{Tr}(A) = 0$.

Neste caso teremos um ponto de CENTRO no plano de fases.

4. Se o $(\operatorname{Tr}(A))^2 - 4\det(A) = 0$ ou $\det(A) = 0$.

Nada poderemos afirmar a respeito de estabilidade ou instabilidade. Isto envolverá um estudo mais amplo e detalhado, que foge do escopo deste trabalho. Veja referência [25] .

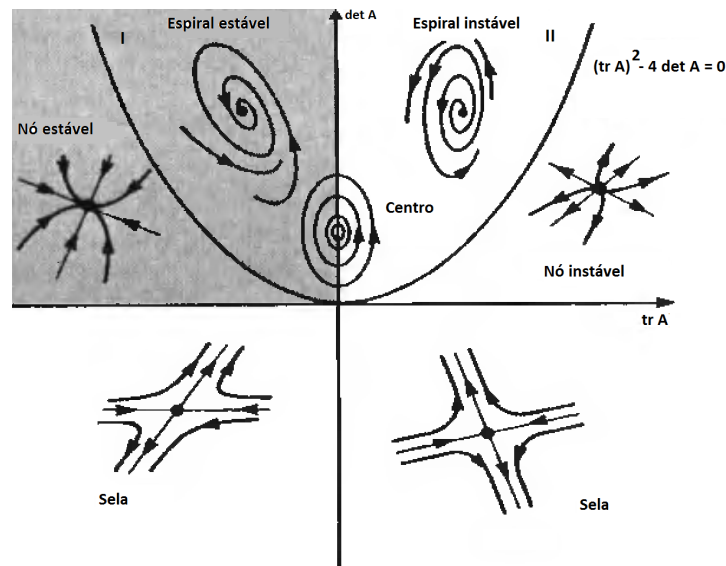


Figura 2.15: Diagrama de Estabilidade.

Fonte: [44]-adaptado.

Agora poderemos estender e analisar os casos com $n > 2$ populações de espécies, e os sistemas mais complexos, não-lineares.

2.2.5 Análise de estabilidade do Modelo de L-V para sistemas não-lineares

Vamos aplicar uma pequena perturbação (η_i) em torno da vizinhança do ponto de crítico (\bar{x}_i), para cada variável de estado existente:

$$x_i = \bar{x}_i + \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

onde $\eta_i = x_i - \bar{x}_i$.

Usando a expansão de Taylor, até o termo de primeira ordem, podemos escrever:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{d\eta_i}{dt} = f_i(\bar{x}_i + \eta_i) \approx f_i(\bar{x}_i) + \frac{\partial f_i(\bar{x}_i)}{\partial x_i} \cdot \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.12)$$

Pela hipótese de estabilidade nos pontos críticos, temos a condição $f_i(\bar{x}_i) = 0$, que substituída na expressão anterior, fornece a seguinte equação matricial:

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \mathbf{J}(\bar{x}_i) \cdot \eta_i \quad (2.13)$$

onde

$$\mathbf{J}(\bar{x}_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x}_i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x}_i)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(\bar{x}_i)}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x}_i)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x}_i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x}_i)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(\bar{x}_i)}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x}_i)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x}_i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x}_i)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n(\bar{x}_i)}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x}_i)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

é conhecida como matriz Jacobiana do sistema.

A partir desse momento, o tratamento do sistema não-linear (2.4) passa a ser idêntico ao linear, e toda análise de estabilidade terá tratamento equivalente.

Todo o processo é garantido por:

Definição 2.2.1 (\bar{x}_i) é conhecida por coordenada de equilíbrio hiperbólica, quando todos autovalores da matriz Jacobiana tiverem parte real não nula.

Teorema 2.2.1 (Hartman-Grobman) Por hipótese, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ são pontos de equilíbrios hiperbólicos. Então, numa vizinhança de $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, o espaço de configurações do sistema não-linear (2.4) é equivalente ao sistema linearizado (2.13).

Observações 2.2.1 No equilíbrio hiperbólico \bar{x}_i , as propriedades da estabilidade são determinadas pelos autovalores da matriz Jacobiana. Este método de linearização pode falhar para equilíbrios não-hiperbólicos.

A palavra “equivalente” no teorema acima refere-se à equivalência topológica dos campos de vetores. Isto significa que na vizinhança de \bar{x}_i , há um homomorfismo (um mapa contínuo 1 para 1 entre os conjuntos abertos) que mapeiam o campo de vetores do sistema não-linear para o campo de vetores da linearização. Neste caso, o estado de configuração próximo do ponto crítico estacionário pode ser um dos possíveis gráficos ilustrados na figura 2.15, [13], [38], [44].

Até o momento em que se determina a equação característica do Jacobiano, nada pode ser alterado do ponto de vista do cálculo. Porém, o cômputo dos autovalores da equação característica, principalmente se o grau da equação for maior do que dois, $n > 2$,

podem gerar algum esforço matemático na busca de confirmar as magnitudes de todos os autovalores, nos pontos críticos estabelecidos. Assim, o critério de Routh-Hurwitz [21] passa a ser um aliado para reduzir esses esforços na verificação de estabilidade. Pelo critério de Routh-Hurwitz, não é necessário calcular os autovalores e, desta forma, tempo e esforço serão reduzidos. O que o critério faz é analisar os coeficientes da equação característica e, estabelecer condições úteis que nos levem concluir se aquele ponto crítico é estável ou não. No entanto, neste trabalho, todo o processo de classificação dos pontos críticos será desenvolvido analisando a parte real dos autovalores computados para todos os cenários estabelecidos.

2.3 Controle Ótimo e Aplicações a Sistemas Biológicos

Parte importante aos nossos objetivos é o estudo da Teoria do Controle Ótimo, teoria implementada por volta dos anos 50, advinda da necessidade das pesquisas da época, a chamada corrida aeroespacial, e ápice em 1962 pelo matemático russo Lev Semenovich Pontryagin (1908-1988) e outros autores, que publicaram *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, referência no estudo do Controle Ótimo ainda hoje [39]. Não podemos esquecer que este estudo é fortemente influenciado pelo Cálculo Variacional e pela Análise Funcional. Posterior ao Cálculo Variacional, introduziu-se a importância da otimização de processos dinâmicos, advindos das equações de Euler-Lagrange, e posteriormente de Hamilton, pelo interesse em maximizar (ou minimizar) possíveis funcionais, ora chamados de funcional objetivo e, o conjunto de funções especiais, chamadas funções de controle admissíveis, seguido pelas contribuições brilhantes de Richard Ernest Bellman (1920-1984) e Rudolf Emil Kalman (1930-2016), culminam na criação de um método valioso: a Programação Dinâmica. Com base nas funções de Lyapunov, funções de Bellman e por fim, na equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), estabeleceram todo arcabouço ao estudo do Controle Ótimo, e suas aplicações nas diversas áreas do conhecimento humano, das ciências tecnológicas até às ciências biológicas e sociais [39], [41].

2.3.1 Sistema autônomo

Nesse trabalho trataremos apenas de sistemas autônomos do tipo Kolmogorov, de malha fechada (sistema de realimentação - feedback control system), um controle que será injetado, frente ao sistema, referente à variável vetor de estado, e que tem como objetivo corrigir qualquer erro ou desvio da saída, mantendo o sistema ao final do processo, em um

nível de comportamento ajustado ao que foi pré-estabelecido como o ótimo ou desejável. Assim, o fator de controle não dependerá explicitamente do tempo, mas indiretamente, a partir da variável de estado $x(t)$. O diagrama de uma malha fechada é detalhado na figura 2.16:

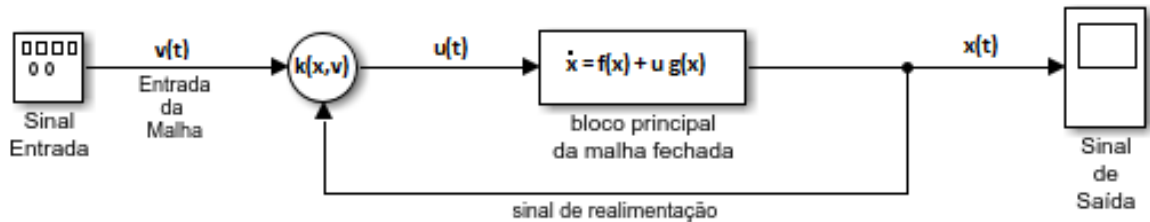


Figura 2.16: Diagrama de malha fechada.
Fonte: autoria própria.

Definição 2.3.1 *O sistema autônomo com controle de malha fechada, representado por:*

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f(x_i(t), u_i) \\ u_i = u_i(x) \\ x_i(0) = x_{i_0} \end{cases} \quad (2.14)$$

onde $f : D \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma função de classe C^1 e u_i o controle de realimentação para a malha fechada.

Conjunto Controle Admissível

Denotemos por \mathcal{U} , o conjunto dos possíveis controles admissíveis ou viáveis, não-vazio e não unitário, controle estes capazes de manter o sistema autônomo estabilizado para certas variáveis de estados, pois sabemos que para alguns estados eles podem acarretar uma não controlabilidade, como veremos mais adiante. Para nossa segurança, vamos considerar o conjunto função controle como funções contínuas, por partes, $\mathcal{PC}^0(I, \mathbb{R}^m)$ definidas no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e contra-domínio em \mathbb{R}^m :

$$\mathcal{U} = \{u : I \rightarrow \mathbb{R}^m, u \in \mathcal{PC}^0(I, \mathbb{R}^m)\}.$$

Processos Admissíveis

Este quesito segue do Teorema de Existência e Unicidade de soluções de EDO do tipo de problema representado pelo sistema (2.14) acima. Chamamos de processo admissível a notação do par (x^u, u) , onde $x^u = x^u(t)$ corresponde à trajetória do sistema determinada

sob influência do controle u escolhido e que satisfaz a condição inicial, $x^u(t_0) = x_0$, que leva ao ponto fixo final, $x^u(T) = \bar{x}$, veja figura 2.17.

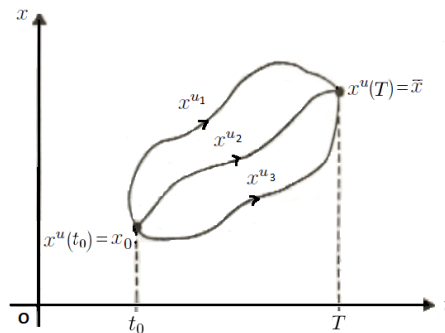


Figura 2.17: Diagrama de processos ótimos.
Fonte: [34]-adaptado.

Controlabilidade Local e Global

A controlabilidade está associada ao processo de estabilidade estudado nas seções anteriores, e à estabilidade assintótica relativa aos pontos críticos estáveis do sistema considerado, claro que poderíamos verificar a partir de outros estados, porém estes aqui não serão estudados porque fogem aos nossos objetivos.

Definição 2.3.2 (*Ponto de equilíbrio assintoticamente estável*) Um ponto de equilíbrio \bar{x} do sistema autônomo (2.14) é dito assintoticamente estável se, ele for estável e que dado um $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que toda solução $x = x(t)$ para a qual $\|x(0) - \bar{x}\| < \delta$, satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}.$$

Veja figura 2.18.

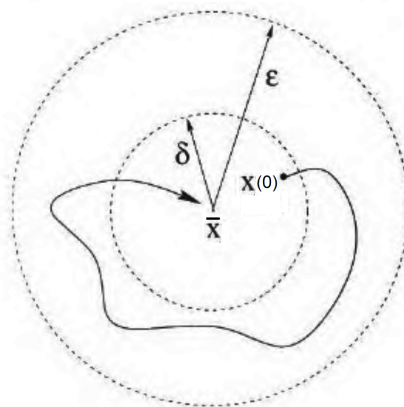


Figura 2.18: Convergência de Lyapunov.
Fonte: [41]-adaptado.

Enquanto tratarmos de sistemas autônomos lineares, a noção de controlabilidade local e global, ainda, o mesmo acontece em relação a controlabilidade assintótica local e global de um determinado estado, podem ser tratados como equivalentes, as noções se equivalem, para mais detalhes, consultar [39]. No entanto, em casos de não-linearidade do sistema autônomo isto não ocorre de fato, um exemplo típico está descrito em [39].

2.3.2 Funções de Controle de Lyapunov

As funções de Lyapunov garantem a estabilidade de sistemas autônomos com controle, observado o critério de estabilidade. As funções de Lyapunov são funções que descrevem a mesma propriedade equivalente da função norma, na definição de estabilidade de um sistema, qual seja, vai decrescendo ao longo da trajetória, feito uma certa “energia” dissipando-se no decorrer do processo em busca de uma configuração com “energia” mínima, isto porque no estudo da Mecânica Clássica a função de Lyapunov é representada pela energia total do sistema [41].

Definição 2.3.3 (*Função de Lyapunov*) Uma função contínua $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ é dita de Lyapunov para o ponto de equilíbrio \bar{x} , de um problema do tipo de sistema (2.14) tal que o fluxo seja $\varphi(t, x)$, se satisfaz as condições:

$$(i) V(\bar{x}) = 0.$$

$$(ii) V(x) > 0 \text{ se } x \neq \bar{x}, V \text{ é uma matriz positiva definida.}$$

$$(iii) \text{ Se } t_1 < t_2, \text{ então } V(\varphi_x(t_2)) \leq V(\varphi_x(t_1)), \text{ que pode ser traduzida para o caso estrito, por:}$$

$$(iii)' \dot{V} = \nabla V(x) \cdot f(x) < 0 \text{ em } D \setminus \{\bar{x}\}, \text{ onde utilizaremos o produto } \nabla V(x) \cdot f(x) \text{ com a notação de produto interno: } \langle \nabla V(x) \cdot f(x) \rangle.$$

A condição (iii)' significa que a função $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ decresce ao longo da trajetória $\varphi_x(t) = \varphi(t, x)$, convergindo ao ponto de equilíbrio assintoticamente estável \bar{x} .

Certamente podemos dizer que não é difícil encontrar uma lei de realimentação de um problema do tipo sistema autônomo linear controlado, mas se o sistema com controle é não-linear, a situação exige complexidade para obtenção da lei de realimentação a fim de estabilizar o sistema na forma local ou globalmente. É isto que vamos tratar agora.

Conhecida uma determinada lei de realimentação para um sistema de malha aberta, não se garante que esta sirva para estabilizar um sistema de malha fechada. No entanto, se

formos capazes de encontrar uma função de controle Lyapunov (FCL) no sistema de malha aberta e, com algum tratamento matemático associado mais elaborado, será possível adaptar e construir uma lei de realimentação estabilizadora para o sistema autônomo de malha fechada. Aliás, se é possível construí-la, ela não será única, podem ser várias, mas o que nos interessa verdadeiramente é buscar a lei de realimentação ótima para o sistema considerado.

Definição 2.3.4 (*Função de Controle de Lyapunov*) *Seja D o espaço dos estados, onde $D = \mathbb{R}^n$ ou $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto ilimitado. Suponhamos que $\bar{x} \in D$ seja um único estado de equilíbrio para o sistema com controle de malha aberta. Uma função de controle de Lyapunov (FCL) estrita para o sistema com controle de malha aberta, relativa ao estado de equilíbrio \bar{x} , é uma função $V : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em D e diferenciável em $D \setminus \{\bar{x}\}$ tal que:*

$$(i) \quad V(\bar{x}) = 0.$$

$$(ii) \quad V \text{ é positiva definida em } D \setminus \{\bar{x}\}; \text{ isto é, } V(x) > 0, \forall x \in D \setminus \{\bar{x}\}.$$

$$(iii) \quad \lim_{\|x-\bar{x}\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty.$$

$$(iv) \quad \forall x \in D, x \neq \bar{x}, \text{ existe um controle admissível } u \text{ tal que: } \nabla V(x) \cdot f(x, u) < 0.$$

Teorema 2.3.1 *Se (\bar{x}, \bar{u}) é o único ponto de equilíbrio do sistema com controle de malha aberta e se existe uma função de controle de Lyapunov (FCL) estrita para o estado de equilíbrio \bar{x} , conforme definição 2.3.4, então o sistema será globalmente assintoticamente controlável a \bar{x} .*

Daí, podemos a partir da função de controle de Lyapunov, construir uma lei de realimentação estabilizadora para um sistema não-linear. Como dissemos anteriormente, para concluir, restaria escolher a lei de realimentação ótima, a partir da minimização do funcional linear quadrático (2.15), e no cálculo da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) (2.20), que serão apresentadas a seguir.

2.3.3 Controle Ótimo

O que se quer é encontrar uma função que possa levar o sistema de um estado inicial a outro final desejável, de forma capaz de controlar o sistema e levá-lo à estabilidade assintótica, com menor custo de energia e tempo. Essa função é chamada de lei de retroalimentação ótima.

Funcional Objetivo

Defini-se funcional de Custo, o valor capaz de representar a medida do custo de levar o estado x_0 inicial ao estado final desejado, através de uma trajetória associada ao controle u , conforme o sistema (2.14). Na literatura, encontramos o funcional de custo como sinônimo de funcional objetivo. No caso de problemas com horizonte infinito (exigência para maioria das aplicações em sistemas biológicos), para $t > 0$, consideramos o funcional:

$$\mathcal{J}_\infty(x, u) = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(x(t), u(t)) dt \quad (2.15)$$

onde $x(t) \in C^1$, $u(t) \in \mathcal{U}$, $\mathcal{L}(x, u) \in C^1$ chamada função de custo, e obviamente o interesse é minimizar o funcional \mathcal{J}_∞ , para isso, a integral imprópria (2.15) deverá convergir para o processo ótimo $(x^u(t), u(t))$.

Função de Bellman

Antes de descrevermos a função de Bellman, é importante apresentar o Princípio de Otimalidade de Bellman. Conforme Bellman [39], [41], podemos verificar o custo gasto para usarmos uma certa “*energia*” a fim de levarmos uma partícula de um estado inicial a outro final, por diversos percursos (conforme ilustrado na figura 2.17), o quê nos leva a supor que há etapas a serem escolhidas: as de menor custo, como estratégias mais desejáveis que minimizam o custo total para a trajetória de se levar a partícula do estado inicial a outro final. O custo ótimo será o resultado, levando em conta, as parciais de custos de cada etapa ótima escolhida. A escolha do percurso de custo total mínimo será a decisão ótima para o processo associado ao controle u . Um exemplo clássico para descrever a otimização de Bellman é encontrado em [41], que exemplifica um sistema discreto, mas que muito auxilia, em analogia, entender os processos contínuos.

Definição 2.3.5 Dado $u \in \mathcal{U}$, denotamos a trajetória associada por z^u . A função de Bellman, ou função **valor ótimo** é a aplicação $V : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por,

$$V(x_0) := \min\{\mathcal{J}(x_0, u, x^u) \mid u \in U[t_0, T]\}. \quad (2.16)$$

Um controle $\bar{u} \in U[t_0, T]$ é denominado **controle ótimo** para o sistema (2.14) com horizonte infinito,

$$V(\infty) = 0. \quad (2.17)$$

Assim, temos:

$$V(x_0) = \mathcal{J}(x_0, \bar{u}, x^{\bar{u}}).$$

Neste caso, $\bar{x} := x^{\bar{u}}$ é denominada **trajetória ótima** e o par (\bar{x}, \bar{u}) é chamado de **solução** ou **processo ótimo** para o sistema (2.14), com horizonte infinito.

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

Pode-se definir a função de Bellman:

$$V(t, \bar{x}(t)) = \int_{t_0}^T \mathcal{L}(s, \bar{z}(s), \bar{u}(s)) ds, \quad (2.18)$$

onde o operador $\mathcal{L}(s, \bar{z}(s), \bar{u}(s))$ é pelo menos contínuo, por exemplo, aquele que define o funcional linear quadrático, $\mathcal{L} = px^2 + qu^2$, onde p e q constantes positivas.

Façamos a derivada de (2.18) em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{\partial V(t, \bar{x}(t))}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V(t, \bar{x}(t))}{\partial x}, f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \right\rangle = -\mathcal{L}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad (2.19)$$

equação principal, base do processo da programação dinâmica para problemas de controle ótimo. Em particular,

$$\frac{\partial V(t, \bar{x}(t))}{\partial t} + \min_{u \in \Omega} \left\{ \left\langle \frac{\partial V(t, \bar{x}(t))}{\partial x}, f(t, \bar{x}(t), u(t)) \right\rangle + \mathcal{L}(t, \bar{x}(t), u(t)) \right\} = 0, \quad (2.20)$$

$\forall t \in (t_0, T)$, sendo o mínimo obtido em $u = \bar{u}(t)$ para cada t . O que fica demonstrado para problemas envolvendo sistemas autônomos, quando:

$$\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial t} = 0,$$

obtém-se a condição que garante o controle ótimo:

$$\min_{u \in \Omega} \{ \langle \nabla V(x(t)), f(x(t), u(t)) \rangle + \mathcal{L}(t, x(t), u(t)) \} = 0. \quad (2.21)$$

Observação 2.3.1 *Conhecendo a função de Bellman (2.16), a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (2.20) gera o que se deseja, uma lei de realimentação (feedback control) para o sistema.*

Em seguida iremos apresentar a obtenção desta lei, partindo das formulações do problema Lotka-Volterra para diversos cenários de interesse, aplicando o controle ótimo linear e não-linear.

Capítulo 3

METODOLOGIA

Vamos tratar e analisar os problemas de Lotka-Volterra para os cenários: uma presa e um predador, duas presas e um predador, duas presas e dois predadores. O ponto de partida é o modelo generalizado, sistema (2.14). Verificar diferentes propostas para os campos vetoriais $f(x_i(t), u_i)$ que compõem o sistema Lotka-Volterra, com destaque nas diferentes estratégias, sem controle, com controle tipo linear e tipo não-linear, figura 3.1.

Em todos os casos faremos simulações numéricas, no Capítulo 4, a fim de verificar se o sistema é capaz de manter o nível de pragas abaixo dos danos econômicos da lavoura, e garantir o correto manejo integrado de pragas. Para tanto, vamos aplicar a programação dinâmica e o princípio de otimalidade de Bellman, resolver a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, a fim de descobrir a lei de controle de realimentação ótima. Por fim, comparar os resultados obtidos, e se eles satisfazem às orientações técnicas ao manejo integrado de pragas, disponíveis pela EMBRAPA.

Apresentaremos as formulações para cada estratégia, controle tipo linear e tipo não-linear. Na primeira, faremos o processo de linearização previamente, seguida da Programação Dinâmica com aplicação da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, a fim de encontrar por completo, a lei de retroalimentação ótima por aplicação da equação algébrica de Riccati.

Para a formulação com controle não-linear, adotaremos a estratégia estabelecida no trabalho de Molter e Rafikov (2004) [32], que consideram não praticar o processo de linearização. A partir da função de Bellman, do tipo logarítmica, aplicam-na equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, encontrando a lei de realimentação ótima. Posteriormente, consideram o problema inverso, o controle ótimo encontrado retorna à equação HJB que gera um novo sistema onde os coeficientes da função valor de Bellman e os parâmetros de

ponderabilidade do funcional de custo, relativo ao controle, são computados. Por fim, a função de Bellman é estabelecida por completo.

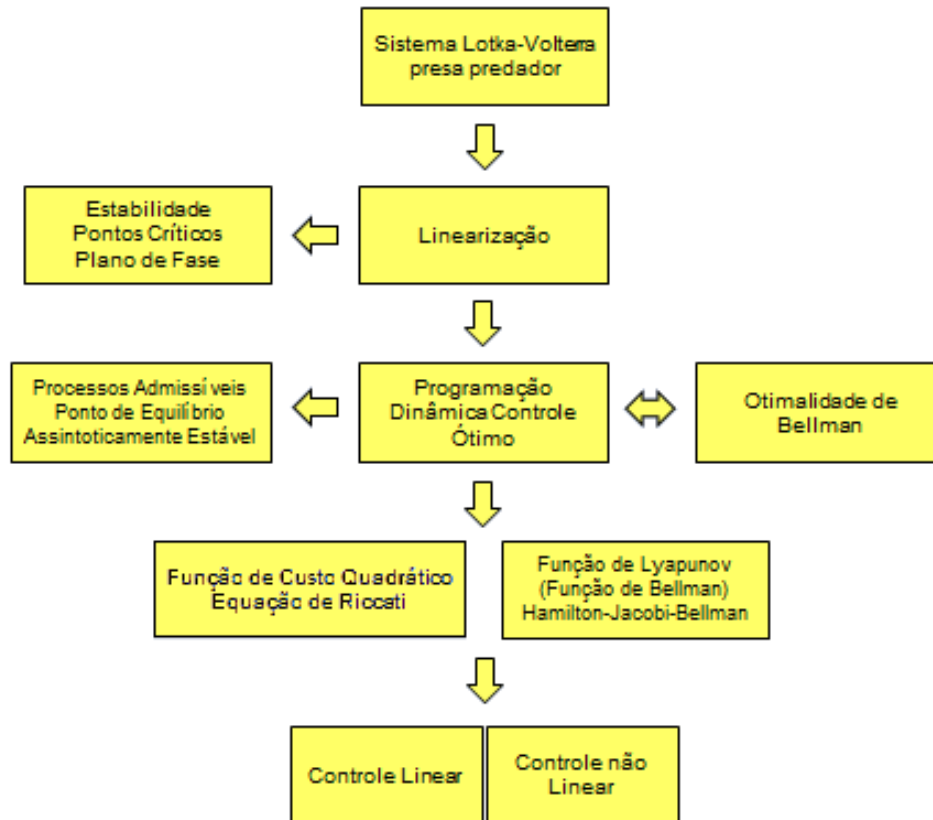


Figura 3.1: Fluxograma básico para a Programação Dinâmica.

Fonte: autoria própria.

3.1 Formulação do problema Lotka-Volterra com controle ótimo linear

Tratemos de exemplificar a otimalidade de sistemas não-lineares autônomos com controle tipo linear. Para isto, a literatura utiliza como funcional objetivo ou de custo, o funcional quadrático, assim chamado de problema regulador linear quadrático (LRQ).

Dado o problema com controle tipo linear:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) + \bar{u}_i + u_i, & i = 1, 2, \dots, n, \\ x_i(0) = x_{i_0} \\ x_i(\infty) = \bar{x}_i \end{cases} \quad (3.1)$$

onde:

$$\bar{u}_i = -\bar{x}_i \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \right), \quad (3.2)$$

e u_i , controle de realimentação ótima, será obtido após a programação dinâmica. Deseja-se descobrir as condições necessárias à otimalidade para o problema (3.1), minimizando o funcional de custo quadrático (\mathcal{J}), por conta do processo de linearização da variável de estado x e o tratamento equivalente à variável de estado da função desvio (Y), definida na forma: $Y(t) = [y_i(t)] = [x_i(t) - \bar{x}_i(t)]$, e a matriz Jacobiana (\mathbf{J}), sistema (3.4). Assim, devemos minimizar o funcional:

$$\mathcal{J}(Y, u) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (Y^T Q Y + u^T R u) dt, \quad (3.3)$$

sujeito a,

$$\begin{cases} \dot{Y} = \mathbf{J}Y + Bu \\ Y(0) = Y_0 \\ Y(\infty) = 0 \quad (\text{condição de horizonte infinito}). \end{cases} \quad (3.4)$$

Assim, o sistema (3.1) irá estabilizar-se ao nível pré-estabelecido, à medida que avança o tempo, o mesmo para a perturbação $(x_i - \bar{x}_i) \rightarrow 0$, quando $(t \rightarrow +\infty)$, nível de convergência assintoticamente estável.

A solução Y , do sistema (3.4), cumpre a condição de horizonte infinito, e Q é uma matriz simétrica positiva semi-definida, R e B matrizes diagonais positivas definidas, todas quadradas de ordem $n \times n$. Esta última, chamada matriz de acoplamento do controle, costuma ser representada pela matriz identidade. Os elementos de ambas as matrizes, Q e R , definem os coeficientes de ponderabilidade do funcional \mathcal{J} . Além disso, $u = u(t)$ representa o vetor de controle de retroalimentação ótimo a ser determinado na sequência.

Para encontrarmos a dinâmica do sistema (3.1) equivalente a (3.4), falta calcular a lei de controle de realimentação u do sistema. Na prática, o que se espera é resolver a equação de Riccati, substituídas as matrizes componentes da função de custo quadrático (3.3) e as matrizes que estão presentes no sistema (3.4), além, fundamentalmente a escolha da função valor de Bellman capaz de minimizar a função custo quadrático e levar a trajetória do sistema de um ponto inicial ao ponto final, e que satisfaça a condição de horizonte infinito introduzida no sistema (3.4).

Uma das possíveis escolhas de função valor de Bellman é:

$$V(Y) = \frac{1}{2} Y^T S Y. \quad (3.5)$$

A equação de Riccati é explicitada a partir da seguinte sequência, que satisfaz a equação diferencial parcial HJB:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u=u_i} \left\{ \nabla V^T(Y) \cdot \dot{Y} + \frac{1}{2} (Y^T Q Y + u^T R u) \right\} = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u=u_i} \left\{ \nabla V^T(Y) \cdot (\mathbf{J}Y + Bu) + \frac{1}{2} (Y^T Q Y + u^T R u) \right\} = 0. \quad (3.7)$$

A função valor (V) é explicitamente independente do tempo, e apenas dependente da variável de estado Y , desta forma:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

e calculando a derivada parcial do que restou, equação (3.7), em relação à variável de controle (u):

$$\frac{\partial \left\{ \langle \nabla V^T(Y) \cdot (\mathbf{J}Y + Bu) \rangle + \frac{1}{2} (Y^T Q Y + u^T R u) \right\}}{\partial u} = 0. \quad (3.8)$$

Obtida a relação: $\nabla V^T(Y) = SY$ de (3.5), a substituiremos na equação (3.8):

$$\frac{\partial \left\{ \langle SY \cdot (\mathbf{J}Y + Bu) \rangle + \frac{1}{2} (Y^T Q Y + u^T R u) \right\}}{\partial u} = 0,$$

$$SYB + Ru = 0,$$

e portanto,

$$Ru = -SYB = -B^T SY,$$

o resultado exprime a lei de retroalimentação ótima:

$$u = -(R^{-1} B^T S) Y, \quad (3.9)$$

onde B^T é a matriz transposta da matriz B , e:

$$u^T = -Y^T R^{-1} B^T S. \quad (3.10)$$

De forma inversa, substituindo os valores da variável de controle ótimo u e u^T novamente na equação de HJB (3.7):

$$SY \cdot (\mathbf{J}Y + Bu) + \frac{1}{2} (Y^T Q Y + u^T R u) = 0,$$

$$SY \cdot (\mathbf{J}Y + B(-R^{-1} B^T S) Y) + \frac{1}{2} (Y^T Q Y + u^T (-B^T S) Y) = 0,$$

$$\begin{aligned}
SY \cdot \mathbf{J}Y + SY \cdot B(-R^{-1}B^TS)Y + \frac{1}{2}Y^TQY + \frac{1}{2}(-Y^TR^{-1}B^TS)(-B^TSY) &= 0, \\
Y^TS \cdot \mathbf{J}Y + Y^TS \cdot B(-R^{-1}B^TS)Y + Y^T\frac{1}{2}QY + Y^T(-\frac{1}{2}R^{-1}B^TS)(-B^TS)Y &= 0, \\
Y^T \left\{ S\mathbf{J} + SB(-R^{-1}B^TS) + \frac{1}{2}Q + (-\frac{1}{2}R^{-1}B^TS)(-B^TS) \right\} Y &= 0,
\end{aligned}$$

arranjando os termos semelhantes, pode-se estabelecer a expressão conhecida, a equação matricial de Riccati [24], [35], [46]:

$$S\mathbf{J} + \mathbf{J}^TS - S(BR^{-1}B^T)S + Q = 0, \quad (3.11)$$

e em seguida descobrir completamente a matriz S .

Uma vez conhecida S , ela que será utilizada na equação (3.9), resultando na determinação da variável de estado de controle ótimo e garantindo que todos os autovalores tenham parte real negativa (estabilidade assintótica).

Após o término da Programação Dinâmica, é possível determinar a trajetória ótima associada à solução na variável de estado x , assintoticamente estável:

$$\dot{x}^u(t) = \{\mathbf{J} - BR^{-1}B^TS\}x^u(t), \quad x^u(0) = x_0. \quad (3.12)$$

O custo ótimo associado ao controle ótimo depende da condição inicial x_0 considerada, a expressão abaixo é definida conforme a definição 2.3.5 e [28]:

$$\mathcal{J}^u(x_0) = \frac{1}{2}x_0^TSx_0. \quad (3.13)$$

A seguir, a formulação considerando o controle ótimo não-linear.

3.2 Formulação do problema Lotka-Volterra com controle ótimo não-linear

O nosso objetivo é encontrar os vetores u_i , controle de realimentação (feedback control) não-linear, que transfere o sistema do problema (3.14) do estado inicial $x_i(0)$ ao estado final $x_i(\infty)$, um problema com a condição de horizonte infinito, necessária aos sistemas biológicos. Com isto, pretende-se encontrar uma função de Lyapunov, que minimiza o funcional quadrático $\mathcal{J}(Y, u)$, a partir da função de Bellman do tipo logarítmica, utilizando a programação dinâmica e uso da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (3.7), e ainda, a equação de Riccati [24], [35], [46]. Feito isto,

encontraremos o controle ótimo (u) que efetivamente irá controlar o sistema (3.14), à estabilidade assintótica:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \bar{u}_i + u_i \right), & i = 1, 2, \dots, n. \\ x_i(0) = x_{i_0} \\ x_i(\infty) = \bar{x}_i \end{cases} \quad (3.14)$$

Revedo, o funcional de custo:

$$\mathcal{J}(Y, u) = \int_0^{+\infty} (Y^T Q Y + u^T R u) dt, \quad (3.15)$$

onde o integrando pode ser representado pela aplicação: $\mathcal{L}(Y, u) = Y^T Q Y + u^T R u$, e $Y_i = x_i - \bar{x}_i$, a perturbação, ou desvio da variável de estado x_i , em torno do ponto crítico \bar{x}_i e Q , R matrizes positivas definidas. Ao invés de procurarmos a função de Bellman que se ajusta ao problema de Lotka-Volterra generalizado com controle não-linear (3.14), vamos defini-la da forma logarítmica, a seguir:

$$V(x_i) = \sum_{i=1}^n c_i \left(x_i - \bar{x}_i - \bar{x}_i \ln \left(\frac{x_i}{\bar{x}_i} \right) \right), \quad (3.16)$$

com c_i constantes positivas. Desenvolvendo os termos que precisamos para a equação HJB, teremos:

$$\frac{dV}{dx} = \sum_{i=1}^n c_i \left(1 - \bar{x}_i \cdot \frac{1}{\left(\frac{x_i}{\bar{x}_i} \right)} \cdot \frac{1}{\bar{x}_i} \right) \quad (3.17)$$

$$\frac{dV}{dx} = \sum_{i=1}^n c_i \left(1 - \frac{\bar{x}_i}{x_i} \right) = \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{x_i - \bar{x}_i}{x_i} \right), \quad (3.18)$$

quando aplicado em $x_i = \bar{x}_i > 0$:

$$\frac{dV}{dx} = 0. \quad (3.19)$$

Podemos conferir a condição de mínimo, dada por:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{x_i^2}, \quad (3.20)$$

verificando que é sempre positiva. Logo, a função é também uma função de Bellman. Resta calcular, \dot{V} que será substituída na equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, equação (3.7):

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - \bar{x}_i) \frac{\dot{x}_i}{x_i}. \quad (3.21)$$

Substituindo a primeira equação do sistema (3.14) em (3.21), tem-se:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - \bar{x}_i) \frac{\left(x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \bar{u}_i + u_i \right) \right)}{x_i}. \quad (3.22)$$

Além disso, observe que o valor da variável de estado de controle direto \bar{u}_i (feedforward control):

$$\bar{u}_i = -r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j, \quad (3.23)$$

podemos substituí-la em (3.22):

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - \bar{x}_i) \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j + u_i \right). \quad (3.24)$$

Simplificando os termos:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - \bar{x}_i) \left(- \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_j - \bar{x}_j) + u_i \right), \quad (3.25)$$

o vetor controle de realimentação, pode ser escrito na forma generalizada:

$$u_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j, \quad (3.26)$$

daí lembrando, que $y_i = x_i - \bar{x}_i$, vamos substituir (3.26) na equação (3.25), obtendo:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n c_i y_i \left(- \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j \right), \quad (3.27)$$

que na forma matricial, fica reduzida a:

$$\frac{dV}{dt} = -Y^T \bar{A} Y + Y^T \bar{B} u, \quad (3.28)$$

onde cada matriz componente, está mostrada abaixo:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} c_1 a_{11} & c_1 a_{12} & \dots & c_1 a_{1n} \\ c_2 a_{21} & c_2 a_{22} & \dots & c_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n a_{n1} & c_n a_{n2} & \dots & c_n a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad (3.29)$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} c_1 b_{11} & c_1 b_{12} & \cdots & c_1 b_{1n} \\ c_2 b_{21} & c_2 b_{22} & \cdots & c_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n b_{n1} & c_n b_{n2} & \cdots & c_n b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}. \quad (3.30)$$

Substituindo (3.28), (3.29) e (3.30) em (3.8), e lembrando que a condição de horizonte infinito é garantida, o desvio na estabilidade é nulo. Desta forma, a equação matricial de Hamilton-Jacobi-Bellman se reduz a:

$$\mathcal{H}(Y, u) = \min_{u=u_i} \{-Y^T \bar{A} Y + Y^T \bar{B} u + Y^T Q Y + u^T R u\} = 0. \quad (3.31)$$

Para encontrarmos o nosso objetivo final, a variável de estado de controle ótimo, u , vamos derivar $\mathcal{H}(Y, u)$ em relação a u , e prosseguir na dedução:

$$\frac{\partial \mathcal{H}(Y, u)}{\partial u} = \frac{\partial (-Y^T \bar{A} Y + Y^T \bar{B} u + Y^T Q Y + u^T R u)}{\partial u} = 0, \quad (3.32)$$

$$\bar{B}^T Y + 2Ru = 0, \quad (3.33)$$

$$Ru = -\frac{1}{2} \bar{B}^T Y.$$

Logo:

$$u = -\frac{1}{2} R^{-1} \bar{B}^T Y, \quad (3.34)$$

o vetor coluna controle ótimo que gera a lei de controle de realimentação ótima do sistema (3.14), conseqüentemente o vetor linha controle ótimo equivalente será:

$$u^T = -\frac{1}{2} Y^T \bar{B} (R^{-1})^T. \quad (3.35)$$

Substituindo (3.34) e (3.35) em (3.31), chegamos a:

$$-Y^T \bar{A} Y - \frac{1}{4} Y^T \bar{B} (R^{-1}) \bar{B}^T Y + Y^T Q Y = 0. \quad (3.36)$$

Colocando Y^T e Y em evidência:

$$Y^T \left\{ -\bar{A} - \frac{1}{4} \bar{B} (R^{-1}) \bar{B}^T + Q \right\} Y = 0, \quad (3.37)$$

resultando em

$$Q = \bar{A} + \frac{1}{4} \bar{B} (R^{-1}) \bar{B}^T. \quad (3.38)$$

Com a aplicação do controle tipo não-linear, conforme as equações do sistema (3.14),

podemos descrever as matrizes:

$$R = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (3.39)$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (3.40)$$

com $\bar{B} = \bar{B}^T$. Logo, de (3.38):

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (3.41)$$

$$Q = \begin{pmatrix} c_1 a_{11} & c_1 a_{12} & \dots & c_1 a_{1n} \\ c_2 a_{21} & c_2 a_{22} & \dots & c_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n a_{n1} & c_n a_{n2} & \dots & c_n a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \left(\frac{c_1^2}{m_1}\right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{c_2^2}{m_2}\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left(\frac{c_n^2}{m_n}\right) \end{pmatrix}_{n \times n}. \quad (3.42)$$

Geralmente a matriz Q é considerada simétrica. Assim, para garantir essa simetria, devemos estabelecer:

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{(c_i a_{ij} + c_j a_{ji})}{2}. \quad (3.43)$$

Dai, chegaremos a conclusão simplificada pelos acréscimos das matrizes \bar{A} e \tilde{A} , assim:

$$Y^T \bar{A} Y - Y^T \tilde{A} Y = 0. \quad (3.44)$$

Sendo abaixo descrita, a matriz \tilde{A} , em concordância com a definição de seus coeficientes

em (3.43):

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} c_1 a_{11} & \frac{(c_1 a_{12} + c_2 a_{21})}{2} & \cdots & \frac{(c_1 a_{1n} + c_n a_{n1})}{2} \\ \frac{(c_2 a_{21} + c_1 a_{12})}{2} & c_2 a_{22} & \cdots & \frac{(c_2 a_{2n} + c_n a_{n2})}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(c_n a_{n1} + c_1 a_{1n})}{2} & \frac{(c_n a_{n2} + c_2 a_{2n})}{2} & \cdots & c_n a_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_1 a_{11} & c_1 a_{12} & \cdots & c_1 a_{1n} \\ c_2 a_{21} & c_2 a_{22} & \cdots & c_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n a_{n1} & c_n a_{n2} & \cdots & c_n a_{nn} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_1 a_{11} & c_2 a_{21} & \cdots & c_n a_{n1} \\ c_1 a_{12} & c_2 a_{22} & \cdots & c_n a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 a_{1n} & c_2 a_{2n} & \cdots & c_n a_{nn} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

repare que ela possui os componentes da matriz A e A^T , podendo ainda ser representada, na forma:

$$\tilde{A} = \frac{1}{2} D_c A + \frac{1}{2} A^T D_c, \quad (3.46)$$

onde D_c é a matriz diagonal com os elementos sendo as constantes c_i . Logo, substituindo (3.46) em (3.36), teremos:

$$-Y^T \left\{ \frac{1}{2} D_c A + \frac{1}{2} A^T D_c \right\} Y - \frac{1}{4} Y^T D_c (B R^{-1} B^T) D_c Y + Y^T Q Y = 0, \quad (3.47)$$

ou equivalentemente:

$$Y^T \left\{ -\frac{1}{2} (D_c A + A^T D_c) \right\} Y + Y^T \left\{ -\frac{1}{4} D_c (B R^{-1} B^T) D_c \right\} Y + Y^T Q Y = 0, \quad (3.48)$$

ou ainda,

$$Y^T \left\{ -\frac{1}{2} (D_c A + A^T D_c) - \frac{1}{4} D_c (B R^{-1} B^T) D_c + Q \right\} Y = 0, \quad (3.49)$$

e terminando,

$$Q = \frac{1}{2} (D_c A + A^T D_c) + \frac{1}{4} D_c (B R^{-1} B^T) D_c, \quad (3.50)$$

onde:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}. \quad (3.51)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 a_{11} & \frac{(c_1 a_{12} + c_2 a_{21})}{2} & \cdots & \frac{(c_1 a_{1n} + c_n a_{n1})}{2} \\ \frac{(c_2 a_{21} + c_1 a_{12})}{2} & c_2 a_{22} & \cdots & \frac{(c_2 a_{2n} + c_n a_{n2})}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(c_n a_{n1} + c_1 a_{1n})}{2} & \frac{(c_n a_{n2} + c_2 a_{2n})}{2} & \cdots & c_n a_{nn} \end{pmatrix} + \\
 &+ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \left(\frac{c_1^2}{m_1}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left(\frac{c_2^2}{m_2}\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \left(\frac{c_n^2}{m_n}\right) \end{pmatrix}. \tag{3.52}
 \end{aligned}$$

Com as deduções que foram feitas, podemos variar o nosso ponto de vista e entender o problema original como um problema inverso. No problema original, a matriz Q é fornecida como um dado do problema, e para essa formulação iremos calculá-la, seguindo o problema inverso, desde que garanta sem perda de generalidade os objetivos de minimização do funcional de custo, as condições iniciais e de horizonte infinito. Permitindo finalmente obter a variável de controle ótimo (3.34), que pode ser expressa na forma generalizada equivalente:

$$u_i = -\frac{c_i (x_i - \bar{x}_i)}{2m_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.53}$$

Isso pode ser realizado por implementação computacional e executado em simulações na plataforma do MATLAB[®] ¹, conforme efetuado no Capítulo 4.

O valor do custo ótimo associado ao sistema de controle não-linear depende da condição inicial $x_i(0)$ e definido na forma [28]:

$$\mathcal{J}^u(x_i(0)) = \sum_{i=1}^n c_i \left(x_i(0) - \bar{x}_i - \bar{x}_i \ln \left(\frac{x_i(0)}{\bar{x}_i} \right) \right). \tag{3.54}$$

A seguir, iremos simular o sistema Lotka-Volterra para os cenários: uma presa e um predador, duas presas e um predador, duas presas e dois predadores, sem controle ótimo e com controle ótimo linear e não-linear.

¹MATLAB[®] é uma marca comercial registrada de The MathWorks, Inc., 24 Prime Park Way, Natick, MA 01760, USA, (508) 653-1415, info@mathwoks.com, http://www.mathworks.com.

Capítulo 4

RESULTADOS NUMÉRICOS

Vamos verificar os resultados teóricos desenvolvidos nos capítulos anteriores através do uso do MATLAB[®] para as simulações dos diversos sistemas de equações de Lotka-Volterra: sem controle, com controle linear e com controle não-linear. Diversificado aos cenários do sistema Lotka-Volterra para: uma presa e um predador, duas presas e um predador, duas presas e dois predadores.

Ao utilizar a programação dinâmica, é imperioso encontrar as funções de Lyapunov, das quais as pretendidas, chamadas funções de Bellman, minimizam o funcional objetivo, definidas em nossas aplicações do tipo linear quadrático, e satisfaçam as condições iniciais, estabelecidas para o sistema (2.14) e posteriormente equivalente ao problema (3.4) à condição de horizonte infinito $Y(\infty) = 0$.

Na teoria de controle ótimo para sistemas lineares, geralmente, os valores das matrizes, Q e R , são dados. Através da escolha e aplicação da função de Lyapunov, iremos substituí-la na equação de HJB, e encontrar a lei de realimentação ótima do sistema controlado que transfere equivalentemente, uma trajetória qualquer do ponto inicial ao ponto final, de forma que o caminho seja mínimo, ou seja, otimizado com menor energia. Para isso, recorre-se a resolver a equação de Riccati, através do uso da função residente LQR do MATLAB[®] e ao método Runge-Kutta de quarta ordem, a resolver o sistema de equações de Lotka-Volterra. E finalmente, pelas simulações computacionais, poder aprofundar e investigar a dinâmica das populações de espécies do sistema Lotka-Volterra presa-predador, através dos resultados obtidos e guiados pelos trabalhos [15], [31], [32], [37] e [45].

4.1 Análise qualitativa e controle ótimo para o sistema com uma presa e um predador

Vamos analisar o problema Lotka-Volterra, uma presa e um predador com competição entre espécies, destacando que nenhum controle é aplicado no sistema.

Para o caso de não haver competição, o estudo é similar, basta anularmos os coeficientes que traduzem a competição interespecífica das espécies, os termos cruzados respectivos e, dar sequencia ao tratamento do problema, normalmente.

4.1.1 Sistema sem controle

Dado o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r_1x_1 - a_{11}x_1^2 - a_{12}x_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -r_2x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \end{cases} \quad (4.1)$$

onde x_1, x_2 representam respectivamente o número de espécies por metro quadrado da presa, a lagarta: *Spodoptera frugiperda*, e o predador: a vespa *Trichogramma*.

O coeficiente r_1 representa o valor da taxa de crescimento da população de presas: a lagarta-do-cartucho *Spodoptera frugiperda*; r_2 representa o valor da taxa de mortalidade da população de predadores: a vespa *Trichogramma*, e os coeficientes a_{ij} , $i, j = 1, 2$, representam as taxas interespecíficas das populações presa-predadores, consideradas no sistema. Na seção 2.1, encontramos os dados divulgados pela EMBRAPA para o ciclo de vida da espécie de lagarta-do-cartucho de milho e do parasitoide vespa *Trichogramma*.

Segundo o modelo de Malthus, podemos calcular cada uma das taxas de crescimento e mortalidades das espécies. Na forma generalizada:

$$x_i = x_{i_0} \cdot e^{r_i t}, \quad i = 1, 2,$$

onde o valor inicial da densidade da espécie i é representado por x_{i_0} . A menos do sinal, r_i é a taxa de natalidade ou mortalidade da espécie i . Assim, calculando o coeficiente r_1 para a presa: a lagarta-do-cartucho, com a informação obtida da EMBRAPA [18], de que na postura existem cerca de 100 ovos, e ciclo de vida de 30 dias, podemos escrever:

$$100 = 1 \cdot e^{30r_1}.$$

Com o seguinte resultado: $r_1 = 0,15$ para a taxa de crescimento da lagarta-do-cartucho.

Para o cálculo do coeficiente r_2 , do parasitoide: vespa *Trichogramma*, utiliza-se a informação da EMBRAPA [18] que relata o número esperado de mortes da espécie: entre 1 a 4, durante o ciclo de vida de 10 dias. Para o pior caso, obtém-se $r_2 = \frac{1}{10} = 0,10$, que por ser tratada na equação com sinal negativo, representa a taxa de mortalidade de vespas: parasitoide *Trichogramma*.

Esses e os demais valores dos coeficientes estão resumidos na tabela 4.1.

Destaque, não há competição entre os predadores, ou seja, as vespas não competem entre si, daí: $a_{22} = 0$.

r_1	r_2	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
0,15	0,10	0,0009	0,036	0,0015	0

Tabela 4.1: Valores dos coeficientes do modelo simples, uma presa e um predador com competição. Fonte: [15].

Primeiramente é necessário determinar os pontos críticos do sistema (4.1), a saber:

$$\begin{cases} r_1 x_1 - a_{11} x_1^2 - a_{12} x_1 x_2 = 0 \\ -r_2 x_2 + a_{21} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

reescrevendo:

$$\begin{cases} x_1(r_1 - a_{11} x_1 - a_{12} x_2) = 0 \\ x_2(-r_2 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Assim, podemos obter os seguintes pontos críticos:

$$P_1 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0), \quad (4.4)$$

$$P_2 = \left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0 \right), \quad (4.5)$$

$$P_3 = \left(0, \frac{r_2}{a_{22}} \right), \quad (4.6)$$

$$P_4 = \left(\frac{r_1 a_{22} - r_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \frac{r_2 a_{11} - r_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right). \quad (4.7)$$

Assumindo que $(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \neq 0$ e substituindo $a_{22} = 0$ (sem competição entre predadores: a vespa parasitoide *Trichogramma*), teremos as coordenadas destacadas abaixo calculadas com os valores da tabela 4.1 nas equações (4.4) a (4.7), encontramos os seguintes pontos críticos:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (166, 67; 0), \quad P_4 = (66, 67; 2, 5).$$

Observamos que o ponto P_3 não pode ser definido, uma vez que o coeficiente $a_{22} = 0$.

Analisando cada ponto crítico, verifica-se que o ponto P_1 não é um ponto de interesse, visto que não há lagarta e nem vespa na lavoura do milho. Quanto ao ponto P_2 , observa-se que a lagarta-do-cartucho está presente na lavoura e livre de ataques de predadores ou parasitoides. Pelo valor apresentado a densidade populacional da lagarta-do-cartucho *Spodoptera frugiperda* afetará de forma destrutiva a lavoura, o valor é muito superior ao nível de danos econômicos e biológicos estabelecidos pela EMBRAPA, conforme [18], que é no máximo de 7 lagartas por metro quadrado. Desse modo, é urgente a intervenção e o manejo integrado de pragas, com o controle biológico através da inserção de inimigos naturais, tais como a vespa *Trichogramma*.

No ponto P_3 , definido em (4.6) a lavoura não corre nenhum risco, pois não há praga. A lagarta-do-cartucho não está presente, no entanto, existe a vespa e ela corre o risco de desaparecer, exatamente por ausência do hospedeiro (a lagarta *Spodoptera frugiperda*) de seus ovos.

O ponto P_4 é o único de interesse dos estudos biológicos e de controle de pragas na lavoura, pois lagartas e vespas coexistem no mesmo espaço físico e, competem entre si por sobrevivência. Além do que, como já foi relatado acima, a lagarta-do-cartucho tem densidade populacional acima do nível de danos econômicos e biológicos, exigindo o controle das pragas (a lagarta *Spodoptera frugiperda*).

Estabelecido o ponto de interesse P_4 , seguimos o estudo do controle de pragas. Por se tratar o sistema Lotka-Volterra um sistema autônomo não-linear, é necessário aplicar o processo de linearização no sistema (4.1) aplicado ao ponto P_4 .

Supondo uma pequena perturbação no sistema em torno dos pontos críticos estáveis, podemos encontrar a matriz Jacobiana aplicada ao ponto de estabilidade:

$$\mathbf{J}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \begin{pmatrix} r_1 - 2a_{11}\bar{x}_1 - a_{12}\bar{x}_2 & -a_{12}\bar{x}_1 \\ a_{21}\bar{x}_2 & -r_2 + a_{21}\bar{x}_1 + 2a_{22}\bar{x}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

substituindo os valores da tabela 4.1, na matriz Jacobiana, observamos:

$$\mathbf{J}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \begin{pmatrix} 0,15 - 2(0,0009)\bar{x}_1 - 0,036\bar{x}_2 & -0,036\bar{x}_1 \\ 0,0015\bar{x}_2 & -0,1 + 0,0015\bar{x}_1 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

A partir do qual é possível construir a tabela a seguir, conforme a análise de estabilidade introduzida na seção 2.2.4:

Ponto Crítico	$\gamma = \det \mathbf{J}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$	$\beta = Tr \mathbf{J}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$	$\beta^2 - 4\gamma$	Classificação
(0, 0)	< 0	> 0	> 0	Ponto de Sela
(166, 67; 0)	< 0	< 0	> 0	Ponto de Sela
(66, 67; 2, 5)	> 0	< 0	< 0	Espiral Estável

Tabela 4.2: Classificação dos pontos críticos para o sistema L-V uma presa e um predador, sem controle.

O interesse é o ponto $P_4 = (66, 67; 2, 5)$, o único que exige atenção, pois o valor da densidade de presas por metro quadrado está acima do nível de danos econômicos à lavoura: 7 lagartas por metro quadrado. Portanto, há necessidade urgente de correção e controle no manejo de pragas.

Feita a substituição dos valores introduzidos na tabela 4.1 e do ponto crítico de interesse, na matriz Jacobiana (4.9), temos:

$$\mathbf{J}(66, 67; 2, 5) = \begin{pmatrix} -0,06 & -2,4 \\ 0,00375 & 0,000005 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Avaliando a equação característica dos autovalores, a partir da matriz Jacobiana resultante anterior, encontramos:

$$\lambda_1 = -0,03 + 0,09i \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -0,03 - 0,09i,$$

em conformidade com a análise de estabilidade apresentada na tabela 4.2. Caracterizando o ponto P_4 como ponto de equilíbrio, $P_{eq} = (66, 67; 2, 5)$ um ponto espiral assintoticamente estável, figura 4.2.

A figura 4.1 representa a dinâmica da densidade populacional do sistema uma presa e um predador com competição entre as espécies. O gráfico apresenta oscilações na densidade de pragas: a lagarta-do-cartucho, após a primeira ascensão, observamos um pico na densidade populacional da presa: a lagarta-do-cartucho em torno de 150 lagartas por metro quadrado do plantio do milho, este nível é absurdo.

O agricultor terá de recorrer aos insumos ou inseticidas, de custo elevado e com riscos ambientais, ou urgentemente implantar o correto manejo integrado de pragas, talvez incluindo inimigos naturais, no caso, o parasitoide *Trichogramma*, na lavoura do milho.

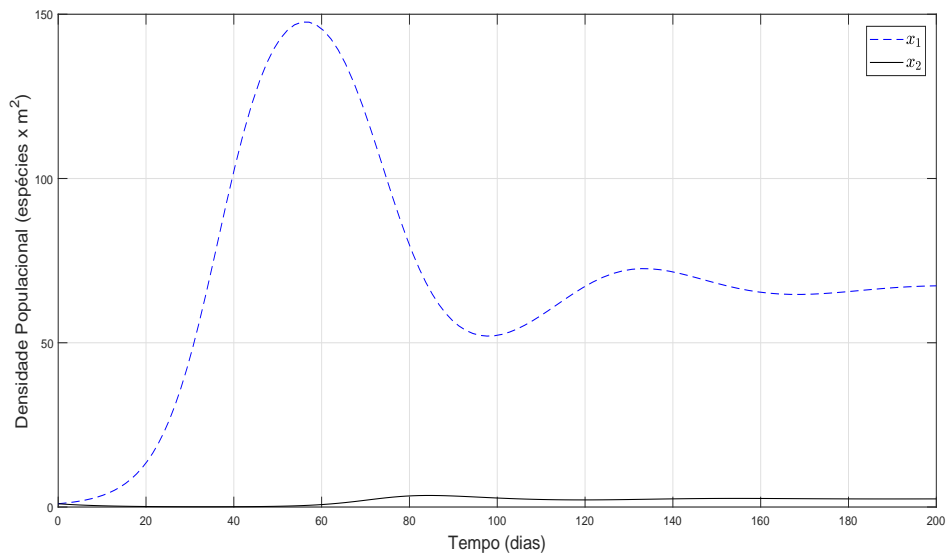


Figura 4.1: Dinâmica da densidade populacional do sistema uma presa e um predador com competição entre as espécies, condição inicial $(1, 1)$.

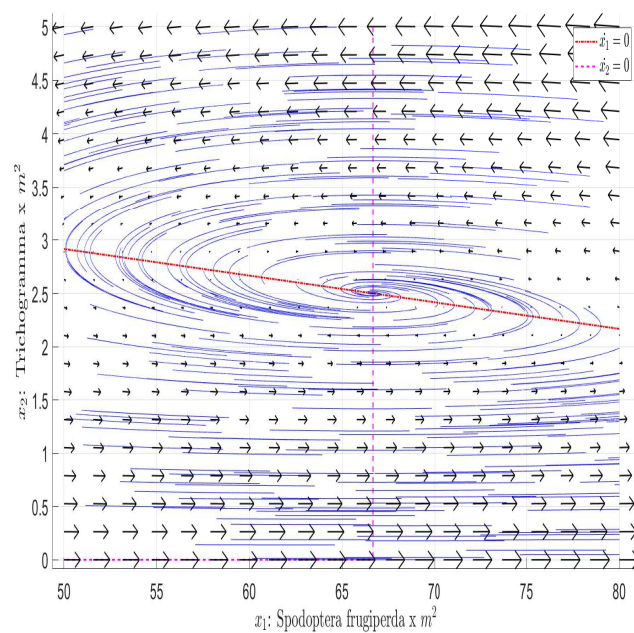


Figura 4.2: Plano de fase do sistema L-V: uma presa e um predador, sem controle e espiral estável em $P_{eq} = (66, 67; 2, 5)$.

4.1.2 Sistema com controle ótimo linear

Continuando o problema anterior, há a necessidade de controle biológico de pragas, pois a densidade de pragas, a lagarta *Spodoptera frugiperda*, está acima do recomendado, que é de 7 lagartas por metro quadrado do plantio na lavoura de milho.

O que se faz é acrescentar uma função U , de controle, no caso: controle linear aplicado

à presa ou ao predador ou ambos, capaz de levar a trajetória do ponto inicial ao ponto final, satisfeitas as condições iniciais e de horizonte infinito (4.15), sob efeito de minimização da função de custo quadrático (4.16), e garanta a estabilidade assintótica no ponto de equilíbrio. Após o acréscimo das funções U_i , acoplamento de controle em ambas espécies, o sistema fica expresso na forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (r_1x_1 - a_{11}x_1^2 - a_{12}x_1x_2) + U_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -(r_2x_2 - a_{21}x_1x_2 - a_{22}x_2^2) + U_2 \end{cases} \quad (4.11)$$

onde

$$U_i = u_i + \bar{u}_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.12)$$

e

$$\bar{u}_i = (-1)^i \bar{x}_i \left(r_i - \sum_{j=1}^2 a_{ij} \bar{x}_j \right), \quad (4.13)$$

onde \bar{u}_i é a parcela de controle de realimentação direta (feedforward control), \bar{x}_1 e \bar{x}_2 são os valores das variáveis de estados no equilíbrio. Observe que a variável de estado de controle de realimentação direta, \bar{u}_i (feedforward control) (4.13), será calculada para o ponto fixo de equilíbrio.

O problema agora é encontrar uma função de controle de retroalimentação u_i (feedback control), que force, ou melhor, transfere o sistema (4.11) do estado inicial:

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \quad (4.14)$$

ao estado final:

$$x_i(\infty) = \bar{x}_i, \quad (4.15)$$

onde \bar{x}_i são os pontos fixos de equilíbrios que desejamos sejam atingidos após aplicar o controle ótimo. Certamente serão valores menores que os estabelecidos pelo parâmetro de danos econômicos e biológicos na lavoura do milho.

Aplicando a linearização do sistema e a teoria da programação dinâmica, apresentada na seção 3.1, vamos minimizar o funcional custo quadrático:

$$\mathcal{J}(Y, u) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (Y^T Q Y + u^T R u) dt, \quad (4.16)$$

onde $Y = (x_i - \bar{x}_i)$ é a variável de estado transformada na matriz de desvio, que representa o efeito da perturbação em torno do ponto de estabilidade; Q uma matriz

positiva semi-definida: conhecida como matriz peso, e definimos a matriz R uma matriz positiva definida.

No sistema (4.11) aparece o termo do vetor função controle U_i , equação (4.12).

Substituindo u_i e \bar{u}_i , após o processo de linearização do sistema (4.11), o sistema equivalente resultante será (4.17). Observe que o lado direito foi substituído pela aproximação de Taylor aplicada ao ponto de equilíbrio desejado:

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = (r_1 - 2a_{11}\bar{x}_1 - a_{12}\bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) - a_{12}\bar{x}_1(x_2 - \bar{x}_2) + u_1 \\ \frac{dY_2}{dt} = a_{21}\bar{x}_2(x_1 - \bar{x}_1) + (-r_2 + a_{21}\bar{x}_1 + 2a_{22}\bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) + u_2. \end{cases} \quad (4.17)$$

Sabe-se que $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2), g(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ são nulas e \mathbf{J} é a matriz Jacobiana aplicada ao ponto de equilíbrio:

$$\mathbf{J}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \begin{pmatrix} f'_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & f'_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ g'_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & g'_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{J}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \begin{pmatrix} r_1 - 2a_{11}\bar{x}_1 - a_{12}\bar{x}_2 & -a_{12}\bar{x}_1 \\ a_{21}\bar{x}_2 & -r_2 + a_{21}\bar{x}_1 + 2a_{22}\bar{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Assim, podemos reescrever o sistema linearizado na forma matricial:

$$\dot{Y} = \mathbf{J}Y + Bu, \quad (4.20)$$

onde B é a matriz identidade de ordem 2. Substituindo os valores dos parâmetros da tabela 4.1, a matriz Jacobiana fica determinada:

$$\mathbf{J}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \begin{pmatrix} 0,15 - 0,0018\bar{x}_1 - 0,036\bar{x}_2 & -0,036\bar{x}_1 \\ 0,0015\bar{x}_2 & -0,1 + 0,0015\bar{x}_1 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Para encontrarmos a dinâmica do sistema (4.20) equivalente a (4.11), falta calcular a lei de controle de realimentação u do sistema, conforme a formulação do sistema L-V com controle linear estabelecida na seção 3.1 e equação (3.9).

O sistema (4.20) pode ser expresso na forma equivalente:

$$\begin{pmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,15 - 0,0018\bar{x}_1 - 0,036\bar{x}_2 & -0,036\bar{x}_1 \\ 0,0015\bar{x}_2 & -0,1 + 0,0015\bar{x}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + Bu. \quad (4.22)$$

Para manter o sistema no ponto de equilíbrio desejado, escolhemos $\bar{x}_1 = 6 \leq 7$, lembrando que o valor mínimo de lagartas por metro quadrado é 7, para que não cause danos econômicos à lavoura. Consequentemente, substituindo este valor na primeira equação do sistema (4.3), $\bar{x}_2 = \frac{r_1 - a_{11}\bar{x}_1}{a_{12}}$, resulta no valor $\bar{x}_2 = 4$. Assim, o ponto de equilíbrio é determinado, $P_{eq} = (6, 4)$.

As simulações foram realizadas no MATLAB[®], utilizando-se as funções ODE45, que emprega a função RK4, Runge-Kutta de quarta ordem, para resolução do sistema de equações diferenciais, além de utilizar a função LRQ, Regulador Linear Quadrático para o cálculo da equação de Riccati.

As seguintes matrizes são fornecidas, conforme [15]:

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

onde é Q a matriz peso, R^{-1} a inversa da matriz peso referente à variável de controle do funcional de custo (4.16) e B a matriz que determina a forma de como o controle atua, qual ou em quais variáveis será aplicada, efeito de acoplamento do controle. A matriz Jacobiana é calculada, e fornece:

$$\mathbf{J}(6, 4) = \begin{pmatrix} -0,0048 & -0,2160 \\ 0,0060 & -0,0910 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Daí, obtemos $\beta = Tr(\mathbf{J}(6, 4)) = -0,0958 < 0$, e $\gamma = det(\mathbf{J}(6, 4)) \approx 0,0017 > 0$ e $\beta^2 - 4\gamma \approx 0,0024 > 0$, caracterizando o ponto $(6, 4)$ como nó estável. Por outro lado, a matriz S , obtida a partir da equação de Riccati (3.11):

$$S = \begin{pmatrix} 3,1555 & -0,1048 \\ -0,1048 & 3,0780 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

iremos substituí-la na equação (3.9), junto com as matrizes R^{-1} e B^T apresentadas em (4.23). Desta forma, encontramos a função Controle Ótimo u_i , exibidas em (4.26), que leva o sistema (4.11) à estabilidade assintótica, $\bar{x}_1 = 6$ e $\bar{x}_2 = 4$, e expressa na forma:

$$\begin{aligned} u_1 &= -3,1555 (x_1 - 6) + 0,1048 (x_2 - 4), \\ u_2 &= 0,1048 (x_1 - 6) - 3,0780 (x_2 - 4). \end{aligned} \quad (4.26)$$

As curvas da figura 4.3 mostram as dinâmicas temporais das soluções do sistema (4.11), com controle linear aplicado em ambas variáveis de estado x_1 e x_2 . Pelo que

podemos observar a efetividade do controle de pragas é atingida em torno de dois dias e meio, e estabilidade assintótica (definição 2.3.2), respectivamente em 6 e 4 espécies por metro quadrado, que garante plenamente as condições de manejo integrado a níveis abaixo dos danos econômicos à lavoura, que é menor do que 7 lagartas por metro quadrado.

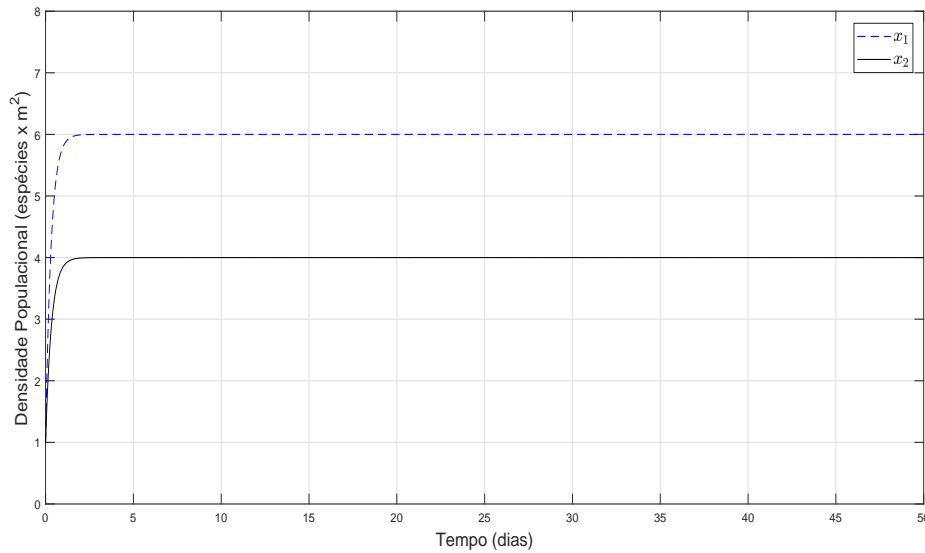


Figura 4.3: Dinâmica do sistema uma presa e um predador com controle linear, condição inicial $(1, 1)$.

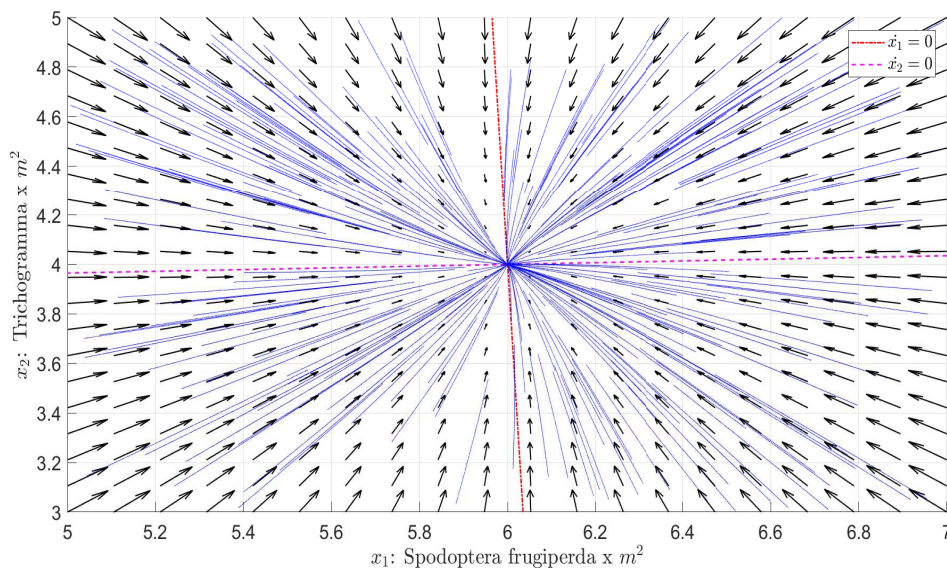


Figura 4.4: Plano de fase do sistema L-V: uma presa e um predador, com controle linear e nó estável em $P_{eq} = (6, 4)$.

As figuras 4.4 e 4.5 mostram, respectivamente, o efeito do controle linear através do plano de fase com destaque o ponto de equilíbrio desejado, $P_{eq} = (6, 4)$ e a órbita correspondente à trajetória do ponto inicial $(1, 1)$ ao ponto fixo final $(6, 4)$.

O valor do funcional de custo ótimo, calculado conforme definido em (3.13), para a condição inicial $(1, 1)$ foi de: $\mathcal{J}^u(1, 1) = 3,012$.

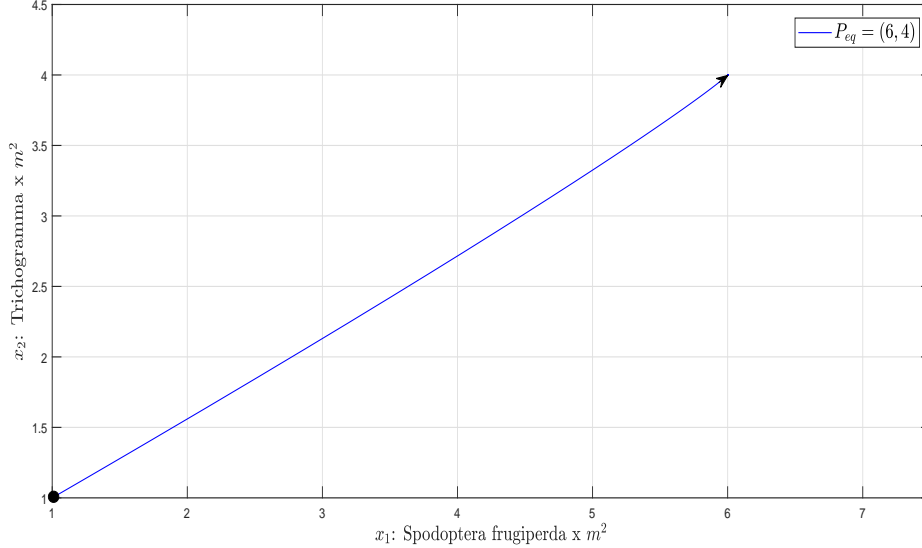


Figura 4.5: Trajetória do sistema uma presa e um predador com controle linear, condição inicial $(1, 1)$ e ponto final $(6, 4)$.

4.1.3 Sistema com controle ótimo não-linear

Equivalentemente ao que foi desenvolvido na seção anterior, deseja-se encontrar a função de controle ótimo do modelo que descreve a dinâmica do sistema (3.14) para $n = 2$, aplicando o controle do tipo não-linear. De forma que leve a trajetória de um ponto inicial a outro ponto fixo final, por auxílio da função valor de Bellman (4.28), que satisfaça a condição de horizonte infinito. Ainda, seja capaz de minimizar o funcional de custo quadrático:

$$\mathcal{J}(Y, u) = \int_0^{+\infty} (Y^T Q Y + u^T R u) dt, \quad (4.27)$$

mediante a resolução da equação de HJB (3.6), garantindo a estabilidade assintótica no ponto de equilíbrio. Assim, o controle ótimo garante que o processo mantenha a população de pragas em níveis abaixo dos danos econômicos à lavoura.

O que faremos agora é encontrar os coeficientes que definem a função valor de Bellman, a partir do modelo L-V com controle não-linear, seção 3.2.

A função valor de Bellman generalizada sugerida é do tipo logarítmica,

$$V(x_i) = \sum_{i=1}^2 c_i \left(x_i - \bar{x}_i - \bar{x}_i \ln \left(\frac{x_i}{\bar{x}_i} \right) \right). \quad (4.28)$$

Na seção 3.2 foi feito o desenvolvimento da parte teórica do controle ótimo não-linear aplicado:

$$u_i = -\frac{c_i(x_i - \bar{x}_i)}{2m_i}, \quad i = 1, 2. \quad (4.29)$$

Daí, substituindo as equações (4.28) e (4.29) na equação HJB (3.6), teremos:

$$\begin{aligned} & -c_1 a_{11} (x_1 - \bar{x}_1)^2 - c_1 a_{12} (x_1 - \bar{x}_1) (x_2 - \bar{x}_2) - c_2 a_{21} (x_1 - \bar{x}_1) (x_2 - \bar{x}_2) + \\ & -c_2 a_{22} (x_2 - \bar{x}_2)^2 - \frac{c_1^2 (x_1 - \bar{x}_1)^2}{2m_1} + \frac{c_2^2 (x_2 - \bar{x}_2)^2}{2m_2} + \frac{c_1^2 (x_1 - \bar{x}_1)^2}{4m_1} + q_{11} (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \\ & + q_{21} (x_1 - \bar{x}_1) (x_2 - \bar{x}_2) + q_{12} (x_1 - \bar{x}_1) (x_2 - \bar{x}_2) + q_{22} (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \\ & - \frac{c_1^2 (x_1 - \bar{x}_1)^2}{2m_1} + \frac{c_1^2 (x_1 - \bar{x}_1)^2}{4m_1} = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Arranjando os termos semelhantes, podemos confirmar o sistema:

$$\begin{cases} -c_1 a_{11} - \frac{c_1^2}{2m_1} + q_{11} + \frac{c_1^2}{4m_1} = 0 \\ -c_1 a_{12} - c_2 a_{21} + q_{21} + q_{12} = 0 \\ -c_2 a_{22} - \frac{c_2^2}{2m_2} + q_{22} + \frac{c_2^2}{4m_2} = 0. \end{cases} \quad (4.31)$$

A fim de resolvê-lo, tomemos os seguintes coeficientes da matriz Q , de forma análoga às simulações feitas em [15]:

$$q_{11} = 3,75 \times 10^{-5} \quad q_{12} = q_{21} = 1,50 \times 10^{-3} \quad \text{e} \quad q_{22} = 1,25 \times 10^{-2},$$

e também os parâmetros referentes da tabela 4.1.

Estes valores serão substituídos no sistema não-linear (4.31), que resolvido numericamente, fornecem os coeficientes das equações (4.28) e (4.29):

$$c_1 = 0,0417, \quad c_2 = 1 \quad \text{e} \quad m_1 = m_2 = 20.$$

A partir deles, fica determinado por completo a função valor de Bellman (4.28) e principalmente, as funções controle ótimo (feedforward control) (4.13) e (feedback control) (4.29):

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= -r_1 + a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 = -0,0006, \\ \bar{u}_2 &= r_2 - a_{21}\bar{x}_1 - a_{22}\bar{x}_2 = 0,09100, \end{aligned} \quad (4.32)$$

e

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{0,0417}{40}(x_1 - 6), \\ u_2 &= -\frac{1}{40}(x_2 - 4). \end{aligned} \quad (4.33)$$

A análise do resultado pode ser feita a partir da figura 4.6, observa-se que para este caso, a estratégia do controle não-linear foi eficiente. A estabilidade do ponto fixo, $P_{eq} = (6, 4)$ foi atingida em torno de 140 dias, um tempo considerado longo na safra, mas em momento algum o valor máximo ultrapassa a densidade de 7 espécies de presas por m^2 na lavoura, estabelecido como nível de danos econômicos e biológicos pela EMBRAPA. O valor do funcional custo ótimo calculado, conforme definido em (3.54), para a condição inicial $(2, 2)$ foi de: $\mathcal{J}^u(2, 2) = 0,881$.

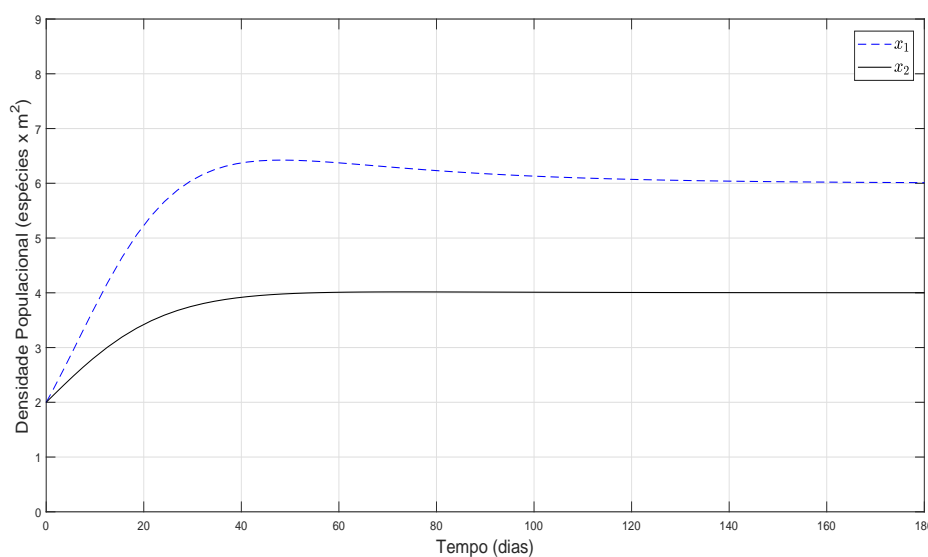


Figura 4.6: Dinâmica do sistema uma presa e um predador com controle não-linear, condição inicial $(2, 2)$.

O prazo estabelecido, significa um tempo razoavelmente longo, tendo em vista as expectativas pretendidas, a de salvaguardar a economia do agronegócio do campo, além disso, esse prazo pode não ser benéfico suficiente, alguns outros fatores agregados, por exemplo, a temperatura, clima, estação do ano, poderiam influenciar e tornar o controle ineficiente durante este intervalo de tempo, o que seria uma agonia ao agricultor investidor. Atento a qualquer variação, para o agricultor seria tarde demais, qualquer outra nova tentativa de controle e manejo, pois existem riscos iminentes.

O tempo decorrido para a estabilidade e controle de pragas do tipo não-linear quando comparada ao caso do controle linear, demonstra que o caso linear traz vantagens, ele foi mais rápido, observamos um prazo de aproximadamente de 2,5 dias para atingir a estabilidade de controle de pragas, o que demonstra um processo de controle mais eficiente, eximindo por parte do agricultor, tomada de decisões e medidas novas extemporâneas, no combate as pragas, de médio e longo prazo.

A figura 4.7 mostra o plano de fase do sistema, com as respectivas isóclinas nulas, que garante a estabilidade assintótica no ponto de equilíbrio, $P_{eq} = (6, 4)$, sob controle tipo não-linear acoplado em ambas variáveis de estado x_1 e x_2 , e a figura 4.8 mostra a órbita correspondente à trajetória partindo da condição inicial até alcançar o ponto de equilíbrio desejado.

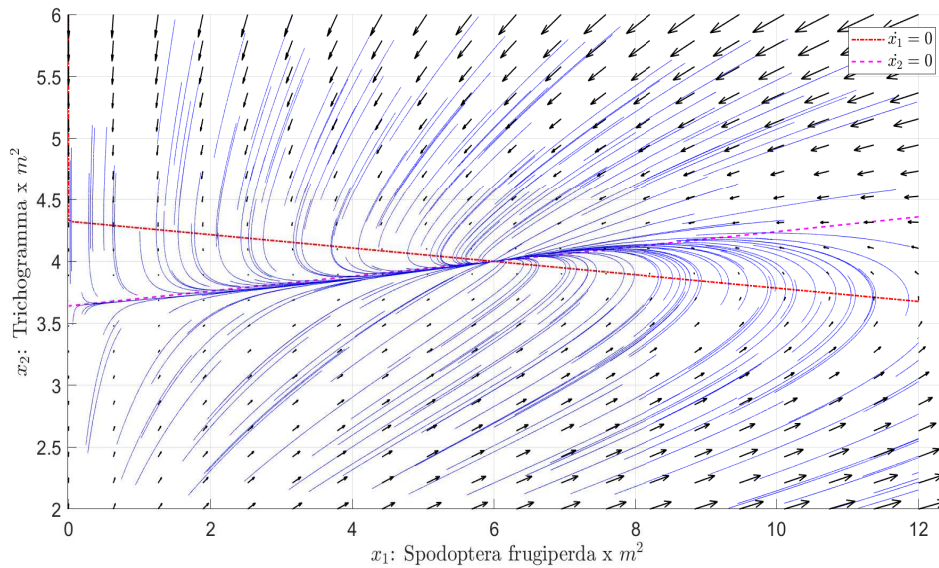


Figura 4.7: Plano de fase do sistema L-V: uma presa e um predador, com controle não-linear e nó estável em $P_{eq} = (6, 4)$.

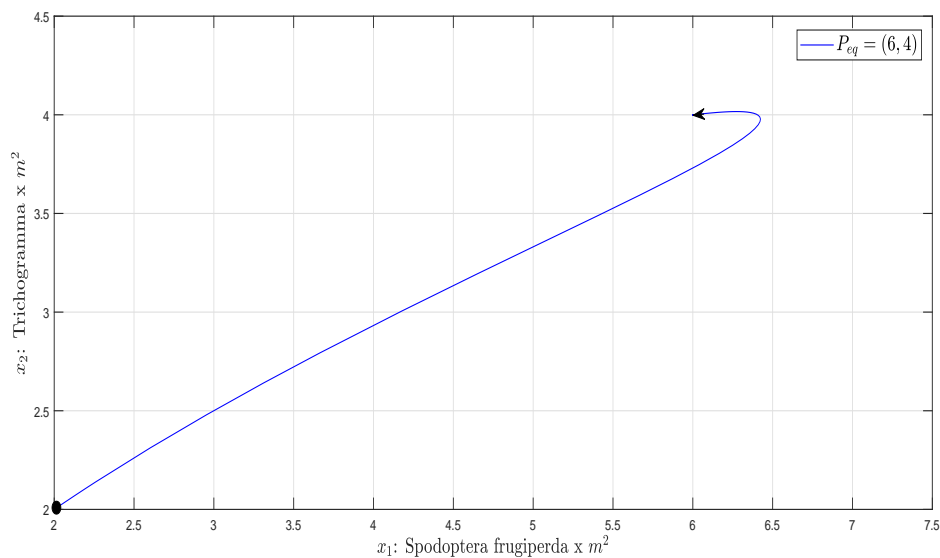


Figura 4.8: Trajetória do sistema uma presa e um predador com controle não-linear, condição inicial $(2, 2)$ e ponto de equilíbrio $(6, 4)$.

4.2 Análise qualitativa e controle ótimo para o sistema com duas presas e um predador

Vamos expressar o sistema na forma generalizada, para duas presas e um predador. As presas componentes são: a lagarta *Spodoptera frugiperda* e a *Helicoverpa armigera*. O predador, no caso: um parasitoide, a vespa: *Trichogramma*, que se adapta a ambos hospedeiros.

Destacando que não há controle aplicado, nesta fase.

4.2.1 Sistema sem controle

Fica assim determinado o sistema:

$$\dot{x}_i = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.34)$$

com $x_i(0) = x_{i_0}$ e ainda, a condição de horizonte infinito.

Deseja-se encontrar os pontos críticos do sistema (4.34), que pode ser reescrito na forma:

$$\begin{cases} x_1(r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) = 0 \\ x_2(r_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3) = 0 \\ x_3(r_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3) = 0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Observa-se que para cada equação acima, as variáveis de estados estão presentes como fatores de produtos, daí decorre uma das possíveis soluções: $P_1 = (0, 0, 0)$. Caso que não tem valor ao estudo de pragas na lavoura, pois não existem pragas e nem predadores ou ambas foram extintas.

Segue-se, resolver o sistema (4.36) para encontrar os outros pontos críticos possíveis:

$$\begin{cases} r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 = 0 \\ r_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 = 0 \\ r_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 = 0. \end{cases} \quad (4.36)$$

Encontrando os pontos críticos onde as coordenadas expressam apenas uma espécie sobrevivente na lavoura:

$$P_2 = (\bar{x}_1, 0, 0) = \left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0, 0 \right),$$

$$P_3 = (0, \bar{x}_2, 0) = \left(0, \frac{r_2}{a_{22}}, 0\right),$$

$$P_4 = (0, 0, \bar{x}_3) = \left(0, 0, \frac{r_3}{a_{33}}\right).$$

No ponto P_5 , as coordenadas indicam duas espécies de lagartas sobreviventes na lavoura:

$$P_5 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0) = \left(\frac{a_{22}r_1 - a_{12}r_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \frac{-a_{21}r_1 + a_{11}r_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, 0\right),$$

certamente a lavoura terá problemas irreparáveis, as presas crescem livremente sem interferências de predadores naturais.

Nos casos abaixo, inexistem uma das presas e esse caso já foi estudado na seção 4.1, sistema equivalente a uma presa e um predador:

$$P_6 = (\bar{x}_1, 0, \bar{x}_3) = \left(\frac{a_{33}r_1 - a_{13}r_3}{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}}, 0, \frac{-a_{31}r_1 + a_{11}r_3}{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}}\right),$$

$$P_7 = (0, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \left(0, \frac{a_{33}r_2 - a_{23}r_3}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}, \frac{-a_{32}r_2 + a_{22}r_3}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}\right).$$

Resolvendo o sistema de equações (4.36) pelo método de escalonamento encontramos o caso que nos interessa, cujo ponto crítico $P_8 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ é descrito conforme:

$$\bar{x}_1 = \frac{r_1 (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + r_2 (a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + r_3 (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12} (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}, \quad (4.37)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{r_1 (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + r_2 (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + r_3 (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})}{a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12} (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}, \quad (4.38)$$

$$\bar{x}_3 = \frac{r_1 (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + r_2 (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) + r_3 (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12} (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}. \quad (4.39)$$

Vamos simular esse caso para o sistema (4.34) com os parâmetros referentes à tabela 4.3, com base em [45]. Os resultados apresentam-se nas figuras 4.9 a 4.11.

		r_1	r_2	r_3					
		1	1	-1					
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	
0,001	0,001	0,01	0,0015	0,001	0,001	-0,005	-0,0005	0	

Tabela 4.3: Valores dos coeficientes do modelo simples, duas presas e um predador com competição.

O ponto P_8 , calculado segundo os parâmetros da tabela 4.3, pode ser explicitado na forma $P_8 = (118, 42; 815, 78; 6, 57)$ é instável, e retratado no plano de fase da figura

4.11. De fato, pode ser verificado que a parte real dos autovalores complexos conjugados correspondentes a esse ponto de equilíbrio são positivos. Além disso, este ponto na realidade nunca deveria ser permitido alcançar, pois os técnicos e agricultores de prontidão já teriam, bem no início, tomado as devidas providências no correto manejo integrado de pragas.

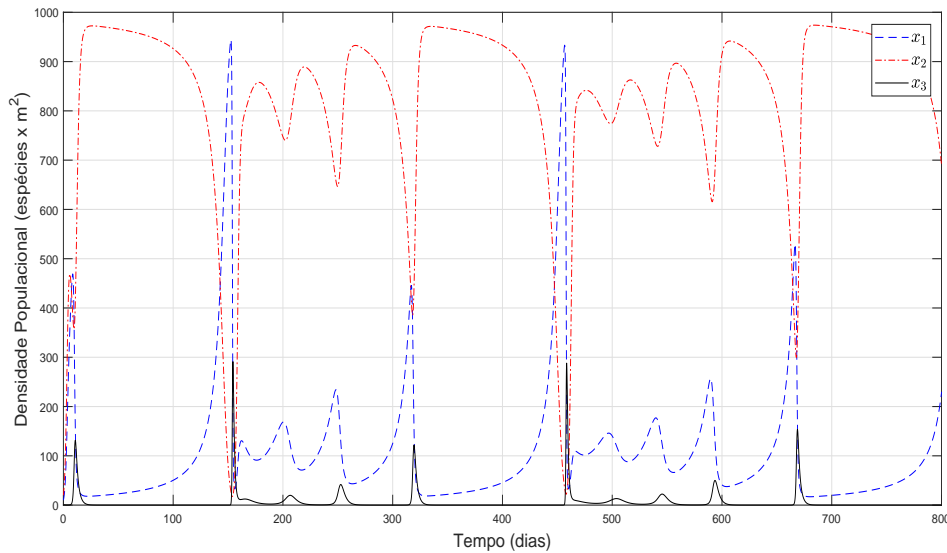


Figura 4.9: Dinâmica da densidade populacional do sistema duas presas e um predador com competição entre as espécies, condição inicial $(10, 20, 1)$.

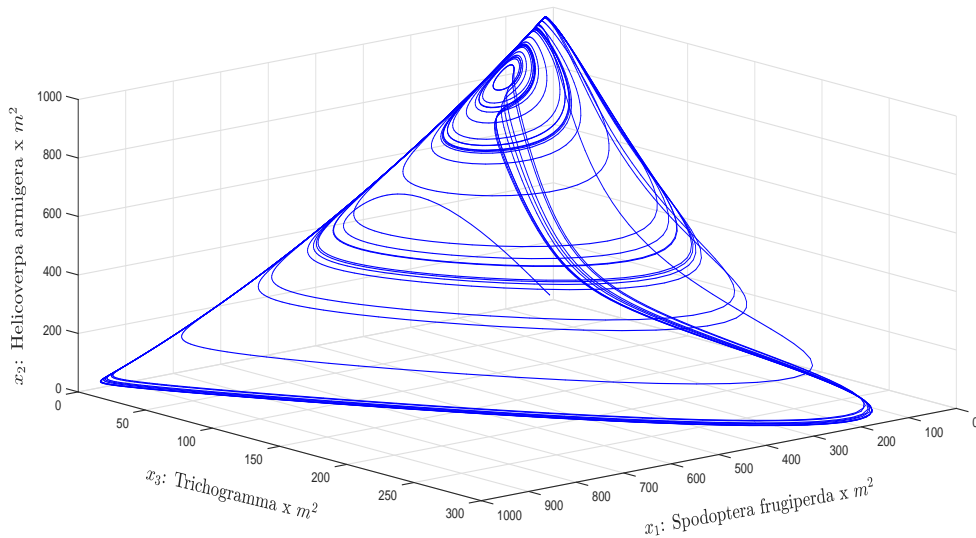


Figura 4.10: Comportamento caótico do sistema L-V: duas presas e um predador, sem controle.

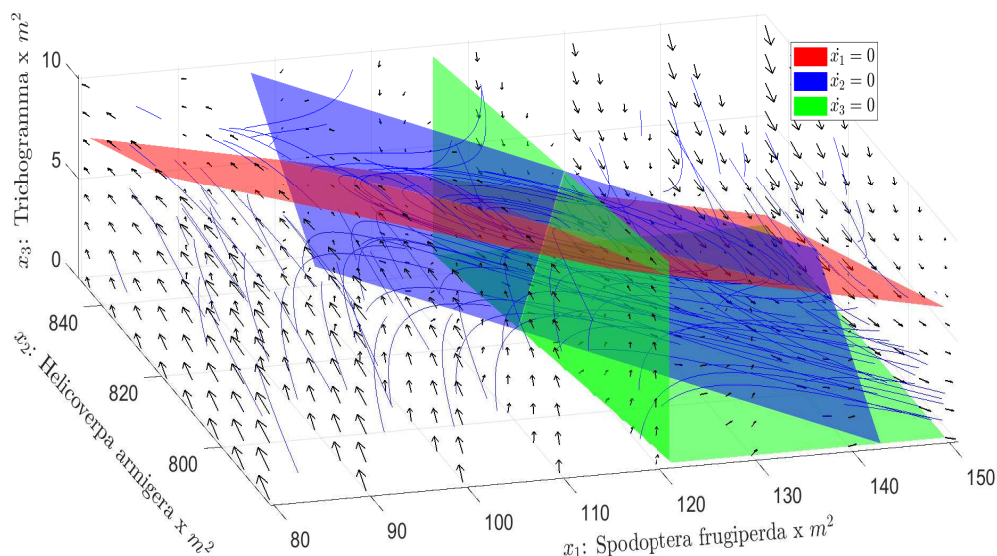


Figura 4.11: Plano de fase do sistema L-V: duas presas e um predador, sem controle e ponto de equilíbrio instável $P_{eq} = (118, 42; 815, 78; 6, 57)$.

Na figura 4.9 as dinâmicas temporais de cada espécie seguem certa regularidade, não exatamente periódicas e levam o sistema a uma trajetória estranha ou confusa. Alguns autores chamam de movimento caótico [45], mostrada na figura 4.10, os valores atingidos da variável de estado x_1 e x_2 , equivalente às pragas, demonstram que há urgência e decisão de manejo integrado de pragas, através do controle de inimigos naturais.

Observa-se que nos primeiros 30 dias, pelo menos uma das lagartas, a *Spodoptera frugiperda* ou a *Helicoverpa armigera*, ultrapassa o nível de danos econômicos e biológicos na lavoura, confirmando a necessidade urgente de controle de pragas. É o que vamos propor em seguida.

4.2.2 Sistema com controle ótimo linear

Do caso anterior, observamos que a densidade populacional de pragas estão em níveis elevados, que necessariamente exige por parte do agricultor um adequado manejo integrado de pragas, aplicando um controle urgente, pois a lavoura corre sérios riscos de danos econômicos e ecológicos. Usaremos a simulação para estabelecer a estratégia de controle.

Vamos aplicar a variável de controle nas presas e predadores, de forma linear e, verificar as implicações se atende ou não à estabilidade assintótica visando garantir o adequado manejo integrado de pragas na lavoura. Segue-se da teoria de controle

ótimo, a necessidade de minimizar o funcional de custo linear quadrático, equação (4.16), verificando-se as condições iniciais e de horizonte infinito do problema estabelecido. Para isso, a matriz de peso Q deverá ser fornecida, bem como a matriz B que determina a estratégia do acoplamento do controle ótimo. Nesta etapa, optou-se pelo controle aplicado nas três variáveis de estado. Essa estratégia requer descobrir qual a matriz S que compõe a função valor de Bellman (4.46), por aplicar a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, em seguida, resolver a equação algébrica de Riccati, que a determina por completo. A resposta, para essa estratégia, é a descoberta da função de controle ótimo linear, a chamada lei de realimentação de controle ótimo desejada que estabelece a estabilidade assintótica e mantém os níveis de pragas abaixo do nível de danos econômicos na lavoura.

Aqui, em particular, propomos usar a formulação de controle de pragas apresentada na seção 3.1 do capítulo 3.

Do sistema (4.34), vamos acrescentar junto às três variáveis de estado, x_1 : lagarta *Spodoptera frugiperda*, x_2 : lagarta *Helicoverpa armigera* e no predador x_3 , a vespa parasitoide *Trichogramma*, o efeito do controle tipo linear. Desta forma, o sistema modificado fica:

$$\dot{x}_i = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right) + U_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.40)$$

onde aplicaremos $U_i = u_i + \bar{u}_i$. Sabendo que:

$$\bar{u}_i = -\bar{x}_i \left(r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} \bar{x}_j \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.41)$$

representa a etapa de realimentação direta e u_i , controle feedback, será calculado na sequência através do processo de programação dinâmica. Para isso, iremos substituir a equação (4.41) em (4.40) e organizar o sistema transformando-o na função erro. A idéia, aplicar uma pequena perturbação na trajetória do sistema em torno do ponto crítico, e verificar se leva o sistema ao estado assintoticamente estável:

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = (r_1 - 2a_{11}\bar{x}_1 - a_{12}\bar{x}_2 - a_{13}\bar{x}_3)(x_1 - \bar{x}_1) - a_{12}\bar{x}_1(x_2 - \bar{x}_2) - a_{13}\bar{x}_1(x_3 - \bar{x}_3) + u_1 \\ \frac{dY_2}{dt} = -a_{21}\bar{x}_2(x_1 - \bar{x}_1) + (r_2 - a_{21}\bar{x}_1 - 2a_{22}\bar{x}_2 - a_{23}\bar{x}_3)(x_2 - \bar{x}_2) - a_{23}\bar{x}_2(x_3 - \bar{x}_3) + u_2 \\ \frac{dY_3}{dt} = -a_{31}\bar{x}_3(x_1 - \bar{x}_1) - a_{32}\bar{x}_3(x_2 - \bar{x}_2) + (r_3 - a_{31}\bar{x}_1 - a_{32}\bar{x}_2 - 2a_{33}\bar{x}_3)(x_3 - \bar{x}_3) + u_3. \end{cases} \quad (4.42)$$

Aqui, as coordenadas do ponto crítico $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ foram calculadas conforme equações (4.37) a (4.39), além de considerarmos $a_{33} = 0$, pois não há competição entre os

predadores: as vespas *Trichogramma*.

Assim, podemos reduzir o sistema (4.42) à forma matricial:

$$\dot{Y} = \mathbf{J}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)Y + Bu, \quad (4.43)$$

onde a matriz Jacobiana é calculada no ponto crítico estabelecido:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} (r_1 - 2a_{11}\bar{x}_1 - a_{12}\bar{x}_2 - a_{13}\bar{x}_3) & -a_{12}\bar{x}_1 & -a_{13}\bar{x}_1 \\ -a_{21}\bar{x}_2 & (r_2 - a_{21}\bar{x}_1 - 2a_{22}\bar{x}_2 - a_{23}\bar{x}_3) & -a_{23}\bar{x}_2 \\ -a_{31}\bar{x}_3 & -a_{32}\bar{x}_3 & (r_3 - a_{31}\bar{x}_1 - a_{32}\bar{x}_2 - 2a_{33}\bar{x}_3) \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

e B é a matriz identidade de ordem 3.

Selecionados os pontos fixos de equilíbrio: $\bar{x}_1 = 8$, $\bar{x}_2 = 10$, que garantem a densidade da população das presas abaixo do nível recomendado pela EMBRAPA [45], e $\bar{x}_3 = 4$, temos:

$$\mathbf{J}(8, 10, 4) = \begin{pmatrix} 0,934 & -0,008 & -0,080 \\ -0,015 & 0,964 & -0,010 \\ 0,020 & 0,002 & -0,956 \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Escolhe-se a função valor de Bellman matricial que satisfaz a condição de horizonte infinito (2.17), tipo:

$$V = \frac{1}{2}Y^T S Y, \quad (4.46)$$

onde S é uma matriz simétrica positiva definida, encontrada mediante o processo da programação dinâmica, introduzido na seção 3.1, e que será apresentada na sequência.

Primeiramente, derivando em relação à variável temporal a equação (4.46), segue que:

$$\dot{V} = \frac{1}{2}Y^T \dot{S} Y + S Y \dot{Y}, \quad (4.47)$$

e o gradiente fica na forma:

$$\nabla_Y V = S Y. \quad (4.48)$$

Da equação de HJB, temos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \nabla V^T \dot{Y} + \frac{1}{2}(Y^T Q Y + u^T R u) \right\} = 0,$$

$$\mathcal{H}(t, Y, \nabla_Y V) = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \nabla V^T \dot{Y} + \frac{1}{2}(Y^T Q Y + u^T R u) \right\}. \quad (4.49)$$

Calculando

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0,$$

que acarreta:

$$SYB + Ru = 0 \quad (4.50)$$

e portanto,

$$Ru = -SYB = -B^T SY,$$

$$u = -R^{-1}B^T SY. \quad (4.51)$$

Assim,

$$u^T = -Y^T R^{-1}B^T S. \quad (4.52)$$

Dado que podemos escrever a equação (4.49) na forma Hamiltoniana, descrita a partir do multiplicador de Lagrange, ω , fica:

$$\mathcal{H}(Y, u, \omega) = \frac{1}{2} (Y^T QY + u^T Ru) + \omega^T \cdot (\mathbf{J}Y + Bu), \quad (4.53)$$

para cumprir as condições de otimalidade [27], definimos $\omega \in \mathbb{R}^n$, o multiplicador de Lagrange e as condições de otimalidade abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} &= 0 \\ \dot{\omega} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y} \quad (\text{matriz adjunta}). \end{aligned}$$

Dado que

$$\mathcal{H} = \nabla_Y V \cdot (\mathbf{J}Y + Bu) + \frac{1}{2} (Y^T QY + Bu), \quad (4.54)$$

tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y} = QY + \nabla_Y V \mathbf{J}.$$

Portanto, podemos escrever:

$$\dot{\omega} = -QY - \mathbf{J}^T \nabla_Y V. \quad (4.55)$$

Como

$$\omega(t) = S(t)Y(t),$$

temos

$$\dot{\omega}(t) = \dot{S}(t)Y + S(t)\dot{Y}. \quad (4.56)$$

Substituindo o lado direito de (4.55), (4.43) e (4.48) em (4.56), matricialmente teremos:

$$-QY - \mathbf{J}^T(SY) = \dot{S}Y + S\mathbf{J}Y + SBu,$$

recuperando u , determinado em (4.51), encontramos:

$$-QY - \mathbf{J}^T S Y = \dot{S} Y + S \mathbf{J} Y + S B (-R^{-1} B^T S Y),$$

ou equivalentemente:

$$-Q - \mathbf{J}^T S = \dot{S} + S \mathbf{J} - S B R^{-1} B^T S,$$

fornecendo a equação algébrica de Riccati:

$$\dot{S} = -S \mathbf{J} - \mathbf{J}^T S + S B R^{-1} B^T S - Q.$$

Uma vez resolvida, mediante o uso da função LQR do MATLAB[®], a equação anterior fornece os valores da matriz S que determina o controle ótimo em (4.51).

Podemos realizar a seguinte simulação computacional, para o sistema (4.40), substituindo os dados encontrados dos coeficientes de S :

$$S = \begin{pmatrix} 4,2308 & -0,0149 & -0,0441 \\ -0,0149 & 4,2699 & -0,0056 \\ -0,0441 & -0,0056 & 2,3488 \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

e ainda os parâmetros da tabela 4.3, conforme [45], e

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R^{-1} = B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Desse modo, substituindo esses dados em (4.51), podemos encontrar a lei de controle ótimo:

$$\begin{aligned} u_1 &= -4,2308(x_1 - \bar{x}_1) + 0,0149(x_2 - \bar{x}_2) + 0,0441(x_3 - \bar{x}_3), \\ u_2 &= 0,0149(x_1 - \bar{x}_1) - 4,2699(x_2 - \bar{x}_2) + 0,0056(x_3 - \bar{x}_3), \\ u_3 &= 0,0441(x_1 - \bar{x}_1) + 0,0056(x_2 - \bar{x}_2) - 2,3488(x_3 - \bar{x}_3). \end{aligned} \quad (4.59)$$

A partir dos controles estabelecidos acima, verifica-se as figuras da dinâmica temporal de cada espécie, figura 4.12, e a órbita que define a trajetória resultante em levar o sistema do ponto inicial $(10, 20, 1)$ ao ponto fixo final de equilíbrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (8, 10, 4)$, figura 4.14. Nesta última figura, observamos que por conta das características semelhantes das lagartas, a órbita mantém-se linear:

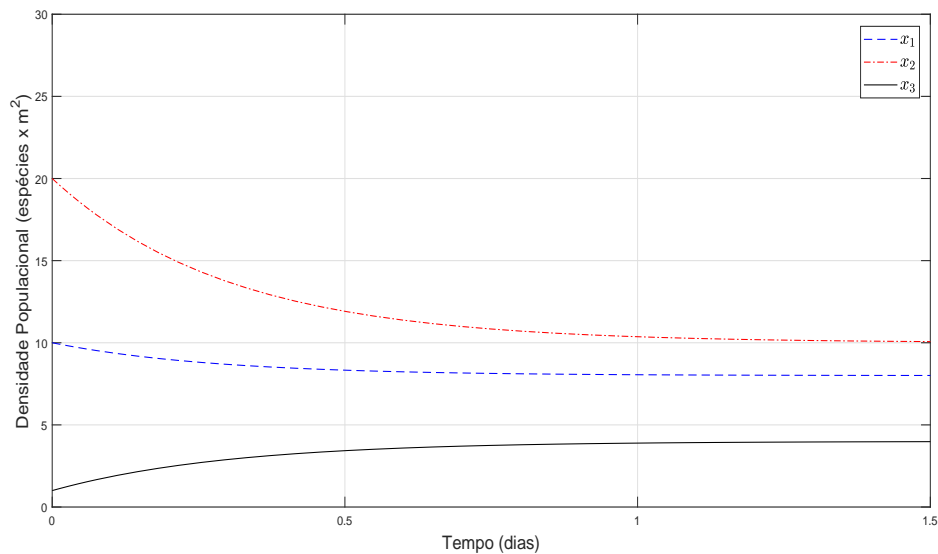


Figura 4.12: Dinâmica da densidade populacional do sistema duas presas e um predador com competição entre as espécies, condição inicial (10, 20, 1).

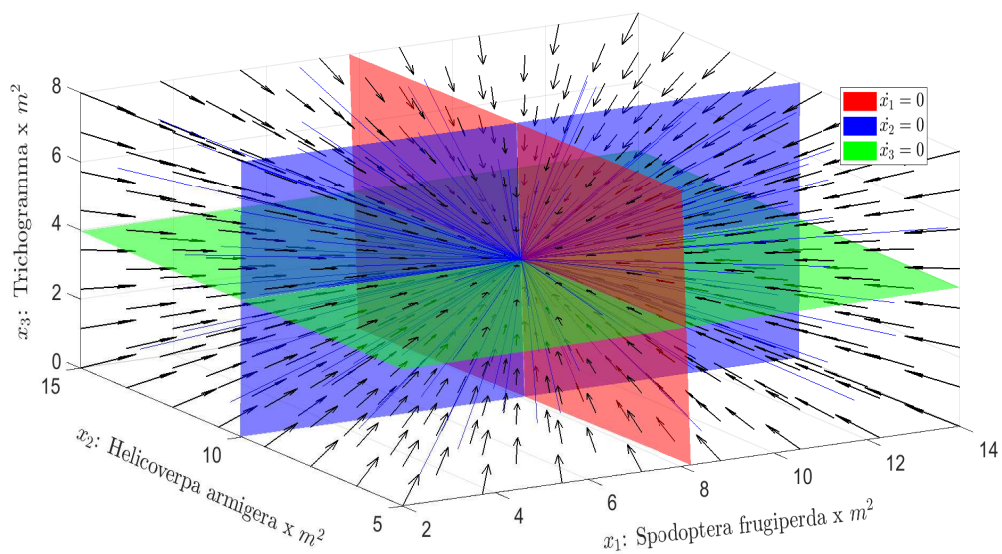


Figura 4.13: Plano de fase do sistema L-V: duas presas e um predador, com controle linear e ponto de equilíbrio assintoticamente estável $P_{eq} = (8, 10, 4)$.

A análise do sistema (4.40), duas presas e um predador com controle ótimo linear, mostrou-se eficiente. Quanto a dinâmica temporal, figura 4.12, observamos que a estabilidade foi atingida em torno de um dia e meio, e o limite esperado da quantidade de presas acumuladas, permanece abaixo de 20 presas por m^2 , aquém dos danos econômicos e biológicos na lavoura do milho recomendado pela EMBRAPA [37]. Se o agricultor, estiver atento ao manejo integrado de pragas, com contagens diárias é possível utilizar-se desta estratégia que terá um retorno rápido do efeito do controle biológico, e ao mesmo tempo sem muito custo. Visto que, as taxas de espécies observadas na simulação, que lhe

obrigam à soltura de inimigos naturais diariamente para a garantia do efetivo controle e manutenção do ecossistema do campo, são menores e nunca ultrapassam 5 predadores por metro quadrado por dia. A figura 4.13 mostra o detalhe em 3D do plano de fase com ponto fixo de equilíbrio $(8, 10, 4)$. Verifica-se que a parte real dos três autovalores calculados para este ponto é negativa, o que garante uma estabilidade assintótica a esse ponto de equilíbrio hiperbólico. A figura 4.15 mostra o plano de fase que destaca o ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Neste estudo, o valor do funcional custo ótimo calculado para a condição inicial $(10, 20, 1)$ foi: $\mathcal{J}^u(10, 20, 1) = 1,063 \times 10^3$.

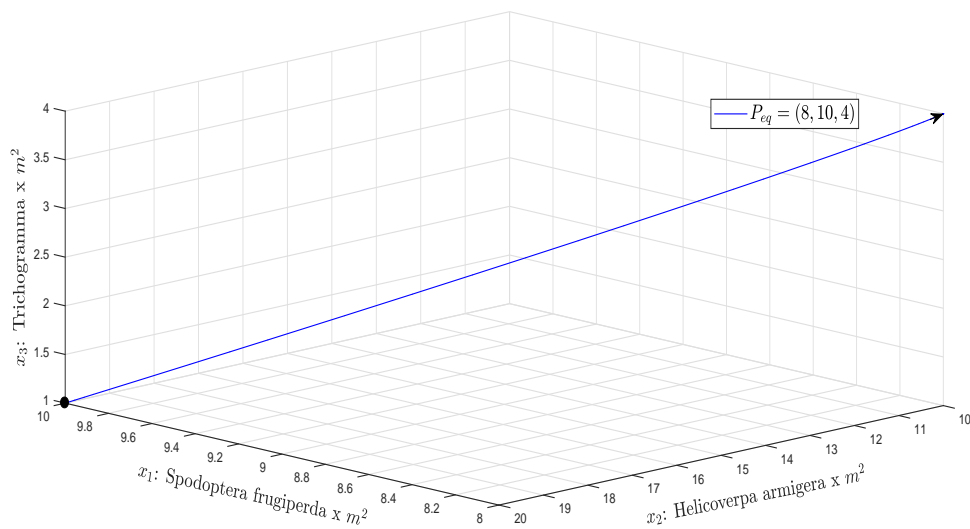


Figura 4.14: Trajetória do sistema duas presas e um predador com controle linear, condição inicial $(10, 20, 1)$ e ponto final $(8, 10, 4)$.

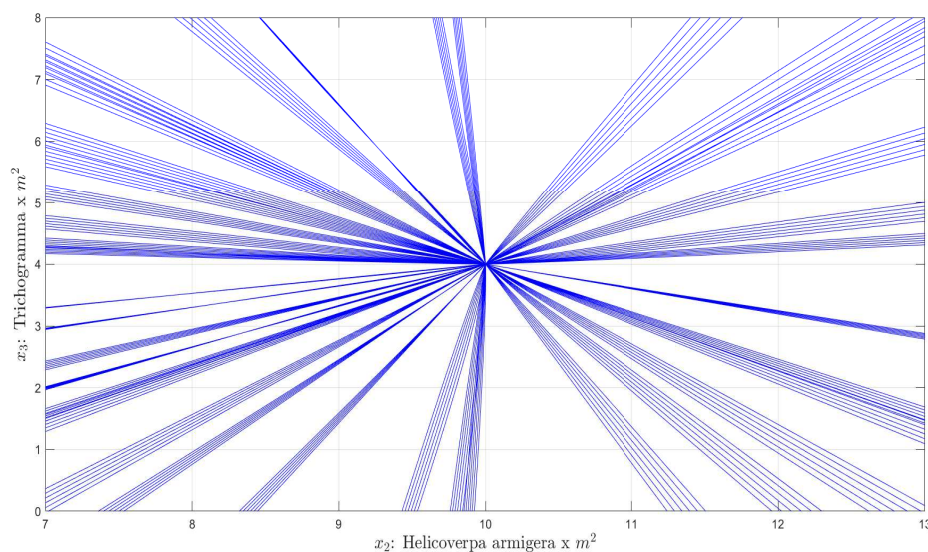


Figura 4.15: Plano de fase nas espécies x_2 e x_3 , ponto de estabilidade assintótica $P_{eq} = (8, 10, 4)$.

4.2.3 Sistema com controle ótimo não-linear

Dado o sistema na forma generalizada, defini-se o controle não-linear do sistema na forma:

$$\dot{x}_i = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j + u_i + \bar{u}_i \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.60)$$

onde o controle de realimentação direta é definido por:

$$\bar{u}_i = -r_i + \sum_{j=1}^3 a_{ij} \bar{x}_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.61)$$

com $\bar{x}_j > 0$ identificando os valores de ponto fixo, para onde as trajetórias devem convergir. A variável de controle u_i deve ser capaz de levar a trajetória do sistema da condição inicial ao ponto fixo de equilíbrio assintoticamente estável.

Da escolha acertada da função de Bellman (4.67), que atenda a condição de horizonte infinito, dá início à programação dinâmica. O objetivo, forçar a função de custo quadrático (4.64) a um valor mínimo, posteriormente aplicando-se a função de Bellman na equação HJB, e no final, obtém-se a lei de retroalimentação de controle ótimo desejado. Esta lei vai garantir que a população de pragas se mantenha ajustada a níveis abaixo dos danos econômicos e biológicos na lavoura do milho.

Seguindo as etapas desenvolvidas na formulação do sistema L-V na seção 3.2, e observar a trajetória que deve seguir, do ponto inicial:

$$x_i(0) = x_{i_0}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.62)$$

que leva o sistema, ao estado final:

$$x_i(\infty) = \bar{x}_i \quad (4.63)$$

e que minimiza o funcional de custo quadrático:

$$\mathcal{J}(Y, u) = \int_0^{+\infty} (Y^T Q Y + m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + m_3 u_3^2) dt. \quad (4.64)$$

Aqui percebe-se que aplicamos três variáveis de estado de controle u_i em cada variável correspondente de estado x_i , onde:

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ x_3 - \bar{x}_3 \end{pmatrix} \text{ e a matriz } Q \text{ é positiva definida.}$$

Conforme a programação dinâmica, temos a equação HJB reduzida:

$$\mathcal{H} = \min_{u=u_i} \left(\frac{dV}{dt} + \mathcal{L} \right) = 0 \quad (4.65)$$

onde

$$\mathcal{L} = Y^T Q Y + m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + m_3 u_3^2, \quad (4.66)$$

uma função de Bellman, que ainda, satisfaz a condição de horizonte infinito, $V(\infty) = 0$.

Conforme observado na seção 3.2, uma função de Bellman que sirva de base para a equação HJB (4.65) e (4.66), que minimiza a função de custo quadrática (4.64) e cumpra a condição de horizonte infinito, e portanto, leve a trajetória do sistema à estabilidade assintótica, pode ser:

$$V(x_i) = \sum_{i=1}^3 c_i \left(x_i - \bar{x}_i - \bar{x}_i \ln \left(\frac{x_i}{\bar{x}_i} \right) \right), \quad (4.67)$$

onde c_i são constantes positivas, que são calculadas pela equação de Riccati, decorrente da aplicação e transformação da equação HJB (4.65).

Derivando V em relação ao tempo:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^3 c_i (x_i - \bar{x}_i) \left(r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j + \bar{u}_i + u_i \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.68)$$

Substituindo as equações (4.61) e (4.68), na equação de HJB (4.65), temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \min_{u=u_i} \left\{ -c_1 a_{11} (x_1 - \bar{x}_1)^2 - c_1 a_{12} (x_1 - \bar{x}_1) (x_2 - \bar{x}_2) - c_1 a_{13} (x_1 - \bar{x}_1) (x_3 - \bar{x}_3) + \right. \\ -c_2 a_{21} (x_1 - \bar{x}_1) (x_2 - \bar{x}_2) - c_2 a_{22} (x_2 - \bar{x}_2)^2 - c_2 a_{23} (x_2 - \bar{x}_2) (x_3 - \bar{x}_3) + \\ -c_3 a_{31} (x_1 - \bar{x}_1) (x_3 - \bar{x}_3) - c_3 a_{32} (x_2 - \bar{x}_2) (x_3 - \bar{x}_3) - c_3 a_{33} (x_3 - \bar{x}_3)^2 + \\ \left. + c_1 u_1 (x_1 - \bar{x}_1) + c_2 u_2 (x_2 - \bar{x}_2) + c_3 u_3 (x_3 - \bar{x}_3) + \right. \\ \left. + Y^T Q Y + m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + m_3 u_3^2 \right\} = 0. \quad (4.69) \end{aligned}$$

A fim de encontrarmos a expressão do valor de u_i , derivamos:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} = 0, \quad (4.70)$$

gerando-se o sistema:

$$\begin{cases} c_1 (x_1 - \bar{x}_1) + 2m_1 u_1 = 0 \\ c_2 (x_2 - \bar{x}_2) + 2m_2 u_2 = 0 \\ c_3 (x_3 - \bar{x}_3) + 2m_3 u_3 = 0, \end{cases} \quad (4.71)$$

resultando nas respectivas variáveis de controle ótimo para o sistema (4.60), duas presas

e um predador com controle tipo não-linear, que facilmente pode ser adequado a qualquer problema de maior dimensão:

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{c_1}{2m_1}(x_1 - \bar{x}_1) \\ u_2 = -\frac{c_2}{2m_2}(x_2 - \bar{x}_2) \\ u_3 = -\frac{c_3}{2m_3}(x_3 - \bar{x}_3). \end{cases} \quad (4.72)$$

De volta, substituindo os valores expressos das equações (4.72) na equação (4.69):

$$\begin{aligned} \min_{u=u_i} \left\{ -c_1 a_{11}(x_1 - \bar{x}_1)^2 - c_1 a_{12}(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) - c_1 a_{13}(x_1 - \bar{x}_1)(x_3 - \bar{x}_3) + \right. \\ -c_2 a_{21}(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) - c_2 a_{22}(x_2 - \bar{x}_2)^2 - c_2 a_{23}(x_2 - \bar{x}_2)(x_3 - \bar{x}_3) + \\ -c_3 a_{31}(x_1 - \bar{x}_1)(x_3 - \bar{x}_3) - c_3 a_{32}(x_2 - \bar{x}_2)(x_3 - \bar{x}_3) - c_3 a_{33}(x_3 - \bar{x}_3)^2 + \\ \left. + c_1 \left(-\frac{c_1}{2m_1}(x_1 - \bar{x}_1) \right) (x_1 - \bar{x}_1) + c_2 \left(-\frac{c_2}{2m_2}(x_2 - \bar{x}_2) \right) (x_2 - \bar{x}_2) + \right. \\ \left. + c_3 \left(-\frac{c_3}{2m_3}(x_3 - \bar{x}_3) \right) (x_3 - \bar{x}_3) + \right. \\ \left. + Y^T Q Y + \right. \\ \left. + m_1 \left(-\frac{c_1}{2m_1}(x_1 - \bar{x}_1) \right)^2 + m_2 \left(-\frac{c_2}{2m_2}(x_2 - \bar{x}_2) \right)^2 + m_3 \left(-\frac{c_3}{2m_3}(x_3 - \bar{x}_3) \right)^2 \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4.73)$$

arranjando os termos semelhantes, e substituindo a matriz Q por seus coeficientes componentes, teremos o sistema não-linear:

$$\begin{cases} -c_1 a_{12} - c_2 a_{21} + q_{12} + q_{21} = 0 \\ -c_1 a_{13} - c_3 a_{31} + q_{13} + q_{31} = 0 \\ -c_2 a_{23} - c_3 a_{32} + q_{23} + q_{32} = 0 \\ -c_1 a_{11} - \frac{c_1^2}{2m_1} + q_{11} + \frac{c_1^2}{4m_1} = 0 \\ -c_2 a_{22} - \frac{c_2^2}{2m_2} + q_{22} + \frac{c_2^2}{4m_2} = 0 \\ -c_3 a_{33} - \frac{c_3^2}{2m_3} + q_{33} + \frac{c_3^2}{4m_3} = 0. \end{cases} \quad (4.74)$$

Assim, considerando os valores introduzidos na tabela 4.3 e os elementos da matriz Q , conforme [32]:

q_{11}	q_{12}	q_{13}	q_{21}	q_{22}	q_{23}	q_{31}	q_{32}	q_{33}
1	0,0025	0,0025	0,0025	1	0	0,0025	0	1

Tabela 4.4: Coeficientes matriz peso Q para as simulações duas presas e um predador com controle não-linear.

Podemos encontrar os seguintes valores, que representam uma solução aproximada do sistema de equações algébricas não-linear (4.74):

$$\begin{aligned} c_1 &= 0,1786, & c_2 &= 3,2143, & e & c_3 &= 0,6429, \\ m_1 &= 0,0080, & m_2 &= 2,5912, & e & m_3 &= 0,1033. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Escolhendo-se, os pontos fixos de equilíbrio $P_{eq} = (4, 10, 5)$, que representa a densidade populacional acumulado de 14 espécies de presas por m^2 , abaixo do nível de danos econômicos e biológicos recomendado pela EMBRAPA e controlada pelo predador, com a densidade populacional de 5 espécies por m^2 . Daí, encerrando com as variáveis de controle de realimentação ótima, respectivas às três variáveis de estado do sistema (4.60):

$$\begin{aligned} u_1 &= -11,1625(x_1 - 4), \\ u_2 &= -0,6202(x_2 - 10), \\ u_3 &= -3,1118(x_3 - 5). \end{aligned}$$

Logo, com as variáveis de controle acima, podemos simular e validar o sistema (4.60). Verificando-se as figuras da dinâmica temporal de cada espécie, figura 4.16, e a órbita correspondente à trajetória resultante em levar o sistema do ponto inicial $(10, 20, 10)$ ao ponto de equilíbrio $(4, 10, 5)$, ver figura 4.18.

Observa-se na figura 4.16 a dinâmica da população das espécies sob a influência do controle ótimo, do tipo não-linear. Na existência de duas presas: a lagarta *Spodoptera frugiperda* e a *Helicoverpa armigera*, elas no início do processo acumulavam cerca de 30 espécies, um valor de alerta e cuidados com a lavoura do milho, o que demandou um imediato controle biológico, aplicando o inimigo natural: o parasitoide, vespa *Trichogramma*, que se adapta muito bem aos dois ávidos hospedeiros. Após o tempo de adaptação, percebe-se que o controle foi efetivo, controlando a lagarta *Spodoptera frugiperda* a apenas 4 lagartas por metro quadrado, enquanto a lagarta *Helicoverpa armigera* aparentemente mais resistente ao controle, mantém-se em nível mais elevado, à densidade de 10 espécies por m^2 .

Na simulação deste caso, para a *Helicoverpa armigera* ao final do processo permanece estável à taxa de 10 lagartas por metro quadrado, no acumulado com a lagarta *Spodoptera frugiperda*, temos cerca de 14 lagartas por metro quadrado, abaixo do nível de danos econômicos e biológicos, de acordo com a EMBRAPA. Quando há a concorrência de duas espécies de pragas admite-se como nível de danos econômicos acumulados, que é este o caso, até 20 lagartas por metro quadrado [18], [19], [32], [45].

Quanto ao parasitoide *Trichogramma*, bastam a liberação em média de cerca de 5 insetos por metro quadrado para que rapidamente, após a fase adulta e pronta para a postura de seus ovos, em pouco tempo, em 1 dia, avançar o processo com boa performance do controle tipo não-linear. Para esse caso, o valor do funcional custo ótimo para a condição inicial $(10, 20, 10)$ foi: $\mathcal{J}^u(10, 20, 10) = 12,882$.

Detalhe do plano de fase em 3D, figura 4.17. A figura 4.19 mostra o retrato de fase do sistema no plano x_1Ox_3 . Observa-se uma estabilidade no ponto de equilíbrio $P_{eq} = (4, 10, 5)$, correspondendo a um nó atrator estável.

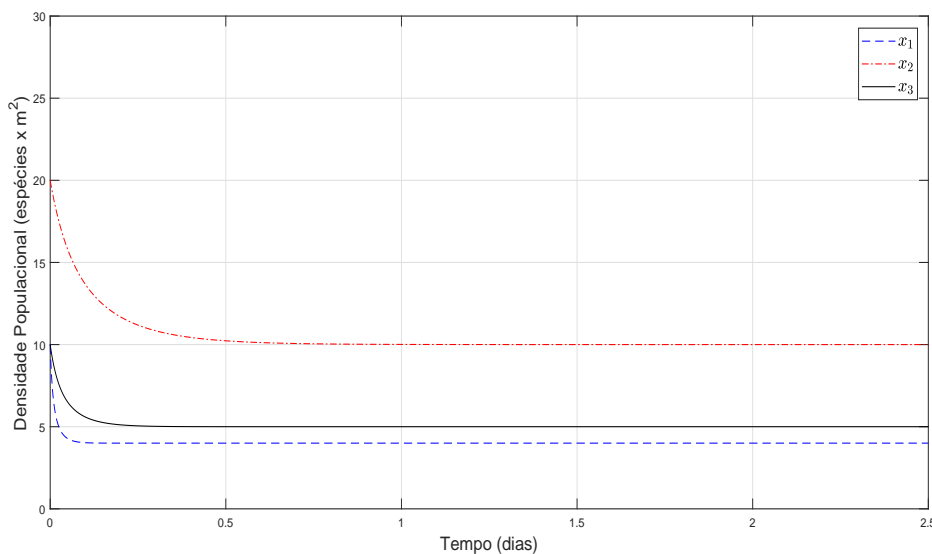


Figura 4.16: Dinâmica do sistema duas presas e um predador com controle não-linear, condição inicial $(10, 20, 10)$.

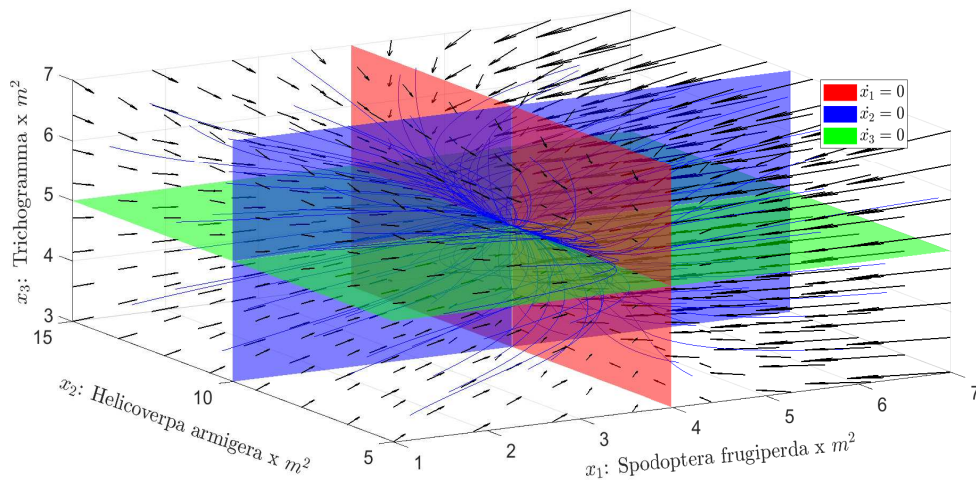


Figura 4.17: Plano de fase do sistema L-V: duas presas e um predador, com controle não-linear e ponto de equilíbrio assintoticamente estável $P_{eq} = (4, 10, 5)$.

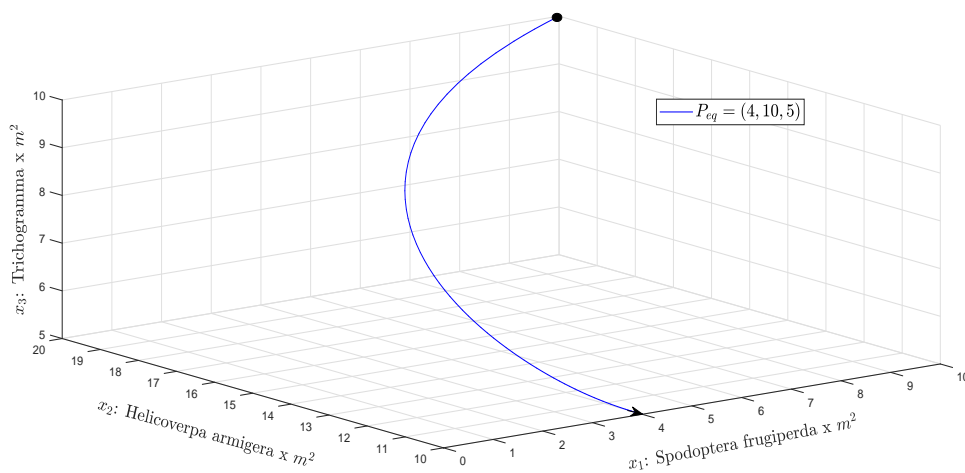


Figura 4.18: Trajetória do sistema duas presas e um predador com controle não-linear, condição inicial $(10, 20, 10)$ e ponto final $(4, 10, 5)$.

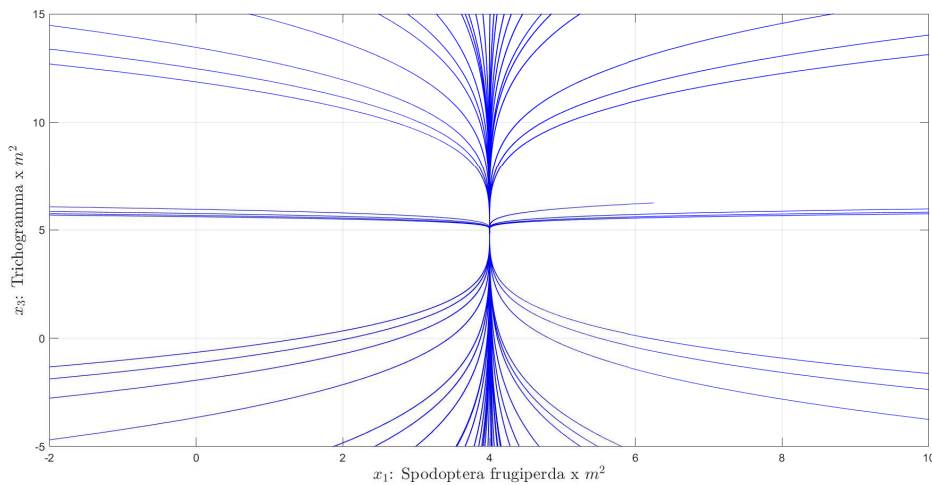


Figura 4.19: Plano de fase nas espécies x_1 e x_3 , nó estável $P_{eq} = (4, 10, 5)$.

4.3 Análise qualitativa e controle ótimo para o sistema com duas presas e dois predadores

Em muitos casos na lavoura, a dinâmica duas presas e um predador com controle a partir do predador, não é suficiente para o controle ótimo, a quantidade de soltura de inimigos naturais diários exigiriam uma alta demanda, a valores absurdos do ponto de vista do ecossistema [17], [32]. Daí, uma solução seria agregar outro tipo de predador ou parasitoide na lavoura, a fim de tornar o sistema, anteriormente caótico, com duas presas e um predador, a um novo sistema duas presas e dois predadores que possibilite a estabilidade ao ponto de equilíbrio. Assim, vamos estabelecer mais um tipo de inimigo natural, um que favoreça ao ataque às pragas, ou seja, um predador natural: a Doru luteipes - a tesourinha, e o parasitoide vespa Trichogramma, os dois sobrevivem a ambas lagartas: Spodoptera frugiperda e Helicoverpa armigera.

A solução será expressar o problema na forma generalizada, para duas presas e dois predadores.

4.3.1 Sistema sem controle

O sistema duas presas e dois predadores será analisado pelo diagrama temporal, sem nenhum controle aplicado.

O problema fica assim determinado:

$$\dot{x}_i = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^4 a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4.76)$$

com $x_i(0) = x_{i_0}$ e ainda, a condição de horizonte infinito sendo satisfeita.

De forma semelhante aos cenários anteriores, podemos encontrar os candidatos a pontos críticos e verificar, quais são pontos críticos estáveis. Para isso, resolve-se o sistema:

$$x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^4 a_{ij} x_j \right) = 0,$$

onde uma solução é: $x_i = 0$, observando-se que entre o parasitoide Trichogramma e o predador Doru luteipes não há competição interespecífica e tão pouco intraespecífica [31],

[37]. Os outros pontos críticos seguem do sistema simplificado a seguir:

$$\begin{cases} r_1\bar{x}_1 - a_{11}\bar{x}_1^2 - a_{12}\bar{x}_1\bar{x}_2 - a_{13}\bar{x}_1\bar{x}_3 - a_{14}\bar{x}_1\bar{x}_4 = 0 \\ r_2\bar{x}_2 - a_{21}\bar{x}_1\bar{x}_2 - a_{22}\bar{x}_2^2 - a_{23}\bar{x}_2\bar{x}_3 - a_{24}\bar{x}_2\bar{x}_4 = 0 \\ r_3\bar{x}_3 - a_{31}\bar{x}_1\bar{x}_3 - a_{32}\bar{x}_2\bar{x}_3 - a_{33}\bar{x}_3^2 - a_{34}\bar{x}_3\bar{x}_4 = 0 \\ r_4\bar{x}_4 - a_{41}\bar{x}_1\bar{x}_4 - a_{42}\bar{x}_2\bar{x}_4 - a_{43}\bar{x}_3\bar{x}_4 - a_{44}\bar{x}_4^2 = 0. \end{cases} \quad (4.77)$$

Para a simulação e validação deste cenário, utiliza-se os seguintes dados:

r_1	r_2	r_3	r_4
0,17	0,17	-0,119	-0,119
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
0,00017	0,00017	0,0017	0,0017
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
0,000255	0,00017	0,0017	0,0017
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
-0,00085	-0,000085	0	0
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
-0,00425	-0,00425	0	0

Tabela 4.5: Valores dos coeficientes do modelo simples, duas presas e dois predadores com competição.

Fonte: [37].

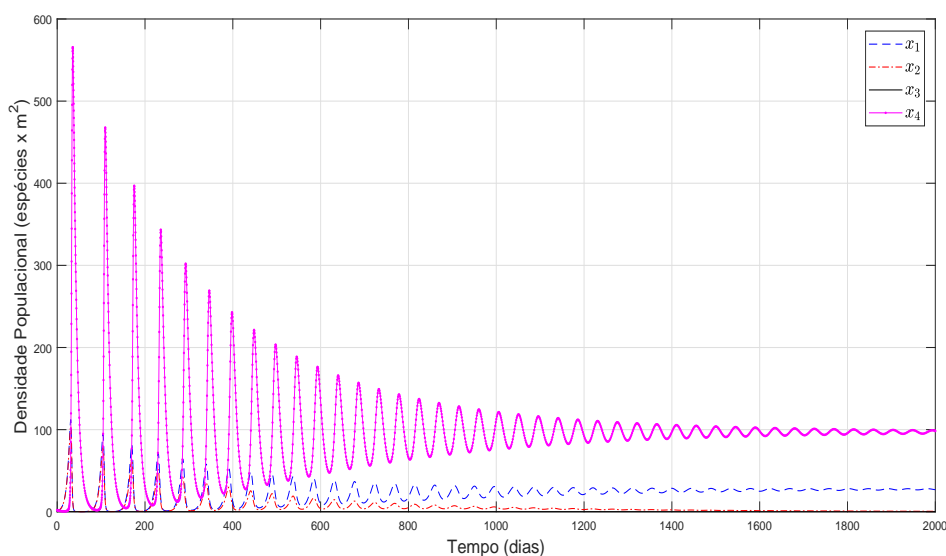


Figura 4.20: Dinâmica da densidade populacional do sistema duas presas e dois predadores, com competição entre as espécies, condição inicial (1, 1, 1, 2).

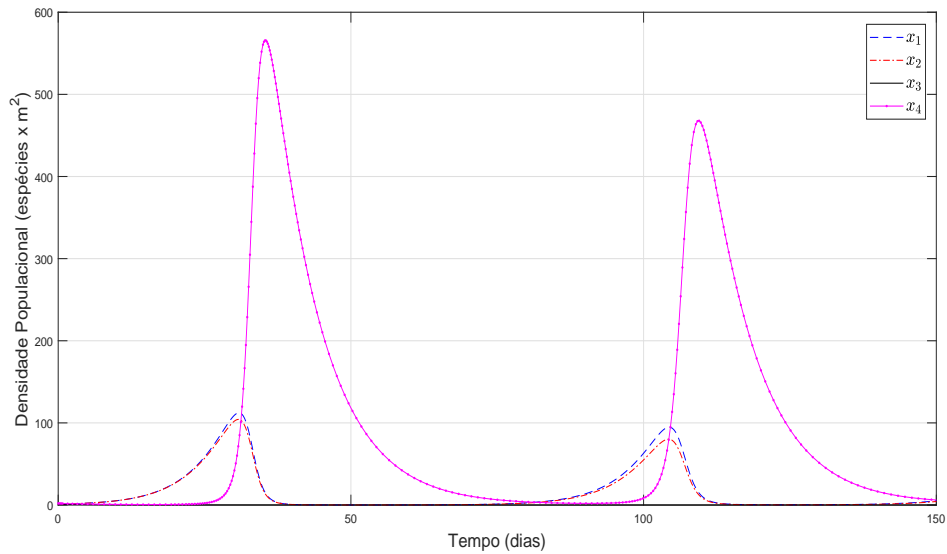


Figura 4.21: Dinâmica da densidade populacional do sistema duas presas e dois predadores, com competição entre as espécies (ampliada), condição inicial (1, 1, 1, 2).

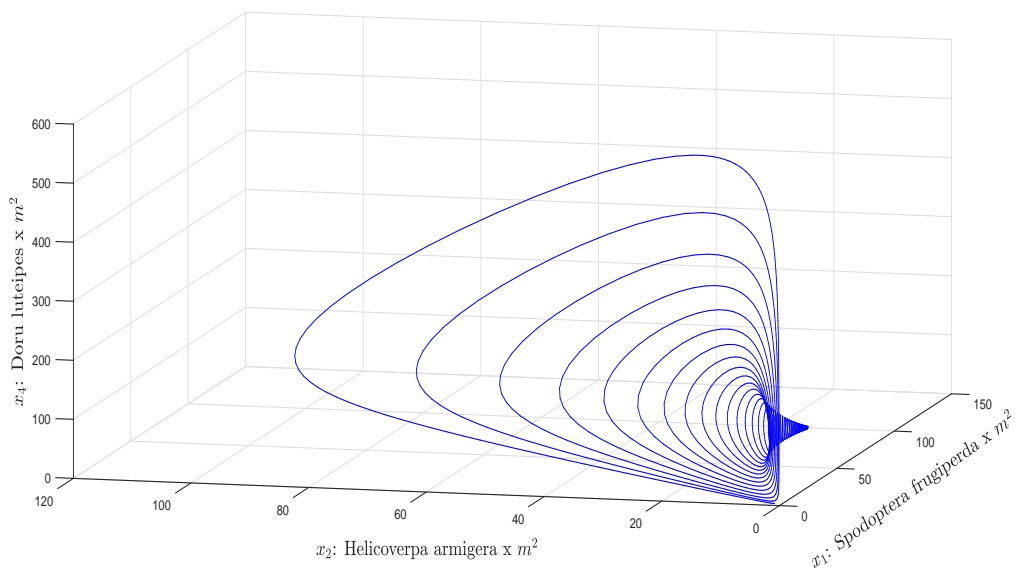


Figura 4.22: Trajetória do sistema duas presas e dois predadores sem controle, sobre o espaço $\mathbb{R}^3_{x_1x_2x_4}$, condição inicial (1, 1, 1, 2).

Como resultado da simulação computacional, observa-se a figura 4.20. Ela mostra oscilações na densidade populacional das espécies, por um longo período de tempo, suficiente para determinar a sua característica assintótica. Segue, uma ampliação em detalhe do caso, figura 4.21. Observa-se que há momentos que coincidem picos de densidades de população das espécies e isso pode gerar um aumento acumulado de densidade de pragas e um grande risco à lavoura. São sazonais ou periódicos, o que

mostra o grau de desordem do sistema, cuja trajetória, forma de cone espiral, aparece representada na figura 4.22.

Essas informações, certamente, exigirão um imediato controle de pragas. Que será realizado na próxima seção.

4.3.2 Sistema com controle ótimo linear

A partir do cenário estudado anteriormente, modelo com duas presas e um predador, é possível que a quantidade de predadores ou de parasitoides liberados no campo não dê conta do efetivo controle das pragas, mesmo um valor muito grande pode ainda não ser suficiente. Outro fator considerado seria os custos para se atingir o controle de pragas desejado, as cartelas com os ovos dos predadores ou parasitoides são encomendados dos laboratórios comerciais de produção específicos que produzem os inimigos naturais, e uma encomenda maior acarreta custos dispendiosos aos agricultores. Caso estas possibilidades aconteçam, uma boa estratégia seria acrescentar um novo inimigo natural, que pode ser de outra variedade diferente da que está sendo utilizada, exemplo, se inicialmente for usado um parasitoide, conjuga-se ao processo um novo inimigo natural: predador e vice-versa. O novo sistema criado, com duplo controle, tende a ser mais efetivo e mais econômico ao agricultor, daí surge, um sistema duas presas e dois inimigos naturais: predador e parasitoide.

Vamos simular para estabelecer a estratégia de controle, a idéia é aplicar a variável de controle às variáveis de estado nas presas e nos inimigos naturais, de forma linear e, verificar as implicações, se atende ou não à estabilidade assintótica permitindo o adequado manejo integrado de pragas na lavoura do milho. Segue-se, da teoria de controle ótimo, estabelecer a função custo quadrático, equação (4.16), a problemas do tipo Lotka-Volterra e que garanta a condição de horizonte infinito. A matriz de peso Q deverá ser fornecida em conjunto com a matriz B . Essa estratégia, requer descobrir quais coeficientes da função valor de Bellman, via equação algébrica de Riccati, que minimizam a equação (4.16), através da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Conforme já foi apresentado para os cenários anteriormente estudados, a resposta é a descoberta da função de controle ótimo desejada, que estabelece a estabilidade assintótica e mantém os níveis de pragas abaixo dos níveis de danos econômicos na lavoura.

Do problema (4.76), o sistema modificado fica:

$$\dot{x}_i = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^4 a_{ij} x_j \right) + U_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.78)$$

Acrescentando-se mais um inimigo natural: predador Doru luteipes (a tesourinha), correspondente à variável de estado x_4 . O controle tipo linear será aplicado nas quatro variáveis de estado, x_1, x_2, x_3 e x_4 , onde $U_i = u_i + \bar{u}_i$ com $i = 1, 2, 3, 4$, e sabendo que:

$$\bar{u}_i = -\bar{x}_i \left(r_i - \sum_{j=1}^4 a_{ij} \bar{x}_j \right), \quad (4.79)$$

representa as etapas de realimentação direta.

Em forma análoga aos cenários anteriores, organiza-se o sistema (4.78) transformado-o na função desvio, que consiste em aplicar uma pequena perturbação na trajetória do sistema em torno do ponto crítico, a fim de levar o sistema ao ponto de equilíbrio assintoticamente estável:

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = (r_1 - 2a_{11}\bar{x}_1 - a_{12}\bar{x}_2 - a_{13}\bar{x}_3 - a_{14}\bar{x}_4)(x_1 - \bar{x}_1) - a_{12}\bar{x}_1(x_2 - \bar{x}_2) - a_{13}\bar{x}_1(x_3 - \bar{x}_3) - a_{14}\bar{x}_1(x_4 - \bar{x}_4) + u_1 \\ \frac{dY_2}{dt} = -a_{21}\bar{x}_2(x_1 - \bar{x}_1) + (r_2 - a_{21}\bar{x}_1 - 2a_{22}\bar{x}_2 - a_{23}\bar{x}_3 - a_{24}\bar{x}_4)(x_2 - \bar{x}_2) - a_{23}\bar{x}_2(x_3 - \bar{x}_3) - a_{24}\bar{x}_2(x_4 - \bar{x}_4) + u_2 \\ \frac{dY_3}{dt} = -a_{31}\bar{x}_3(x_1 - \bar{x}_1) - a_{32}\bar{x}_3(x_2 - \bar{x}_2) + (r_3 - a_{31}\bar{x}_1 - a_{32}\bar{x}_2 - 2a_{33}\bar{x}_3 - a_{34}\bar{x}_4)(x_3 - \bar{x}_3) - a_{34}\bar{x}_3(x_4 - \bar{x}_4) + u_3 \\ \frac{dY_4}{dt} = -a_{41}\bar{x}_4(x_1 - \bar{x}_1) - a_{42}\bar{x}_4(x_2 - \bar{x}_2) - a_{43}\bar{x}_4(x_3 - \bar{x}_3) + (r_4 - a_{41}\bar{x}_1 - a_{42}\bar{x}_2 - a_{43}\bar{x}_3 - 2a_{44}\bar{x}_4)(x_4 - \bar{x}_4) + u_4. \end{cases} \quad (4.80)$$

Este sistema foi linearizado em torno da coordenada do ponto fixo de equilíbrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$, calculado conforme o sistema de equações (4.81):

$$\begin{cases} r_1 - a_{11}\bar{x}_1 - a_{12}\bar{x}_2 - a_{13}\bar{x}_3 - a_{14}\bar{x}_4 + \bar{u}_1 = 0 \\ r_2 - a_{21}\bar{x}_1 - a_{22}\bar{x}_2 - a_{23}\bar{x}_3 - a_{24}\bar{x}_4 + \bar{u}_2 = 0 \\ r_3 - a_{31}\bar{x}_1 - a_{32}\bar{x}_2 - a_{33}\bar{x}_3 - a_{34}\bar{x}_4 + \bar{u}_3 = 0 \\ r_4 - a_{41}\bar{x}_1 - a_{42}\bar{x}_2 - a_{43}\bar{x}_3 - a_{44}\bar{x}_4 + \bar{u}_4 = 0. \end{cases} \quad (4.81)$$

Note que pode-se reduzir o sistema (4.80) à forma matricial:

$$\dot{Y} = \mathbf{J}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)Y + Bu \quad (4.82)$$

onde a matriz Jacobiana é avaliada no ponto crítico estabelecido conforme (4.86), (4.87) e a matriz B é representada pela matriz identidade de ordem 4. Escolhendo uma função

valor de Bellman matricial que satisfaz a condição de horizonte infinito, tipo:

$$V = \frac{1}{2}Y^T S Y, \tag{4.83}$$

onde S é uma matriz de coeficientes constantes positiva definida. Em seguida, aplicada na equação algébrica de Riccati, a matriz S será substituída na variável de controle ótimo (4.84), juntamente com as matrizes R^{-1} e B^T , definidas em (4.85), completando-a:

$$u = -R^{-1}B^T S Y, \tag{4.84}$$

que finaliza a resolução e determina a lei de realimentação ótima (feedback optimal control).

Para a simulação no MATLAB[®], vamos observar que a EMBRAPA recomenda que é tolerável, para duas pragas distintas: a Spodoptera frugiperda e a Helicoverpa armigera [23], um valor agregado de no máximo de 20 lagartas por metro quadrado do plantio. Portanto, podemos escolher $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 18$, como sendo o limite para o controle dessas pragas dentro do nível de danos econômicos permitido. Além disso, as matrizes envolvidas no processo da programação dinâmica são definidas como:

$$Q = R^{-1} = B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.85}$$

Organizando os dados do problema, adota-se os seguintes parâmetros exibidos nas tabelas 4.6 a 4.9, a partir de [37], onde não há competição intraespecífica ($a_{33} = a_{44} = 0$) e nem competição interespecífica entre os predadores ($a_{34} = a_{43} = 0$):

r_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
0,17	0,00017	0,00017	0,0017	0,0017

Tabela 4.6: Valores dos parâmetros da variável de estado x_1 : lagarta Spodoptera frugiperda.

r_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
0,17	0,000255	0,00017	0,0017	0,0017

Tabela 4.7: Valores dos parâmetros da variável de estado x_2 : lagarta Helicoverpa armigera.

r_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
-0,119	-0,00085	-0,000085	0	0

Tabela 4.8: Valores dos parâmetros da variável de estado x_3 : vespa Trichogramma.

r_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
-0,119	-0,00425	-0,00425	0	0

Tabela 4.9: Valores dos parâmetros da variável de estado x_4 : inseto Doru luteipes.

Com os parâmetros acima e, além de estabelecer como limite do ponto fixo final de estabilidade, as variáveis de estado $\bar{x}_1 = 9$ e $\bar{x}_2 = 9$, e também $\bar{u}_1 = 0$ e $\bar{u}_2 = 0$, que substituídas no sistema (4.81), resulta nas seguintes variáveis de estados que faltavam: $\bar{x}_3 = 89,32$ e $\bar{x}_4 = 8,88$, formando o ponto $P_{eq} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) = (9; 9; 89,32; 8,88)$. Verifica-se que a parte real dos autovalores (dois reais e dois complexos conjugados) correspondentes a este ponto crítico de equilíbrio hiperbólico são todas negativas, garantindo uma convergência assintótica da solução do sistema a esse ponto de equilíbrio, conforme as figuras 4.23 a 4.25. Assim, aplicando a programação dinâmica apresentada na seção 3.1, encontramos a matriz S descrita em (4.89) que permite explicitar as variáveis de controle:

$$\begin{aligned} u_1 &= -1,0005(x_1 - \bar{x}_1) + 0,0016(x_2 - \bar{x}_2) - 0,0262(x_3 - \bar{x}_3) - 0,0104(x_4 - \bar{x}_4), \\ u_2 &= 0,0016(x_1 - \bar{x}_1) - 0,9980(x_2 - \bar{x}_2) + 0,0042(x_3 - \bar{x}_3) - 0,0104(x_4 - \bar{x}_4), \\ u_3 &= -0,0262(x_1 - \bar{x}_1) + 0,0042(x_2 - \bar{x}_2) - 0,8948(x_3 - \bar{x}_3) + 0,0004(x_4 - \bar{x}_4), \\ u_4 &= -0,0104(x_1 - \bar{x}_1) - 0,0104(x_2 - \bar{x}_2) + 0,0004(x_3 - \bar{x}_3) - 0,9580(x_4 - \bar{x}_4), \end{aligned}$$

e ainda, $\bar{u}_3 = 9,88$ e $\bar{u}_4 = 0,38$.

Os resultados podem ser observados nos gráficos abaixo, figuras 4.23 a 4.25.

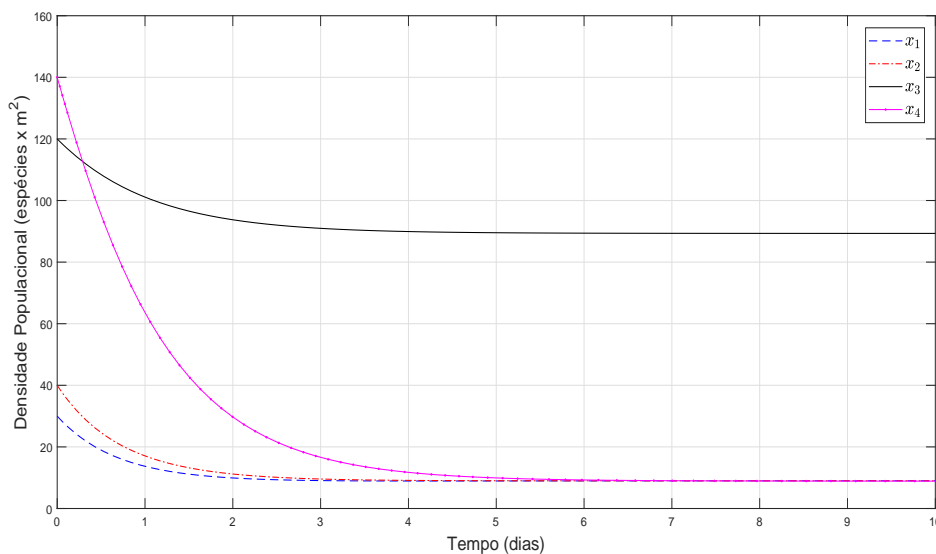


Figura 4.23: Dinâmica temporal do sistema duas presas e dois predadores com controle linear, condição inicial (30, 40, 120, 140).

$$\mathbf{J}(\bar{x}_i) = \begin{pmatrix} (r_1 - 2a_{11}\bar{x}_1 - a_{12}\bar{x}_2 - a_{13}\bar{x}_3 - a_{14}\bar{x}_4) & -a_{12}\bar{x}_1 & -a_{13}\bar{x}_1 & -a_{14}\bar{x}_1 \\ -a_{21}\bar{x}_2 & (r_2 - a_{21}\bar{x}_1 - 2a_{22}\bar{x}_2 - a_{23}\bar{x}_3 - a_{24}\bar{x}_4) & -a_{23}\bar{x}_2 & -a_{24}\bar{x}_2 \\ -a_{31}\bar{x}_3 & -a_{32}\bar{x}_3 & (r_3 - a_{31}\bar{x}_1 - a_{32}\bar{x}_2 - 2a_{33}\bar{x}_3 - a_{34}\bar{x}_4) & -a_{34}\bar{x}_3 \\ -a_{41}\bar{x}_4 & -a_{42}\bar{x}_4 & -a_{43}\bar{x}_4 & (r_4 - a_{41}\bar{x}_1 - a_{42}\bar{x}_2 - a_{43}\bar{x}_3 - 2a_{44}\bar{x}_4) \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

$$\mathbf{J}(\bar{x}_i) = \begin{pmatrix} (0, 17 - 2(0, 00017)\bar{x}_1 - 0, 00017\bar{x}_2 - 0, 0017\bar{x}_3 - 0, 0017\bar{x}_4) & -0, 00017\bar{x}_1 & -0, 0017\bar{x}_1 & -0, 0017\bar{x}_1 \\ -0, 000255\bar{x}_2 & (0, 17 - 0, 000255\bar{x}_1 - 2(0, 00017)\bar{x}_2 - 0, 0017\bar{x}_3 - 0, 0017\bar{x}_4) & -0, 0017\bar{x}_2 & -0, 0017\bar{x}_2 \\ 0, 00085\bar{x}_3 & 0, 000085\bar{x}_3 & 0 & 0 \\ 0, 00425\bar{x}_4 & 0, 00425\bar{x}_4 & (-0, 119 + 0, 00085\bar{x}_1 + 0, 000085\bar{x}_2) & (-0, 119 + 0, 00425\bar{x}_1 + 0, 00425\bar{x}_2) \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

$$\mathbf{J}(9; 9, 89, 32; 8, 88) = \begin{pmatrix} -0, 00153 & -0, 00153 & -0, 01530 & -0, 01530 \\ -0, 00229 & -0, 00229 & -0, 01530 & -0, 01530 \\ 0, 07592 & 0, 00759 & -0, 11058 & 0 \\ 0, 03774 & 0, 03774 & 0 & -0, 04250 \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

$$S = \begin{pmatrix} 1, 0005 & -0, 0016 & 0, 0262 & 0, 0104 \\ -0, 0016 & 0, 9980 & -0, 0042 & 0, 0104 \\ 0, 0262 & -0, 0042 & 0, 8948 & -0, 0004 \\ 0, 0104 & 0, 0104 & -0, 0004 & 0, 9580 \end{pmatrix}. \quad (4.89)$$

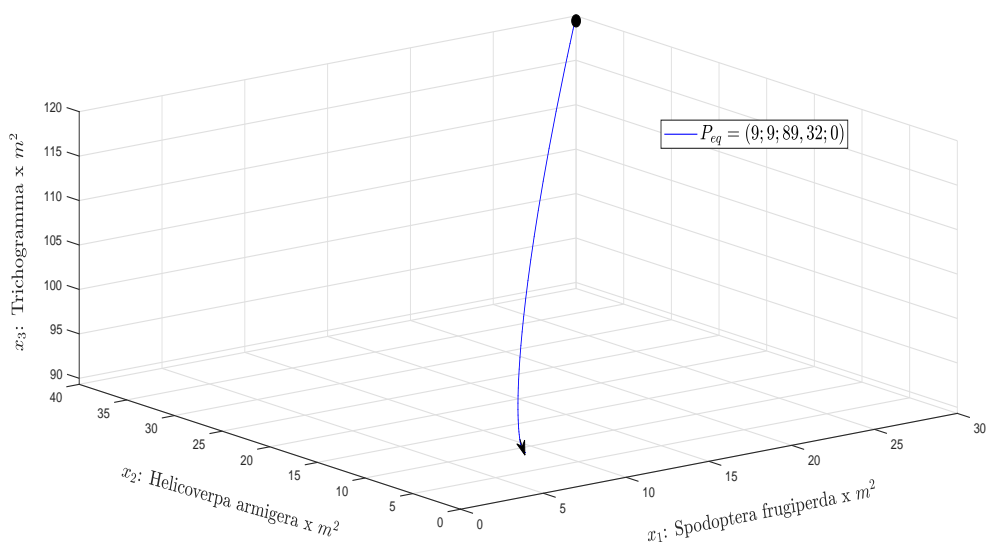


Figura 4.24: Trajetória do sistema duas presas e dois predadores com controle linear, sobre o espaço $\mathbb{R}^3_{x_1 x_2 x_3}$, condição inicial (30, 40, 120, 140) e ponto final (9; 9; 89; 32; 8, 88).

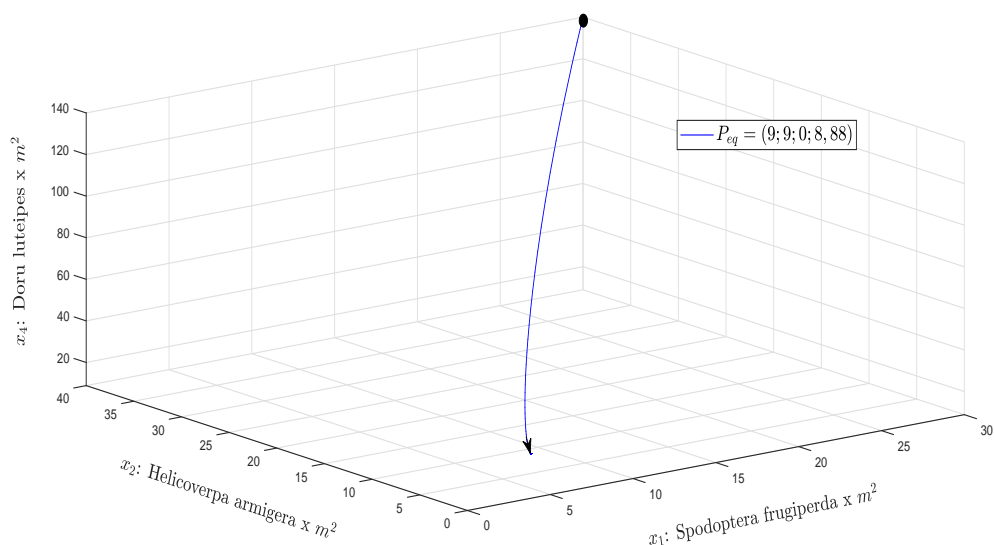


Figura 4.25: Trajetória do sistema duas presas e dois predadores com controle linear, sobre o espaço $\mathbb{R}^3_{x_1 x_2 x_4}$, condição inicial (30, 40, 120, 140) e ponto final (9; 9; 89; 32; 8, 88).

O controle efetivo de pragas foi alcançado em torno de 6 dias. Notemos que os dois predadores dão conta do controle e observa-se que prevalece uma carga de parasitoides vespa *Trichogramma* residual maior comparada ao inseto *Doru luteipes*, na plantação (figura 4.23). Por outro lado, nas figuras 4.24 e 4.25 podemos observar um comportamento similar das susceptibilidade das presas em presença do predador.

Aqui, o valor do funcional custo ótimo calculado para a condição inicial (30, 40, 120, 140) foi: $\mathcal{J}^u(30, 40, 120, 140) = 1,725 \times 10^4$.

4.3.3 Sistema com controle ótimo não-linear

Dado o problema Lotka-Volterra com controle não-linear:

$$\dot{x}_i = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^4 a_{ij} x_j + u_i + \bar{u}_i \right), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4.90)$$

onde o controle de realimentação direta é definido por:

$$\bar{u}_i = -r_i + \sum_{j=1}^4 a_{ij} \bar{x}_j, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4.91)$$

levando a condição inicial

$$x_i(0) = x_{i_0} \quad (4.92)$$

ao estado final

$$x_i(\infty) = \bar{x}_i, \quad (4.93)$$

com o interesse a minimizar o funcional de custo quadrático:

$$\mathcal{J}(Y, u) = \int_0^{+\infty} (Y^T Q Y + m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + m_3 u_3^2 + m_4 u_4^2) dt, \quad (4.94)$$

onde $Y = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ x_3 - \bar{x}_3 \\ x_4 - \bar{x}_4 \end{pmatrix}$ e a matriz Q é positiva definida.

Conforme a programação dinâmica temos a equação HJB reduzida:

$$\mathcal{H} = \min_{u=u_i} \left(\frac{dV}{dt} + \mathcal{L} \right) = 0 \quad (4.95)$$

onde

$$\mathcal{L} = Y^T Q Y + m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + m_3 u_3^2 + m_4 u_4^2, \quad (4.96)$$

verificando-se a condição de horizonte infinito, $V(\infty) = 0$.

Uma função de Bellman aplicada na equação HJB (4.95), que minimiza a função de custo quadrática e a condição de horizonte infinito, e ainda leva a trajetória do sistema à estabilidade assintótica, é:

$$V(x_i) = \sum_{i=1}^4 c_i \left(x_i - \bar{x}_i - \bar{x}_i \ln \left(\frac{x_i}{\bar{x}_i} \right) \right), \quad (4.97)$$

onde c_i são constantes positivas, que são calculadas pela equação de Riccati, decorrente

da aplicação e transformação da equação HJB (4.95).

Derivando V em relação ao tempo:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^4 c_i (x_i - \bar{x}_i) \left(r_i - \sum_{j=1}^4 a_{ij} x_j + \bar{u}_i + u_i \right), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.98)$$

Substituindo as equações (4.96) e (4.98), na equação de HJB (4.95), temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \min_{u=u_i} \{ & -c_1 a_{11} (x_1 - \bar{x}_1)^2 - c_1 a_{12} (x_1 - \bar{x}_1) (x_2 - \bar{x}_2) - c_1 a_{13} (x_1 - \bar{x}_1) (x_3 - \bar{x}_3) + \\ & -c_1 a_{14} (x_1 - \bar{x}_1) (x_4 - \bar{x}_4) - c_2 a_{21} (x_1 - \bar{x}_1) (x_2 - \bar{x}_2) - c_2 a_{22} (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \\ & -c_2 a_{23} (x_2 - \bar{x}_2) (x_3 - \bar{x}_3) - c_2 a_{24} (x_2 - \bar{x}_2) (x_4 - \bar{x}_4) - c_3 a_{31} (x_1 - \bar{x}_1) (x_3 - \bar{x}_3) + \\ & -c_3 a_{32} (x_2 - \bar{x}_2) (x_3 - \bar{x}_3) - c_3 a_{33} (x_3 - \bar{x}_3)^2 - c_3 a_{34} (x_3 - \bar{x}_3) (x_4 - \bar{x}_4) + \\ & -c_4 a_{41} (x_1 - \bar{x}_1) (x_4 - \bar{x}_4) - c_4 a_{42} (x_2 - \bar{x}_2) (x_4 - \bar{x}_4) + \\ & -c_4 a_{43} (x_3 - \bar{x}_3) (x_4 - \bar{x}_4) - c_4 a_{44} (x_4 - \bar{x}_4)^2 + \\ & + c_1 u_1 (x_1 - \bar{x}_1) + c_2 u_2 (x_2 - \bar{x}_2) + c_3 u_3 (x_3 - \bar{x}_3) + c_4 u_4 (x_4 - \bar{x}_4) + \\ & + Y^T Q Y + \\ & \left. + m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + m_3 u_3^2 + m_4 u_4^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.99)$$

A fim de encontrarmos a expressão para u_i , derivamos:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} = 0, \quad (4.100)$$

fornecendo o sistema:

$$\begin{cases} c_1 (x_1 - \bar{x}_1) + 2m_1 u_1 = 0 \\ c_2 (x_2 - \bar{x}_2) + 2m_2 u_2 = 0 \\ c_3 (x_3 - \bar{x}_3) + 2m_3 u_3 = 0 \\ c_4 (x_4 - \bar{x}_4) + 2m_4 u_4 = 0, \end{cases} \quad (4.101)$$

que resulta nas respectivas variáveis de controle ótimo para o problema (4.90):

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{c_1}{2m_1} (x_1 - \bar{x}_1) \\ u_2 = -\frac{c_2}{2m_2} (x_2 - \bar{x}_2) \\ u_3 = -\frac{c_3}{2m_3} (x_3 - \bar{x}_3) \\ u_4 = -\frac{c_4}{2m_4} (x_4 - \bar{x}_4). \end{cases} \quad (4.102)$$

De volta, substituindo os valores expressos das equações (4.102) na equação (4.99):

$$\begin{aligned}
 \min_{u=u_i} \left\{ & -c_1 a_{11} (x_1 - \bar{x}_1)^2 - c_1 a_{12} (x_1 - \bar{x}_1) (x_2 - \bar{x}_2) - c_1 a_{13} (x_1 - \bar{x}_1) (x_3 - \bar{x}_3) + \right. \\
 & -c_1 a_{14} (x_1 - \bar{x}_1) (x_4 - \bar{x}_4) - c_2 a_{21} (x_1 - \bar{x}_1) (x_2 - \bar{x}_2) - c_2 a_{22} (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \\
 & -c_2 a_{23} (x_2 - \bar{x}_2) (x_3 - \bar{x}_3) - c_2 a_{24} (x_2 - \bar{x}_2) (x_4 - \bar{x}_4) - c_3 a_{31} (x_1 - \bar{x}_1) (x_3 - \bar{x}_3) + \\
 & -c_3 a_{32} (x_2 - \bar{x}_2) (x_3 - \bar{x}_3) - c_3 a_{33} (x_3 - \bar{x}_3)^2 - c_3 a_{34} (x_3 - \bar{x}_3) (x_4 - \bar{x}_4) + \\
 & -c_4 a_{41} (x_1 - \bar{x}_1) (x_4 - \bar{x}_4) - c_4 a_{42} (x_2 - \bar{x}_2) (x_4 - \bar{x}_4) - c_4 a_{43} (x_3 - \bar{x}_3) (x_4 - \bar{x}_4) + \\
 & -c_4 a_{44} (x_4 - \bar{x}_4)^2 + c_1 \left(-\frac{c_1}{2m_1} (x_1 - \bar{x}_1) \right) (x_1 - \bar{x}_1) + c_2 \left(-\frac{c_2}{2m_2} (x_2 - \bar{x}_2) \right) (x_2 - \bar{x}_2) + \\
 & + c_3 \left(-\frac{c_3}{2m_3} (x_3 - \bar{x}_3) \right) (x_3 - \bar{x}_3) + c_4 \left(-\frac{c_4}{2m_4} (x_4 - \bar{x}_4) \right) (x_4 - \bar{x}_4) + \\
 & + Y^T Q Y + m_1 \left(-\frac{c_1}{2m_1} (x_1 - \bar{x}_1) \right)^2 + m_2 \left(-\frac{c_2}{2m_2} (x_2 - \bar{x}_2) \right)^2 + \\
 & \left. + m_3 \left(-\frac{c_3}{2m_3} (x_3 - \bar{x}_3) \right)^2 + m_4 \left(-\frac{c_4}{2m_4} (x_4 - \bar{x}_4) \right)^2 \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{4.103}$$

arranjando os termos semelhantes, e substituindo a matriz Q por seus coeficientes componentes, teremos o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -c_1 a_{12} - c_2 a_{21} + q_{12} + q_{21} = 0 \\
 -c_1 a_{13} - c_3 a_{31} + q_{13} + q_{31} = 0 \\
 -c_1 a_{14} - c_4 a_{41} + q_{14} + q_{41} = 0 \\
 -c_2 a_{23} - c_3 a_{32} + q_{23} + q_{32} = 0 \\
 -c_2 a_{24} - c_4 a_{42} + q_{24} + q_{42} = 0 \\
 -c_3 a_{34} - c_4 a_{43} + q_{34} + q_{43} = 0 \\
 -c_1 a_{11} - \frac{c_1^2}{2m_1} + q_{11} + \frac{c_1^2}{4m_1} = 0 \\
 -c_2 a_{22} - \frac{c_2^2}{2m_2} + q_{22} + \frac{c_2^2}{4m_2} = 0 \\
 -c_3 a_{33} - \frac{c_3^2}{2m_3} + q_{33} + \frac{c_3^2}{4m_3} = 0 \\
 -c_4 a_{44} - \frac{c_4^2}{2m_4} + q_{44} + \frac{c_4^2}{4m_4} = 0.
 \end{array} \right. \tag{4.104}$$

Para a simulação e validação do controle ótimo não-linear do sistema (4.90), faremos

o acoplamento do controle apenas nas variáveis de estado correspondentes apenas aos predadores, assim: $U_1 = U_2 = 0$. Para tanto, utiliza-se os dados das tabelas e matrizes abaixo, conforme [31], a saber:

r_1	r_2	r_3	r_4
0,17	0,17	-0,17	-0,17

$$A = \begin{pmatrix} 0,00017 & 0,00017 & 0,0017 & 0,00085 \\ 0,000255 & 0,00017 & 0,00017 & 0,0017 \\ -0,00085 & -0,000085 & 0 & 0 \\ -0,00425 & -0,00425 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	\bar{x}_4
9	9	51,92	92,56

\bar{u}_3	\bar{u}_4
0,1616	0,0935

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0,00017 & 0 & 0 \\ 0,00017 & 1 & q_{23} & q_{24} \\ 0 & q_{23} & 0,01 & 0 \\ 0 & q_{24} & 0 & 0,000333 \end{pmatrix}.$$

Além disso, é necessário dar valores aos coeficientes c_1 e c_3 . Por sugestão, teremos: $c_1 = 1$ e $c_3 = 2$, que serão substituídos no sistema (4.104). A partir deles podemos encontrar os outros coeficientes de (4.97) e (4.102), os coeficientes m_i e os coeficientes da matriz Q que faltavam: $q_{23} = q_{32}$ e $q_{24} = q_{42}$, conforme [31] e descritos abaixo:

$$q_{23} = q_{32} = -0,0000283, \quad q_{24} = q_{42} = 0,000142, \quad c_2 = 0,6667, \quad c_4 = 0,20,$$

$$m_1 = 0,25001, \quad m_2 = 0,1111254, \quad m_3 = 100 \quad \text{e} \quad m_4 = 30.$$

Obtendo-se as seguintes leis de controle de realimentação ótimo para o sistema (4.90):

$$U_3 = 0,1616 - \frac{1}{100} (x_3 - 51,92),$$

$$U_4 = 0,0935 - \frac{1}{300} (x_4 - 92,56).$$

A partir dos dados experimentais obtidos em [31], podemos verificar os resultados computacionais da simulação, com condição inicial $(1, 1, 1, 2)$, figuras 4.26 a 4.29:

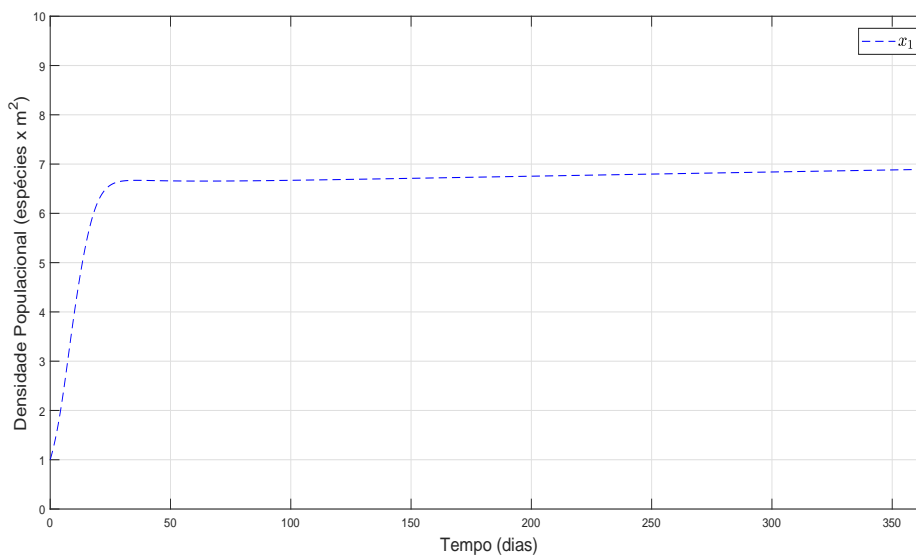


Figura 4.26: Dinâmica com controle linear sobre a presa 1 (*Spodoptera frugiperda*), condição inicial (1, 1, 1, 2).

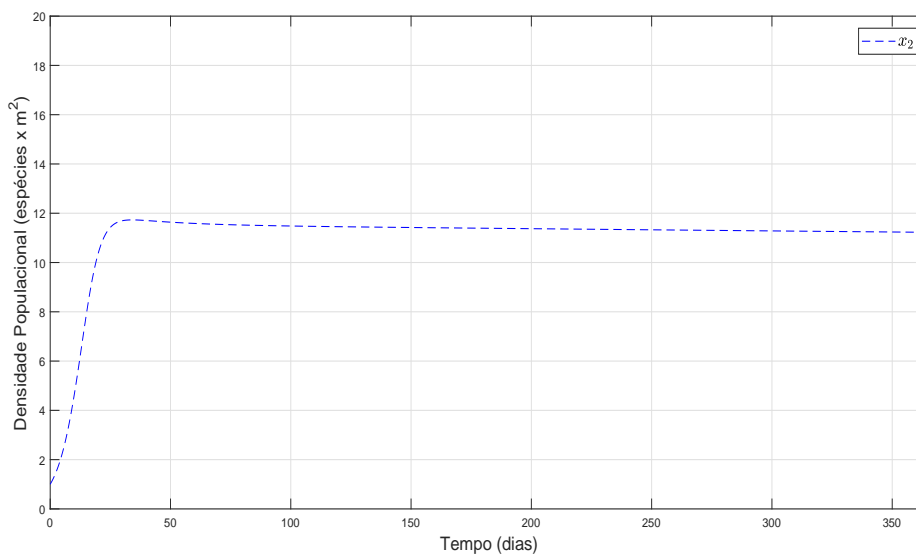


Figura 4.27: Dinâmica com controle linear sobre a presa 2 (*Helicoverpa armigera*), condição inicial (1, 1, 1, 2).

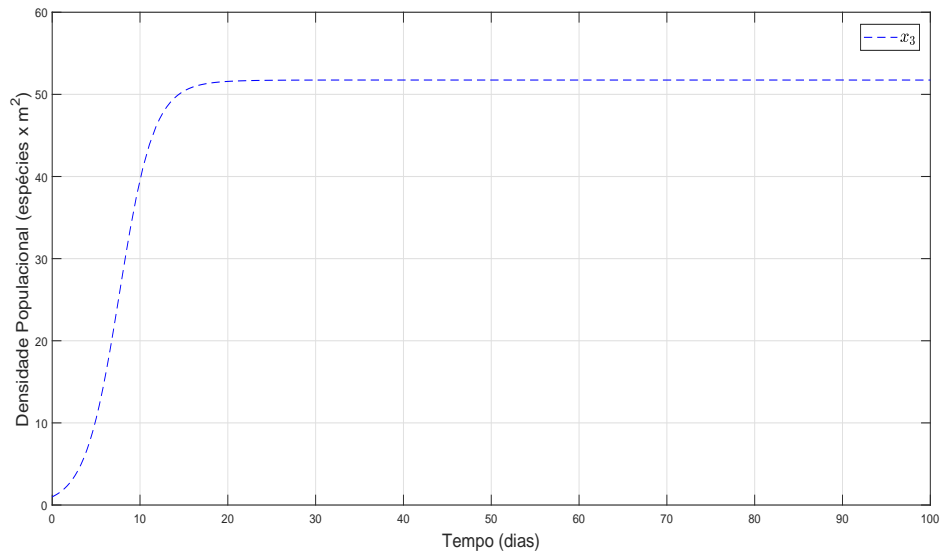


Figura 4.28: Dinâmica com controle linear sobre o predador 1 (vespa *Trichogramma*), condição inicial $(1, 1, 1, 2)$.

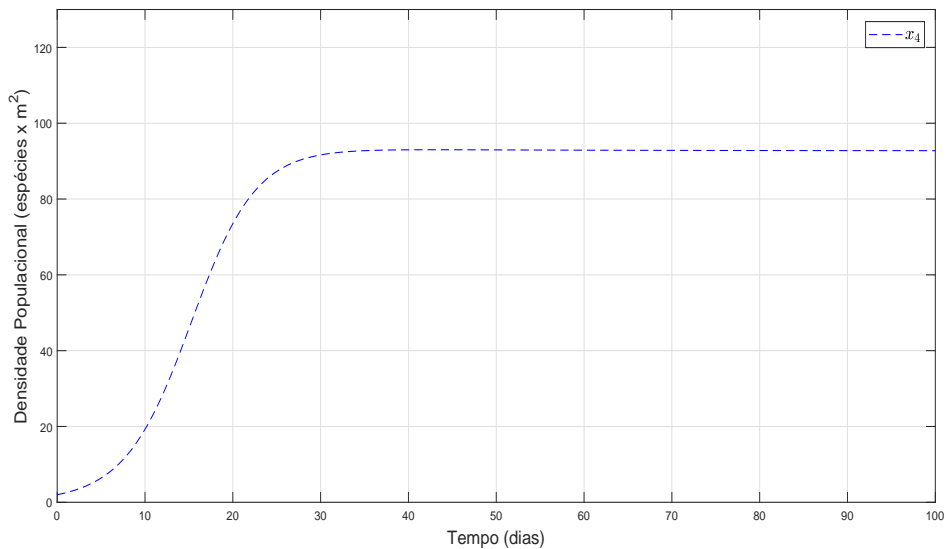


Figura 4.29: Dinâmica com controle linear sobre o predador 2 (inseto *Doru luteipes*), condição inicial $(1, 1, 1, 2)$.

Observa-se que o sistema L-V duas presas e dois predadores com controle acoplado apenas nos parasitoides e predadores naturais foram suficientes para manter a densidade de pragas ao nível de danos econômicos e biológicos exigidos. Entretanto, nas figuras 4.26 e 4.27, equivalente às presas, o equilíbrio demanda um tempo demasiado para ser atingido, conforme ilustrado, por período de um ano ainda não conseguiu atingir exatamente 9 espécies por metro quadrado. Mas, o controle permanece eficaz, pois a soma dos valores das duas presas permanecem abaixo do nível de danos econômicos e biológicos preconizados pela EMBRAPA. Já para as figuras 4.28 e 4.29, relativas aos predadores, o

equilíbrio foi atingido cerca de 30 dias do início do correto manejo integrado de pragas na lavoura. Neste caso, o valor do funcional de custo ótimo para a condição inicial $(1, 1, 1, 2)$ obtido foi: $\mathcal{J}^u(1, 1, 1, 2) = 3,776 \times 10^2$.

Com objetivo de verificar a situação onde ocorreu uma demora na detecção das pragas na lavoura, simula-se a seguinte alteração na condição inicial para $(5, 5; 5, 4; 1; 2)$, com o intuito de analisar a dinâmica do sistema com o aumento da quantidade das presas e mantendo o mesmo número de predadores por metro quadrado, gerando-se as figuras 4.30 a 4.33:

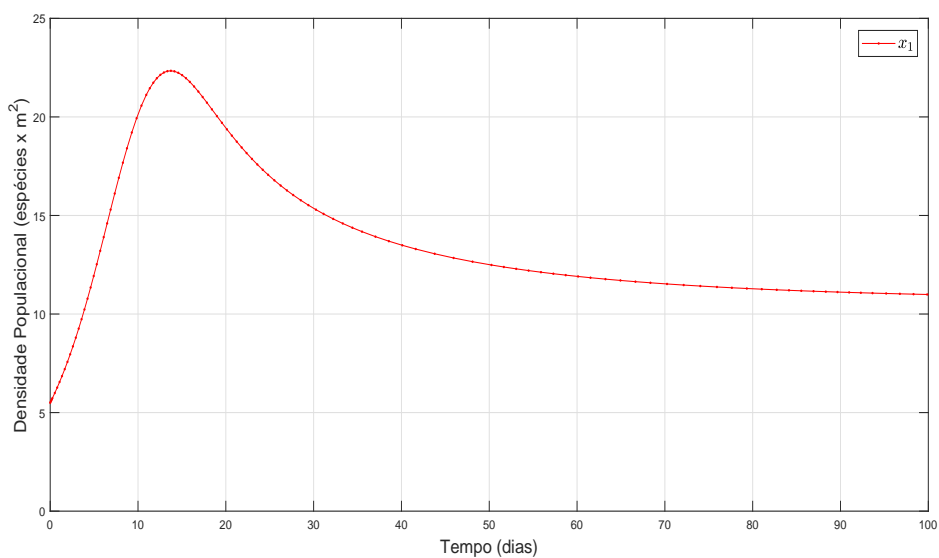


Figura 4.30: Dinâmica com controle não-linear sobre a presa 1 (*Spodoptera frugiperda*), condição inicial $(5, 5; 5, 4; 1; 2)$.

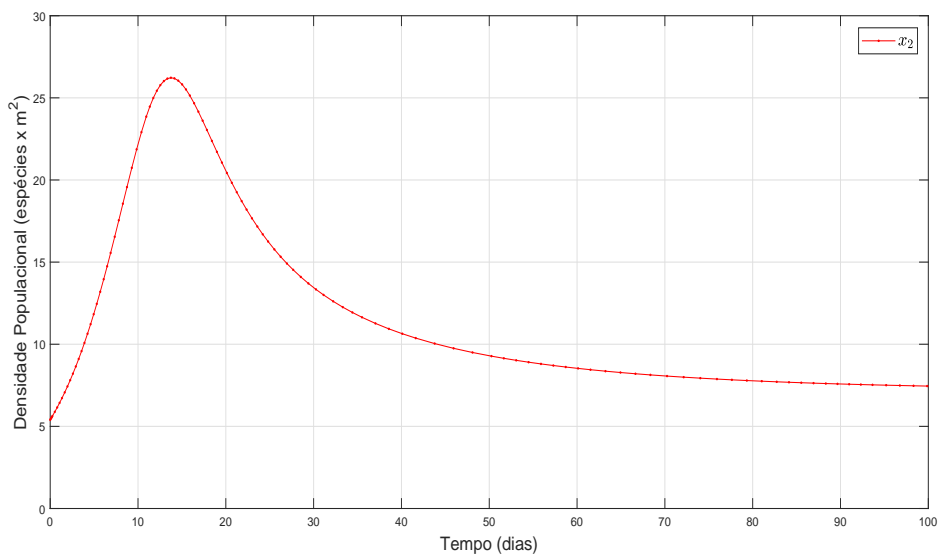


Figura 4.31: Dinâmica com controle não-linear sobre a presa 2 (*Helicoverpa armigera*), condição inicial $(5, 5; 5, 4; 1; 2)$.

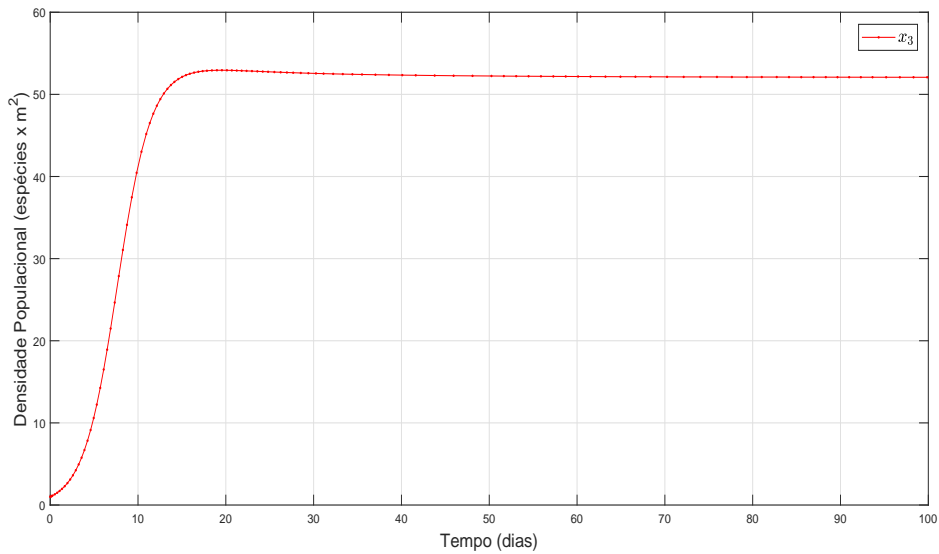


Figura 4.32: Dinâmica com controle não-linear sobre o predador 1 (vespa *Trichogramma*), condição inicial (5, 5; 5, 4; 1; 2).

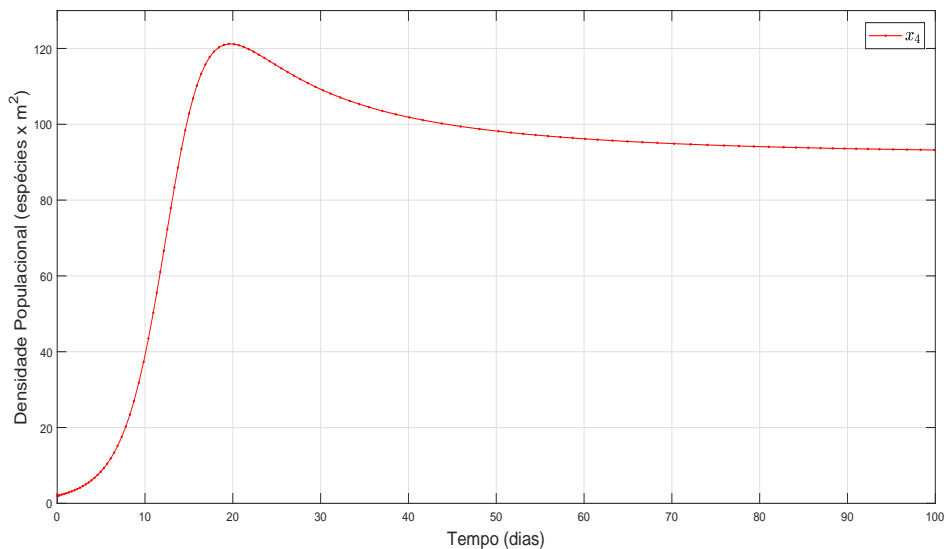


Figura 4.33: Dinâmica com controle não-linear sobre o predador 2 (inseto *Doru luteipes*), condição inicial (5, 5; 5, 4; 1; 2).

Observa-se que a presa 1 (*Spodoptera frugiperda*), bem como presa 2 (*Helicoverpa armigera*), apresentam comportamento inicial com pico de crescimento nos 30 dias iniciais e equilíbrio do controle em torno de 100 dias, figuras 4.30 e 4.31, que pode comprometer substancialmente a tomada de decisão a suspeitar da eficiência do controle não-linear. É fato, ocorre demora a atingir o equilíbrio ideal. Por si só, a demora no tempo requerido em atingir o equilíbrio inviabiliza o manejo integrado de pragas, por não comportar suficiente intervalo de tempo relativo ao plantio e quanto à colheita do milho, além da possível

exigência da manutenção em inundações de inimigos naturais para o controle de pragas em quantidades elevadas, figuras 4.32 e 4.33.

Aqui, o valor do funcional de custo ótimo para a condição inicial $(5, 5; 5, 4; 1; 2)$ obtido foi: $\mathcal{J}^u(5, 5; 5, 4; 1; 2) = 3,851 \times 10^2$.

Mais uma vez, mostra-se a importância do correto manejo integrado de pragas, com contínuo e rápido diagnóstico da quantidade de pragas existentes na cultura do milho, quanto mais cedo for detectado a existência dos valores críticos excessivos de pragas, melhores resultados efetivos da estratégia do controle biológico.

Capítulo 5

CONCLUSÕES

A partir do modelo de Lotka-Volterra, um modelo de competição e interações de espécies do tipo não-linear, as densidades de lagartas que convivem na lavoura do milho resultam numa dinâmica caótica de evolução da densidade populacional das lagartas por metro quadrado [17], [26], [31], [45], e portanto, uma demanda crescente delas causam enormes prejuízos na cultura do milho, o que as denominam de pragas da lavoura.

As espécies denominadas presas: as lagartas *Spodoptera frugiperda* e a *Helicoverpa armigera*, são as possíveis pragas que se estabelecem na lavoura. Caso elas apresentem quantidades acima dos danos econômicos e biológicos na cultura do milho, causam sérios prejuízos econômicos e também ao ecossistema do campo. Os custos de controle através de insumos inseticidas, além dos perigos de contaminação do produto da lavoura, também afetam o meio ambiente e os usuários das aplicações.

Daí, a importância de alternativas de controles às pragas. Aqui abordados, por controle biológico aplicados à lavoura do milho, por inserção inundativa de inimigos naturais. As espécies denominadas predadoras: a vespa parasitoide *Trichogramma* e o inseto *Doru luteipes*, ambos inimigos naturais das pragas na lavoura do milho formam a base do estudo e simulações presentes, com a vantagem de não interferirem de forma danosa ao agroecossistema. Esta estratégia, soltura de inimigos naturais em conjunto a diversas outras atitudes e cuidados, montam o correto manejo integrados de pragas na lavoura.

Verificamos e simulamos o controle biológico capaz de corrigir os excessos de densidade das espécies de pragas, lagartas de uma mesma espécie isoladas ou associadas. Os inimigos naturais, por vezes isolados não alcançam os objetivos de controle biológico de pragas, assim devemos associá-los a outros inimigos naturais, seja da mesma variedade de espécie: parasitoide, seja de outra espécie: predador. Com base no artigo [15] realizamos

as primeiras validações na simulação do controle ótimo de pragas, tipo linear e não-linear.

As simulações numéricas e computacionais são ferramentas importantes aos agentes da prática do manejo integrado de pragas, suprindo-os de recursos e informações rápidas para tomada de decisões prévias, o efeito tardio das decisões acarretam prejuízos econômicos consideráveis aos investimentos no campo, elas permitem informar a quantidade de liberação (inundação) dos inimigos naturais para o controle ótimo de pragas.

Verificamos e simulamos diferentes estratégias de controle ótimo de pragas, para os cenários: uma presa e um predador, duas presas e um predador, duas presas e dois predadores, atuando controles de forma linear ou de forma não-linear, aplicando-os diretamente nos predadores, nas presas, ou combinadas.

Foi possível aprofundar o conhecimento da Teoria do Controle e Otimização, através da Programação Dinâmica de Bellman, com a formulação do controle ótimo linear e não-linear, aplicação de funções de Lyapunov, em particular as funções de Bellman, que permitem a minimização do funcional de custo quadrático, por uso da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. Por fim, a descoberta da melhor estratégia, da lei de retroalimentação de controle ótimo (feedback optimal control) que leva o sistema à estabilidade assintótica.

As simulações foram realizadas com uso do MATLAB[®], e se mostram altamente dependentes dos parâmetros envolvidos que representam os coeficientes do sistema modelado. Entretanto, mostraram resultados eficientes, pois o modelo escolhido foi adequado ao controle ótimo de pragas, a conferir pelas análises das trajetórias e das dinâmicas temporais distribuídas pelo trabalho, e que conferem levar as trajetórias aos pontos fixos desejados, de estabilidade assintótica, resultando no efetivo controle biológico de pragas na cultura do milho. Observamos que as simulações realizadas com a estratégia do controle linear traz resultados mais efetivos do que os realizados com controle não-linear, o tempo de resposta em atingir o ponto fixo de equilíbrio são menores.

Certamente, podemos destacar possíveis novas contribuições ao modelo aqui apresentado, em particular, agregar parâmetros ao modelo L-V presa-predador que representem variações mais realísticas, incluindo o termo logístico, o efeito Allee, a estrutura de bifurcação de Hopf, dentre outras. Ainda, agregar a componente espacial, com intuito de verificar o efeito difusivo das pragas na lavoura, influências climáticas, de temperaturas, do tipo de safra ou safrinha, associação a insumos inseticidas orgânicos, biológicos por plantas, ou estratégias a modelos discretos, equações de diferenças ou por EDP's aplicadas.

Referências

- [1] Adultos da *Spodoptera frugiperda*. <http://www.manejem.com.br/doenca/praga-lagarta-militar-spodoptera-frugiperda>. Acessado em 26/11/2018.
- [2] Ciclo de vida da *Helicoverpa armigera*. <https://blog.aegro.com.br/ciclo-de-vida-helicoverpa-armigera/1-ciclo-de-vida-helicoverpa-armigera>. Acessado em 26/11/2018.
- [3] Ciclo de vida da lagarta *Spodoptera frugiperda*. <http://www.masa.gov.mz/agricultura/sanidade-vegetal/protecao-de-plantas/lagarta-do-funil-do-milho-spodoptera-frugiperda>. Acessado em 26/11/2018.
- [4] Ciclo de vida *Trichogramma*. <http://www.labagricola.com/trichogramma.htm>. Acessado em 07/10/2018.
- [5] Controle biológico. <http://www.g1.globo.com/economia/agronegocio>. Acessado em 29/10/2018.
- [6] Controle biológico é Agro-campanha da Rede Globo de Televisão. <http://www.youtube.com/watch?v=hJuhjZZykAI>. Acessado em 29/10/2018.
- [7] Danos na lavoura do milho pela *Spodoptera frugiperda*. <https://blog.aegro.com.br/manejo-integrado-de-pragas-aplicacoes/lagarta-do-cartucho-em-milho>. Acessado em 07/10/2018.
- [8] Exportação de milho do Brasil é recorde em 2018, até setembro! <https://www.farmnews.com.br/mercado/exportacao-de-milho-10>. Acessado em 06/01/2019.
- [9] Pupa da *Spodoptera frugiperda*. <http://www.ecoregistros.org/sitebr/imagen.phpid=49607>. Acessado em 26/11/2018.
- [10] Valor bruto da produção agropecuária (vbp). <http://www.agricultura.gov.br/assuntos/politica-agricola/valor-bruto-da-producao-agropecuaria-vbp>. Acessado em 06/01/2019.
- [11] ALLEN, L. J. S. *An introduction to Mathematical Biology*. Pearson Prentice Hall, 2007.
- [12] ALMEIDA, V. V. P. Controle Ótimo aplicado a problemas biológicos. Dissertação de Mestrado, dissertação (Mestrado)-Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2010.
- [13] BRAUER, F., CHAVES, C. C. *An introduction to mathematical models in ecology and evolution-time and space*. Wiley-BlackWell, 2009.
- [14] BRAUER, F., CHAVES, C. C. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer, 2011.

- [15] BUENO, J. C., MOLTER, A., PIOVESAN, L. R. Modelagem matemática aplicada ao controle biológico de pragas em lavouras de milho. *XX EREMAT SUL - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul* (2014), 18–26.
- [16] CARVALHO, D. S. Modelagem matemática do crescimento tumoral mamário. Dissertação de Mestrado, dissertação (Mestrado)-Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, 2016.
- [17] CODEN, C., RAFKOV, M. Aplicação da função de Lyapunov num problema de controle ótimo de pragas. *TEMA-Tendência em Matemática Aplicada e Computacional* 3, 2 (2002), 83–92.
- [18] CRUZ, I. A lagarta-do-cartucho na cultura do milho. Em *Circular Técnico EMBRAPA-Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária* (1995).
- [19] CRUZ, I., MONTEIRO, M. A. R. Controle biológico da lagarta do cartucho do milho *Spodoptera frugiperda* utilizando o parasitoide de ovos *Trichogramma pretiosum*. *Comunicado Técnico-Ministério da Agricultura Pecuária e Abastecimento-EMBRAPA* (2004).
- [20] DOERING, C. I., LOPES, A. O. *Equações diferenciais ordinárias*. Coleção Matemática Universitária, 2016.
- [21] EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical Models in Biology*. Random House, 1988.
- [22] ÇELIK, C., DUMAN, O. Alle effect in a discrete: time predator-prey system. *Chaos, solitons and Fractals* 40 (2009), 1956–1962.
- [23] EMBRAPA. Ações emergenciais propostas pela EMBRAPA para o manejo integrado de *Helicoverpa* spp. em áreas agrícolas. Em *EMBRAPA-Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária* (1995).
- [24] FIGUEIREDO, D. G., NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. Coleção Matemática Universitária, 2005.
- [25] HIRSCH, M. W., SMALE, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.
- [26] HOU, Z., LISANA, B., PIREDDU, M., ZAMOLIN, F. Lotka-Volterra and related systems - recent developments in populations dynamics. Relatório Técnico, De GRUYTER, 2013.
- [27] J.BAUMEISTER, LEITÃO, A. *Introdução à teoria de controle e programação dinâmica*. Projeto Euclides, 2014.
- [28] KNOWLES, G. *An introduction to applied optimal control*. Academic Press, Inc., 1981.
- [29] KOT, M. *Elements of Mathematical Ecology*. Press Cambridge, 2001.
- [30] KÜHN, R. Mathematical biology: lecture notes. *King' college London* (2015).

- [31] MOLTER, A., RAFIKOV, M. Nonlinear optimal control of population systems: applications in ecosystems. *Springer* (2014).
- [32] MOLTER, A., RAFIKOV, M. Controle Ótimo para sistema caótico de Lotka-Volterra. *TEMA-Tendência Matemática Aplicada e Computacional* 5 (2004), 239–248.
- [33] MURRAY, J. D. *Mathematical Biology*, 3 ed. Prentice Hall, 2002.
- [34] NETO, J. B. *Mecânica Newtoniana Lagrangiana & Hamiltoniana*. Livraria da Física Editora, 2004.
- [35] NOBREGA, P. N. *Equações Diferenciais*. Fundação CECIERJ, 2004.
- [36] PEREIRA, L. G. B. Táticas de controle da lagarta-do-cartucho do milho, *Spodoptera frugiperda*. Em *Dossiê técnico* (2007).
- [37] RAFIKOV, M., BALTHAZAR, J. M., BREMEN, H. F. Mathematical modeling and control of population systems: applications in biological pest control. *Applied Mathematical and Computation*, 200 (2008), 557–573.
- [38] ROCKWOOD, L. L. *Introduction to population ecology*. BlackWell Publishing, 2006.
- [39] SANTOS, L. H. S. Teoria de controle ótimo com aplicações a sistemas biológicos. Dissertação de Mestrado-Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais da Universidade do Estado do Rio de Janeiro-I.M.E., Rio de Janeiro, RJ, 2012.
- [40] SEGEL, L. A., EDELSTEIN-KESHET, L. *Primer on Mathematical Models in Biology*. Random House, 2013.
- [41] SONTAG, E. D. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer, 1998.
- [42] TEIXEIRA, W. P., LUCHINI, G. A., SOUZA, G. M., MARINHO-PRADO, J. S., PESSOA, M. C. P. Y. Simulação da dinâmica populacional de *Helicoverpa armigera* com base em dados de feijão cultivar pérola em sala de criação laboratorial. Relatório Técnico, 11 Congresso Interinstitucional de iniciação científica-CIIC2017, Campinas, SP, 2017.
- [43] TUSSET, A. M., RAFIKOV, M. Controle Ótimo de pragas modelos linearizados funcional quadrático. *TEMA Tendência Matemática Aplicada e Computacional* 5, 1 (2004), 145–154.
- [44] VRIES, G., HILLEN, T., LEWIS, M., MÜLLER, J., SCHÖNFISH, B. *A course in Mathematical Biology Quantitative Modeling with Mathematical and Computational Methods*. SIAM-Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- [45] WEBER, A. B. Controle ótimo do sistema de Lotka-Volterra: linear ou não-linear. Dissertação de Mestrado-Programa de Pós-Graduação em Ciências em Modelagem da Universidade Regional do Noroeste de Estado do Rio de Grande do Sul, Ijuí, RS, 2006.
- [46] ZILL, D. G. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*, 10 ed. Cengage Learning Edições Ltda, 2016.