

Universidade Federal Fluminense

JOÃO PAULO ANDRADE

**Análise numérica para as equações de Navier-Stokes,
em 2D, com viscosidade não-local**

VOLTA REDONDA

2019

JOÃO PAULO ANDRADE

**Análise numérica para as equações de Navier-Stokes,
em 2D, com viscosidade não-local**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Métodos Matemáticos e computacionais aplicados à engenharia e ciência.

Orientador:

Jorge Ferreira

Coorientador:

Emerson Souza Freire

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

VOLTA REDONDA

2019

Ficha catalográfica automática - SDC/BEM
Gerada com informações fornecidas pelo autor

A553a Andrade, João Paulo
Análise numérica para as equações de Navier-Stokes, em 2D, com viscosidade não-local / João Paulo Andrade ; Jorge Ferreira, orientador ; Emerson Souza Freire, coorientador. Volta Redonda, 2019.
123 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2019.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPG-MCCT.2019.m.12546921770>

1. Equações de Navier-Stokes. 2. Equação diferencial parcial não-linear. 3. Método dos elementos finitos. 4. Análise numérica. 5. Produção intelectual. I. Ferreira, Jorge, orientador. II. Souza Freire, Emerson, coorientador. III. Universidade Federal Fluminense. Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda. IV. Título.

CDD -

Análise numérica para as equações de Navier-Stokes, em 2D, com viscosidade não-local

João Paulo Andrade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Métodos Matemáticos e computacionais aplicados à engenharia e ciência.

Aprovada por:



Prof. Jorge Ferreira, D.Sc. / UFF-VR



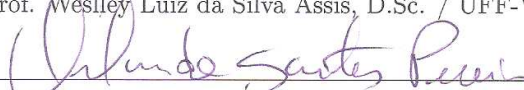
Prof. Emerson Souza Freire, D.Sc. / UFF-VR



Prof. Andrey Dione Ferreira, D.Sc. / IFRJ-VR



Prof. Wesley Luiz da Silva Assis, D.Sc. / UFF-VR



Prof. Orlando dos Santos Pereira, D.Sc. /

DEMAT-ICE-UFRRJ

Volta Redonda, 29 de março de 2019.

A Deus por nunca ter me abandonado.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter cuidado de mim em toda a minha jornada.

Agradeço ao meu professor orientador Jorge Ferreira, por ter disposto de seu tempo, que, mesmo acidentado se prontificou a me receber em sua casa para me orientar. Além disso graças a ele pude resolver um problema em aberto na área de Equações Diferenciais Parciais.

Agradeço ao professor Emerson Freire, por ter me ensinado Análise Funcional, que sem a qual, impossibilitaria a existência deste trabalho.

Agradeço aos professores do MCCT por terem me guiado nesta jornada.

Agradeço meus parentes, minha namorada, por terem me ajudado a sempre manter a calma independente das adversidades, e, por fim agradeço à CAPES, que sem a qual não seria possível realizar esse projeto.

Resumo

Nesta dissertação fizemos a análise numérica da equação de Navier-Stokes, em duas dimensões, com coeficiente de viscosidade não linear, definida a seguir:

Seja Ω um domínio suficientemente regular, com fronteira $\partial\Omega$, regular,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{u}(x,t)}{dt} - a(l(u_1(x,t)), l(u_2(x,t))) \Delta \mathbf{u}(x,t) \\ + \rho(\mathbf{u}(x,t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(x,t) + \nabla p(x) = \mathbf{f}(t, x) \text{ em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}(x)) = 0 \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{g} \text{ em } \partial\Omega, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \end{array} \right.$$

onde, $\mathbf{u} : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $l : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, é um funcional linear contínuo, $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty)$ que satisfaz as seguintes hipóteses:

1. $0 < a_- \leq a(x_1, x_2) \leq a_+$,
2. $|a(x) - a(y)| \leq A_1|x_1 - y_1| + A_2|x_2 - y_2|$, $A_1, A_2 > 0$,

em outras palavras, a função $a(x_1, x_2)$, é limitada, contínua e positiva definida, estamos assumindo também que $\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0$, onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal a fronteira $\partial\Omega$. Esta formulação generaliza à equação de Navier-Stokes com viscosidade positiva, visto que esta, é um caso particular obtido quando $a(x_1, x_2) = \mu$. Nosso objetivo é, provar a existência de soluções fracas, fortes, e, existência de soluções periódicas, usando método de Faedo-Galerkin, mostrar a unicidade das soluções, e, que em casos específicos é possível afirmar que a solução possui decaimento exponencial, isso significa que, quando $t \rightarrow \infty$ a nossa solução se anula no domínio. Faremos simulações deste problema, usando as condições do benchmark Lid-driven Cavity, usando o método conhecido como Θ -Scheme, bem descrito em [20], que é um método de discretização temporal, baseado no método de Peaceman-Rachford, e para a parte espacial, usaremos o método bem conhecido de Elementos Finitos.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais, Elementos Finitos, $\Theta - Scheme$, Navier-Stokes, Método de Galerkin.

Abstract

In this work we made the numerical analysis of Navier-Stokes equations, in two dimensions, with non-linear viscosity, defined as follows:

Let Ω be a domain sufficiently regular and its boundary being $\partial\Omega$, regular,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{u}(x, t)}{dt} - a(l(u_1(x, t)), l(u_2(x, t))) \Delta \mathbf{u}(x, t) + \\ \rho(\mathbf{u}(x, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(x, t) + \nabla p(x) = \mathbf{f}(t, x) \text{ on } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}(x)) = 0 \text{ at } \Omega, \\ \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{g} \text{ at } \partial\Omega, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \end{array} \right.$$

where, $\mathbf{u} : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $l : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, is a continuous linear form, $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty)$ satisfying the following hypotheses:

1. $0 < a_- \leq a(x_1, x_2) \leq a_+$,
2. $|a(x) - a(y)| \leq A_1|x_1 - y_1| + A_2|x_2 - y_2|$, $A_1, A_2 > 0$,

in other words, the function $a(x_1, x_2)$, is bounded, continuous and positive definite, we are also assuming that $\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0$, where $\hat{\mathbf{n}}$ is the normal vector outside of boundary $\partial\Omega$. The present formulation of Navier-Stokes with positive viscosity, is a particular case of the equation above, since this is attained obtained when $a(x_1, x_2) = \mu$. Our objective is to prove the existence of weak solutions, strong solutions and periodic solutions, using Faedo-Galerkin's method, show the uniqueness of solution, and, in some specific cases it is possible to affirm that the solution has exponential decay, this means that when $t \rightarrow \infty$ our solution is null inside the domain. We will simulate this problem using the conditions of the Lid-driven Cavity benchmark, via the method known as Θ -Scheme, well described in [20], which is a temporal discretization method based on the Peaceman- Rachford, and for the spatial part, we will use the well-known method of Finite Elements.

Keywords: Partial Differential Equations, Finite Elements, Θ Scheme, Navier Stokes, Galerkin Method.

Glossário

$\mathcal{C}(\Omega)^k$: Espaço das funções com derivadas contínuas de ordem até k
$L^2(\Omega)$: Espaço das funções quadrado integráveis
$L^p(\Omega)$: Espaço das funções p integráveis
$H^1(\Omega)$: Espaço das funções quadrado integráveis com derivadas quadrado integráveis
$H^{-1}(\Omega)$: Espaço dual de H^1
$H_0^1(\Omega)$: $f \in H^1(\Omega)$ e $f(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$
$W^{m,n}(\Omega)$: Espaço das funções $f \in L^n(\Omega)$ tal que $D^\alpha f \in L^n(\Omega)$, onde $\alpha \leq m$
$\text{supp}(f)$: Conjunto de pontos do domínio de f , em que esta não se anula
$\mathcal{D}(\Omega)$: Conjunto das funções indefinidamente diferenciáveis com suporte em Ω
$\mathcal{D}'(\Omega)$: Espaço das distribuições
$((\cdot, \cdot))$: Produto interno em H^1
(\cdot, \cdot)	: Produto interno em L^2
$q.s$: Quase sempre
\hat{u}	: Transformada de Fourier de u
$\mathfrak{B}(X; \mathbb{R})$: Conjunto das funções limitadas de X em \mathbb{R}
$d(x, y)$: Distância do ponto x ao y pela métrica d
(X, τ)	: Espaço topológico do conjunto X pela topologia τ
E'	: Espaço dual de E
E''	: Espaço bidual de E
$\ E\ _{E'}$: Norma no espaço dual E'
$(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$: Espaço mensurável
$\sigma(E, E')$: Topologia fraca
$\sigma(E', E)$: Topologia fraca estrela

Sumário

Objetivos	11
1 Introdução	12
2 Preliminares de Análise Funcional	17
2.1 Espaços Métricos	17
2.2 Espaços Normados	19
2.3 Espaços Métricos Completos	20
2.4 Espaço Topológico	22
2.5 Espaços de Banach	23
2.5.1 O Espaço Dual	24
2.5.2 Espaços Reflexivos	25
2.6 Os Espaços $L^p(\Omega)$	27
2.6.1 Definições e Principais Resultados	27
2.7 Outros Resultados Importantes	31
2.7.1 Espaços Funções Testes	36
2.7.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$	37
2.7.3 Distribuições Escalares	38
2.7.4 Convergência e Derivada Distribucional	41
2.8 Espaços de Sobolev	42
2.8.1 O espaço $H^m(\Omega)$	42
2.9 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais	46

2.10 Um Resultado de Regularidade	50
2.11 Transformada de Fourier e teorema da compacidade envolvendo Derivadas Fracionais	51
3 Introdução ao método de Elementos Finitos	54
3.1 Introdução	54
3.2 Alguns elementos importantes	55
3.3 Família de elementos finitos afins	59
3.4 Exemplo	60
4 Navier-Stokes	65
4.1 Dedução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis	65
4.1.1 Conservação de massa	66
4.1.2 Conservação de momento	66
4.2 Equações de Navier-Stokes com termo de viscosidade não-linear	69
4.2.1 Forma trilinear $b(u, v, w)$	70
4.2.2 Método de Faedo-Galerkin	71
4.2.3 Estimativas	73
4.2.4 Existência de Soluções Fracas	74
4.2.5 Unicidade	79
4.2.6 Existência de Solução Forte	83
4.2.7 Estabilidade Exponencial da solução	85
4.2.8 Existência de Soluções Periódicas	87
5 Solução das Equações de Navier-Stokes via Elementos Finitos	92
5.1 As equações de Navier-Stokes	93
5.2 Formulação Varacional das equações de Navier-Stokes com reação-difusão não-linear	93

5.3	O método Θ -Scheme	93
5.4	Formulação Variacional do método Θ -Scheme	94
5.5	Estudo do método Θ -Scheme	96
5.5.1	Formulação inicial do problema	96
5.5.2	Descrição do Θ -Scheme	97
5.5.3	Análise sobre as constantes do Método Θ -Scheme	98
5.6	Solução discreta	99
6	Metodologia	102
6.1	Metodologia	102
6.1.1	Biblioteca GSL	102
6.1.2	Biblioteca MathGL	104
6.2	Teste de Lid-driven cavity	105
7	Resultados	106
7.1	Simulações	106
7.2	Resultados Obtidos	107
7.2.1	Densidade $\rho = 0.001$ e viscosidade não-local	108
7.2.2	Densidade $\rho = 0.0001$ e viscosidade não-local	109
7.2.3	Densidade $\rho = 0.001$ e viscosidade $\mu = 0.02$	110
7.2.4	Densidade $\rho = 0.001$ e viscosidade $\mu = 0.25$	112
8	Conclusões e trabalhos futuros	114
8.1	Conclusões	114
8.2	Trabalhos futuros	114
	Referências	116
	Índice Remissivo	120

Objetivos

Neste trabalho fizemos um estudo das Equações de Navier-Stokes com viscosidade não-linear definida em (1.0.1). Nestes estudos mostramos a existência de soluções fraca, forte e unicidade da soluções para a classe de problemas definidos no abstract, além de existência soluções periódicas e decaimento exponencial no caso em que a força externa vem de uma força conservativa, como a gravidade por exemplo. Objetivamos também fazer um breve estudo do método Θ -*scheme*. Devido a complexidade da teoria, não fizemos a prova da convergência da solução usando este método para o problema de Navier-Stokes. Este método foi exaustivamente estudado em [31], [20], [26]. Simulamos o teste conhecido por *Lid-driven cavity* com alguns tipos de viscosidade constante e positiva e comparamos o resultado obtido com o obtido quando usamos uma viscosidade do tipo não-local. Esta simulação foi feita usando o método Θ -*Scheme* para a parte temporal, e para a parte espacial utilizamos o método de elementos finitos.

Capítulo 1

Introdução

As equações de Navier-Stokes são um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares que governam o movimento para um fluido newtoniano, que pode ser líquido ou gás. Em essência, elas representam o balanço entre a taxa de variação do momento de um elemento de fluido e as forças aplicadas sobre ele, e, de forma similar ao que fez Newton na sua segunda lei para o movimento de um corpo, temos que a pressão está linearmente relacionado com a taxa de tensão do fluido. O próprio Newton não entendeu bem a natureza das forças entre as partículas elementares em um meio contínuo, mas ele fez (Newton 1687, vol. II, Seção IX, Hipótese, Proposição LI) o início da teoria da dinâmica de um fluido viscoso e uniforme, de forma intuitiva e imaginativa. Isso foi o que muitos anos depois, ajudou a dar origem as equações de Navier-Stokes, como as conhecemos, deduzida de várias hipóteses físicas, e de várias formas, por Navier ([37]), Poisson ([38]), Saint-Venant ([13]) e Stokes ([43]). Stokes ([42]) revisou os métodos e hipóteses desses autores, e apresentou uma derivação racional curta dessas equações. Essas equações têm sido amplamente aceitas como um excelente modelo do movimento macroscópico da maioria dos fluidos reais, incluindo ar e água, e são usados por inúmeros engenheiros, físicos, químicos, matemáticos, meteorologistas, oceanógrafos, geólogos e biólogos. Há, no entanto, inúmeros modelos úteis de fluidos, cujo seus movimentos não são governados pelas equações de Navier-Stokes. Por exemplo, existem fluidos não-newtonianos que são regidos por um tensor de deformação não linear e fluidos viscoelásticos em que a pressão depende da deformação, bem como sobre a taxa de deformação do fluido que mantém uma espécie de "memória" das deformações anteriores.

Neste trabalho tratamos do problema de Navier-Stokes com condições de Dirichlet e viscosidade não-local, este problema é formulado do seguinte modo:

Seja Ω um domínio suficientemente regular, com fronteira $\partial\Omega$, regular,

$$(P1) \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{u}(x,t)}{dt} - a(l(u_1(x,t)), l(u_2(x,t))) \Delta \mathbf{u}(x,t) \\ + \rho(\mathbf{u}(x,t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(x,t) + \nabla p(x,t) = \mathbf{f}(t,x) \text{ em } \Omega \times (0,T) \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}(x)) = 0 \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{u}(x,t) = \mathbf{g} \text{ em } \partial\Omega, \\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x), \end{array} \right.$$

onde, $\mathbf{u} : (0,T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, são os campos de velocidade, $p : (0,T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, a pressão, $l : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, é um funcional linear contínuo, $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty)$ que satisfaz as seguintes hipóteses:

1. $0 < a_- \leq a(x_1, x_2) \leq a_+$,
2. $|a(x) - a(y)| \leq A_1|x_1 - y_1| + A_2|x_2 - y_2|, A_1, A_2 > 0$,

em outras palavras, a função $a(x_1, x_2)$, é limitada, contínua e positiva definida. Assumimos que $\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0$, onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal a fronteira $\partial\Omega$.

A análise matemática do problema (P1), para o caso em que $a(x_1, x_2) = \mu$, uma constante definida positiva, foi iniciada por Jean Laray[30], um estudo mais aprofundado para este caso foi feito por *O.A Ladyszchenskaya* [28], Roger Teeman [45], e, Lions [34].

Neste trabalho generalizamos o trabalho sugerido por [28], onde a viscosidade sugerida foi $a(t) = \mu_0 + \mu_1|\mathbf{u}(t)|^2$, este caso foi resolvido por Lions em [34], para o caso em que temos domínio cilíndrico. Generalizamos os problemas resolvidos em, [35],[15],[24],[31], pois a viscosidade desses artigos são positivas e constantes, os dois primeiros artigos se concentraram na análise do problema, sem a resolução do problema por método numérico, e para o artigo [31], generalizamos apenas a viscosidade, visto que $\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0$. Quando o domínio é limitado "generalizamos"o paper de [11], que é em domínio não cilíndrico, considerando o termo de reação-difusão $a(t) = \mu_0 + \mu_1\|\mathbf{u}(t)\|^2$, com μ_0 e μ_1 constantes positivas, temos existência soluções fracas para dimensão até quatro, e, quando a dimensão do espaço é menor que três, ver [33], temos a unicidade, em particular para o nosso caso que é de dimensão dois e domínio limitado.

Esta formulação também generaliza às equações de Navier-Stokes com viscosidade positiva, visto que esta é um caso particular obtido quando $a(x_1, x_2) = \mu$. Ressaltamos ainda que, quando $a = 0$ obtemos as equações de Euler para fluídos ideais.

O modelo do coeficiente de reação-difusão que estamos acoplando às equações de

Navier-Stokes, foi proposto primeiro por *Chipot e Rodrigues* em [6], ele surge naturalmente quando é estudado o crescimento populacional de bactérias em um domínio regular. Neste trabalho os autores provaram a existência de soluções fracas e que a unicidade não pode ser provada para o caso geral. Uma das características desse coeficiente é, $\int_{\Omega} a(l(\mathbf{u}))f(\mathbf{u})dx = a(l(\mathbf{u})) \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{u})dx, \mathbf{u} \in L^2(\Omega)$, uma melhor explanação deste resultado foi feita pelo professor Jorge Ferreira, e pode ser encontrada no artigo [9].

Como aplicação deste trabalho, podemos citar o apêndice de [28], no caso em quem a viscosidade depende do tempo.

Para estudar essa classe de problemas, procedemos da seguinte forma:

No segundo capítulo abordamos os principais tópicos de análise funcional, usados ao decorrer do texto, como por exemplo: convergência fraca, convergência forte, alguns espaços funcionais, como o $H^1(\Omega)$ e o $L^2(\Omega)$. Neste capítulo, discursamos um pouco sobre teoria das distribuições e derivada no sentido das distribuições.

No terceiro capítulo estamos interessados em introduzir o método dos elementos finitos, definindo formalmente o que é um elemento finito, exemplificar algumas definições para a melhor compreensão e no final do capítulo aplicamos o método dos Elementos Finitos em uma equação elíptica.

Nossa motivação no quarto capítulo é estudar as equações de Navier-Stokes. Fizemos uma dedução da mesma usando as leis de conservação de massa e conservação do momento. Em seguida falamos sobre às equações de Navier-Stokes com coeficiente de reação difusão não-local, nos dedicamos nesta seção a estudar o problema (P1) investigando a existência de soluções fracas, forte e periódicas, bem como a unicidade. Para provar a existência de soluções fortes, fracas e periódicas aplicamos o método de Faedo-Galerkin, e, para provar a unicidade usamos o método da Energia. Por fim, estudamos o caso em que a força externa é uma força conservativa e $\mathbf{u}(x, 0) \neq 0$ provamos que, neste caso, a equação terá decaimento exponencial, isto é, a energia do sistema tende a zero quando o tempo tende ao infinito.

No quinto capítulo estamos interessados em fazer a formulação variacional do problema. Empregamos o método conhecido como Θ -Scheme junto com elementos finitos. Recorremos ao método dos elementos finitos pois o mesmo incorpora características do domínio e é vem de forma natural pelo método de Galerkin discreto. O método Θ -Scheme é conhecido por ter uma das melhores estabilidades para a equação de Navier-Stokes [20], este método consiste em fracionar os tempos, fizemos um pequeno resumo sobre a estabi-

lidade deste método. O problema que estudamos é:

Seja Ω um domínio suficientemente regular com fronteira $\partial\Omega$ bem regular, queremos encontrar \mathbf{u} e p que satisfazem

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{u}(x,t)}{dt} - a(l(u_1(x,t)), l(u_2(x,t))) \Delta \mathbf{u}(x,t) + \rho(\mathbf{u}(x,t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(x,t) + \nabla p(x) = 0 \text{ em } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}(x)) = 0 \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{u}(x,t) = \mathbf{g}(x) \text{ em } \Gamma, \\ \mathbf{u}(x,t) = 0 \text{ em } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x), \end{array} \right. \quad (1.0.1)$$

onde $\mathbf{g}(x) := (g_1(x,t), g_2(x,t)) = (1, 0)$, $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, Γ é a fronteira superior e $t \in [0, 1]$, este problema é conhecido como *Lid-driven cavity Benchmark*. Utilizamos esse *benchmark* visto que, como o problema está em aberto não existe solução analítica para comparação, e, que este é um método bem estabelecido para tal, como dito no artigo [27]. Este método consiste, basicamente, na aplicação de uma força tangencial e unitária na fronteira superior do domínio, e é esperado o surgimento de vórtices dentro do mesmo. Não fizemos as análises de erro neste trabalho devido a dificuldade de limitações de hardware, ressaltamos que muitos artigos não fazem análise de erro como exemplo podemos citar, [17, 25, 39], e, mesmo quando é possível determinar uma solução analítica para comparações o erro obtido das soluções aproximadas são grandes, [31, 46], neste último o erro chegou a ser da ordem 10^{-3} mesmo quando a malha foi suficientemente refinada com 16384 elementos.

Fizemos o parágrafo a seguir sobre o *Benchmark Lid-Driven cavity*, com base no artigo [27].

Um recipiente retangular ou cúbico estão entre as geometrias confinadas mais simples dentro das quais o movimento do fluido pode ser estudado. Devido à simplicidade de sua configuração, lid-driven cavity foi investigada extensivamente. Ele tem sido empregado como um problema numérico de referência e como uma cama de teste para estudar efeitos físicos específicos. Após as primeiras investigações numéricas de Kawaguti, e, Burggraf, a busca por eficiência e precisão começou com o trabalho de Ghia, e Schreiber e Keller, que calcularam o fluxo bidimensional, estável, para números de Reynolds até 10^4 em uma cavidade quadrada delimitada por três paredes rígidas e a tampa movendo-se com velocidade constante. Estimulados por esses resultados experimentais e pelas demais questões abertas, casos-teste tridimensionais dedicados foram definidos e investigados numericamente por diferentes grupos de pesquisa, com resultados coletados em Deville. Após este esforço

conjunto, que não produziu resultados muito conclusivos para o número de Reynolds alvo de $Re = 3200$, um novo nível de precisão foi alcançado para fluxos bidimensionais por *Botella* e *Peyret* que empregaram métodos espectrais combinados com um dedicado tratamento dos cantos arestas singulares onde a parede móvel se encontra com uma parede estacionária. Seu método produz uma solução numérica altamente precisa para o problema bidimensional até $Re = 10^3$. Outra particularidade que diz respeito ao fluxo viscoso perto dos cantos com duas paredes estacionárias, é, o fluxo exibe um comportamento assintótico particular na forma de uma sequência infinita de vórtices auto-similares cujo tamanho e intensidade decaem na progressão geométrica à medida que a borda é aproximada.

Não fizemos a demonstrações da convergência e estabilidade método Θ -Scheme aplicado às equações de Navier-Stokes com viscosidade não-local, devido a dificuldade da mesma, mas observamos que, com as devidas alterações em [31] e [26], e, usando o fato de tal viscosidade ser limitada e lipzchiana, é possível provar.

No sexto capítulo fizemos a descrição da metodologia abordada, no sétimo capítulo exibimos os resultados que foram obtidos nas simulações, e, no oitavo capítulo, mostramos as conclusões e falamos sobre possíveis trabalhos futuros.

Capítulo 2

Preliminares de Análise Funcional

Neste capítulo fizemos um apanhado geral do que foi tratado ao longo deste trabalho no que se refere a espaços de funções. Nosso intuito neste capítulo é apresentar as bases necessárias para a melhor compreensão deste trabalho. Começamos com conceitos simples como *métrica*, *norma*, *sequências de Cauchy*, e, a partir disso definimos conceitos mais gerais, como convergência fraca e fraca \star , essas convergências são necessárias para as demonstrações de existência de soluções fracas e soluções periódicas. Dissertamos sobre alguns dos principais resultados da Análise Funcional, como por exemplo o Teorema de *Hahn-Banach*, que foi usado para provar a existência de solução forte do problema estipulado em (1.0.1), Teorema da Representação de *Riesz*, utilizado na demonstração da existência de solução fraca. Fizemos um breve estudo sobre funcionais lineares, espaço das funções p -integráveis no sentido de *Lebesgue*, L^p , espaços de *Hilbert*, espaço *Dual*, e, alguns resultados sobre espaços mais gerais, como os de *Sobolev*. Discursamos sobre distribuições escalares e vetoriais, conceitos de derivada no sentido das distribuições e integrais de *Bochner*. Enunciamos o Teorema de *Du Bois Raymond*, que é necessário para a checagem das condições iniciais do nosso problema, a desigualdade de *Poincaré*, que foi utilizada para a demonstração de decaimento exponencial da solução quando certas condições são satisfeitas.

2.1 Espaços Métricos

Para definirmos o que é um espaço métrico, para isso, precisamos definir o que é uma métrica.

Definição 2.1.1. *Uma métrica em um conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada par ordenado $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a*

y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

$$d_1) d(x, x) = 0,$$

$$d_2) \text{ Se } x \neq y \text{ então } d(x, y) > 0,$$

$$d_3) d(x, y) = d(y, x),$$

$$d_4) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

As propriedades $d_1)$ e $d_2)$, dizem que $d(x, y) \geq 0$, com, $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. A propriedade $d_3)$ nos diz que d é uma função simétrica das variáveis x e y , e por fim $d_4)$ trata da desigualdade triangular.

Agora podemos dizer que, um *espaço métrico* é um par (M, d) , onde M é um conjunto e d uma métrica. Quando não houver ambiguidade, chamamos de espaço métrico simplesmente o conjunto M .

Duas métricas são ditas *equivalentes* se existir uma constante c , positiva, tal que $d(x, y) \leq cd'(x, y)$.

Exemplo 2.1.1. Considere X um conjunto arbitrário e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real. A função f é dita limitada em X se existe uma constante $k = k_f > 0$, de modo que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$. Indicamos por $\mathfrak{B}(X; \mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir uma métrica neste conjunto da seguinte forma, para quaisquer $f, g \in \mathfrak{B}(X; \mathbb{R})$,

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Demonstração. Como as propriedades $d_1)$, $d_2)$ e $d_3)$ são óbvias, nos resta apenas provar a desigualdade triangular. Sejam $f, g, z \in \mathfrak{B}(X; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |f(x) - z(x) + z(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in X} \{|f(x) - z(x)| + |z(x) - g(x)|\} \\ &\leq \sup_{x \in X} \{|f(x) - z(x)|\} + \sup_{x \in X} \{|z(x) - g(x)|\} \\ &= d(f, z) + d(z, g). \end{aligned}$$

□

Esta métrica é denominada métrica da convergência uniforme ou do sup. Temos portanto que $\mathfrak{B}(X; \mathbb{R})$ munido da métrica do sup é um espaço métrico.

2.2 Espaços Normados

Nesta seção introduzimos o conceito de norma, que é essencial no decorrer do trabalho.

Definição 2.2.1. *Seja E um espaço vetorial real. Uma norma, em E , é uma aplicação $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfaz:*

i) $\|\xi\| \geq 0$ para todo $\xi \in E$ e $\|\xi\| = 0 \iff \xi = 0$ (comprimento positivo)

ii) $\|\lambda\xi\| = |\lambda|\|\xi\|$ para todo $\xi \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (dilatação)

iii) $\|\xi + \zeta\| \leq \|\xi\| + \|\zeta\|$ para todo $\xi, \zeta \in E$ (desigualdade triangular)

O par $(\|\cdot\|, E)$ é denominado *espaço normado*.

Podemos induzir uma métrica da seguinte forma, $d(\xi, \delta) = \|\xi - \delta\|$, onde $\xi, \delta \in E$, disso podemos concluir que todo espaço normado é um espaço métrico.

Exemplo 2.2.1. *Definamos $L^1(a, b)$ como sendo o espaço de todas as funções definidas sobre $[a, b]$ integráveis à Lebesgue. É fácil verificar que este é um espaço normado. Basta muni-lo da seguinte aplicação:*

$\|\cdot\| : L^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

a qual vê-se facilmente que é uma norma.

Demonstração. Sejam $f, g \in L^1(a, b)$ temos,

$$\begin{aligned} & \|f + g\|_1 \\ &= \int_a^b |f(x) + g(x)| dx \\ &\leq \int_a^b |f(x)| + |g(x)| dx \\ &= \int_a^b |f(x)| dx + \int_a^b |g(x)| dx \\ & \|f\|_1 + \|g\|_1, \end{aligned}$$

sendo as propriedades *i*) e *ii*) triviais. □

2.3 Espaços Métricos Completos

Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita de Cauchy no espaço métrico M , se dado $\varepsilon > 0$, de modo arbitrário existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Se a métrica d for induzida por uma norma $\|\cdot\|$, a definição fica, dado $\varepsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que $\forall n, m > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Exemplo 2.3.1. *Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência que converge para a . Para todo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existem m_0 e n_0 de tal forma que para $m > m_0$ e $n > n_0$, $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tome $k = \max\{m_0, n_0\}$, para $m, n > k$ temos,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (2.3.1)$$

□

Definição 2.3.1. *Um espaço métrico é dito completo, quando toda sequência de Cauchy nele é convergente.*

Exemplo 2.3.2. *Seja o espaço $M = \mathcal{C}(a, b)$, o conjunto das funções contínuas sobre o intervalo $[a, b]$, munido da métrica,*

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Afirmamos que (M, d) é completo.

Demonstração. Com efeito, seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}(a, b)$, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$n, m \geq N \Rightarrow d(f_n, f_m) < \varepsilon,$$

ou seja,

$$n, m \geq N \Rightarrow w \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Sabemos que na reta real toda sequência de Cauchy é convergente, teremos portanto que, para cada x , $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, isto é, $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Para mostrarmos a completeza de $\mathcal{C}(a, b)$, basta verificar a continuidade de f . De fato, seja $\varepsilon > 0$, devido a convergência existem N_1 e N_2 tais que:

$$n > N_1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ da mesma forma, } n > N_2 \Rightarrow |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tomemos, $N = \max\{N_1, N_2\}$. Da continuidade de f_n e usando o fato de ser de Cauchy, então existe $\delta > 0$, tal que:

$$|x - y| < \delta \rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da desigualdade triangular, segue:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

Agora, tomando $n > N$ e $|x - y| < \delta$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Donde tem-se a continuidade de f . Dessa forma $f \in \mathcal{C}(a, b)$, o que mostra que a sequência de Cauchy f_n convergiu no próprio espaço e isso acaba por demonstrar a completeza de $\mathcal{C}(a, b)$.

□

2.4 Espaço Topológico

Nesta seção fizemos uma introdução aos espaços topológicos. Espaços topológicos nada mais são que uma generalização dos conceitos de espaços métricos e espaços normados. Primeiramente definimos o que é uma topologia.

Definição 2.4.1. *Uma topologia num conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X , chamados subconjuntos abertos segundo a topologia τ , satisfazendo as seguintes propriedades:*

- i) X e o subconjunto \emptyset são abertos,*
- ii) a reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto,*
- iii) a intersecção finita de uma família de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.*

O par (X, τ) , com X sendo um conjunto e τ uma topologia de X , é chamado espaço topológico. Caso não haja risco de confusão, chamamos o espaço topológico (X, τ) , por espaço topológico X .

Uma aplicação $F : X \rightarrow Y$, de um espaço topológico X em um espaço topológico Y é dita contínua, se a imagem inversa $F^{-1}(B)$, de todo aberto $B \subset Y$, for aberto em X .

Dado duas topologias, τ, τ' , em um conjunto X , dizemos que τ é *mais fina* que τ' se $\tau' \subset \tau$, isto é, se cada aberto de τ' for um aberto de τ .

Exemplo 2.4.1. *Para que um conjunto X seja um espaço topológico, basta considerar a topologia formada por todos os subconjuntos de X . Essa topologia é conhecida como topologia discreta. Para que X seja um espaço métrico, basta considerar a métrica $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$ e 0 caso contrário.*

Outra topologia que podemos citar é a topologia caótica, que é formada apenas pelos conjuntos X e \emptyset .

Para que duas métricas definam o mesmo espaço topológico é necessário e suficiente que elas sejam equivalentes. Dadas duas topologias τ, τ' em um conjunto X , afim de que τ seja mais fina que τ' , é necessário e suficiente que a aplicação identidade $i : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau')$ seja contínua.

2.5 Espaços de Banach

Um espaço normado E é dito um espaço de *Banach*, se o mesmo é completo com a métrica induzida pela norma deste espaço.

Um dos resultados mais famosos é que os espaços L^p são *Banach*.

Teorema 2.5.1. (*Fischer-Riesz*) L^p é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração. Vamos separar esta demonstração em dois casos.

Caso 1: $p = \infty$) Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em L^∞ . Dado um inteiro $k \geq 1$, existe um inteiro N_k tal que $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$, para $m, n \geq N_k$. Então existe um conjunto de medida nula E_k tal que,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}, \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k, \quad \forall m, n \geq N_k. \quad (2.5.1)$$

Então, façamos $E = \bigcup_k E_k$ de tal forma que E é um conjunto de medida nula, vemos então que para todo $x \in \Omega \setminus E$, a sequência de funções $f_n(x)$ é Cauchy em \mathbb{R} . Disto segue, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in \Omega \setminus E$. Passando o limite em (2.5.1), quando $m \rightarrow \infty$ nós obtemos,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E, \quad \forall n \geq N_k.$$

Com isso nós concluímos que $f \in L^\infty$ e $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$, $\forall n \geq N_k$; e, portanto, $f_n \rightarrow f$ em L^∞ .

Caso 2: $1 \leq p < \infty$) Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em L^p . Para concluímos que L^p é um espaço completo, é suficiente mostrar uma subsequência que converge em L^p . Escolheremos a subsequência (f_{n_k}) da seguinte forma,

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Afirmamos que f_{n_k} converge em L^p . Para simplificar a notação chamaremos f_{n_k} por f_k , então,

$$\|f_{k+1} - f_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \geq 1. \quad (2.5.2)$$

Seja,

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_{k+1}(x) - f_k(x)|,$$

então, $\|g_n\|_p \leq 1$. Como $g_n(x)$ é uma sequência monótona e limitada, ela tende para $g(x)$,

q.s em Ω , com $g \in L^p$. Por outro lado, para $m \geq n \geq 2$, nós temos,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x).$$

disso segue que q.s em Ω , $f_n(x)$ é uma sequência de Cauchy e converge para um limite finito, $f(x)$. Temos que q.s em Ω ,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \geq 2, \quad (2.5.3)$$

e em particular para $f \in L^p$. Finalmente, nos concluímos usando a convergência dominada de Lebesgue que $\|f_m - f\|_p \rightarrow 0$ porque $|f_n(x) - f(x)|^p \rightarrow 0$ q.s e também que $|f_n - f|^p \leq g^p \in L^1$. \square

2.5.1 O Espaço Dual

Nesta seção comentamos sobre o Espaço Dual e suas aplicações. Começamos definindo o que é o Espaço Dual.

Definição 2.5.1. Denotemos por E' o conjunto das funções $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineares e contínuas, isto é:

$E' := \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é linear e contínua} \}$. O conjunto E' é chamado o dual de E , e, a norma neste espaço é dada por,

$$\|f\|_{E'} := \sup_{\|x\|_E < 1} |f(x)|.$$

Denotamos por $f(x) = \langle f, x \rangle$, quando $f \in E'$ e $x \in E$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno pela dualidade E', E .

Proposição 2.5.1. Uma aplicação linear f é contínua se, e somente se, ela é limitada.

Demonstração. Com efeito, pela continuidade de f teremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|x\| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon$$

Isso significa que para cada $y \in E$, $\frac{\delta}{\|y\|}y$ satisfaz a condição: $\left\| \frac{\delta}{\|y\|}y \right\| \leq \delta$, daí então segue-se que:

$$\left| f \left(\frac{\delta}{\|y\|}y \right) \right| < \varepsilon \implies |f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|y\|, \quad \text{donde concluímos que } f \text{ é uma função limitada.}$$

De maneira recíproca, supondo que f seja limitada. Mostraremos que f deve ser contínua. Lembremos que f é limitada se existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C\|x\|$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se:

$$\|x - y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \text{ Basta tomar } \delta = \frac{\varepsilon}{C} \text{ e aplicar a linearidade de } f.$$

□

2.5.2 Espaços Reflexivos

Assim como construímos o espaço dual de um espaço vetorial, também podemos construir o espaço dual do dual. Isto é:

$$E'' = \{f : E' \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é linear e contínua}\}$$

Este espaço E'' é também um espaço normado e completo. A norma do espaço bidual esta dada por:

$$\|f\|_{**} = \sup_{g \in E', \|g\|_* \leq 1} f(g).$$

Em geral dado um espaço vetorial E qualquer, podemos definir o espaço dual e bidual. Inclusive podemos relacionar o espaço E com o bidual E'' , através da aplicação $J : E \rightarrow E''$, definida a seguir:

Dado $x \in E$ fixo, a aplicação $f \rightarrow \langle f, x \rangle$ de E' em \mathbb{R} , e portanto, está aplicação é um elemento de E'' .

$$\text{Definimos de forma natural: } \langle J(x), f \rangle = \langle f, x \rangle = f(x), \forall x \in E, \forall f \in E'.$$

Note que J é uma isometria entre os espaços E e E'' .

Com efeito,

$$\|J(x)\|_{**} = \sup_{f \in E', \|f\|_* \leq 1} \langle J(x), f \rangle = \sup_{f \in E', \|f\|_* \leq 1} \langle f, x \rangle = \|x\|.$$

De onde obtemos uma aplicação injetora entre os espaços E e E'' . A aplicação J

é chamada de projeção canônica. Não é verdade, em geral, que J definida acima, seja sobrejetora. Os espaços nos quais J seja sobrejetora são chamados de Reflexivos.

Definição 2.5.2. *Seja E um espaço de Banach, diremos que E é um espaço reflexivo, quando a aplicação J definida acima é sobrejetora.*

Definição 2.5.3. *Diremos que um espaço normado E é separável, se existe um subconjunto enumerável e denso em E .*

Vamos enunciar dois tipos de convergência, são elas, convergência fraca e fraca \star .

Definição 2.5.4. *(Convergência Fraca): Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E . Então $u_\nu \rightarrow u$ se, e somente se, $\langle \varphi, u_\nu \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle, \forall \varphi \in E'$.*

Definição 2.5.5. *(Convergência Fraca \star) Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E' . Diz-se $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ fraco \star se, e somente se, $\langle \varphi_\nu, u \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle, \forall u \in E$.*

Definamos agora duas topologias que são essenciais para os resultados utilizados no decorrer deste trabalho. Seja E um espaço de Banach e $f \in E'$. Denotamos por $\phi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional linear definido como $\phi_f(x) := \langle f, x \rangle$. Com f percorrendo o conjunto E' nos obtemos uma coleção $(\phi_f)_{f \in E'}$ de funções de E em \mathbb{R} .

Agora nós vamos ignorar a topologia usual em E , que é a topologia associada com a norma, e definimos uma nova topologia no conjunto E da seguinte forma:

Definição 2.5.6. *A topologia fraca, denotada por $\sigma(E, E')$ em E , é a topologia mais fina associada a coleção $(\phi_f)_{f \in E'}$.*

De forma similar definimos a topologia fraca \star da seguinte forma:

Definição 2.5.7. *A topologia fraca \star , denotada por $\sigma(E', E)$ em E' , é a topologia mais fina associada a coleção $(\phi_x)_x \in E$.*

2.6 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção introduzimos os espaços L^p , que nos são de grande importância. Fizemos uma breve definição destes espaços e enunciamos alguns resultados relevantes para o que se segue. Ressaltamos que as integrais são integrais de Lebesgue, que é uma forma mais geral de calcular integrais ([14], [4]).

Alguns resultados utilizados requerem a noção de medida e conjuntos de *medida nula*. Definimos o que é uma medida, e conjuntos de *medida nula* sem nos aprofundarmos.

A tripla $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ é um *espaço de medida* se:

i) \mathcal{M} é uma σ -álgebra em Ω se:

(a) $\emptyset \in \mathcal{M}$,

(b) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$,

(c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ sempre que $A_n \in \mathcal{M}, \forall n$.

ii) μ é uma medida, $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ se satisfaz:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ sempre que (A_n) é uma família de membros disjuntos em \mathcal{M} .

iii) Ω é σ -finito, isto é, existe uma família enumerável (Ω_n) em \mathcal{M} tal que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ e $\mu(\Omega_n) < \infty, \forall n$.

Como exemplos de medidas, podemos citar a distância em \mathbb{R} e área em \mathbb{R}^2 . Os conjuntos de $E \in \mathcal{M}$ que satisfazem a propriedade $\mu(E) = 0$ são chamados conjuntos de *medida nula*, dizemos que uma propriedade é *quase sempre (q.s.)*, se ela for válida em Ω exceto em um conjunto de medida nula. Como exemplos de conjuntos de medida nula, em (a, b) , podemos tomar o conjunto E , como sendo um conjunto enumerável de ponto de (a, b) , e, em $Q := [a, b] \times [a, b]$, como sendo um conjunto enumerável de retas contidas em Q .

2.6.1 Definições e Principais Resultados

Seja $p \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty$, definimos:

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f|^p d\Omega < \infty\},$$

considerando agora $p = \infty$ tem-se:

$$L^\infty := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \exists c \geq 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq c \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Definimos também as normas: $\|\cdot\|_p : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$, para $0 < p < \infty$ e $\|\cdot\|_\infty$, para $p = \infty$, dadas respectivamente por:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{e} \quad \|f\|_\infty = \inf\{c : |f(x)| \leq c \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Lembramos que $L^\infty(\Omega) = [L^1(\Omega)]'$, como esta demonstração foge do escopo deste trabalho, apenas citamos que ela pode ser encontrada em [4].

Para efeito ilustrativo, mostremos a seguir que, para $0 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial e $\|\cdot\|_p$ de fato é norma.

Notação: Se $1 \leq p \leq \infty$ denotamos por q o número definido por:

- a) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se $1 < p < \infty$
 b) $q = 1$, se $p = \infty$ e $q = \infty$ se $p = 1$

O número p é denominado expoente conjugado de q .

Lema 2.6.1. (*Desigualdade de Young*) Se $1 < p, q < \infty$, com, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e, a, b são números reais não negativos então:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

a igualdade só ocorre quando $a^p = b^q$.

Demonstração. Se $\varphi(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda \implies \varphi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$ e se $\lambda - 1 < 0$ temos que:

- $\varphi'(t) < 0$ para $t < 1$
- $\varphi'(t) > 0$ para $t > 1$

Logo para $t \neq 1$, temos $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$, de onde $(1 - \lambda) + \lambda t \geq t^\lambda$

(a igualdade só vale se $t = 1$)

Se $b \neq 0$ a desigualdade segue substituindo t por $\frac{a^p}{b^q}$. Por outro lado, se $b = 0$ o lema é trivial. □

Lema 2.6.2. (*Desigualdade de Hölder*) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Se $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ então,

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. Os casos $p = 1$ e $p = \infty$ seguem de modo imediato. Agora se $1 < p < \infty$ temos que:

$$|f(x)| |g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q, \text{ devido a desigualdade de Young.}$$

Dessa forma, temos que:

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| dx \leq \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q} \|g\|_{L^q}^q$$

mostrando portanto, que $f \cdot g \in L^1(\Omega)$. Substituindo f por λf , $\lambda > 0$, segue-se que

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda q} \|g\|_{L^q}^q.$$

Por outro lado, minimizando o lado direito da desigualdade acima para $\lambda \in (0, \infty)$, temos que o mínimo ocorre para $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1} \|g\|_{L^q}^{q/p}$ e o resultado segue. □

Teorema 2.6.1. (*da Convergência Dominada de Lebesgue*):

Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis definidas em $L^1(\Omega)$. Suponha que:

i) $(f_n)_n$ converge q.s. para uma função real, mensurável, f ,

ii) Existe uma função integrável $g \in L^1(\Omega)$, tal que $|f_n(x)| \leq g(x), \forall n$ q.s. em Ω .

$$\text{Então, } \int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração. ver [4]. □

Usamos a notação p' para denotar o conjugado de p , isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Teorema 2.6.2. (*Representação de Riez*) *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\varphi \in (L^p)'$. Então existe um único $u \in L^{p'}$ tal que:*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f, \forall f \in L^p.$$

Além disso, temos $\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{L^{p'}}$.

Demonstração. ver [40]. □

Segue como consequência deste teorema que podemos identificar,

$$(L^p)' = L^{p'},$$

onde $1 < p < \infty$.

Dizemos que uma sequência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$, $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 2.6.1. *Seja H um espaço de Hilbert. Chama-se base Hilbertiana de H uma sequência de elementos (ω_n) de H tais que:*

- i) $|\omega_n| = 1 \forall n, (\omega_n, \omega_m) = 0 \forall n, m, m \neq n$;
- ii) O espaço gerado pela (ω_n) é denso em H .

A seguinte proposição estabelece que a convergência em $L^p(\Omega)$ dá origem a uma convergência pontual.

Proposição 2.6.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ e $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ convergindo para u em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência de (u_k) , ainda denotada por (u_k) , tal que:*

- i) $u_k(x) \rightarrow u(x)$, q.s. em Ω ,
- ii) $|u_k(x)| \leq h(x)$, q.s. em Ω , $\forall k \in \mathbb{N}$, com $h \in L^p(\Omega)$.

Teorema 2.6.3. *Se $1 < p < \infty$, então o espaço $L^p(\Omega)$ é reflexivo.*

Demonstração. Ver [4]. □

2.7 Outros Resultados Importantes

Nesta seção fizemos um pequeno compendio com alguns resultados que consideramos importantes para a melhor compreensão deste trabalho.

Teorema 2.7.1. *(Banach - Steinhaus):*

Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja $(T_i)_{i \in I}$ uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de E em F .

Suponhamos que $\sup_{i \in I} \|T_i X\| < \infty$, $\forall x \in E$. Então: $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$.

Dito de outro modo, existe uma constante C tal que $\|T_i x\| \leq C \|x\|$, $\forall x \in E$ e $\forall i \in I$.

Demonstração. ver [4]. □

Proposição 2.7.1. *Seja E um espaço de Banach e (x_n) uma sucessão em E . Se verifica:*

- i) $x_n \rightarrow x$ em $\sigma(E, E')$ $\Rightarrow \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall f \in E'$,
- ii) Se $x_n \rightarrow x$ fortemente, então $x_n \rightarrow x$ fracamente para $\sigma(E, E')$,
- iii) Se $x_n \rightarrow x$ fracamente para $\sigma(E, E')$, então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$,
- iv) Se $x_n \rightarrow x$ fracamente em $\sigma(E, E')$ e se $f_n \rightarrow f$ fortemente em E' (isto é, $\|f_n - f\|_{E'} \rightarrow 0$), então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração. ver [4]. □

Proposição 2.7.2. *Seja E um espaço de Banach e (f_n) uma sucessão em E' . Se verifica:*

- i) $f_n \xrightarrow{*} f$ em $\sigma(E', E) \iff \langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall x \in E$,
- ii) Se $f_n \rightarrow f$ forte, então $f_n \rightarrow f$ em $\sigma(E', E'')$,
- iii) Se $f_n \rightarrow f$ em $\sigma(E', E'')$, então $f_n \xrightarrow{*} f$ em $\sigma(E', E)$,
- iv) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ em $\sigma(E', E)$, então $\|f_n\|$ esta limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$,
- v) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ em $\sigma(E', E)$ e se $x_n \rightarrow x$ fortemente em E , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração. ver [4]. □

Teorema 2.7.2. *Seja E um espaço de Banach separável e seja (f_n) uma sucessão limitada em E' . Então existe uma subsucessão (f_{n_k}) que converge na topologia $\sigma(E', E)$.*

Demonstração. ver [4]. □

Teorema 2.7.3. *(Banach-Alaoglu) Sejam E um espaço de Banach separável e E' o seu dual topológico. Então o conjunto: $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ é compacto na topologia fraca estrela.*

Demonstração. ver [40]. □

Lema 2.7.1. *(Teorema do ponto fixo de Brouwer) Seja V um espaço de dimensão finita, e $Q \subset V$ um subconjunto compacto não vazio. Se $f : Q \rightarrow Q$ é uma função contínua. Então f tem um ponto fixo, isto é, $\exists p \in Q$ tal que $f(p) = p$.*

Demonstração. ver [4]. □

Lema 2.7.2. *(Compacidade de Aubin-Lions): Sejam $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$ e B_0, B, B_1 espaços de Banach sendo que B_0 e B_1 são reflexivos tais que $B_0 \xhookrightarrow{c} B \hookrightarrow B_1$ (\xhookrightarrow{c} indica imersão compacta). Para $0 < T < \infty$, considere o espaço*

$$W = \{w; w \in L^{p_0}(0, T; B_0) \text{ e } w' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}, \text{ com a norma}$$

$$\|w\|_W = \|w\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|w'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}.$$

Então:

i) W é um espaço de Banach,

ii) $W \xrightarrow{c} L^{P_0}(0, T; B)$.

Demonstração. ver [40]. □

Observação: Como consequência da Compacidade de Aubin-Lions, temos que se $(u_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0, T; B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ uma sequência limitada em $L^2(0, T; B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ é limitada em W . Daí, segue que existe uma subsequência $(u_{\nu_k})_{k \in \mathbf{N}}$ de (u_ν) tal que $u_{\nu_k} \rightarrow u$ forte em $L^2(0, T; B)$.

Teorema 2.7.4. *Seja $\mathbf{u} \in V \subset H_0^1(\Omega)$, com V denso em Ω , e, $\{\mathbf{w}_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ uma base ortogonal do espaço V . Considere a projeção de $\mathbf{u}(0)$, $\mathbf{u}_m(0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{w}_i$, então $\|\mathbf{u}_m(0)\|^2 \leq \|\mathbf{u}(0)\|^2$.*

Demonstração.

$$\|\mathbf{u}_m(0)\|^2 = ((\mathbf{u}_m(0), \mathbf{u}_m(0))) \quad (2.7.1)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^m (\mathbf{u}(0), \mathbf{w}_i) \mathbf{w}_i, \sum_{j=1}^m (\mathbf{u}(0), \mathbf{w}_j) \mathbf{w}_j \right) \quad (2.7.2)$$

$$= \sum_{i=1}^m (\mathbf{u}(0), \mathbf{w}_i) \sum_{j=1}^m (\mathbf{u}(0), \mathbf{w}_j) (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) \quad (2.7.3)$$

$$= \sum_{i=1}^m |(\mathbf{u}(0), \mathbf{w}_i)|^2 (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i) \quad (2.7.4)$$

$$= \sum_{i=1}^m |(\mathbf{u}(0), \mathbf{w}_i)|^2 \quad (2.7.5)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} |(\mathbf{u}(0), \mathbf{w}_i)|^2 \quad (2.7.6)$$

$$= \|\mathbf{u}(0)\|^2 \quad (2.7.7)$$

□

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory sobre D se:

i) $f(t, x)$ é mensurável em t , para cada x fixo;

ii) $f(t, x)$ é contínua em x , para cada t fixo;

iii) Para cada compacto K em D , existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que:

$$|f(t, x)| \leq m_K(t), \forall (t, x) \in D \quad (1.1)$$

Considere o retângulo $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}\}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b$, com $a, b > 0$.

Teorema 2.7.5. (Carathéodory): *Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R . Então, sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ ($\beta > 0$), existe uma solução do problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Demonstração. ver [40]. □

Teorema 2.7.6. (Prolongamento de solução)

Seja $D = [0, \omega] \times B$, com $0 < \omega < \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e f nas condições de Carathéodory. Seja ainda $\varphi(t)$ uma solução de:

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(0) = X_0, |X_0| \leq b. \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ está definida, se tenha, $|\varphi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então φ tem um prolongamento até $[0, \omega]$.

Demonstração. ver [40]. □

Lema 2.7.3. (Lema de Gronwall) : *Sejam $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e não-negativas.*

Se $\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) ds$,
(com $\alpha \geq 0$), então: $\varphi(t) \leq \alpha \exp \left[\int_a^t \psi(s) ds \right], \forall t \in [a, b]$.

Em particular, $\varphi(t)$ é limitada e se $\alpha = 0$, então $\varphi \equiv 0$.

Demonstração. Fazendo $\omega(t) = \alpha + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) ds$, decorre da hipótese que $\varphi(t) \leq \omega(t)$ e pelo teorema fundamental do cálculo, segue que $\omega'(t) = \varphi(t) \psi(t)$. Logo, $\omega'(t) \leq \omega(t) \psi(t)$, donde segue:

$$\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \leq \psi(t).$$

Integrando a última desigualdade de a até t , obtemos:

$$\int_a^t \frac{\omega'(s)}{\omega(s)} ds \leq \int_a^t \psi(s) ds,$$

assim,

$$\int_a^t \frac{d}{ds} \ln(\omega(s)) ds \leq \int_a^t \psi(s) ds.$$

Portanto,

$$\ln \left(\frac{\omega(t)}{\omega(a)} \right) \leq \int_a^t \psi(s) ds, \text{ isto é,}$$

$$\omega(t) \leq \alpha \exp \left(\int_a^t \psi(s) ds \right), \quad t \in [a, b].$$

Desta desigualdade e de $\varphi(t) \leq \omega(t)$, segue o Lema.

□

Lema 2.7.4. *Seja $\gamma(t)$ contínua e não-negativa em $[0, T]$. Se:*

$\gamma(t) \leq C_1 + C_2 \int_a^t [\gamma(s) + \gamma(s)^2] ds, \quad 0 \leq t \leq T$, então existem $T_0 > 0$ e $C > 0$ tais que:

$$\gamma(t) \leq C, \forall t \in [0, T_0] \quad C_1, C_2 \geq 0.$$

2.7.1 Espaços Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua. Denominamos suporte de φ , ao fecho, em Ω , do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denota-se o suporte de φ por $\text{supp}(\varphi)$. Simbolicamente, tem-se:

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Usando a definição conclui-se que o $\text{supp}(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual φ se anula e valem as seguintes relações:

- i) $\text{supp}(\varphi + \psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi)$,
- ii) $\text{supp}(\varphi\psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\psi)$,
- iii) $\text{supp}(\lambda\varphi) = \lambda \text{supp}(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 2.7.1. *Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\varphi(x) = x^2$:*

Verifica-se que o $\text{supp}(\varphi)^c = \{0\}$, portanto $\text{supp}(\varphi)$ não é um conjunto compacto.

Neste nosso estudo, damos um destaque especial as funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω que, sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse intuito definamos o espaços $C_0^\infty(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis e suporte compacto contido em Ω . Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω .

Exemplo 2.7.2. *Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, denotamos por $B_r(x_0)$ a bola aberta de centro x_0 de raio r , isto é, $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| < r\}$. Se $B_r(x_0) \subset \Omega$, define-se $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{r^2}{\|x - x_0\|^2 - r^2}\right) & \text{se } \|x - x_0\| < r \\ 0 & \text{se } \|x - x_0\| \geq r. \end{cases}$$

Neste exemplo, verificamos que $\text{supp}(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$ é um compacto e que $C_0^\infty(\Omega)$ é não vazio. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar funcionais lineares contínuos definidos em $C_0^\infty(\Omega)$.

Observação: Por um multi-índice, entendemos uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de números inteiros não negativos. Denotamos por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ a ordem do multi-índice e por D^α o operador derivação parcial, de ordem $|\alpha|$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \dots, 0)$, temos por definição $D^0\varphi = \varphi$.

A seguir daremos noções de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, tornando-o um espaço vetorial topológico.

2.7.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Definição 2.7.1. Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{supp}(\varphi) \subset K$ e $\text{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$,

ii) $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$, uniformemente em K para todo multi-índice α .

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, e é denominado espaços das funções testes.

Observação Sendo Ω limitado, obtemos $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \forall p$, tal que $1 \leq p < \infty$, com imersão contínua e densa. De fato, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos que:

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^p dx \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|^p m(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, seja $\varphi_n \rightarrow \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$.

Mostremos que:

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \rightarrow 0 \text{ note que,}$$

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx.$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \\ &= \int_K \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = 0. \end{aligned}$$

Podemos ainda mostrar que a imersão anterior é densa. Para isso ver [10].

2.7.3 Distribuições Escalares

Com o intuito de generalizar o conceito de funções sobre Ω , introduz-se o conceito de distribuições escalares.

Denomina-se distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

$$i) T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para φ , em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_\nu) \rightarrow T(\varphi)$ em \mathbb{R} .

O valor da distribuição T na função teste φ , é denotado por $\langle T, \varphi \rangle$. Munimos o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:

Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω . Neste espaço, diz-se que a sucessão $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, converge para T , quando a sucessão $(\langle T_\nu, \varphi \rangle)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em \mathbb{R} para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω , com esta noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuições que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 2.7.2. Diz-se que uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω quando u é integrável á Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolo temos:

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \iff \int_K |u(x)| dx < \infty \text{ para todo compacto } K \subset \Omega.$$

Exemplo 2.7.3. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx.$$

Nestas condições T_u é uma distribuição escalar sobre Ω .

De fato, não é difícil mostrar a linearidade de T_u , pois segue da linearidade da integral. Resta-nos mostrar que T_u é contínua; seja dada uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ . Então:

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_\nu \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| &= |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} u(x) (\varphi_\nu - \varphi)(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |u(x) (\varphi_\nu - \varphi)(x)| dx \\ &\leq \sup |\varphi_\nu - \varphi| \int_{\Omega} |u(x)| dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pois, $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ uniformemente.

A distribuição T_u assim definida é dita gerada pela função localmente integrável u e, usando *Lema Du Bois Raymond*, tem-se que T_u é univocamente determinada por u , no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω . Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 2.7.5. (de Du Bois Raymond): Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se,

$u = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração. ver [4]. □

Vale ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 2.7.4. *Seja x_0 um ponto de Ω e definamos a função $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0).$$

É fácil verificar que δ_{x_0} é uma distribuição. Tal distribuição é conhecida por Distribuição de Dirac, em homenagem ao físico inglês Paul A.M. Dirac (1902-1984). Entretanto, mostra-se que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que:

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De fato, suponhamos que a distribuição δ_{x_0} é definida por alguma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então tem-se:

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tomando $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ definida por: $\xi(x) = \|x - x_0\|^2 \varphi(x)$, segue-se que:

$$\xi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \xi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \|x - x_0\|^2 \varphi(x)dx = 0, \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Portanto, tem-se $\|x - x_0\|^2 u(x) = 0$ quase sempre em Ω , logo $u(x) = 0$ quase sempre em Ω , isto é, $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ou seja, $\varphi(x_0) = 0, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, que é uma contradição.

Com essa noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas:

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega), 1 \leq p < \infty.$$

2.7.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o intuito de estudar os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

A motivação no conceito de derivada fraca e, posteriormente, o conceito de derivada distribucional, dado por *Sobolev*, se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada (no sentido das distribuições) de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear:

$D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação:

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \rightarrow \infty} D^\alpha T_v = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observação: Outro resultado interessante a ser mencionado é que a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, que não é, em geral, uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.7.5. *Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em \mathbb{R} e tem a seguinte forma:*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$.

Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Como $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\Omega)$, basta verificar que $u' = \delta_0$.

De fato:

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \int_\infty^0 \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \delta_0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de *Banach* de funções, conhecidos sob a denominação de *Espaços de Sobolev*.

Observação: Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção derivada no sentido das distribuições, isto é:

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u} \forall |\alpha| \leq k,$$

é uma consequência simples da fórmula de integração de Gauss.

2.8 Espaços de Sobolev

Apresentamos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais, que são os espaços de *Sobolev*.

2.8.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n com fronteira bastante regular Γ . Foi observado na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Viu-se que $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$, pois estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p(\Omega)$; tais espaços serão denominados *Espaços de Sobolev*.

O espaço vetorial $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é o espaço das (classes de) funções reais $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mensuráveis, tais que $|v|^p$ é integrável a *Lebesgue* em Ω .

Este espaço quando munido da norma:

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

é espaço de *Banach* ver ([4]).

O conjunto de todas as funções mensuráveis v essencialmente limitadas em Ω é denotado por $L^\infty(\Omega)$, define-se a norma de v por:

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{supess } |v(x)|, \forall v \in L^\infty(\Omega).$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é também um espaço de *Banach* ver ([4]).

No caso particular onde $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*. Neste caso o produto interno é dado por:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx,$$

cuja norma induzida é:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω , é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$. Em símbolo temos:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{ multi-índice, com } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é munido com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

e, se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach*.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, denotamos por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\},$$

as derivadas D^α , evidentemente, no sentido das distribuições.

Define-se em $H^m(\Omega)$ o produto escalar:

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} dx, \quad \forall u, v \in H^m(\Omega),$$

com norma induzida por este produto escalar dada por:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha u)_{L^2(\Omega)}^2 dx \right)^{1/2}.$$

Mostra-se que $H^m(\Omega)$ é espaço de *Hilbert separável*. ver ([4])

Para se ter uma ideia mais apurada dos espaços de Sobolev, descrevemos alguns casos particulares.

Em dimensão $n = 1$, temos,

$$H^1(a, b) = \left\{ u \in L^2(a, b); u' \in L^2(a, b) \right\}, \quad u' = \frac{du}{dt}.$$

Neste caso,

$$\|u\|_{H^1(a,b)}^2 = \int_a^b [u(t)]^2 dt + \int_a^b [u'(t)]^2 dt.$$

Em dimensão $n \geq 2$, temos,

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \dots, n \right\}$$

e neste caso,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} [u(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n, \end{aligned}$$

ou, de modo mais conciso, escrevemos

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

É oportuno observar que, embora o espaço vetorial das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto ocorre porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é “bem maior” que a norma de $L^p(\Omega)$ e por isso $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos sequência convergentes. Isto motivou a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo a aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. No caso $p = 2$ denotamos esta aderência por $H_0^m(\Omega)$.

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham papel fundamental na Teoria dos *Espaços de Sobolev* e por conseguinte, na Teoria das EDP's.

Teorema 2.8.1. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem funções $g_{\alpha} \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^{\alpha} g_{\alpha}$.*

Demonstração. ver [\[34\]](#). □

Proposição 2.8.1 (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$). *Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n + 1$ funções u_0, u_1, \dots, u_n de $L^2(\Omega)$, tais que:*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Demonstração. ver [34]. □

De posse destes dois resultados podemos concluir que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, linear, contínuo e isométrico.

Lema 2.8.1. (*Desigualdade de Poincaré*) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Demonstração. ver [36]. □

Observação: Utilizando desigualdade de *Poincaré* podemos concluir que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

De fato, considere a norma em $H_0^1(\Omega)$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, tem-se:

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Da desigualdade de *Poincaré-Friedrichs*, obtém-se:

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1 + C) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Conclui-se das desigualdades acima que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

2.9 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de *Banach* real, com a norma $\|\cdot\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto E . Uma função vetorial $\varphi : (0, T) \rightarrow X$,

é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^k \chi_{E_i} \varphi_i$$

onde cada $E_i \subset (0, T)$ é mensurável, $i = 1, 2, \dots, k$, e os conjuntos E_i são dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, $i = 1, 2, \dots, k$, definimos a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^k m(E_i) \varphi_i.$$

Dizemos que uma função vetorial $u : (0, T) \rightarrow X$ é *Bochner* integrável (\mathcal{B} -integrável) se existir uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

- (i) $\varphi_\nu \rightarrow u$ em X , q.s em $(0, T)$;
- (ii) $\lim_{k, m \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X dt = 0$.

Neste caso, a integral de *Bochner* de u , é por definição, o vetor de X dado por

$$\int_0^T u(t) dt = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_\nu(t) dt$$

onde o limite é considerado na norma de X .

Uma função vetorial $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ é fracamente mensurável quando a função numérica $t \mapsto \langle \Phi, u(t) \rangle$ for mensurável, $\forall \Phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X ; dizemos que u é fortemente mensurável quando u for limite quase sempre de uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é integrável a *Lebesgue*.

Aqui denotamos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \rightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à *Lebesgue* em $(0, T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, o espaço $L^2(0, T; H)$ é também um espaço de *Hilbert* cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H ds.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representamos o espaço de *Banach* das (classes de) funções

$$u : (0, T) \subset \mathbb{R} \longrightarrow X,$$

que são fortemente mensuráveis e tais que $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$. A norma em $L^\infty(0, T; X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in]0, T[} \|u(t)\|_X.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^q(0, T; X')$, onde p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. No caso, $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0, T; X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0, T; X')$. A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral:

$$\langle u, v \rangle_{(L^p(0, T; X))' \times L^p(0, T; X)} = \langle u, v \rangle_{L^q(0, T; X') \times L^p(0, T; X)}.$$

Definição 2.9.1. *Uma função $f : [0, T] \rightarrow X$ é integrável se existe uma sequência $(S_k)_k$ de funções vetoriais simples, tal que,*

$$\int_0^T \|S_k(t) - f(t)\|_X dt \rightarrow 0, \text{ com } k \rightarrow \infty,$$

se f é integrável, define-se

$$\int_0^T f(t) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T S_k(t) dt.$$

A expressão $\int_0^T f(t) d\mu$ é dita *integral de Bochner* de f , em relação a μ .

Exemplo 2.9.1. *Sejam $u \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$. Consideramos a função $T_u : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$, definida por*

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(s) \varphi(s) ds,$$

onde a integral é calculada no sentido de Bochner em X . A aplicação T_u é linear e contínua de $\mathcal{D}(0, T)$ em X e por esta razão é denominada distribuição vetorial. A distribuição T_u é univocamente determinada por u e, neste sentido, podemos identificar u com a distribuição T_u por ela definida e, portanto, $L^p(0, T; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T; X)$ com injeção contínua e densa.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X , o qual denotamos por $\mathcal{D}'(0, T; X)$.

Definição 2.9.2. *Seja $T \in \mathcal{D}'(0, T; X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Por $C^0([0, T]; X)$, $0 < T < \infty$, estamos representando o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme

$$\|u\|_{C^0([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X$$

Por $C_w^0([0, T]; X)$, denotamos o espaço das funções $u : [0, T] \rightarrow X$ fracamente contínuas, isto é, a aplicação $t \mapsto \langle v, u(t) \rangle_{X', X}$ é contínua em $[0, T]$, $\forall v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de Hilbert, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \mapsto (u(t), v)_H$, $v \in H$.

2.10 Um Resultado de Regularidade

Vamos enunciar um teorema sobre regularidade, que é de grande importância para garantir as condições do teorema de existência, antes porém, precisamos de três lemas auxiliares, os quais omitimos as devidas provas ([4]). Vejamos:

Lema 2.10.1. *Se $u \in L^2(0, T, X)$, $u' \in L^2(0, T, X')$ e $\theta \in C^\infty([0, T])$, então:*

$$i) \frac{d}{dt}(u, \eta)_X = \langle u', \eta \rangle_{X'X} \quad \forall \eta \in X,$$

$$ii) \frac{d}{dt}(\theta u) = \theta u' + \theta' u$$

Demonstração. ver [32]. □

Lema 2.10.2. *Considere o espaço de Hilbert $W = \{u; u \in L^2(0, T; X) \text{ e } u' \in L^2(0, T; X')\}$, como o produto interno*

$$(u, v)_W = (u, v)_{L^2(0, T; X)} + (u', v')_{L^2(0, T; X')}.$$

Então o conjunto dos vetores $v = \theta \eta$ com $\theta \in C^\infty([0, T])$ e $\eta \in X$ é total em W .

Demonstração. ver [32]. □

Teorema 2.10.1. *(de Regularidade) Seja Y um espaço de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$, X é denso em Y e a imersão de X em Y é contínua. Tem-se:*

$$i) \text{ Se } u \in W \text{ então } u \in C^0([0, T]; Y),$$

ii) Se u, v são funções satisfazendo i) então a função $t \rightarrow (u(t), v(t))_Y$ é absolutamente contínua e vale a seguinte igualdade:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v(t))_Y = \langle u'(t), v(t) \rangle_{X'X} + \langle u(t), v'(t) \rangle_{X'X},$$

onde a derivada no primeiro membro da igualdade é a derivada no sentido das distribuições sobre $(0, T)$ da função $(u(t), v(t))_Y$.

Demonstração. ver [32]. □

2.11 Transformada de Fourier e teorema da compacidade envolvendo Derivadas Fracionais

Para alguns resultados neste trabalho, se faz necessário o uso de transformada de Fourier. Neste capítulo listamos suas principais propriedades, fizemos alguns resultados mais simples, que não fogem ao escopo deste trabalho, e enunciamos alguns teoremas com as referências de onde estão as suas respectivas demonstrações. Alguns resultados de análise complexa, como condições de Cauchy-Riemann e Teorema dos Resíduos, podem se fazer necessárias para o melhor entendimento do texto a seguir, esses resultados podem ser encontrados em [7].

A transformada de Fourier é definida por $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi xs}dx$ com a inversa sendo, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{i2\pi xs}ds$. O operador é denotado por $\mathcal{L}[\cdot](s)$, com \cdot sendo a função em que foi aplicada a transformada de Fourier.

A primeira propriedade das transformadas de Fourier que vamos mostrar é a do *deslocamento*, esse resultado diz que, $\mathcal{L}[f(x - a)](s) = e^{-i2\pi as}F(s)$.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a)e^{-i2\pi xs}dx \text{ fazendo } x' = x - a \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-i2\pi(x'+a)s}dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-i2\pi x's}e^{-i2\pi as}dx' \\ &= e^{-i2\pi as} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-i2\pi x's}dx' \\ &= e^{-i2\pi as}\hat{f}(s). \end{aligned}$$

Outra propriedade, é a da *derivação*, que é $\mathcal{L}\left[\frac{df(x)}{dx}\right](s) = i2\pi sF(s)$, ela pode ser provada

da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dt} e^{-i2\pi xs} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} e^{-i2\pi xs} dx \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+h)}{h} e^{-i2\pi xs} dx - \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-i2\pi hs} \hat{f}(s) - \hat{f}(s)}{h} \text{ aplicando a propriedade anterior} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(s)(e^{-i2\pi hs} - 1)}{h} \text{ aplicando o limite fundamental temos} \\
 & i2\pi s \hat{f}(s).
 \end{aligned}$$

Teorema 2.11.1 (Igualdade de Parseval). *Sejam $f, g \in L^2$, se $\bar{f}, \bar{g} \in L^2$, então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

Demonstração. ver [45]. □

Corolario 2.11.1 (Teorema de Plancharel). *Se $f = g$ pelo Teorema (2.11.1) temos,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Nosso objetivo agora é generalizar o teorema da compacidade de *Aubin-Lions* para espaços que envolvem derivadas fracionadas. Este resultado nos permite provar a existência de soluções fracas para o problema (1.0.1) de forma mais simples. Sem o uso desta ferramenta, a demonstração de tal resultado seria demasiado trabalhosa, e, para o caso em que a viscosidade é constante e positiva, tal demonstração pode ser encontrada em [5].

Para os próximos resultados estamos assumido que X_0, X e X_1 são três espaços de *Hilbert* tal que,

$$X_0 \subset X \subset X_1 \tag{2.11.1}$$

a imersão entre eles é contínua e a

$$\text{imersão de } X_0 \text{ em } X \text{ é compacta.} \tag{2.11.2}$$

A derivada em t de ordem γ de ν é a inversa da transformada de Fourier de $(2i\pi s)\hat{\nu}$,

oum $\widehat{D}_t^\gamma = (2i\pi s)^\gamma \widehat{\nu}(s)$. Para dado $\gamma > 0$, nos definimos o espaço,

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}; X_0, X_1) = \{\nu \in L^2(\mathbb{R}; X_0), D_t^\gamma \nu \in L^2(\mathbb{R}; X_1)\}.$$

Este é um espaço de *Hilbert* com a norma,

$$\|\nu\|_{\mathcal{H}(\mathbb{R}; X_0, X_1)} = (\|\nu\|_{L^2(\mathbb{R}; X_0)}^2 + \| |s|^\gamma \widehat{\nu} \|_{L^2(\mathbb{R}; X_1)}^2)^{1/2}.$$

Associamos qualquer subconjunto $K \in \mathbb{R}$, o subespaço \mathcal{H}_K^γ de \mathcal{H}^γ definido como o conjunto das funções $u \in \mathcal{H}^\gamma$ com suporte contido em K :

$$\mathcal{H}_K^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1) = \{u \in \mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1), \text{supp}(u) \subset K\}.$$

Teorema 2.11.2. *Seja X_0, X, X_1 dado nas condições acima, então para qualquer conjunto limitado K e qualquer $\gamma > 0$, a imersão $\mathcal{H}_K^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}, X)$ é compacto.*

Demonstração. ver [45]. □

Capítulo 3

Introdução ao método de Elementos Finitos

3.1 Introdução

O texto dessa seção foi feito com base nos livros, [8] e [23], abordamos o tema de elementos finitos do ponto de vista teórico e prático, com teórico queremos dizer que, definimos formalmente um elemento finito como uma tripla (T, P, Σ) , e, a parte prática onde construímos o método de elementos finitos resolvendo um problema elíptico definido a seguir.

Seja $\Omega := (0, 1) \times (0, 1)$, e $\partial\Omega$ sua fronteira,

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = 2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \text{ com } x \in \Omega \\ u(x_1, x_2) = x_1, \text{ onde } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

O método dos elementos finitos, de forma resumida, nada mais é que uma forma de construir espaços finitos $V_h \subset V$, onde V pode ser $L^2(\Omega), H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$, a construção desses espaços deve seguir três aspectos, que denotamos por (FEM1), (FEM2) e (FEM3).

Definição 3.1.1. (FEM1) *O primeiro aspecto é a triangularização, \mathcal{T}_h , sobre o domínio $\bar{\Omega}$, onde este é dividido em um número finito subelementos T , em que as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. Para cada $T \in \mathcal{T}_h$, o conjunto T é fechado e seu interior é não vazio e conexo.
2. Para cada $T \in \mathcal{T}_h$, sua fronteira ∂T é Lipchitz-Continua.
3. $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$.

4. Para cada $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$, com $T_1 \neq T_2$, $\text{int}(T_1) \cap \text{int}(T_2) = \emptyset$.
5. Para cada aresta de um triângulo $T_1 \in \mathcal{T}_h$, ou ela é um subconjunto de $\partial\Omega$ ou é aresta de um outro triângulo $T_2 \in \mathcal{T}_h$.

Uma vez que a triangularização \mathcal{T}_h está estabelecida, definimos o *espaço de elementos finitos* X_h , que é o espaço das funções de dimensão finita definidas sobre o conjunto $\bar{\Omega}$.

Dado o espaço de elementos finitos X_h , nós definimos o espaço de dimensão finita, $P_T := \{v_h|_T \mid v_h \in X_h\}$, gerado pelas restrições $v_h|_T$ das funções $v_h \in X_h$ com $T \in \mathcal{T}_h$. Como nosso objetivo é resolver o problema no espaço $H^1(\Omega)$, nós precisamos de condições suficientes que garantem as imersões $X_h \hookrightarrow H^1(\Omega)$.

Teorema 3.1.1. *Assuma que as imersões $P_T \hookrightarrow H^1(T)$ para todo $T \in \mathcal{T}_h$ e $X_h \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$. Então temos as imersões,*

$$X_h \hookrightarrow H^1(\Omega),$$

$$X_{0h} := \{v_h \in X_h \mid v_h = 0 \text{ em } \partial\Omega\} \hookrightarrow H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. ver [8]. □

Definição 3.1.2. (FEM2) *O segundo aspecto do método de elementos finitos é, os espaços $P_T, T \in \mathcal{T}_h$, contém polinômios, ou, pelo menos, funções que "são próximas" a polinômios.*

Agora nosso espaço de trabalho se reduz a $V_h = X_{0h}$.

Definição 3.1.3. (FEM3) *O terceiro aspecto dos elementos finitos é, existe pelo menos uma base canônica no espaço V_h , em que seus elementos correspondem à funções que tem suporte tão pequeno quanto for possível.*

Quando não é possível obter uma triangulação que satisfaça a quinta propriedade de (FEM1), dizemos que o elemento que estamos lidando é *non-conforming*, por outro lado, neste trabalho estamos usando apenas os elementos em que tal propriedade é válida, e eles são conhecidos por *conforming*.

3.2 Alguns elementos importantes

Equipemos o espaço \mathbb{R}^2 com a base canônica $\{e_1, e_2\}$. Para cada inteiro $k \geq 0$, denotamos por P_k o espaço de todos os polinômios de grau menor ou igual a k com as

variáveis x_1 e x_2 , ou seja, polinômios da forma

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \gamma_\alpha x^\alpha,$$

com a dimensão de P_k dada por $\dim P_k = \binom{2+k}{k}$.

Por exemplo, se $k = 2$ então $\dim P_k = 6$, portanto podemos escolher o seguinte conjunto de índices $\alpha = (1, 1, 1, 1, 0, 0)$ que nos resulta no seguinte polinômio $p(x_1, x_2) = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_1 x_2 + \gamma_3 x_2$.

Um triângulo, $T \subset \Omega$ é um conjunto formado por três pontos $a^1, a^2, a^3 \in \mathbb{R}^2$, que são chamados de vértices, estes vértices formam a matriz,

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e esta é inversível. Com isso, podemos escrever o triângulo, T , da seguinte forma,

$$T := \left\{ x = \sum_{j=1}^3 \lambda_j a^j \mid 0 \leq \lambda_j \leq 1, j = 1, 2, 3, \sum_{j=1}^3 \lambda_j = 1 \right\}.$$

As coordenadas que vamos usar são conhecidas como coordenadas de baricentro, $\lambda_j = \lambda(x)_j$, $1 \leq j \leq 3$. Qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^2$, com respeito à três vértices é dada pela solução, única, do sistema linear,

$$\sum_{j=1}^3 a_j^i \lambda_j = x^i, 1 \leq i \leq 2, \quad \sum_{j=1}^3 \lambda_j = 1,$$

onde a matriz gerada pelos elementos (a_j^i) acima corresponde a matriz A .

Exemplo 3.2.1. Dado o conjunto de pontos $I := \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$, o triângulo T , em coordenadas baricêntricas, formado pelos pontos de I , é dado pela resolução do sistema

$$(x_1, x_2) = \lambda_1(0, 0) + \lambda_2(1, 0) + \lambda_3(0, 1)$$

$$\lambda_2 = x_1$$

$$\lambda_3 = x_2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

com isso temos,

$$\lambda_1(x) = 1 - x_1 - x_2$$

$$\lambda_2(x) = x_2$$

$$\lambda_3(x) = x_3.$$

Para descrever nosso primeiro elemento finito, nos precisamos provar que o polinômio $p : \sum_{|\alpha| \leq 1} \gamma_\alpha x^\alpha$, de grau um, é unicamente determinado pelos seus três vértices. Para provar isso basta provar que o sistema linear,

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} \gamma_\alpha (a^j)^\alpha = \mu_j, \quad 1 \leq j \leq 3$$

que pode ser escrito da seguinte forma,

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1^1 & a_2^1 \\ 1 & a_1^2 & a_2^2 \\ 1 & a_1^3 & a_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

tem uma e apenas uma solução. Como a matriz é quadrada, basta provar a existência ou a unicidade, mas a existência é óbvia já que as coordenadas baricêntricas satisfazem a propriedade de $\lambda_i(a^j) = \delta_j^i, 1 \leq i, j \leq 1$, então o polinômio, $p(x) = \sum_{i=1}^3 \mu_i \lambda_i(x)$ tem a propriedade desejada de interpolação. Como consequência disso nós provamos a identidade,

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} p(a^i) \lambda_i.$$

Exemplo 3.2.2. *Seja o triangulo T , com seus vértices no conjunto $I := \{(-\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0), (0, 1)\}$, e um polinômio $p(x)$, onde $p(I_1) = 3, p(I_2) = 2, p(I_3) = -1$, onde, $I_1 = (-\frac{1}{2}, 0), I_2 = (\frac{1}{2}, 0)$, e, $I_3 = (0, 1)$. Resolvendo o sistema, de forma similar ao exemplo (3.2.1) obtemos,*

$$\lambda_1(x) = \frac{-2x_1 - x_2 + 1}{2},$$

$$\lambda_2(x) = \frac{2x_1 - x_2 + 1}{2},$$

$$\lambda_3(x) = x_2.$$

Com isso,

$$p(x) = 2\lambda_1(x) + 3\lambda_2 - 1\lambda_3(x) = \frac{-2x_1 - 7x_2 + 5}{2}.$$

Note que, nos pontos I_1, I_2, I_3 o polinômio p assume os valores desejados,

$$\begin{aligned} p(I_1) &= \frac{-2x_1 - 7x_2 + 5}{2} = \frac{-2 \cdot \frac{-1}{2} - 7 \cdot 0 + 5}{2} = 3 \\ p(I_2) &= \frac{-2x_1 - 7x_2 + 5}{2} = \frac{-2 \cdot \frac{1}{2} - 7 \cdot 0 + 5}{2} = 2 \\ p(I_3) &= \frac{-2x_1 - 7x_2 + 5}{2} = \frac{-2 \cdot 0 - 7 \cdot 1 + 5}{2} = -1. \end{aligned}$$

Definição 3.2.1. Definimos como grau de liberdade do elemento finito, denotado por Σ_T , o conjunto dos parâmetros que definem uma função no espaço $P_k(T)$, ou seja, este conjunto consiste no valor da função nos vértices.

Por exemplo, o grau de $P_1(T)$ é dado pelo conjunto $\Sigma_T := \{p(a^i) | 1 \leq i \leq 3\}$. Segue a baixo dois tipos de elementos usados, são eles, o elemento de Courant, também chamado de P_1 pois é preciso um polinômio de grau um para interpolar os vértices, e o elemento conhecido como P_2 ou quadrático, porque é necessário um polinômio de grau dois para interpolar seus vértices.

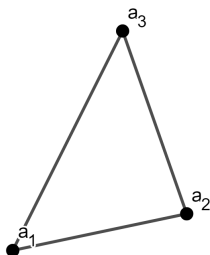


Figura 3.1: Triângulo de Courant, também conhecido como P_1 .

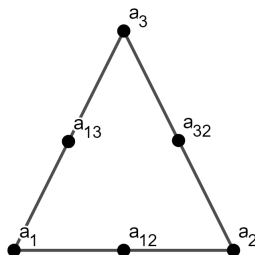


Figura 3.2: Triângulo conhecido com P_2 , formado por seis pontos.

O polinômio usado para interpolar o triângulo quadrático é,

$$p = \sum_{i=1}^3 \lambda_i (2\lambda_i - 1) p(a_i) + \sum_{i < j} 4\lambda_i \lambda_j p(a_{ij}),$$

ele pode ser obtido através da identidade, $\lambda_k(a_{ij}) = \frac{1}{2}(\delta_{ki} + \delta_{kj})$, $1 \leq i \leq j \leq 3$, $1 \leq k \leq 3$.

Com isso, nos podemos descrever um elemento finito como uma tripla (T, P, Σ_T) , $T \in \mathcal{T}_h$, P um conjunto de funções que chamamos de *base*, e Σ o conjunto de graus de liberdade deste elemento.

3.3 Família de elementos finitos afins

Nesta seção estamos interessados em estudar como duas famílias de elementos finitos se relacionam. Seja (T, P_T, Σ_T) uma família de triângulos quadráticos (que são interpolados por polinômios de grau dois), queremos descrever tal família da forma mais simples possível. Seja \tilde{T} um triângulo com vértices \tilde{a}^i , com pontos médios $\tilde{a}^i = \frac{1}{2}(\tilde{a}^i + \tilde{a}^j)$, $1 \leq i \leq j \leq 3$, e $\tilde{\Sigma} := \{p(\tilde{a}^i), 1 \leq i \leq 3; p(\tilde{a}_{ij}), 1 \leq i < j \leq 3\}$. Então para cada elemento finito (T, P_T, Σ_T) na família, existe uma única transformação afim, invertível,

$$F_t : \tilde{x} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow F_T(\tilde{x}) = B_T \tilde{x} + b_T,$$

onde B_T é uma matriz 2×2 e $b_T \in \mathbb{R}^2$, tal que

$$F_t(\tilde{a}^i) = a^i, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

e,

$$F_T(\tilde{a}_{ij}^i) = a_{ij}^i, \quad 1 \leq i < j \leq 3.$$

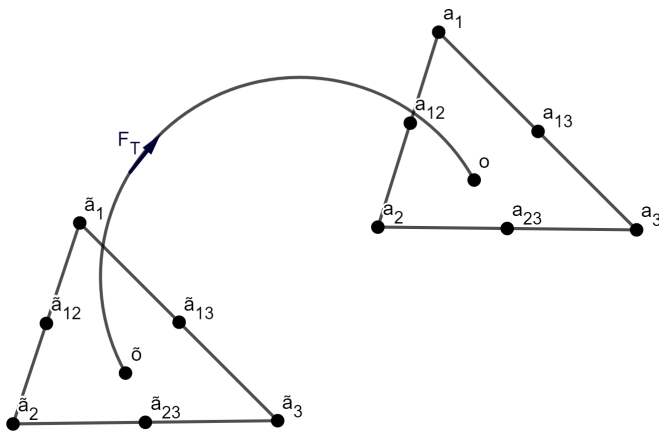


Figura 3.3: Transformação afim, F_T de T em \tilde{T} .

Como as transformações afins preservam os pontos médios, estabelecemos uma bijeção

$\tilde{x} \in \tilde{T} \rightarrow x = F_T(\tilde{x}) \in T$, entre os pontos dos conjuntos \tilde{T} e T . É natural associarmos o espaço,

$$Q_T := \left\{ p : T \rightarrow \mathbb{R} \mid p = \tilde{p} \circ F_T^{-1}, \tilde{p} \in \tilde{P} \right\},$$

com o espaço P . Então segue automaticamente disso que $Q_T = P_T$, porque é uma transformação afim. Essas transformações também são conhecidas como *isoparamétricas*.

Em outras palavras, podemos associar o elemento (T, P_T, Σ_T) com o *elemento de referência* $(\tilde{T}, \tilde{\Sigma}, \tilde{P})$ de tal forma que,

$$\begin{aligned} T &= F_T(\tilde{T}), \\ P_T &:= \left\{ p : T \rightarrow \mathbb{R} \mid p = \tilde{p} \circ F^{-1}, \tilde{p} \in \tilde{P} \right\} \\ \Sigma_T &:= \left\{ p(F_T(\tilde{a}^i)), 1 \leq i \leq 3; p(F_T(\tilde{a}_j^i)) : 1 \leq i < j \leq 3 \right\}. \end{aligned}$$

Nossa tarefa agora é dar uma descrição precisa da construção do *espaço de elemento finito*, com elementos finitos $(T, P_T, \Sigma_T), T \in \mathcal{T}_h$. Nós definimos o conjunto

$$N_h = \bigcup_{t \in \mathcal{T}_h} N_t,$$

onde N_T denota o conjunto de vértices do elemento finito (T, P_T, Σ_T) . Para cada $b \in N_h$, $T(\lambda), \lambda \in \Lambda(b)$, denota todos os elementos finitos em que tem b como seu vértice. Então o espaço de elemento finito X_h associado é definido por,

$$X_h := \left\{ v = (V_T)_{T \in \mathcal{T}_h} \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} P_T \mid v_{T(\lambda)(b)} = v_{T(\mu)}(b), \forall b \in N_h, \forall \lambda, \mu \in \Lambda(b) \right\},$$

e uma função no espaço X_h é unicamente determinada pelo conjunto, $\Sigma_h := \{v(b) \mid b \in N_h\}$, que é chamado de *grau de liberdade de um espaço de elementos finitos*.

3.4 Exemplo

Nesta seção resolvemos o problema elíptico (3.1.1).

Seja $\mathcal{Q} := (0, 1) \times (0, 1)$, e $\partial\mathcal{Q}$ sua fronteira,

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = 2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \text{ com } x := (x_1, x_2) \in \mathcal{Q} \\ u(x_1, x_2) = x_1, \text{ onde } x \in \partial\mathcal{Q}. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Primeiro passo para resolver esse problema usando elementos finitos é fazer uma triangularização do domínio Q . Queremos 72 elementos, procedemos da seguinte forma:

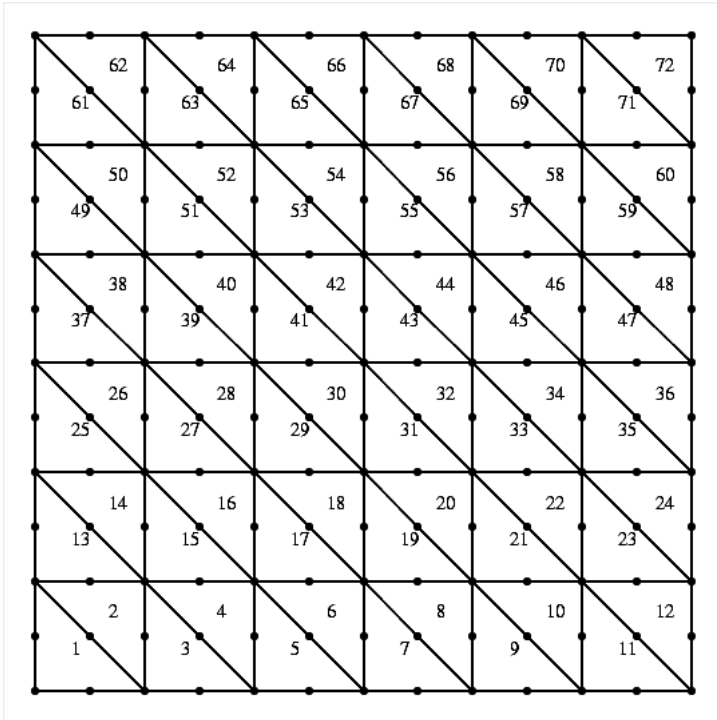


Figura 3.4: Malha utilizada no problema (3.1.1).

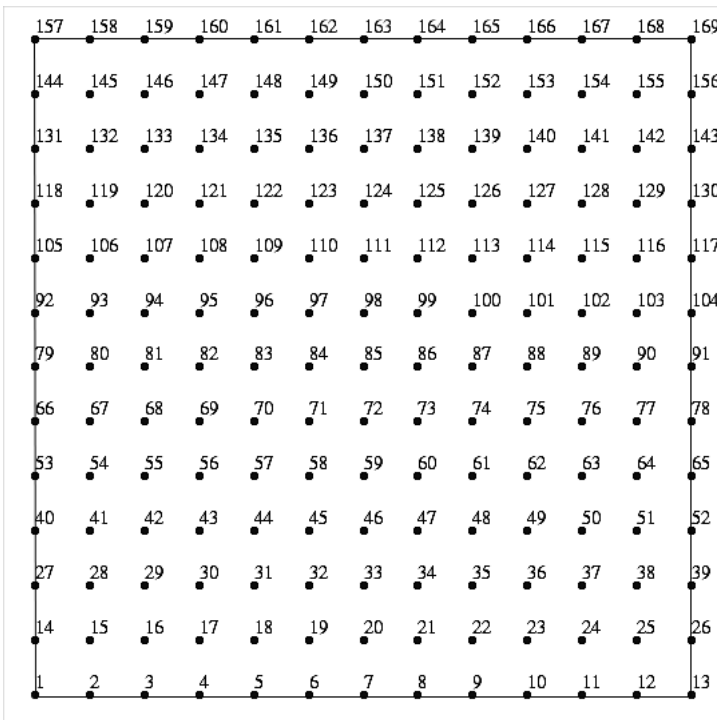


Figura 3.5: Vértices utilizados no problema (3.1.1).

Com a triangularização \mathcal{T}_h do domínio Q estabelecida, faremos a formulação variacio-

nal do nosso problema. Considere o espaço $V_h := \{v_h | v_h \in C^0(\bar{Q}), v_h|_T \in P_{2T}, \forall T \in \mathcal{T}_h\}$. Suponha que $u_h \in V_h$ seja uma solução aproximada de (3.1.1), e considere $v_h \in V_h$. Fazendo o produto interno em $L^2(Q)$ entre (3.1.1) e v_h , obtemos,

$$\begin{aligned} (-\Delta u_h, v_h) &= (2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), v_h) \\ \int_{Q_h} -\Delta u_h v_h dQ &= \int_{\partial Q} v_h (\nabla u_h \hat{n}) d\partial Q - \int_{Q_h} \nabla u_h \nabla v_h dQ, \\ &\text{como o produto escalar da normal com sua fronteira é nulo} \\ \int_{Q_h} -\Delta u_h v_h dQ &= - \int_{Q_h} \nabla u_h \nabla v_h dQ, \\ \int_{Q_h} \frac{\partial u_h}{\partial x_1} \frac{\partial v_h}{\partial x_1} + \frac{\partial u_h}{\partial x_2} \frac{\partial v_h}{\partial x_2} dQ & \\ \text{ou na forma de produto interno do } H^1(Q) & \\ ((u_h, v_h)) &= (2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), v_h). \end{aligned}$$

Podemos escrever $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_h(b_j) w_j$ e $v_h = \sum_{i=1}^{N_h} w_i$, com $u_h(b_j) \in \Sigma_h$ e $(w_i)_{i=1}^{N_h}$ uma base do espaço V_h , substituindo temos,

$$\begin{aligned} \int_{Q_h} \frac{\partial w_j}{\partial x_1} \frac{\partial w_i}{\partial x_1} u_h(b_j) + \frac{\partial w_j}{\partial x_2} \frac{\partial w_i}{\partial x_2} u_h(b_j) dQ &= \int_{Q_h} 2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) w_i \\ \left(\int_{Q_h} \frac{\partial w_j}{\partial x_1} \frac{\partial w_i}{\partial x_1} + \frac{\partial w_j}{\partial x_2} \frac{\partial w_i}{\partial x_2} dQ \right) u_h(b_j) &= \int_{Q_h} 2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2). \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Segundo passo é escolher um elemento de referência para fazer os cálculos, $(T^r, P_{2T}^r, \Sigma_T^r)$, o triângulo e os pontos escolhidos do elemento foram:

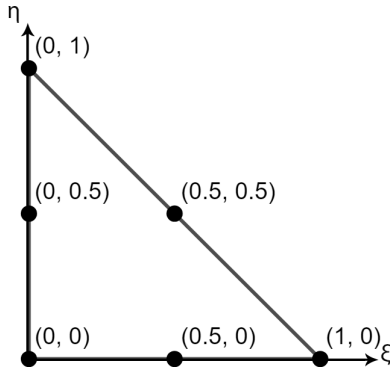


Figura 3.6: Triângulo de referência, T^r .

O motivo desse triângulo ter sido escolhido é pela facilidade de, a partir de transformação afim, transformá-lo em outro triângulo. Com isso, é mais fácil calcular integrais

utilizando a Quadratura de Gauss.

O conjunto das funções de base utilizado foi

$$P_{2T}^r := \{\tilde{w}_1(2\tilde{w}_1 - 1), \tilde{w}_2(2\tilde{w}_2 - 1), \tilde{w}_3(2\tilde{w}_3 - 1), 4\tilde{w}_1\tilde{w}_2, 4\tilde{w}_2\tilde{w}_3, 4\tilde{w}_1\tilde{w}_3\},$$

lembrando que, $\tilde{w}_i(a_j) = \delta_{ij}$ e $\tilde{w}_k(a_j^i) = \frac{1}{2}(\delta_{ik} + \delta_{kj})$.

No caso do triângulo T^r , as funções w_1, w_2 e w_3 são dadas por,

$$\begin{aligned}\tilde{w}_1(\eta, \xi) &= 1 - \eta - \xi, \\ \tilde{w}_2 &= \eta, \\ \tilde{w}_3 &= \xi.\end{aligned}$$

Por conveniência denotamos as funções em P_{2T}^r , por $w_1^r, w_2^r, \dots, w_6^r$. Note que, devido w_i^r estar em coordenadas baricêntricas, podemos escrever os vértices, $\{v_1, v_2, v_3, v_{12}, v_{13}, v_{23}\}$ de um triângulo, T , qualquer. Portanto podemos escrever, os pontos x_1, x_2 como,

$$x_1 = \sum_{i=1}^3 \tilde{w}_i(\xi, \eta) v_i \cdot e_1 \quad (3.4.3)$$

$$x_2 = \sum_{i=1}^3 \tilde{w}_i(\xi, \eta) v_i \cdot e_2 \quad (3.4.4)$$

a equação acima pode ser escrita na forma de sistema,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_2^2 - v_1^1) & (v_1^3 - v_1^1) \\ (v_2^2 - v_2^1) & (v_2^3 - v_1^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix}, \quad (3.4.5)$$

onde v_j^i é a coordenada j do vértice i , assim obtemos a transformação afim $F_T(\tilde{x}) = B_T \tilde{x} + b_T$.

A inversa da transformação F_T , é dada por,

$$\frac{1}{\det(B_T)} \left(\begin{pmatrix} (v_2^3 - v_1^2) & (v_1^1 - v_1^3) \\ (v_2^1 - v_2^2) & (v_1^1 - v_1^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (v_2^3 - v_1^2) & (v_1^1 - v_1^3) \\ (v_2^1 - v_2^2) & (v_1^1 - v_1^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (3.4.6)$$

Com isso, temos o que é preciso para calcular a matriz de rigidez. Lembrando que,

$$w_i(x_1, x_2) = w_i^r(\xi(x_1, x_2), \eta(x_1, x_2)) \text{ então,} \quad (3.4.7)$$

$$\frac{\partial w_k(x_1, x_2)}{\partial x_i} = \frac{\partial w_k^r(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \frac{\partial w_k^r(\xi, \eta)}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad (3.4.8)$$

com $i = 1, 2$.

Com isso podemos transformar uma integral,

$$\int_{\Omega} H \left(w(x, y), \frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) d\Omega$$

em,

$$\int_{\Omega^r} G(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| d\Omega^r,$$

onde $J(\xi, \eta)$ sendo jacobiana da mudança de base, como estamos lidando com triângulos, lembramos que $|J(\xi, \eta)| = 2(\text{Área do triângulo})$.

Para montar o sistema de equações procedemos da seguinte forma, criamos 72 matrizes em branco, depois usamos o seguinte algoritmo para calcular suas entradas,

```

Data:  $\Sigma_k := \{v_1, \dots, v_6\}$  o conjunto dos rótulos dos vértices;
 $A_k :=$  a matriz nula, associada ao elemento  $k$ , de ordem 72;
for  $i = 1 \dots 6$  do
  for  $j = 1 \dots 6$  do
     $A_{v_i, v_j} := A_{v_i, v_j} +$ 
     $\left( \int_{T^r} \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\partial w_i^r(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x_k} + \frac{\partial w_i^r(\xi, \eta)}{\partial x_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial w_j^r(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x_k} + \frac{\partial w_j^r(\xi, \eta)}{\partial x_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) 2 |Area(T)| dx \right);$ 
  end
end

```

Algorithm 1: Matriz de rigidez

Para montar a matriz de rigidez resultante, A , basta somar as 72 matrizes calculadas utilizando o algoritmo (1), para calcular o vetor de força externa, procedemos de modo similar. Obtemos então o sistema,

$$Au = b,$$

onde A é a matriz calculada acima, b é o vetor força e u o vetor dos coeficientes que queremos achar. Para impor as condições de contorno, basta fazer $A_{kj} = \delta_{kj}$ se sempre que k for o rótulo de um vértice da fronteira, e b_k o valor do ponto na fronteira.

Fazendo esses calculos, o erro obtido na norma L^2 é 0.00131703.

Capítulo 4

Navier-Stokes

Neste capítulo estudamos as equações de Navier-Stokes em um domínio retangular. Primeiramente vamos deduzir as equações de Navier-Stokes a partir das leis de conservação de massa e momento, depois, estudar essas equações no caso bidimensional, dentro desses estudos, iniciamos fazendo a formulação fraca do problema estabelecido em (1.0.1), aplicamos o método de Faedo-Galerkin pra provar a existência de soluções fracas, provamos a unicidade de tais soluções, seguimos então provando existência de solução forte, fizemos um estudo de decaimento exponencial para o caso em que a força externa vem de uma força conservativa, e, as condições de fronteira são nulas, e, por fim fizemos então um estudo de existência de soluções periódicas.

4.1 Dedução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis

As equações de Navier-Stokes com viscosidade positiva é deduzida a partir das leis de conservação do momento e de conservação de massa. Representamos $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ por um aberto limitado com $\partial\Omega$ sua fronteira regular. Considere que Ω esteja cheio de um fluido, por exemplo, água. Representamos os pontos contidos dentro deste domínio por $x := (x_1, x_2, x_3)$, e, por $\mathbf{u}(x, t) := (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ a velocidade do fluido no ponto x no instante t . Considere agora uma porção infinitesimal da superfície $\partial\Omega$, denotado por $d\partial\Omega$, chamamos de *fluxo* a quantidade de massa que atravessa por $d\partial\Omega$ na direção da normal unitária $\hat{\mathbf{n}}$. Vamos convencionar que se o fluido estiver se deslocando no sentido de $\hat{\mathbf{n}}$, então o deslocamento será positivo, e, negativo se estiver no sentido oposto à $\hat{\mathbf{n}}$. A quantidade de massa por unidade de volume, *densidade*, sera denotada por $\rho(x, t)$.

4.1.1 Conservação de massa

Definição 4.1.1 (Conservação de massa). *A variação da massa de um fluido em um domínio Ω é igual ao fluxo do fluido em sua fronteira $\partial\Omega$.*

Esse lei pode ser traduzida, matematicamente, da forma:

Considere a massa do fluido em relação ao tempo dada por,

$$M(t) = \int_{\Omega} \rho(x, t) d\Omega,$$

onde $\rho(x, t)$ é a densidade do fluido. A variação desta equação em relação ao tempo é dada por,

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (4.1.1)$$

Suponhamos que a variação de massa dentro do domínio é por causa de um fluido entrando, isto é,

$$- \int_{\partial\Omega} \rho(x, t) u_n(x, t) d\partial\Omega. \quad (4.1.2)$$

O princípio de conservação de massa diz que as equações (4.1.1) e (4.1.2) são iguais, portanto,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho u_n d\partial\Omega = 0,$$

usando o teorema da divergência,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) d\Omega = 0,$$

com isso, supondo que o integrando é uma função contínua,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \text{ pontualmente em } \Omega. \quad (4.1.3)$$

Se o fluido é incompressível, então $\rho(x, t) = C$, com C sendo uma constante positiva, e portanto a equação acima resulta em, $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$.

4.1.2 Conservação de momento

Considere $\Delta x = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$, um elemento de Ω com massa $\rho \Delta x$. A quantidade de movimento dessa massa é dada por, $\rho \Delta x \mathbf{u}$, com \mathbf{u} sendo a velocidade. Pela definição de

quantidade de movimento no contínuo, temos,

$$m(t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}(x, t) d\Omega, \quad (4.1.4)$$

sendo $m(t)$ o momento do fluido.

Definição 4.1.2. *A variação da quantidade de movimento $m(t)$ de Ω , em relação ao tempo, é dado pelo somatório de todas as forças aplicadas em Ω .*

A variação da quantidade de movimento de Ω é:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} d\Omega. \quad (4.1.5)$$

As forças aplicadas em Ω são do tipo tangenciais e normais. As forças normais são aplicadas em Ω de densidade $f(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, r), f_3(x, t))$. As forças de tangenciais são as tensões internas e a viscosidade na fronteira $\partial\Omega$, com as componentes sendo da forma:

$$F_i(x, t) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(x, t) \eta_j,$$

com $i = 1, 2, 3$, onde η_j , $j = 1, 2, 3$, são as componentes da normal unitária $\hat{\mathbf{n}}$, externa à $\partial\Omega$.

Suponhamos que as funções $\sigma_{ij}(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, e que $f_i(x, t)$ são integráveis em Ω para todo $t > 0$. Usando o princípio da conservação de momento temos que,

$$\int_{\Omega} \rho \frac{du}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} f(x, t) dx + \int_{\partial\Omega} F(x, t) d\partial\Omega. \quad (4.1.6)$$

Escrevendo (4.1.6) na forma vetorial obtemos,

$$\int_{\Omega} \rho \frac{du_i}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} f_i(x, t) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(x, t) \eta_j d\partial\Omega, \quad (4.1.7)$$

onde $i = 1, 2, 3$.

Aplicando o Lema de Gauss em (4.1.7),

$$\int_{\Omega} \rho \frac{du_i}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} f_i(x, t) dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega, \quad (4.1.8)$$

para $i = 1, 2, 3$.

Para fluidos homogêneos, incompressíveis e viscosos as funções $\sigma_{ij}(x, t)$ podem ser escritas como,

$$\sigma_{ij}(x, t) = -p(x, t)\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (4.1.9)$$

$i, j = 1, 2$ onde,

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, $p(x, t) > 0$ e $\mu > 0$ chamada de viscosidade do fluido.

Derivando (4.1.9) em relação à ∂x_j e somando, temos,

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

e pelo fato de $div(\mathbf{u}) = 0$,

$$- \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} = - \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (4.1.10)$$

$$\mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu \Delta u_i. \quad (4.1.11)$$

Substituindo (4.1.10) e (4.1.11) em (4.1.8),

$$\int_{\Omega} \rho \frac{du_i}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} f_i(x, t) d\Omega + \int_{\Omega} \left(- \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \Delta u_i \right) d\Omega, \quad (4.1.12)$$

onde $i = 1, 2, 3$.

Como os termos dos integrandos são contínuos, temos,

$$\rho \frac{du_i}{dt} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i, \text{ em } \Omega, i = 1, 2, 3. \quad (4.1.13)$$

Notemos que $\frac{du_i}{dt}$ é a aceleração do fluido, observando que $\mathbf{u}(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$, para $x = (x_1, x_2, x_3)$. Portanto, a velocidade das partículas é dada por $u_j(x, t) = \frac{dx_j}{dt}$,

além disso,

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j,$$

que quando substituída em (4.1.13) resulta em:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \mu \Delta u_i + \rho \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \text{ em } \Omega \\ i, j &= 1, 2, 3, \text{ para } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Das equações (4.1.14) e (4.1.3), derivamos a equação a seguir,

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}(t, x), \text{ em } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{u}(x) = \mathbf{g}(x), \text{ com } x \in \partial\Omega, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \end{cases} \quad (4.1.15)$$

onde $\mathbf{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Estas equações são conhecida como equações de Navier-Stokes, para fluídos incompressíveis e com viscosidade positiva.

4.2 Equações de Navier-Stokes com termo de viscosidade não-linear

Nesta seção estudamos um caso particular em que as equações de Navier-Stokes tem dimensão dois e termo de reação-difusão não-linear, definida da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} - a(l(u_1), l(u_2)) \Delta \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}(t, x) \text{ em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ em } \partial\Omega, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x). \end{cases} \quad (4.2.1)$$

A função $a(x_1, x_2)$ é limitada, positiva definida e Lipschitziana, ou seja, para qualquer $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \exists A_1, A_2 > 0$ de tal forma que,

$$\begin{aligned} 0 < a_- \leq a(x_1, x_2) \leq a_+, \\ |a(x_1, x_2) - a(y_1, y_2)| &\leq A_1 |x_1 - y_1| + A_2 |x_2 - y_2|, \text{ para algum } A_1, A_2 > 0. \end{aligned}$$

O operador l é definido por $l(u) = \int_{\Omega} u d\Omega$. Os espaços que serão utilizados nessa seção são, $\mathfrak{V} := \{\mathbf{u} \in (\mathcal{D}(\Omega))^2 \mid \text{div}(\mathbf{u}) = 0\}$, V é o fecho de \mathfrak{V} em $(H_0^1(\Omega))^2$ e H é o fecho de \mathfrak{V} em $(L^2(\Omega))^2$. Consideramos a partir deste ponto que, $((\cdot, \cdot))$ e $\|\cdot\|$ são o produto interno e a norma em H_0^1 , e, (\cdot, \cdot) e $|\cdot|$ são o produto interno e a norma em L^2 . Omitimos as dimensões dos espaços sempre que não houver risco de confusão.

4.2.1 Forma trilinear $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$

Nesta parte vamos tratar de algumas propriedades e resultados conhecidos sobre a forma $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j$.

Lema 4.2.1. *Para qualquer conjunto aberto Ω*

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega) \quad (4.2.2)$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega) \quad (4.2.3)$$

Demonstração. Para provar (4.2.2) é suficiente mostrar a igualdade para $\mathbf{u} \in \mathfrak{V}$ e $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i D_i v_j v_j d\Omega &= \int_{\Omega} u_i D_i \frac{v_j^2}{2} d\Omega \\ &= \frac{-1}{2} \int_{\Omega} D_i u_i (v_j)^2 d\Omega, \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{u}) (v_j)^2 d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Para (4.2.3), note que,

$$\begin{aligned} 0 &= b(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ &= b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) \\ &= b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

e portanto $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})$. □

Lema 4.2.2. *Se $u \in L^2(0, T; V)$, então a função $B\mathbf{u}$ definida por,*

$$\langle B\mathbf{u}(t), \mathbf{v} \rangle = b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V, \text{ para quase todo } t \in [0, T],$$

pertence a $L^1(0, T; V')$.

Demonstração. Para quase todo $t \in [0, T]$, $B\mathbf{u}(t)$ é um elemento de V' . Como b é trilinear e contínua em V , aplicando a desigualdade de Hölder obtemos, $\langle B\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{V'} \leq c \|\mathbf{w}\|^2$, portanto,

$$\int_0^T \|B\mathbf{u}(t)\|_{V'} dt \leq c \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt < \infty.$$

□

Lema 4.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e considere $T = (T_1, \dots, T_n)$, onde $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall i = 1, \dots, n$. Então,*

$$\langle T, \phi \rangle = 0, \forall \phi \in \mathfrak{V} \Leftrightarrow \exists p \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ tal que } T = \nabla P \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Demonstração. Ver [45].

□

Lema 4.2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto lipschitziano e p uma distribuição.*

i) *Se p possuir todas as derivadas parciais de primeira ordem em $L^2(\Omega)$. Então $p \in L^2(\Omega)$, e, além disso,*

$$\|P\|_{L^2(\Omega) \setminus \mathbb{R}^n} \leq c(\Omega) \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}.$$

ii) *Se p possuir todas as derivadas parciais de primeira ordem em $H^{-1}(\Omega)$. Então $p \in L^2(\Omega)$, e, além disso,*

$$\|p\|_{L^2(\Omega) \setminus \mathbb{R}} \leq c \|\nabla p\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Com $L^2(\Omega) \setminus \mathbb{R} := \{p \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} p(x) dx = 0\}$.

Demonstração. Ver [45].

□

4.2.2 Método de Faedo-Galerkin

Definimos o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{para } \mathbf{u}_0 \text{ e } \mathbf{f} \text{ dados, onde} \\ \mathbf{f} \in L^2(0, T; V') \\ \mathbf{u}_0 \in H, \\ \text{queremos encontrar } \mathbf{u} \text{ que satisfaça,} \\ \mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(l(u_1), l(u_2))(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \forall \mathbf{v} \in V \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.2.4) \\ (4.2.5) \\ (4.2.6) \\ (4.2.7) \\ (4.2.8) \\ (4.2.9) \\ (4.2.10) \end{array}$$

Este problema é obtido pela formulação fraca das equações de Navier-Stokes (P1), feita em (5.2.1).

Utilizamos o método da compacidade para provar a existência de soluções fracas do problema (4.2.4)-(4.2.9), para isso vamos seguir os seguintes passos:

- i) Construimos soluções aproximadas do problema (ou pelo menos o que sabemos serem soluções aproximadas) por "redução à dimensão finita", pelo método de *Faedo-Galerkin*. Então provamos a existência das soluções aproximadas pelo uso do teorema de *Caratheodory*.
- ii) Passamos então o limite na dimensão, tendo aqui para superar uma dificuldade essencial: os operadores não lineares encontrados não são, em geral, fracamente contínuos e, portanto, é necessário demonstrar que a família de soluções aproximadas é (graças às estimativas anteriores) "compacta" em uma topologia "forte" adequada (para a qual o operador é contínuo). As ferramentas aqui são, portanto, os teoremas de compacidade.

Apliquemos então o método de Faedo-Galerkin. Considere a base $(\mathbf{w}_i)_{i \in \mathbb{N}}$, de \mathfrak{V} . Para cada $m > 0$, construimos o espaço aproximado, dado por $\mathfrak{V}_m = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m]$, com

$$\mathbf{u}_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \mathbf{w}_i \Leftrightarrow \mathbf{u}_m(t) \in \mathfrak{V}_m. \quad (4.2.11)$$

Construimos, agora, o problema aproximado, substituindo \mathbf{u}_m e $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^m \mathbf{w}_j$ em (4.2.4)-(4.2.9), utilizamos, também, o fato de que

$((a(l(u_{m1}), l(u_{m2})) \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)) = a(l(u_{m1}), l(u_{m2}))((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j))$, e, com isso:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j) + a(l(u_{m1}), l(u_{m2}))((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)) + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) = \\ & \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j \rangle, t \in [0, T], j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m}, \quad (4.2.13)$$

onde \mathbf{u}_{0m} é a projeção ortogonal em H de \mathbf{u}_0 no espaço gerado pelos elementos $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$. A equação anterior forma um sistema diferencial não linear para as funções g_{1m}, \dots, g_{mm} :

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) g'_{im}(t) + a(l(u_{m1}), l(u_{m2})) \sum_i^m ((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)) g_{im}(t) + \sum_{i,l=1}^m b(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j) g_{im}(t) g_{lm}(t) \quad (4.2.14)$$

$$= \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j \rangle.$$

Invertendo a matriz não singular gerada pelos elementos $(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j), 1 \leq i, j \leq m$, nos podemos escrever a equação (4.2.13) na forma

$$g'_{im}(t) + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} g_{jm}(t) + a(l(u_{m1}), l(u_{m2})) \sum_{j=1}^m \alpha_{ijk} g_{jm}(t) g_{km}(t) = \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j \rangle \quad (4.2.15)$$

onde $\alpha_{ij}, \alpha_{ijk}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$. O sistema diferencial não linear (4.2.15) com as condições iniciais $g_{im}(0) = e_i \cdot \mathbf{u}_m(0)$, tem a solução, pelo fatos dos operadores serem mensuráveis e contínuos, Lema 4.2.2, podemos então aplicar o teorema de Caratheodory, a solução máxima é definida em algum intervalo $[0, t_m]$. Se $t_m < T$, então $\|\mathbf{u}_m(t)\|$ deve tender para ∞ com $t \rightarrow t_m$; A primeira estimativa a priori, junto com o teorema do prolongamento de Caratheodory (2.7.6), mostra que isso não pode acontecer antes de $t_m = T$.

4.2.3 Estimativas

Para obter as estimativas a priori, multiplicamos a equação (4.2.13) por $g_{jm}(t)$, por (4.2.1), $b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) = 0$, e com isso,

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t)) + a(l(u_{m1}), l(u_{m2})) \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle. \quad (4.2.16)$$

Pelo fato de $t \rightarrow \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j \rangle$ e $g_{jm}(t)$ são funções escalares quadrado integráveis, então $\mathbf{u}_m \in L^2(0, T; V)$ e $\mathbf{u}'_m \in L^2(0, T; V)$, com isso,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_m|^2 &= (\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m), \\ \frac{d|\mathbf{u}_m(t)|^2}{dt} &= \frac{d(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t))}{dt} = (\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t)) + (\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}'_m(t)) = 2(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t)), \\ \frac{d|\mathbf{u}_m(t)|^2}{dt} &+ 2a(l(u_{m1}), l(u_{m2})) \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \\ &= 2\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle \end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned} \frac{d|\mathbf{u}_m(t)|^2}{dt} &+ 2a_- \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \\ &\leq \frac{d|\mathbf{u}_m(t)|^2}{dt} + 2a(l(u_{m1}), l(u_{m2})) \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \end{aligned}$$

com isso,

$$\begin{aligned} \frac{d|\mathbf{u}_m(t)|^2}{dt} &+ 2a_- \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \\ &\leq 2\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} & \frac{d|\mathbf{u}_m(t)|^2}{dt} + 2a(l(u_{m1}), l(u_{m2})) \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \\ & \leq 2 \|\mathbf{f}(t)\|_{V'} \|\mathbf{u}_m(t)\| \\ & \leq a_- \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 + \frac{1}{a_-} \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2, \end{aligned}$$

então,

$$\frac{d|\mathbf{u}_m(t)|^2}{dt} + a_- \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{a_-} \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2, \quad (4.2.17)$$

integrando de 0 a s , obtemos,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_m(s)|^2 & \leq |\mathbf{u}_m(0)|^2 + \frac{1}{a_-} \int_0^s \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2 dt \\ & \leq (\text{por (2.7.4)}) \\ & \leq |\mathbf{u}_0|^2 + \frac{1}{a_-} \int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2 dt \end{aligned}$$

então,

$$\sup_{s \in [0, T]} |\mathbf{u}_m(s)|^2 \leq |\mathbf{u}_0|^2 + \frac{1}{a_-} \int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2 dt \quad (4.2.18)$$

Disso segue que a sequência

$$\mathbf{u}_m \text{ é limitada no conjunto } L^\infty(0, T; H), \quad (4.2.19)$$

integrando (4.2.17), de 0 a T nos obtemos,

$$|\mathbf{u}_m(T)|^2 + a_- \int_0^T \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 dt \leq |\mathbf{u}_0|^2 + \frac{1}{a_-} \int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2 dt$$

essa estimativa nos permite dizer que

$$\text{a sequência } \mathbf{u}_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; V). \quad (4.2.20)$$

4.2.4 Existência de Soluções Fracas

Nosso objetivo nesta seção é provar que o problema (4.2.4)-(4.2.9) possui solução fraca.

Teorema 4.2.1. *Sejam $\mathbf{f} \in L^2(0, T; V')$ e $\mathbf{u}_0 \in H$, então existe pelo menos uma função \mathbf{u} que satisfaz o problema acima, e mais ainda, $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H)$, e é fracamente continua*

de $[0, T]$ em H .

Demonstração. Seja $\tilde{\mathbf{u}}_m : \mathbb{R} \rightarrow V$ definida da seguinte forma,

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t), & \text{quanto } t \in [0, T], \\ \tilde{\mathbf{u}}(t) = 0, & \text{quando } t \in \mathbb{R} - [0, T]. \end{cases}$$

O objetivo desta parte é mostrar que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s|^{2\gamma} |\widehat{\mathbf{u}}_m(s)|^2 dt \leq \varepsilon_{1m} \text{ para algum } \gamma > 0, \quad (4.2.21)$$

onde ε_{1m} é uma constante que depende do m fixado, $\widehat{\mathbf{u}}(s)$ é a transformada de Fourier de $\tilde{\mathbf{u}}_m$. Com o fato de $\tilde{\mathbf{u}}_m$ ser limitada em $L^2(0, T; V)$ implicará que,

$$\tilde{\mathbf{u}}_m \text{ pertence a um conjunto limitado de } \mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R}; V, H). \quad (4.2.22)$$

Este resultado nos permite aplicar o teorema de compacidade (2.11.2), e, como consequência do teorema de Banach-Alaoglu, podemos afirmar que a solução existe e converge.

Afim de provar isto, observe que (4.2.13) pode ser escrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \frac{d(\tilde{\mathbf{u}}_m, \mathbf{w}_j)}{dt} &= \langle \tilde{\mathbf{f}}_m, \mathbf{w}_j \rangle + (\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{w}_j) \delta_0 \\ &\quad - (\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) \delta_T, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

onde δ_0, δ_T são as distribuições de Dirac em 0 e T ,

$$\mathbf{f}_m := \mathbf{f} - a(l(u_{m1}), l(u_{m2})) A \mathbf{u}_m - B \mathbf{u}_m,$$

e, a função $\tilde{\mathbf{f}}_m : [0, T] \rightarrow V'$ é definida da seguinte forma ,

$$\begin{cases} \mathbf{f}_m, & \text{em } [0, T], \\ 0, & \text{em } (-\infty, 0) \cup (T, \infty). \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Fourier em (4.2.23),

$$\begin{aligned} 2i\pi s (\widehat{\mathbf{u}}_m, \mathbf{w}_j) &= \langle \widehat{\mathbf{f}}_m, \mathbf{w}_j \rangle + (\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{w}_j) \\ &\quad - (\mathbf{u}_m(T), \mathbf{w}_j) e^{-2i\pi T s}, \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

multiplicando a equação acima por $\widehat{g}_{jm}(s)$, onde $\widehat{g}_{jm}(s)$ é a transformada de Fourier de \tilde{g}_{jm} ,

$$\begin{aligned} 2i\pi s |\widehat{\mathbf{u}}_m|^2 &= \langle \widehat{\mathbf{f}}_m(s), \widehat{\mathbf{u}}_m(s) \rangle + (\mathbf{u}_{0m}, \widehat{\mathbf{u}}_m(s)) \\ &\quad - (\widehat{\mathbf{u}}_m(T), \widehat{\mathbf{u}}_m(s)) \exp(-2i\pi T s). \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

usando o Lema (4.2.2) podemos majorar $\mathbf{f}_m(t)$ por,

$$\int_0^T \|\mathbf{f}_m(t)\|_{V'} \leq \int_0^T (\|\mathbf{f}(t)\|_{V'} + a_+ \|\mathbf{u}_m(t)\| + c \|\mathbf{u}_m(t)\|^2)$$

segue disso,

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \|\widehat{\mathbf{f}}_m(s)\|_{V'} \leq \varepsilon_{2m}, \forall m,$$

onde ε_{2m} sendo uma constante. Por (4.2.18),

$$|\mathbf{u}_m(0)| \leq \varepsilon_{3m}, |\mathbf{u}_m(t)| \leq \varepsilon_{4m}.$$

com ε_{3m} e ε_{4m} sendo constantes. De (4.2.25),

$$|s| |\widehat{\mathbf{u}}_m(s)|^2 \leq c_2 \|\widehat{\mathbf{u}}_m(s)\| + c_3 |\widehat{\mathbf{u}}_m(s)|$$

ou

$$|s| |\widehat{\mathbf{u}}_m(s)|^2 \leq c_4 \|\widehat{\mathbf{u}}_m(s)\|. \quad (4.2.26)$$

Para cada γ fixo, $\gamma < 1/4$, nos observamos que,

$$|s|^{2\gamma} \leq c_5(\gamma) \frac{1 + |s|}{1 + |s|^{1-2\gamma}}, \forall s \in \mathbb{R}$$

então,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |s|^{2\gamma} |\widehat{\mathbf{u}}_m(s)|^2 ds &\leq c_5(\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + |s|}{1 + |s|^{1-2\gamma}} |\widehat{\mathbf{u}}_m(s)|^2 ds \\ &\leq (4.2.26) \\ &\leq c_6 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\widehat{\mathbf{u}}_m(s)\|}{1 + |s|^{1-2\gamma}} ds + c_7 \int_{-\infty}^{\infty} \|\widehat{\mathbf{u}}_m(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Por causa da igualdade de Parseval e por (4.2.20), a ultima integral é limitada com $m \rightarrow \infty$, então (4.2.21) estará provado se provarmos que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\widehat{\mathbf{u}}_m(s)\|}{1 + |s|^{1-2\gamma}} ds \leq \varepsilon_{5m}. \quad (4.2.27)$$

Pela desigualdade de Schwarz e o teorema de Parseval, podemos limitar essas integrais por,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + |s|^{1-2\gamma})^2} ds \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|\mathbf{u}_m(s)\|^2 ds \right)^{1/2},$$

que é finito porque $\gamma < 1/4$, e é limitado com $m \rightarrow \infty$ por (4.2.20). A prova de (4.2.23) foi atingida.

Por (4.2.19) e pelo teorema de (Banach-Alaoglu) nos permite dizer que, existe um

elemento \mathbf{u} em $L^\infty(0, T; H)$, e uma subsequencia, tal que,

$$\mathbf{u}_{m'} \text{ converge para } u \text{ pela topologia fraca-estrela de } L^\infty(0, T; H). \quad (4.2.28)$$

Como $L^\infty(0, T; H)$ é o espaço dual de $L^1(0, T; H)$, então para cada $v \in L^1(0, T; H)$,

$$\int_0^T (\mathbf{u}_{m'}(t) - \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) dt \rightarrow 0, m' \rightarrow \infty. \quad (4.2.29)$$

De modo análogo, por (4.2.20), podemos concluir que $\mathbf{u}_{m'}$ permanece limitado em $L^2(0, T; V)$, e portanto, existe uma subsequencia de $\mathbf{u}_{m'}$ convergindo para algum $\mathbf{u}_* \in L^2(0, T; V)$ e alguma subsequencia, que por conveniência vamos continuar denotando por $\mathbf{u}_{m'}$, tal que,

$$\mathbf{u}_{m'} \text{ converge para } \mathbf{u}_*, \text{ pela topologia fraca estrela de } L^2(0, T; V). \quad (4.2.30)$$

esta convergência diz que,

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}_{m'}(t) - \mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}(t) \rangle dt \rightarrow 0, \forall \mathbf{v} \in L^2(0, T; V'). \quad (4.2.31)$$

Em particular por Pelo teorema da representação de *Riesz* (2.6.2),

$$\int_0^T (\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v}(t)) dt \rightarrow \int_0^T (\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}(t)) dt, \quad (4.2.32)$$

para cada $\mathbf{v} \in L^2(0, T; H)$. Comparando (4.2.29) e (4.2.32), temos,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_* \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \quad (4.2.33)$$

Pelo Teorema (2.11.2) e por (4.2.22) segue,

$$\mathbf{u}_{m'} \rightarrow \mathbf{u} \text{ em } L^2(0, T; H) \text{ fortemente.} \quad (4.2.34)$$

Afim de poder passar o limite em (4.2.14), precisamos provar que $a(l(u_1(t)), l(u_2(t)))$ é limitado, por outro lado, $a(x_1, x_2)$ é contínua, portanto, basta provar que $l(u_i)$ é limitado.

Mas é direto pois,

$$\int_0^T |l(u_{im}) - l(u_i)|^2 dt = \int_0^T |l(u_{im} - u_i)|^2 dt \leq \text{por (4.2.34)} \leq C \int_0^T |u_{im} - u_i|^2 dt. \quad (4.2.35)$$

$\forall i = 1, 2.$

Passemos agora limite em (4.2.14), para o termo $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ será usado o lema (4.2.3). Seja ψ uma função continuamente diferenciável em $[0, T]$ com $\psi(T) = 0$. Multiplicando ψ em (4.2.12), e integrando por partes obtemos,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\mathbf{u}_m(t), \psi'(t) \mathbf{w}_j) dt + \int_0^T a(l(u_{m1}), l(u_{m2})) ((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j \psi(t))) dt \\ & + \int_0^T b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j \psi(t)) dt = (\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{w}_j) \psi(0) \\ & + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j \psi(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

Passando o limite em (4.2.36), e como $\mathbf{u}_{0m} \rightarrow \mathbf{u}_0$ fortemente em H , nos temos a seguinte equação,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v} \psi'(t)) dt + \int_0^T a(l(u_1), l(u_2)) ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v} \psi(t))) dt \\ & + \int_0^T b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} \psi(t)) dt = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \psi(0) \\ & + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \psi(t) \rangle dt, \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

isso é valido para $\mathbf{v} \in \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots\}$, onde $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots\}$ é uma base de \mathfrak{V} . Pela linearidade está equação é válida para qualquer \mathbf{v} sendo combinação linear das funções \mathbf{w}_j , pela continuidade de (4.2.37), para qualquer $\mathbf{v} \in V$.

Escrevendo, a equação (4.2.37) com $\psi = \phi \in \mathcal{D}((0, T))$, obtemos (4.2.10), juntando ao fato de (4.2.33), concluímos que $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; V')$.

Agora precisamos provar que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ (4.2.9). Para isso multiplicamos (4.2.10) por ψ , a mesma usada em (4.2.37), e integramos. Depois de integrarmos o primeiro termo por partes obtemos,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v} \psi(t)) dt + \int_0^T a(l(u_1), l(u_2)) ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v} \psi(t))) dt \\ & + \int_0^T b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} \psi(t)) dt = (\mathbf{u}(0), \mathbf{v}) \psi(0) \\ & + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \psi(t) \rangle dt, \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

Fazendo a diferença entre (4.2.37) e (4.2.38),

$$(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \psi(0) = 0.$$

Para $\psi(0) \neq 0$, então,

$$(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in V.$$

por (2.7.5) segue $\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0 = 0$, logo, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$. \square

Lema 4.2.3. *Se \mathbf{u}_s converge para \mathbf{u} em $L^2(0, T; V)$ fracamente e $L^2(0, T; H)$ fortemente, então para qualquer função \mathbf{w} com as suas componentes em $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$,*

$$\int_0^T b(\mathbf{u}_s(t), \mathbf{u}_s(t), \mathbf{w}(t)) dt \rightarrow \int_0^T b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t)) dt. \quad (4.2.39)$$

Demonstração. Como a forma trilinear $b(u, v, w)$ é antisimétrica,

$$\int_0^T b(\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_s, \mathbf{w}) dt = - \int_0^T b(\mathbf{u}_s, \mathbf{w}, \mathbf{u}_s) dt = - \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{u}_s)_i (D_i \mathbf{w}_j) (\mathbf{u}_s)_j dx dt.$$

como \mathbf{u}_s converge fortemente para \mathbf{u} em $L^2(0, T; H)$, e, $D_i \mathbf{w}_j \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ esta integral converge para,

$$\begin{aligned} & - \sum_{i,j} \int_0^T \int_{\Omega} u_i (D_i \mathbf{w}_j) u_j dx dt = \\ & - \int_0^T b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) dt = \int_0^T b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) dt, \end{aligned}$$

com isso o lema está provado. \square

4.2.5 Unicidade

Nesta seção provamos a unicidade da solução fraca obtida no teorema 4.2.1, começamos citando algumas desigualdades.

Lema 4.2.3. *Se $n = 2$, para qualquer aberto Ω ,*

$$\|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. ver [45]. \square

Lema 4.2.4. *Se $n = 2$,*

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq 2^{\frac{1}{2}} |\mathbf{u}|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{w}\|^{\frac{1}{2}}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega).$$

Se $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, então $B\mathbf{u} \in L^2(0, T; V')$ e

$$\|B\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; V')} \leq 2^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; H)} \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; V)}.$$

Demonstração. ver [45] □

Lema 4.2.5. *Sejam $V \subset H$ e V' , três espaços de Hilbert. Se uma função $u \in L^2(0, T; V)$ e sua derivada $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; V')$, então \mathbf{u} é q.s. igual a uma função contínua, $g : [0, T] \rightarrow H$, e nós temos a seguinte equação, que é válida no sentido das distribuições escalares em $(0, T)$:*

$$\frac{d|\mathbf{u}|^2}{dt} = 2\langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle. \quad (4.2.40)$$

Demonstração. ver [45]. □

Lema 4.2.6. *Seja $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, com $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Então $b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} & b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ &= b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) - b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &= b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) \\ &= b(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = b(-\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) \\ &= b(-\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{u}) = b(-\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{v}) \\ &= b(-\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(-\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

ou seja, $b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. □

Teorema 4.2.2. *A solução \mathbf{u} encontrada no Teorema (4.2.1) é única, mais ainda, \mathbf{u} é q.s igual a uma função contínua de $[0, T]$ em H e,*

$$\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{u}_0, \text{ em } H, \text{ com } t \rightarrow 0. \quad (4.2.41)$$

Demonstração. Primeiramente precisamos provar o resultado sobre regularidade de solução. De acordo com o Lema (4.2.4), $B\mathbf{u} \in L^2(0, T; V')$, o que nos possibilita escrever \mathbf{u}' da seguinte forma,

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f} - a(l(u_1), l(u_2))A\mathbf{u} - B\mathbf{u}.$$

Como $\mathbf{f} - a(l(u_1), l(u_2))A\mathbf{u} - B\mathbf{u} \in L^2(0, T; V')$, segue que $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; V')$. Isto nos possibilita aplicar o Lema (4.2.5), que nos diz que \mathbf{u} é q.s. igual a uma função contínua de $[0, T]$ em H . Portanto

$$\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, T]; H) \quad (4.2.42)$$

assim segue (4.2.41).

Vamos agora provar a unicidade, suponha que \mathbf{u} e \mathbf{v} são duas soluções de (5.1.1), vamos provar que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' - a(l(u_1), l(u_2))A\mathbf{u} + B\mathbf{u} &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{v}' - a(l(v_1), l(v_2))A\mathbf{v} + B\mathbf{v} &= \mathbf{f}\end{aligned}$$

subtraindo as equações e fazendo $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$,

$$\boldsymbol{\zeta}' - a(l(u_1), l(u_2))A\mathbf{u} + a(l(v_1), l(v_2))A\mathbf{v} + B\mathbf{u} - B\mathbf{v} = 0, \quad (4.2.43)$$

fazendo o produto interno de (4.2.43) com $\boldsymbol{\zeta}$,

$$(\boldsymbol{\zeta}', \boldsymbol{\zeta}) + a(l(u_1), l(u_2))((\mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta})) - a(l(v_1), l(v_2))((\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta}) - b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) = 0.$$

Aplicando o Lema (4.2.5),

$$\frac{d|\mathbf{u}(t)|^2}{dt} + 2 \underbrace{a(l(u_1), l(u_2))((\mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta})) - a(l(v_1), l(v_2))((\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}))}_I = - \underbrace{2b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta}) + 2b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})}_{II}. \quad (4.2.44)$$

É preciso achar estimativas para as partes (II) e (I).

Para (II) aplicamos o Lema (4.2.6) obtemos,

$$\begin{aligned}2b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta}) - 2b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) &= 2b(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) \\ (\text{pelo Lema 4.2.5}) \\ &\leq 2^{3/2}|\boldsymbol{\zeta}|\|\boldsymbol{\zeta}\|\|\mathbf{v}\| \\ &\leq a_- \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 + \frac{2}{a_-} |\boldsymbol{\zeta}|^2 \|\mathbf{v}\|^2.\end{aligned} \quad (4.2.45)$$

Para a parte (I),

$$\begin{aligned}&a(l(u_1), l(u_2))((\mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta})) - a(l(v_1), l(v_2))((\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})) \\ &= a(l(u_1), l(u_2))((\mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta})) - a(l(v_1), l(v_2))((\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})) \\ &+ a(l(u_1), l(u_2))((\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})) - a(l(u_1), l(u_2))((\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})) \\ &= a(l(u_1), l(u_2))\|\boldsymbol{\zeta}\|^2 - [a(l(v_1), l(v_2)) - a(l(u_1), l(u_2))]((\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})).\end{aligned} \quad (4.2.46)$$

Substituindo (4.2.46) em (4.2.44),

$$\frac{d|\zeta|^2}{dt} + 2a(l(u_1), l(u_2))\|\zeta\|^2 = 2b(\zeta, \mathbf{v}, \zeta) + 2[a(l(v_1), l(v_2)) - a(l(u_1), l(u_2))]((\mathbf{v}, \zeta)),$$

por (4.2.46) e (4.2.45),

$$\begin{aligned} & \frac{d|\zeta|^2}{dt} + 2a(l(u_1), l(u_2))\|\zeta\|^2 \\ & \leq a_- \|\zeta\|^2 + \frac{2}{a_-} |\zeta|^2 \|\mathbf{v}\|^2 + 2| [a(l(v_1), l(v_2)) - a(l(u_1), l(u_2))] | ((\mathbf{v}, \zeta)), \end{aligned}$$

como $a(x_1, x_2)$ é limitada, e por propriedades de $l(u)$,

$$\begin{aligned} & \frac{d|\zeta|^2}{dt} + 2a_- \|\zeta\|^2 \\ & \leq a_- \|\zeta\|^2 + \frac{2}{a_-} |\zeta|^2 \|\mathbf{v}\|^2 + 2(K_1 |l(u_1 - v_1)| + K_2 |l(u_2 - v_2)|) \|\mathbf{v}\| \|\zeta\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d|\zeta|^2}{dt} + a_- \|\zeta\|^2 \leq \frac{2}{a_-} |\zeta|^2 \|u_2(t)\|^2 + 2|(K_1 |l(u_1 - v_1)| + K_2 |l(u_2 - v_2)|) \|\mathbf{v}\| \|\zeta\|,$$

(escolhendo $K = \max\{K_1, K_2\}$),

$$\begin{aligned} & \frac{2}{a_-} |\zeta|^2 \|u_2(t)\|^2 + 2|(K_1 |l(u_1 - v_1)| + K_2 |l(u_2 - v_2)|) \|\mathbf{v}\| \|\zeta\| \\ & \leq \frac{2}{a_-} |\zeta|^2 \|u_2(t)\|^2 + 2K \| |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2| \| \|\mathbf{v}\| \|\zeta\| \end{aligned}$$

(Lembrando que $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) := |\mathbf{u}|^2 = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} u_1^2 d\Omega + \int_{\Omega} u_2^2 d\Omega$)

$$\leq \frac{2}{a_-} |\zeta|^2 \|u_2(t)\|^2 + 2K \left(\sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2 + 2|u_2 - v_2||u_1 - v_1|} \right) \|\mathbf{v}\| \|\zeta\|$$

≤ (e pela desigualdade de young)

$$\leq \frac{2}{a_-} |\zeta|^2 \|u_2(t)\|^2 + 2K \left(\sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2 + |u_2 - v_2|^2 + |u_1 - v_1|^2} \right) \|\mathbf{v}\| \|\zeta\|$$

$$\leq \frac{2}{a_-} |\zeta|^2 \|u_2(t)\|^2 + 2K \left(\sqrt{2|u_1 - v_1|^2 + 2|u_2 - v_2|^2} \right) \|\mathbf{v}\| \|\zeta\|$$

≤ (usando $|u_1 - v_1|^2 = |\zeta_1|^2$ e renomeando $K\sqrt{2}$ para K)

$$= \frac{2}{a_-} |\zeta|^2 \|u_2(t)\|^2 + 2K |\zeta| \|\mathbf{v}\| \|\zeta\|$$

Com isso,

$$\frac{d|\zeta|^2}{dt} + a_- \|\zeta\|^2 \leq \frac{2}{a_-} |\zeta|^2 \|u_2(t)\|^2 + 2K |\zeta| \|\mathbf{v}\| |\zeta| \quad (4.2.47)$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} & 2K |\zeta| \|\mathbf{v}\| |\zeta| \\ &= \frac{\sqrt{2}K}{\sqrt{a_-}} |\zeta| \|\mathbf{v}\| \sqrt{2a_-} \|\zeta\| \\ &\leq (\text{Pela desigualdade de young}) \\ &\leq a_- \|\zeta\|^2 + \frac{K^2}{a_-} |\zeta|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

substituindo em (4.2.47),

$$\begin{aligned} \frac{d|\zeta|^2}{dt} + a_- \|\zeta\|^2 &\leq \frac{2}{a_-} |\zeta|^2 \|u_2(t)\|^2 + a_- \|\zeta\|^2 + \frac{K^2}{a_-} |\zeta|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \\ \frac{d|\zeta|^2}{dt} &\leq \frac{2}{a_-} |\zeta|^2 \|u_2(t)\|^2 + \frac{K^2}{a_-} |\zeta|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \\ \frac{d|\zeta|^2}{dt} &\leq |\zeta|^2 \left(\|u_2(t)\|^2 \frac{2}{a_-} + \frac{K^2}{a_-} \|\mathbf{v}\|^2 \right) \end{aligned}$$

pelo Lema de Gronwall-Bellman e pelo fato de $\mathbf{v} \in L^2(0, T; V)$ e $\zeta \in L^\infty(0, T; H)$,

$$|\zeta|^2 \leq |\zeta|^2(0) \exp \left(\int_0^t \|u_2(t)\|^2 \frac{2}{a_-} + \frac{K^2}{a_-} \|\mathbf{v}\|^2 ds \right),$$

como $|\zeta|^2(0) = 0$ pois $\mathbf{u}(0) = \mathbf{v}(0)$ segue então,

$$|\zeta|^2 = 0, \forall t \in [0, T],$$

e, portanto $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. □

4.2.6 Existência de Solução Forte

Nesta seção vamos recuperar a pressão, e, com isso, provar a existência de solução forte. Nesta seção prosseguimos da mesma forma que [5]. Pelo teorema (4.2.41), provamos que $\mathbf{f} - a(l(u_1), (u_2))\mathbf{A}\mathbf{u} - B\mathbf{u} - \mathbf{u}' \in L^2(0, T; V')$.

¹A priori isso não é válido, mas usando a desigualdade de Cauchy junto medida do nosso domínio junto, $|\int_\Omega f(x)1dx|^2 \leq \int_\Omega |f(x)|^2 dx \int_\Omega 1dx = meas(\Omega) \int_\Omega |f(x)|^2 dx$, teremos uma segunda constante que estaremos incorporando na constante K . A demonstração desta desigualdade pode ser encontrada em [21], pag. 15.

Sejam:

$$\mathbf{U}(t) := \int_0^t \mathbf{u}(s)ds, \mathbf{F}(t) := \int_0^t \mathbf{f}(s)ds \text{ e } \beta(t) := \int_0^t B(\mathbf{u}(s), \mathbf{u}(s))ds \in V'.$$

Como $\mathbf{u}, \mathbf{f}, B\mathbf{u} \in L^2(0, T; V')$ então,

$$\mathbf{U}, \mathbf{F} \text{ e } \beta \in C^0(0, T; V') \text{ (estas são absolutamente contínuas)}. \quad (4.2.48)$$

Integrando $a(l(u_1), (u_2))A\mathbf{u} + B\mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbf{f}$, e, por (4.2.48), temos:

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0) + a(l(u_1), l(u_2)) \int_0^t A\mathbf{u}(s)ds + \int_0^t B\mathbf{u}(s)ds = \int_0^t \mathbf{f}(s)ds \text{ em } V'.$$

Logo:

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0 + a(l(u_1), l(u_2))A\mathbf{U}(t) + \beta(t) = \mathbf{F}(t) \text{ em } V', \forall t \in [0, T].$$

Portanto, para todo $\phi \in \mathfrak{V}$ temos,

$$\langle \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0) + a(l(u_1), l(u_2))A\mathbf{U}(t) + \beta(t) - \mathbf{F}(t), \phi \rangle = 0. \quad (4.2.49)$$

Definamos,

$$\mathbf{S}(t) := \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0 + a(l(u_1), l(u_2))A\mathbf{U}(t) + \beta(t) - \mathbf{F}(t) \in V'. \quad (4.2.50)$$

Pelo fato de V ser um subespaço fechado em H podemos, graças ao teorema de Hahn-Banach, para cada $t \in [0, T]$ estender a $\mathbf{S}(t)$ a um funcional $\mathbf{T}(t) \in H^{-1}(\Omega)$ tal que,

$$\langle \mathbf{T}(t), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{S}(t), \mathbf{v} \rangle, \forall \mathbf{v} \in V. \quad (4.2.51)$$

Mas de (4.2.49) e (4.2.51) concluimos que,

$$\langle \mathbf{T}(t), \phi \rangle = 0, \forall \phi \in \mathfrak{V}.$$

Pelo Lema (4.2.2) resulta que $\exists P(t) \in L^2(\Omega)$ satisfazendo,

$$\mathbf{T}(t) = \nabla P(t) \text{ em } H^{-1}(\Omega). \quad (4.2.52)$$

Logo, de (4.2.51) e (4.2.52) obtemos,

$$\nabla P(t)|_V \equiv \mathbf{S}(t) \text{ em } V', \forall t \in [0, T]. \quad (4.2.53)$$

Substituindo (4.2.53) em (4.2.50),

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0 + a(l(u_1), l(u_2))A\mathbf{U}(t) + \beta(t) - \mathbf{F}(t) = \nabla P(t) \text{ em } V', \forall v \in [0, T].$$

Como a expressão à esquerda pertence ao espaço $C^0(0, T; V')$ temos $\nabla P \in C^0(0, T; V')$, e, portanto, podemos derivar a equação acima no sentido das distribuições, com isso:

$$\mathbf{u}' + a(l(u_1), l(u_2))A\mathbf{u} - \mathbf{f} + B\mathbf{u} = \nabla \frac{\partial P}{\partial t} \text{ em } L^2(0, T; V').$$

Podemos, com isso, afirmar que a igualdade acima se dá q.s. em $(0, T)$. Fazendo $p(x, t) = -\frac{\partial P}{\partial t}$, resulta em,

$$\mathbf{u}' + a(l(u_1), l(u_2))A\mathbf{u} + B\mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p \in L^2(0, T; V').$$

4.2.7 Estabilidade Exponencial da solução

Usamos o método da Energia, bem descrito em [44], para provar a estabilidade exponencial da solução das equações de Navier-Stokes, quando $\mathbf{f} \equiv \nabla \phi$ é uma força conservativa, $\mathbf{u}(x, 0) \neq 0$ e quando $\mathbf{u}(x) = 0 \forall x \in \partial\Omega$. Em geral não é possível obter tal estabilidade, visto que, logo abaixo, provamos a existência de soluções periódicas para a mesma, mas, quando o problema satisfaz as condições ditas acima, conseguimos provar que tal estabilidade existe.

Para evitar que o leitor tenha que voltar algumas páginas para rever as equações de Navier-Stokes, enunciaremos-la novamente, assumindo as condições estabelecidas em (1.0.1).

$$(Q) \begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} - a(l(u_1), l(u_2))\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\phi \text{ em } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 \text{ em } \partial\Omega, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \end{cases} \quad (4.2.54)$$

com $\mathbf{u}_0(x) \neq 0$.

A energia do sistema é definida como,

$$E(t) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2,$$

derivando em relação ao tempo obtemos,

$$\frac{dE}{dt} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}').$$

Multiplicando por \mathbf{u} o problema (Q) obtemos,

$$(\mathbf{u}', \mathbf{u}) + \underbrace{b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u})}_{=0} + \frac{1}{\rho}(\nabla p, \mathbf{u}) - a(l(u_1), l(u_2))(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\nabla \phi, \mathbf{u}),$$

fazendo $P := p/\rho + \phi$ e integrando temos,

$$\frac{dE}{dt} = -(\mathbf{u}, \nabla P) + a(l(u_1), l(u_2))(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}).$$

Aplicando a primeira identidade de *Green* e o *teorema da Divergência* na igualdade acima obtemos,

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{(P, \nabla \cdot \mathbf{u})}_{=0} - a(l(u_1), l(u_2))|\nabla \mathbf{u}|^2,$$

ou seja,

$$\frac{dE}{dt} = -a(l(u_1), l(u_2))|\nabla \mathbf{u}|^2, \quad (4.2.55)$$

pela desigualdade de *Poincaré*,

$$c|\mathbf{u}|^2 \leq |\nabla \mathbf{u}|^2 \quad (4.2.56)$$

com $\lambda > 0$, então por (4.2.55) e (4.2.56),

$$\frac{dE}{dt} \leq -a(l(u_1), l(u_2))\lambda_1|\mathbf{u}|^2$$

por outro lado, $-a(l(u_1), l(u_2))\lambda_1|\mathbf{u}|^2 \leq -a_-\lambda_1|\mathbf{u}|^2$, portanto,

$$\frac{dE}{dt} \leq -a_-\lambda_1|\mathbf{u}|^2 = -2a_-E(t)$$

resolvendo obtemos,

$$E(T) \leq e^{-2a_-\lambda_1 T} E(0)$$

e portanto $|\mathbf{u}|^2 \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Pelo fato de que o problema que envolve o *Benchmark Lid-driven cavity* tem $\mathbf{u}_0 = 0$, não há estabilidade exponencial da solução, pois $E(0) \equiv 0$, e, temos como condição necessária que $\mathbf{u}_0(x) \neq 0$.

4.2.8 Existência de Soluções Periódicas

O objetivo desta seção é provar a existência de soluções periódicas para as equações de Navier-Stokes.

Teorema 4.2.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aberto limitado, com fronteira $\partial\Omega$ bem regular, e $Q := [0, T] \times \Omega$. Dado o seguinte problema,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - a(l(u_1), l(u_2))\Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ em } Q, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \text{ em } Q, \\ \mathbf{u} = 0 \text{ em } \partial\Omega, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}(x, T), \forall x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (4.2.57)$$

onde $f \in L^2(0, T; V')$. Este admite solução fraca em $\mathbf{u} : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$, em $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; H)$ e $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; V')$.

Ou pela formulação fraca de (4.2.57),

$$\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{v} \rangle + a(l(u_1), l(u_2))((\mathbf{u}(t), \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \forall \mathbf{v} \in V, \quad (4.2.58)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(T). \quad (4.2.59)$$

Demonstração. Procedemos de modo similar ao provar a existência de soluções fracas. Considere $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n, \dots\}$ uma base de V . Truncamos a série no m -ésimo termo, e temos a solução do espaço aproximado V_m . De forma similar a demonstração da existência anterior, tomamos $\mathbf{u}_m(t) := g_{im}(t)\mathbf{w}_i$,

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j) + a(l(u_1), l(u_2))((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)) + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j \rangle; j = 1, \dots, m \quad (4.2.60)$$

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{v} \in V_m. \quad (4.2.61)$$

O sistema aproximado acima possui uma solução global, visto que por procedimento similar ao caso da existência anterior obtemos a seguinte inequação:

$$|\mathbf{u}(t)|^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_m(s)\|^2 ds \leq |\mathbf{v}| + \frac{1}{a_-} \|\mathbf{f}\|_{L^2(0, T; V')} \leq c(m),$$

como m está fixado, podemos estender $\mathbf{u}(t)$ à todo intervalo $[0, T]$. Nosso objetivo é mostrar que, dentre todas as soluções da equação aproximada, existe ao menos uma

solução \mathbf{u}_m que satisfaz a periodicidade,

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_m(T).$$

Para isto, basta provarmos que para cada $m \in \mathbb{N}$, a aplicação,

$$\begin{aligned} \tau_m : V_m &\rightarrow V_m \\ \mathbf{v} &\mapsto \tau_m(\mathbf{v}) = \mathbf{u}_m(T), \end{aligned} \quad (4.2.62)$$

possui um único ponto fixo, pois, neste caso, existirá uma única função $\mathbf{v} \in V_m$ tal que

$$\mathbf{u}_m(T) = \tau_m(\mathbf{v}) = \mathbf{v} = \mathbf{u}_m(0), \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (4.2.63)$$

Desta forma (4.2.63) temos uma sequência (\mathbf{u}_m) de soluções aproximadas tais que todas elas satisfazem a condição de periodicidade.

Lema 4.2.7. *Existe $\rho_0 > 0$ tal que $\tau_m(\overline{B_{\rho_0}(0)}) \subset \overline{B_{\rho_0}(0)}$.*

Demonstração. Usando em V_m a topologia induzida por H , é suficiente provarmos que

$$\exists \rho_0 > 0 \text{ tal que } |\tau_m(\mathbf{v})|_H \leq \rho_0; \forall \mathbf{v} \in V_m, \text{ com } |\mathbf{v}|_H \leq \rho_0. \quad (4.2.64)$$

Aplicando o Método de Energia, de forma similar a anterior obtemos,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}_m(t)|^2 + a_- \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}_m(t)|^2 + a(l(u_1), l(u_2)) \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) \\ &= \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle \\ &\leq \|\mathbf{f}(t)\|_{V'} |\mathbf{u}_m(t)|, \end{aligned}$$

isso implica em,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}_m(t)|^2 + a_- \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2a_-} \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2 + \frac{a_-}{2} \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}_m(t)|^2 + \frac{a_-}{2} \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{a_-} \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2. \quad (4.2.65)$$

Como $V \hookrightarrow H$, existe $c_0 > 0$ tal que:

$$c_0^2 |\mathbf{u}_m(t)|^2 \leq \|\mathbf{u}_m(t)\|^2. \quad (4.2.66)$$

Portanto, de (4.2.65) e (4.2.66) obtemos,

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{u}_m(t)|^2 + c_0^2 a_- |\mathbf{u}_m(t)|^2 \leq \frac{1}{a_-} \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $e^{c_0^2 a_- t}$:

$$\frac{d}{dt} (|\mathbf{u}_m(t)|^2 e^{c_0^2 a_- t}) \leq \frac{1}{a_-} \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2 e^{c_0^2 a_- t}.$$

Integrando de 0 à T obtemos,

$$|\mathbf{u}_m(t)|^2 e^{c_0^2 a_- t} \leq |\mathbf{u}_m(0)|^2 + \frac{1}{a_-} \int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2 e^{c_0^2 a_- t} dt,$$

o que implica em,

$$|\mathbf{u}_m(t)|^2 \leq e^{-c_0^2 a_- T} |\mathbf{u}_m(0)|^2 + \frac{1}{a_-} \int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2 dt,$$

ou seja,

$$|\mathbf{u}_m(t)|^2 \leq e^{-c_0^2 a_- T} |\mathbf{u}_m(0)|^2 + \frac{1}{a_-} \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;V')}^2. \quad (4.2.67)$$

Denotando $\theta = e^{-c_0^2 a_- T}$ e $c = \frac{1}{a_-} \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;V')}^2$, podemos escrever

$$|\mathbf{u}_m(t)|^2 \leq \theta |\mathbf{u}_m(0)|^2 + c,$$

ou ainda,

$$|\boldsymbol{\tau}_m(\mathbf{v})|^2 \leq \theta |\mathbf{v}|^2 + c, \forall \mathbf{v} \in V_m.$$

Agora, como $0 < \theta < 1$ então $0 < 1 - \theta < 1$. Desta forma, existe $\rho_0 > 0$, suficientemente grande tal que $c < (1 - \theta)\rho_0^2$. Logo, se $|\mathbf{v}| < \rho_0$ então,

$$\theta |\mathbf{v}|^2 + c \leq \theta \rho_0^2 + (1 - \theta)\rho_0^2 = \rho_0^2.$$

Onde,

$$|\boldsymbol{\tau}_m(\mathbf{v})|^2 \leq \rho_0^2, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{N},$$

o que prova este lema. □

Lema 4.2.8. A aplicação $\boldsymbol{\tau}_m : V_m \mapsto V_m$ definida em (4.2.61) é contínua.

Demonstração. Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_m$ e $\mathbf{u}_m, \mathbf{z}_m$ soluções do problema aproximado com dados iniciais \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , respectivamente. Nosso objetivo é mostrar que as soluções são Lipschitz-continua, ou seja, $|\boldsymbol{\tau}_m(\mathbf{v}_1) - \boldsymbol{\tau}_m(\mathbf{v}_2)| \leq c_m |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ para algum $c_m > 0$.

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j) + a(l(u_1), l(u_2))((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)) + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) &= \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j \rangle \\ (\mathbf{z}'_m(t), \mathbf{w}_j) + a(l(z_1), l(z_2))((\mathbf{z}_m(t), \mathbf{w}_j)) + b(\mathbf{z}_m(t), \mathbf{z}_m(t), \mathbf{w}_j) &= \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j \rangle. \end{aligned}$$

fazendo a diferença entre essas equações e definindo $\boldsymbol{\eta}_m = \mathbf{z}_m - \mathbf{u}_m$,

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\eta}_m, \mathbf{w}_j) + a(l(u_1), l(u_2))((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)) - a(l(z_1), l(z_2))((\mathbf{z}_m(t), \mathbf{w}_j)) \\ + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) - b(\mathbf{z}_m(t), \mathbf{z}_m(t), \mathbf{w}_j) = 0, \end{aligned}$$

para evitar repetirmos as contas feitas da demonstração da unicidade vamos apenas usar o que lá foi obtido, temos com isso,

$$\frac{d|\boldsymbol{\eta}_m|^2}{dt} - |\boldsymbol{\eta}_m|^2 \left(\frac{2}{a_-} \|u_{2m}(t)\|^2 + \frac{K^2}{a_-} \|\mathbf{z}_m\|^2 \right) \leq 0,$$

definindo $\theta_m(t) = \left(\frac{2}{a_-} \|u_{2m}(t)\|^2 + \frac{K^2}{a_-} \|\mathbf{z}_m\|^2 \right)$, temos,

$$\frac{d|\boldsymbol{\eta}_m|^2}{dt} - |\boldsymbol{\eta}_m|^2 \theta_m(t) \leq 0$$

multiplicando ambos os lados da desigualdade $e^{-\int_0^t \theta_m(s) ds}$,

$$\frac{d}{dt} \left(|\boldsymbol{\eta}_m(t)|^2 e^{-\int_0^t \theta_m(s) ds} \right) \leq 0.$$

Integrando a desigualdade de 0 à T ,

$$|\boldsymbol{\eta}_m(T)|^2 e^{-\int_0^T \theta_m(s) ds} - |\boldsymbol{\eta}_m(0)|^2 \leq 0$$

definindo $c_m = e^{-\int_0^T \theta_m(s) ds}$,

$$|\boldsymbol{\eta}_m(T)|^2 \leq c_m |\boldsymbol{\eta}_m(0)|^2,$$

por outro lado,

$$\boldsymbol{\eta}_m(s) = \mathbf{u}_m(s) - \mathbf{z}_m(s)$$

ou seja,

$$|\mathbf{u}_m(T) - \mathbf{z}_m(T)|^2 \leq c_m |\mathbf{u}_m(0) - \mathbf{z}_m(0)|^2,$$

podemos concluir ainda mais,

$$|\boldsymbol{\tau}_m(\mathbf{v}_1) - \boldsymbol{\tau}_m(\mathbf{v}_2)| \leq c_m |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|,$$

que é o que queríamos provar. \square

As hipóteses do Teorema do ponto fixo de Brouwer são satisfeitas em virtude dos Lemas (4.2.7) e (4.2.8), com isso temos

$$\boldsymbol{\tau}_m : \overline{B_{\rho_0}(0)} \rightarrow \overline{B_{\rho_0}(0)},$$

admite um ponto fixo, isto é, existe um $\mathbf{v} \in \overline{B_{\rho_0}(0)}$ tal que $\boldsymbol{\tau}_m(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, ou seja, $\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_m(T)$. Então, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe um $\mathbf{u}_m(t)$ tal que $\mathbf{u}_m(0) \in \overline{B_{\rho_0}(0)}$ e,

$$\left| \begin{array}{l} (\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j) + a(l(u_1), l(u_2))((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)) + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j \rangle, \forall j = 1, \dots, m \\ \mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_m(T). \end{array} \right.$$

Do fato que $\mathbf{u}_m(0) \in \overline{B_{\rho_0}(0)}$ podemos repetir as estimativas obtendo uma subsequencia (\mathbf{u}_ν) de (\mathbf{u}_m) tal que

$$\mathbf{u}_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{u} \text{ em } L^\infty(0, T; H) \quad (4.2.68)$$

$$\mathbf{u}_\nu \rightarrow \mathbf{u} \text{ em } L^2(0, T; V) \quad (4.2.69)$$

$$\mathbf{u}'_\nu \rightarrow \mathbf{u}' \text{ em } L^2(0, T; V'). \quad (4.2.70)$$

Das convergências (4.2.68)-(4.2.70) resulta, por passagem do limite na equação aproximada o desejado em (4.2.59). De maneira análoga à prova da condição inicial no caso anterior, provamos que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(T)$, o que conclui a demonstração. \square

Neste capítulo fizemos a dedução das equações de Navier-Stokes por meio das leis de conservação de massa e de momento. Provamos a existência de soluções fracas, fortes e soluções periódicas. Provamos a unicidade da solução do problema que foi proposto, demonstrando um caso em que podemos afirmar o decaimento exponencial de soluções, e argumentamos que não há decaimento exponencial no *Benchmark* do *Lid-driven cavity*.

Capítulo 5

Solução das equações de Navier-Stokes via Elementos Finitos

Nesta seção falamos sobre os métodos que foram usados para encontrar as soluções para o problema de Navier-Stokes, em conjunto com o método de Elementos Finitos. Começamos enunciando o problema, explicamos sobre o método Θ -*scheme*, que é dito em [20] como um dos melhores métodos para se achar soluções para tal problema. Este método consiste em quebrar um passo temporal do método de Euler explícito em três sub-passos, para melhorar assim o resultado. Estamos assumindo que o método é estável e convergente, no problema de Navier-Stokes, para o caso em que a viscosidade é não-local, que é o caso do nosso problema, podemos assumir isso visto que, como a nossa função usada na viscosidade é limitada, positiva definida e lipschiziana, podemos através do limite das mesmas estabelecer critérios de estabilidade, e, a partir deles, provar a sua convergência. A demonstração não será feita neste trabalho pois não é trivial, mas a mesma pode ser obtida adaptando os artigos [31], [26]. Fizemos a formulação variacional das equações de Navier-Stokes usando esse método, fizemos um breve estudo sobre o método e obtivemos dele alguns critérios de estabilidade mais gerais, para depois aplicá-lo ao problema de Navier-Stokes.

5.1 As equações de Navier-Stokes

Dada as equações de Navier-Stokes, e um domínio $\Omega \times (0, T)$, onde, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com fronteira $\partial\Omega$, suficientemente regular definida por,

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - a(lu_1, lu_2)\Delta \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}(x) \text{ onde } x \in \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ com } x \in \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ em } \partial\Omega \times (0, T) \\ \mathbf{u}(x, 0) = 0 \text{ em } x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Nosso objetivo é encontrar um par, $\{\mathbf{u} = (u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t)), p(x, t)\} \in (H^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)$, que satisfaz a formulação fraca do problema acima, onde $\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\partial\Omega = 0$, e, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x), x \in \partial\Omega$, é o vetor normal a fronteira.

5.2 Formulação Varacional das equações de Navier-Stokes com reação-difusão não-linear

Seja $\mathbf{v} \in \mathfrak{V}, q \in L^2(\Omega)$, funções teste, fazendo produto interno em ambos os lados da equação (5.1.1), temos,

$$\begin{aligned} & \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - a(l(u_1(t)), l(u_2(t)))\Delta \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p, \mathbf{v} \right) \\ &= \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) - a(l(u_1), l(u_2))(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \rho((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\nabla p, \mathbf{v}) \\ &= \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + a(l(u_1), l(u_2))((\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})) + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d\partial\Omega + \rho((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) - p \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + a(l(u_1), l(u_2))((\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})) + \rho((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) - p \nabla \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{v} \rangle \\ & \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} dx = 0. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

5.3 O método Θ -Scheme

O Θ -Scheme é uma técnica de *operator-splitting*, que é feita calculando dois tempos intermediários, ele é melhor descrito no livro [20]. Devido a complexidade da teoria, não será feita a prova da convergência da solução usando este método para o problema de Navier-Stokes com viscosidade não-local, este método foi exaustivamente estudado em [31], [20], [26]. Os três tempos são calculados da seguinte forma,

Tempo 1

$$\begin{cases} \rho \frac{\mathbf{u}^{n+\theta} - \mathbf{u}^n}{\theta \Delta t} - \alpha a(l(u_1^{n+\theta}), l(u_2^{n+\theta})) \Delta \mathbf{u}^{n+\theta} + \nabla p^{n+\theta} = \\ \mathbf{f}^{n+\theta} + \rho \beta a(l(u_1^n), l(u_2^n)) \Delta \mathbf{u}^n - \rho (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \\ \Delta \cdot \mathbf{u}^{n+\theta} = 0 \\ \mathbf{u}^{n+\theta} = \mathbf{g}_0^{n+\theta} \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Tempo 2:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1-\theta} - \mathbf{u}^{n+\theta}}{(1-2\theta) \Delta t} + \rho (\mathbf{u}^{n+\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\theta} - \beta a(l(u_1^{n+1-\theta}), l(u_2^{n+1-\theta})) \Delta \mathbf{u}^{n+1-\theta} = \\ \mathbf{f}^{n+1-\theta} + \alpha a(l(u_1^{n+\theta}), l(u_2^{n+\theta})) \Delta \mathbf{u}^{n+\theta} - \nabla p^{n+1-\theta} \\ \mathbf{u}^{n+1-\theta} = \mathbf{g}_0^{n+1-\theta} \end{cases} \quad (5.3.2)$$

Tempo 3:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1-\theta}}{\theta \Delta t} - \alpha a(l(u_1^{n+1}), l(u_2^{n+1})) \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \\ \mathbf{f}^{n+1} + \beta a(l(u_1^{n+1-\theta}), l(u_2^{n+1-\theta})) \Delta \mathbf{u}^{n+1-\theta} - (\mathbf{u}^{n+1-\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1-\theta} \\ \Delta \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ \mathbf{u}_0^{n+1} = \mathbf{g}_0^{n+1} \end{cases} \quad (5.3.3)$$

os valores de θ , α e β , são respectivamente, $1 - 1/\sqrt{2}$, $2 - \sqrt{2}$ e $\sqrt{2} - 1$.

5.4 Formulação Variacional do método Θ -Scheme

O número Δt é o tamanho do intervalo temporal.

Tempo 1:

$$\left(\frac{\mathbf{u}^{n+\theta} - \mathbf{u}^n}{\theta \Delta t}, \mathbf{v}\right) - (\alpha a(l(u_1^{n+\theta}), l(u_2^{n+\theta}))(\Delta \mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) + (\nabla p^{n+\theta}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}^{n+\theta}, \mathbf{v} \rangle + (\beta a(l(u_1^n), l(u_2^n))\Delta \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) - ((\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n, \mathbf{v})$$

multiplicando tudo por $\theta \Delta t$ obtemos,

$$(\mathbf{u}^{n+\theta} - \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) - (\theta \Delta t)(\alpha a(l(u_1^{n+\theta}), l(u_2^{n+\theta}))(\Delta \mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) + (\theta \Delta t)(\nabla p^{n+\theta}, \mathbf{v}) = (\theta \Delta t)\langle \mathbf{f}^{n+\theta}, \mathbf{v} \rangle + (\theta \Delta t)(\beta a(l(u_1^n), l(u_2^n))(\Delta \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) - (\theta \Delta t)((\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n, \mathbf{v})$$

re-organizando os membros,

$$(\mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) - (\theta \Delta t)(\alpha a(l(u_1^{n+\theta}), l(u_2^{n+\theta}))(\Delta \mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) + (\theta \Delta t)(\nabla p^{n+\theta}, \mathbf{v}) = (\theta \Delta t)\langle \mathbf{f}^{n+\theta}, \mathbf{v} \rangle + (\theta \Delta t)(\beta a(l(u_1^n), l(u_2^n))(\Delta \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) - (\theta \Delta t)((\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}^n, \mathbf{v})$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

$$\mathbf{u}^{n+\theta} = \mathbf{g}_0^{n+\theta}$$

Aplicando identidade de green,

$$(\mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) - (\theta \Delta t)(\alpha a(l(u_1^{n+\theta}), l(u_2^{n+\theta}))((\nabla \mathbf{u}^{n+\theta}, \nabla \mathbf{v})) + (\theta \Delta t)(\nabla p^{n+\theta}, \mathbf{v}) = (\theta \Delta t)\langle \mathbf{f}^{n+\theta}, \mathbf{v} \rangle + (\theta \Delta t)(\beta a(l(u_1^n), l(u_2^n))(\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \mathbf{v}) - (\theta \Delta t)((\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}^n, \mathbf{v})$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

$$\mathbf{u}^{n+\theta} = \mathbf{g}_0^{n+\theta}$$

aplicando o teorema da divergência na parte da pressão,

$$(\mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) - (\theta \Delta t)(\alpha a(l(u_1^{n+\theta}), l(u_2^{n+\theta}))((\nabla \mathbf{u}^{n+\theta}, \nabla \mathbf{v})) - (\theta \Delta t)(p^{n+\theta}, \nabla \mathbf{v}) = (\theta \Delta t)\langle \mathbf{f}^{n+\theta}, \mathbf{v} \rangle + (\theta \Delta t)(\beta a(l(u_1^n), l(u_2^n))(\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \mathbf{v}) - (\theta \Delta t)((\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}^n, \mathbf{v})$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) = 0$$

$$\mathbf{u}^{n+\theta} = \mathbf{g}_0^{n+\theta}$$

Procedendo de forma similar para o Tempo 2,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1-\theta} - \mathbf{u}^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t}, \mathbf{v} \right) - \alpha a(l(u_1), l(u_2))(\Delta \mathbf{u}^{n+1-\theta}, \mathbf{v}) + (\nabla p^{n+1-\theta}, \mathbf{v}) = \\ & \langle \mathbf{f}^{n+1-\theta} \rangle + \beta a(l(u_1), l(u_2))(\Delta \mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) - ((\mathbf{u}^{n+\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) \\ & \mathbf{u}^{n+1-\theta} = \mathbf{g}_0^{n+1-\theta} \end{aligned}$$

multiplicando ambos os lados por $(1-2\theta)$,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}^{n+1-\theta} - \mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) - \alpha a(l(u_1), l(u_2))((1-2\theta)\Delta t)(\Delta \mathbf{u}^{n+1-\theta}, \mathbf{v}) \\ & + ((1-2\theta)\Delta t)(\nabla p^{n+1-\theta}, \mathbf{v}) = ((1-2\theta)\Delta t)\langle \mathbf{f}^{n+1-\theta}, \mathbf{v} \rangle \\ & + \beta a(l(u_1), l(u_2))((1-2\theta)\Delta t)(\Delta \mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) - ((1-2\theta)\Delta t)((\mathbf{u}^{n+\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) \\ & \mathbf{u}^{n+1-\theta} = \mathbf{g}_0^{n+1-\theta} \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}^{n+1-\theta}, \mathbf{v}) - \alpha a(l(u_1^{n+1-\theta}), l(u_2^{n+1-\theta}))((1-2\theta)\Delta t)((\nabla \mathbf{u}^{n+1-\theta}, \nabla \mathbf{v})) \\ & + ((1-2\theta)\Delta t)(p^{n+1-\theta}, \nabla \mathbf{v}) = ((1-2\theta)\Delta t)\langle \mathbf{f}^{n+1-\theta}, \mathbf{v} \rangle \\ & + \beta a(l(u_1^{n+\theta}), l(u_2^{n+\theta}))((1-2\theta)\Delta t)((\nabla \mathbf{u}^{n+\theta}, \nabla \mathbf{v})) \\ & - ((1-2\theta)\Delta t)((\mathbf{u}^{n+\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

e, para o Tempo 3,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) - \alpha a(l(u_1^{n+1}), l(u_2^{n+1}))((\nabla \mathbf{u}^{n+1}, \nabla \mathbf{v}))(\theta \Delta t) = \\ & (\theta \Delta t)\langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v} \rangle - (\theta \Delta t)(p^{n+1}, \nabla \mathbf{v}) + (\theta \Delta t)\beta a(l(u_1^{n+1-\theta}), l(u_2^{n+1-\theta}))((\nabla \mathbf{u}^{n+1-\theta}, \nabla \mathbf{v})) \\ & - (\theta \Delta t)((\mathbf{u}^{n+1-\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1-\theta}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}^{n+1-\theta}, \mathbf{v}) \\ & \Delta \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ & \mathbf{u}_0^{n+1} = \mathbf{g}_0^{n+1}. \end{aligned}$$

5.5 Estudo do método Θ -Scheme

5.5.1 Formulação inicial do problema

Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A(\varphi, t) = 0 \quad (5.5.1)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad (5.5.2)$$

onde para dado t A é um operador, podendo ser não-linear de um espaço de Hilbert H nele mesmo, onde $\varphi_0 \in H$. Suponha que o operador A tenha uma decomposição não trivial $A = A_1 + A_2$, para resolver o problema de valor inicial acima, é natural pensarmos em usar métodos numéricos para integrar o problema, e fazer uso de tal decomposição para resolver nosso problema.

5.5.2 Descrição do Θ -Scheme

Seja θ um número no intervalo aberto $(0, \frac{1}{2})$, o método Θ -scheme é aplicado para obter a solução do problema de valor inicial definido em (5.5.1)-(5.5.2), e é definido da seguinte forma:

Para $n \geq 0$, considere $\varphi^n = \varphi(n)$

$$\frac{\varphi^{n+\theta} - \varphi}{\theta \Delta t} + A_1(\varphi^{n+\theta}, (n+\theta) \Delta t) + A_2(\varphi^n, n \Delta t) = 0, \quad (5.5.3)$$

$$\frac{\varphi^{n+1-\theta} - \varphi^{n+\theta}}{(1-2\theta) \Delta t} + A_2(\varphi^{n+\theta}, (n+\theta) \Delta t) + A_1(\varphi^{n+1-\theta}, (n+1-\theta) \Delta t) = 0 \quad (5.5.4)$$

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1-\theta}}{\theta \Delta t} + A_1(\varphi^{n+1}, (n+1) \Delta t) + A_2(\varphi^{n+1-\theta}, (n+1-\theta) \Delta t) = 0. \quad (5.5.5)$$

Se A é uma matriz $N \times N$ simétrica e definida positiva com, $A_1 = \alpha A$ e $A_2 = \beta A$, onde $\alpha + \beta = 1$ e $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Nomeamos $\theta' = (1 - 2\theta)$, obtemos,

$$\varphi^{n+\theta} - \varphi + \theta \Delta t \alpha A \varphi^{n+\theta} + \theta \Delta t \beta A \varphi^n = 0, \quad (5.5.6)$$

$$\varphi^{n+1-\theta} - \varphi^{n+\theta} + \theta' \Delta t \beta A \varphi^{n+\theta} + \theta' \Delta t \alpha A \varphi^{n+1-\theta} = 0$$

$$\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1-\theta} + \theta \Delta t \alpha A \varphi^{n+1} + \theta \Delta t \beta A \varphi^{n+1-\theta} = 0$$

Manipulando (5.5.6)

$$\varphi^{n+\theta} - \varphi^n + \theta \Delta t \alpha A \varphi^{n+\theta} + \theta \Delta t \beta A \varphi^n = 0$$

$$\Rightarrow (I + \theta \Delta t \alpha A) \varphi^{n+\theta} = (I - \theta \Delta t \beta A) \varphi^n$$

$$\Rightarrow \varphi^{n+\theta} = (I + \theta \Delta t \alpha A)^{-1} (I - \theta \Delta t \beta A) \varphi^n$$

de modo análogo para os demais itens, obtemos

$$\varphi^{n+1-\theta} = (I + \theta' \Delta t \beta A)^{-1} (I - \theta' \Delta t \alpha A) \varphi^{n+\theta}$$

$$\varphi^{n+1} = (I + \theta \Delta t \alpha A)^{-1} (I - \theta \Delta t \beta A) \varphi^{n+1-\theta},$$

por fim, chegamos nessa expressão,

$$\varphi^{n+1} = (I + \alpha\theta \Delta tA)^{-2} (I - \beta\theta \Delta tA)^{-2} (I + \beta\theta' \Delta tA)^{-1} (I - \alpha\theta' \Delta tA) \varphi^n. \quad (5.5.7)$$

Supondo que a solução do problema seja da forma $\varphi(t) = e^{At}\varphi_0$, com $\varphi \in \mathbb{R}^n$, os autovalores e autovetores são dadas da seguinte forma, $\varphi(t)_i = e^{\lambda_i t}\varphi_{0i}$, com $i = 1 \dots n$ e $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Substituindo em (5.5.7), obtemos,

$$\begin{aligned} \varphi_i^n &= (1 + \alpha\theta \Delta t\lambda_i)^{-2n} (1 - \beta\theta \Delta t\lambda_i)^{2n} (1 + \beta\theta' \Delta t\lambda_i)^{-n} (1 - \alpha\theta' \Delta t\lambda_i)^n \varphi_{0i}. \\ \varphi_i^n &= \frac{(1 - \beta\theta \Delta t\lambda_i)^{2n} (1 - \alpha\theta' \Delta t\lambda_i)^n}{(1 + \alpha\theta \Delta t\lambda_i)^{2n} (1 + \beta\theta' \Delta t\lambda_i)^n} \varphi_{0i}. \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

Nos definimos $R(\xi) = \frac{(1 - \beta\theta\xi)^2 (1 - \alpha\theta'\xi)}{(1 + \alpha\theta\xi)^2 (1 + \beta\theta'\xi)}$, para obtermos a estabilidade stiff A-stability (8), precisamos que $\lim_{\xi \rightarrow \infty} |R(\xi)| \leq 1$.

Calculando o limite obtemos que,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} |R(\xi)| = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left| \frac{(1 - \beta\theta\xi)^2 (1 - \alpha\theta'\xi)}{(1 + \alpha\theta\xi)^2 (1 + \beta\theta'\xi)} \right| = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left| \frac{\xi^3 (1/\xi - \beta\theta)^2 (1/\xi - \alpha\theta')}{\xi^3 (1/\xi + \alpha\theta)^2 (1/\xi + \beta\theta')} \right| = \beta/\alpha$$

com isso, precisamos que $\alpha > \beta$. Isso é válido para $|R(\xi)| < 1, \forall \xi > 0, \forall \theta \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \forall \alpha, \beta$.

5.5.3 Análise sobre as constantes do Método Θ -Scheme

Nesta secção vamos obter valores para as constantes α, θ, β de modo que o erro do Θ -Scheme seja minimizado. Vamos expandir $R(\xi)$ em série Taylor com erro de ordem 3 em torno do ponto 0,

$$R(\xi) = 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2} [1 + (\beta - \alpha)(2\theta^2 - 4\theta + 1)] + O(\xi^3), \quad (5.5.9)$$

3, vamos expandir $e^{-\xi}$ em série de Taylor em torno do ponto 0

$$e^{-\xi} = 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2} + O(\xi^3). \quad (5.5.10)$$

Comparando (5.5.9) com (5.5.10) que se $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ou $\theta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, o esquema possui precisão de segunda ordem, se nenhuma dessas condições forem satisfeitas, a aproximação do esquema é de primeira ordem. Suponhamos agora que temos o caso em que α e β foram escolhidos de modo que nós temos a mesma matriz para todos os passos parciais

do método Θ -scheme, neste caso α, β, θ tem que satisfazer

$$\alpha = \beta(1 - 2\theta)$$

isso implica em $\alpha = (1 - 2\theta)/(1 - \theta)$ e $\beta = \theta/(1 - \theta)$.

5.6 Solução discreta

Para resolver o problema definido em (5.1.1), usamos elementos-finitos com o elemento conhecido por "*Taylor-Hood*", ou, P_1P_2 . Os elementos usados são triângulos. Portanto usamos um polinômio de grau dois pra velocidade e um de grau um para a pressão, ou seja, para pressão precisamos formar um triângulo com três vértices, enquanto para a velocidade, usamos os mesmos três vertices mais três vértices médios.

Seja \mathcal{T}_h uma triangularização do domínio $\bar{\Omega}$, e $\mathcal{T}_{h/2}$ a mesma triangularização de \mathcal{T}_h mas usando vértices médios dos triângulos, o número de nós em \mathcal{T}_h será chamado de M_h e o $\mathcal{T}_{h/2}$, N_h . O conjunto de vértices dos triangulos em \mathcal{T}_h , será denotado por Σ_h e o dos vértices em $\mathcal{T}_{h/2}$ por $\Sigma_{h/2}$.

Definimos os espaços $H_h^1(\mathcal{T}_{h/2}) := \{z_h; z_h \in C^0(\bar{\Omega}), z_h|_T \in P_2, \forall T \in \mathcal{T}_{h/2}\}$, e, $H_{0h}^1(\mathcal{T}_{h/2}) := \{z_h; z_h \in C^0(\bar{\Omega}), z_h|_T \in P_2, \text{ e } z_h = 0 \text{ em } \partial\Omega, \forall T \in \mathcal{T}_{h/2}\}$.

Para prosseguir, precisamos definir mais alguns espaços extras, o primeiro espaço que definimos é para a malha da pressão,

$P_h := \{q_h; q_h \in C^0(\bar{\Omega}), q_h|_T \in P_1, \forall T \in \mathcal{T}_h\}$, os seguintes são para as velocidades, $V_h := \{v_h; v_h \in (C^0(\bar{\Omega}))^2, v_h|_T \in P_2, \forall T \in \mathcal{T}_{h/2}\}$,

$V_{gh} := \{v_h, v_h \in V_h, v_h = g_h, \int_{\partial\Omega} g_h \cdot n dx = 0, \text{ em } \partial\Omega\}$, e, por fim, $V_{0h} := V_h \cap (H_0^1(\Omega))^2$.

Claramente temos os conjuntos $V_h = H_h^1 \times H_h^1, V_{0h} = H_{0h}^1 \times H_{0h}^1$.

Vamos agora definir as bases desses espaços, para P_h , $\{w_i\}_{1 \leq i \leq M_h}$, e para H_h^1 , $\{\tilde{w}_i\}_{1 \leq i \leq N_h}$, da seguinte forma,

$$\begin{cases} w_i \in P_h \text{ e } w_i(P_i) = 1, \forall i = 1, \dots, M_h, \\ w_i(P_j) = 0 \text{ se } i \neq j, 1 \leq j \leq M_h, \end{cases} \quad (5.6.1)$$

e,

$$\begin{cases} \tilde{w}_i \in H_h^1 \text{ e } \tilde{w}_i(Q_i) = 1, \forall i = 1, \dots, N_h, \\ \tilde{w}_i(Q_j) = 0 \text{ se } i \neq j, 1 \leq j \leq N_h. \end{cases} \quad (5.6.2)$$

onde $Q_i \in \Sigma_{h/2}$ e $P_i \in \Sigma_h$.

Agora que temos as bases podemos escrever as funções como combinação linear dessas, $q_h = \sum_{i=1}^M w_i q_h(P_i)$ e $q_h = \sum_{i=1}^M w_i q_h(P_i)$, $u_{rh} = \sum_{j=0}^{N_0} \tilde{w}_j u_{rh}(Q_j) + \sum_{j=N_0}^N \tilde{w}_j g_{rh}(Q_j)$ com $r = 1, 2$.

Tomemos $v_{rh} = \sum_{j=0}^N \tilde{w}_j$, com $r = 1, 2$.

Para facilitar, usamos a convenção de Einstein para tensores. Como o Tempo 1 é similar ao Tempo 3, mostra-se apenas os Tempos 1 e 2.

Tempo 1:

$$u_h^0 = u_{0h}$$

para u_{1h} ,

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} \rho \frac{\tilde{w}_i \tilde{w}_j^{n+\theta}}{\theta \Delta t} dx + \alpha a(l(u_1^{n+\theta}), l(u_2^{n+\theta})) \int_{\Omega} \nabla \tilde{w}_i \nabla \tilde{w}_j dx \right) u_{1h}(Q_j^{n+\theta}) - \left(\int_{\Omega} w_k \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_1} \right) p_h(P_j) \\ &= \int_{\Omega} f_{1h}^{n+\theta} \tilde{w}_i - \left(\beta a(l(u_1^n), l(u_2^n)) \int_{\Omega} \nabla \tilde{w}_i \nabla \tilde{w}_j dx - \int_{\Omega} \rho \frac{\tilde{w}_i \tilde{w}_j}{\theta \Delta t} dx \right) u_{1h}(Q_j^n) \\ & - \rho \left(\int_{\Omega} \tilde{w}_j \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial dx_1} \tilde{w}_i dx u_{1h}(Q_j^n)^2 + \int_{\Omega} \tilde{w}_j \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial dx_2} \tilde{w}_i dx u_{1h}(Q_j^n) u_{2h}(Q_j^n) \right) \end{aligned}$$

para u_{2h} ,

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} \rho \frac{\tilde{w}_i \tilde{w}_j}{\theta \Delta t} dx + \alpha a(l(u_1^n + \theta), l(u_2^{n+\theta})) \int_{\Omega} \nabla \tilde{w}_i \nabla \tilde{w}_j dx \right) u_{2h}(Q_j^{n+\theta}) - \left(\int_{\Omega} w_k \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_1} \right) p_h(P_k) \\ &= \int_{\Omega} f_{2h}^{n+\theta} \tilde{w}_i - \left(\beta a(l(u_1^n), l(u_2^n)) \int_{\Omega} \nabla \tilde{w}_i \nabla \tilde{w}_j dx - \int_{\Omega} \rho \frac{\tilde{w}_i \tilde{w}_j}{\theta \Delta t} dx \right) u_{2h}(Q_j^n) \\ & - \rho \left(\int_{\Omega} \tilde{w}_j \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial dx_1} \tilde{w}_i dx u_{2h}(Q_j^n)^2 + \int_{\Omega} \tilde{w}_j \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial dx_2} \tilde{w}_i dx u_{1h}(Q_j^n) u_{2h}(Q_j^n) \right) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} w_i \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial dx_1} dx u_{1h}(Q_j^{n+\theta}) + \int_{\Omega} w_i \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial dx_2} dx u_{2h}(Q_j^{n+\theta}) = 0$$

$\forall i, j = 1, \dots, N_h, k = 1, \dots, M_h$.

Tempo 2:

para u_{1h} ,

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} \rho \frac{\tilde{w}_i \tilde{w}_j}{(1-2\theta) \Delta t} dx + \beta a(l(u_1^{n+1-\theta}), l(u_2^{n+1-\theta})) \int_{\Omega} \nabla \tilde{w}_i \nabla \tilde{w}_j dx \right) u_{1h}(Q_j^{n+1-\theta}) + \\ & \rho \left(\int_{\Omega} \tilde{w}_j \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial dx_1} \tilde{w}_i dx u_{1h}(Q_j^{n+\theta}) + \int_{\Omega} \tilde{w}_j \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial dx_2} \tilde{w}_i dx u_{2h}(Q_j^{n+\theta}) \right) u_{1h}(Q_j^{n+1-\theta}) \\ & = \int_{\Omega} f_{1h}^{n+1-\theta} \tilde{w}_i - \left(\alpha a(l(u_1^{n+\theta}), l(u_2^{n+\theta})) \int_{\Omega} \nabla \tilde{w}_i \nabla \tilde{w}_j dx - \int_{\Omega} \rho \frac{\tilde{w}_i \tilde{w}_j}{(1-2\theta) \Delta t} dx \right) u_{1h}(Q_j^{n+\theta}) + \\ & \left(\int_{\Omega} w_k \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_1} \right) p_h(P_k)^{n+\theta}, \end{aligned}$$

para u_{2h} ,

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} \frac{\tilde{w}_i \tilde{w}_j}{(1-2\theta) \Delta t} dx + \beta a(l(u_1^{n+1-\theta}), l(u_2^{n+1-\theta})) \int_{\Omega} \nabla \tilde{w}_i \nabla \tilde{w}_j dx \right) u_{2h}(Q_j^{n+1-\theta}) + \\ & \left(\int_{\Omega} \tilde{w}_j \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial dx_1} \tilde{w}_i dx u_{1h}(Q_j^{n+\theta}) + \int_{\Omega} \tilde{w}_j \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial dx_2} \tilde{w}_i dx u_{2h}(Q_j^{n+\theta}) \right) u_{2h}(Q_j^{n+1-\theta}) \\ & = \int_{\Omega} f_{1h}^{n+1-\theta} \tilde{w}_i - \left(\alpha a(l(u_1^{n+\theta}), l(u_2^{n+\theta})) \int_{\Omega} \nabla \tilde{w}_i \nabla \tilde{w}_j dx - \int_{\Omega} \frac{\tilde{w}_i \tilde{w}_j}{(1-2\theta) \Delta t} dx \right) u_{2h}(Q_j^{n+\theta}) + \\ & \left(\int_{\Omega} w_k \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_1} \right) p_h(P_k)^{n+\theta}. \end{aligned}$$

com $i, j = 1, \dots, N_h$ e $k = 1, \dots, M_h$.

Capítulo 6

Metodologia

6.1 Metodologia

Os códigos foram feitos na linguagem *C* usando as bibliotecas *GSL-Gnu Scientific Library* e *MathGL*, fizemos uma breve explicação sobre estas bibliotecas. A biblioteca *GSL* foi usada para fazer cálculos envolvendo vetores e matrizes, pois ele incorpora a biblioteca *BLAS*, uma biblioteca de algebra linear, que tem as melhores funções para cálculos matriciais e vetoriais, como multiplicação de matrizes, e operações entre vetores e matrizes. O sistema linear foi resolvido usando usando decomposição *LU*. Para a plotagem de gráficos foi utilizada a biblioteca *MathGL*. Além da praticidade proporcionada por essas bibliotecas, ressaltamos o fato delas serem de código livre, pertencem ao projeto GNU, e, usamos a linguagem *C* devido ao seu alto desempenho frente as linguagens interpretadas. Ambas ferramentas podem ser baixadas e instaladas sem maiores dificuldades por qualquer um que queira usa-las, sem restrições de uso. Para o compilar utilizamos o GCC, que foi instalado através do MSYS2, através do MSYS2 foi feita a instação das bibliotecas ditas acima. Todos os códigos foram executados em um processador *Core-i7 2620QM*, rodando com o sistema operacional *Windows 10*, e com 8GB de memória RAM.

6.1.1 Biblioteca GSL

A *GNU Scientific Library* (GSL) é uma coleção de rotinas para computação numérica. As rotinas foram escritas do zero em *C* e apresentam uma interface de programação de aplicativos (*API*) moderna para programadores *C*, permitindo que os *wrappers* sejam escritos para linguagens de alto nível. Dentre os recursos da biblioteca *GSL* podemos destacar:

Números Complexos, Raízes de Polinômios, Funções Especiais, Vetores e Matrizes, Permutações, Combinações, Classificação, Suporte *BLAS*, Álgebra Linear, *CBLAS Library*, *Fast Fourier Transforms*, *Eigensystems*.

Como exemplo, vamos resolver o seguinte sistema usando esta biblioteca,

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.60 & 0.57 & 0.96 \\ 0.41 & 0.24 & 0.99 & 0.58 \\ 0.14 & 0.30 & 0.97 & 0.66 \\ 0.51 & 0.13 & 0.19 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.0 \\ 3.0 \\ 4.0 \end{pmatrix},$$

```

1 #include <stdio.h>
2 #include <gsl/gsl_linalg.h>
3
4 int
5 main (void)
6 { /* A matriz que vai representar o nosso sistema em forma vetorial*/
7   double a_data[] = { 0.18, 0.60, 0.57, 0.96,
8                       0.41, 0.24, 0.99, 0.58,
9                       0.14, 0.30, 0.97, 0.66,
10                      0.51, 0.13, 0.19, 0.85 };
11
12 /* O vetor com os valores*/
13   double b_data[] = { 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 };
14
15 /* Criamos alocamos uma matriz a partir das entradas*/
16   gsl_matrix_view m
17     = gsl_matrix_view_array (a_data, 4, 4);
18
19 /*Alocamos o vetor com as constantes */
20   gsl_vector_view b
21     = gsl_vector_view_array (b_data, 4);
22 /*Alocamos o vetor com a solucao */
23   gsl_vector *x = gsl_vector_alloc (4);
24
25   int s;
26 /*Para resolver o sistema usando LU se faz necessario criar uma matriz de
   permutacao*/
27   gsl_permutation * p = gsl_permutation_alloc (4);
28
29 /*Criamos a matriz de permutacao com base na matriz pre dada*/
30   gsl_linalg_LU_decomp (&m.matrix, p, &s);

```

```

31
32 /*Resolvemos o sistema*/
33 gsl_linalg_LU_solve (&m.matrix , p, &b.vector , x);
34
35 printf ("x = \n");
36 gsl_vector_fprintf (stdout , x, "%g");
37
38 /*Desalocamos os elementos*/
39 gsl_permutation_free (p);
40 gsl_vector_free (x);
41 return 0;
42 }

```

como solução obtivemos $x = (-4.05205, -12.6056, 1.66091, 8.69377)$.

6.1.2 Biblioteca MathGL

Uma biblioteca para criar gráficos científicos de alta qualidade no *Linux* e no *Windows*. Um código para o manuseio e plotagem rápida de grandes *arrays* de dados. Uma biblioteca para trabalhar em regimes de janela e terminal e para inclusão fácil em outro programa. Um código com grande e renovação de gráficos. A biblioteca *MathGL* tem mais de 50 tipos gerais de gráficos para 1D, 2D e matrizes de dados 3D. Pode exportar gráficos para arquivos *bitmap* e vetoriais (EPS ou SVG). Possui interface *OpenGL* e pode ser usado em programas em terminais. Possui funções para manipulação de dados e linguagem *MGL* de *script* para simplificação de plotagem de dados. Ela também tem vários tipos de transparência e iluminação suavizada, fontes vetoriais e análise de símbolos semelhantes ao TeX, sistema de coordenadas curvilíneas arbitrárias e muitas outras coisas úteis (veja a seção de fotos na página inicial (<http://mathgl.sf.net/>)).

Uma simples plotagem da função $\sin(x)$, pode ser feita da seguinte forma,

```

1 #include <mgl2/mgl.h>
2 int main()
3 {
4 // Aloca um grafico
5 mglGraph gr;
6 // Escreve a funcao atraves do Fplot
7 gr.FPlot ("sin(pi*x)");
8 // Grava o grafico em um arquivo
9 gr.WriteFrame("test.png");
10 }

```

11 }

6.2 Teste de Lid-driven cavity

Devido a dificuldade em obter soluções exatas para as equações de Navier-Stokes, em particular para o caso em que a viscosidade é do tipo não-local, visto que este é um problema inédito, e, portanto não há soluções analíticas para o mesmo, não temos, por isso, soluções prévias para comparar os resultados. Então, como forma de averiguar se obtivemos soluções corretas precisamos empregar o *Benchmark Lid-driven cavity*, que é um método bem estabelecido para tal, como dito no texto acima. Não faremos as análises de erro neste trabalho devido a dificuldade, e, visto que muitos artigos não as fazem, como por exemplo, [17, 25, 39], e, mesmo quando é possível determinar uma solução analítica para o problema o erro obtido das soluções aproximadas são grandes, [31, 46], neste último o erro chegou a ser da ordem 10^{-3} mesmo quando a malha foi suficientemente refinada com 16384 elementos.

Capítulo 7

Resultados

7.1 Simulações

Suponha que o domínio retangular $\Omega := [0, 1] \times [0, 1]$ esteja cheio de um fluido com densidade ρ e viscosidade dependente do tempo $a(t)$, com a nas condições dadas em (2). Em um momento inicial, $t = 0$ o fluido está em repouso, e então é aplicada na parte superior do domínio Ω , onde $y = 1$, uma velocidade com módulo igual a 1. Nestas condições estudamos o comportamento de tal fluido, usando alguns valores constantes para a densidade e viscosidade, e então comparamos o resultado obtido com o resultado quando usamos uma viscosidade do tipo não-local. Usamos as equações de Navier-Stokes, definidas em (5.1.1), para estudar o movimento de tal fluido. Neste trabalho estamos interessados em estudar o comportamento dos campos de velocidades dentro do domínio, e as diferenças obtidas nas *stream-lines* quando usamos uma viscosidade positiva e uma do tipo não-local.

Podemos exemplificar nosso domínio com a seguinte imagem:

onde as linhas pretas representam as paredes estacionárias e os vetores em vermelho representam o campo de velocidade que está sendo aplicado dentro do fluido. Para as malhas, discretizamos o domínio utilizando triângulos retângulos, de forma similar a Figura (3.5), para os campos de velocidade utilizamos como funções de base polinômios de grau 2, cada simulação foi feita em uma malha com 625 pontos, totalizando 1250 pontos, visto que são necessárias duas malhas para a velocidade. Para a pressão, foi utilizado polinômio interpolador de grau 1, e, para essa malha, foi utilizado 169 pontos. Número total de triângulos em cada malha foi de 288, tendo como área $\frac{1}{72}$. A quantidade de triângulos das malhas da pressão e de velocidade são as mesmas. O tempo simulado foi entre 0 e 1 com o $\Delta t = 0.05$, ou seja, foram executados 20 passos.

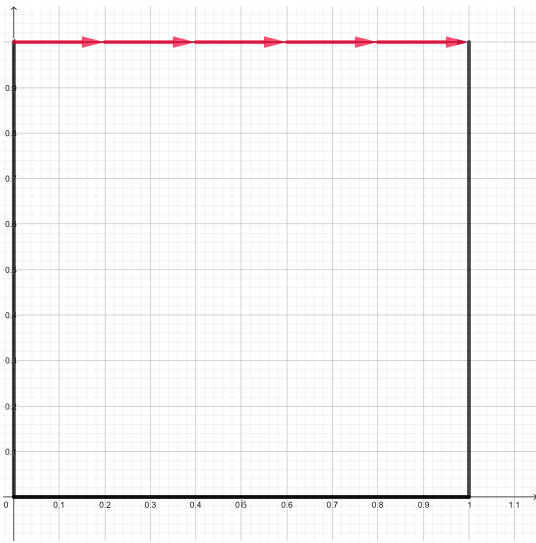


Figura 7.1: Malha inicial.

Usamos como viscosidade não local a função $a(x_1, x_2) := 3 + \sin(x_1) + \cos(x_2)$, para as densidades e viscosidades positivas foram utilizados os seguintes valores: $\rho = 0.001$, $\rho = 0.0001$, $\mu = 0.002$, e $\mu = 0.25$. Esses valores para ρ e μ foram escolhidos com base no artigo [26].

7.2 Resultados Obtidos

Como executamos o *Lid-driven cavity* em cada passo, esperamos que conforme o tempo passe, a solução entre mais dentro do redemoinho e as linhas aumentem em quantidade e intensidade.

7.2.1 Densidade $\rho = 0.001$ e viscosidade não-local

Para $\rho = 0.001$ e viscosidade não-local, foram obtidos os seguintes resultados:

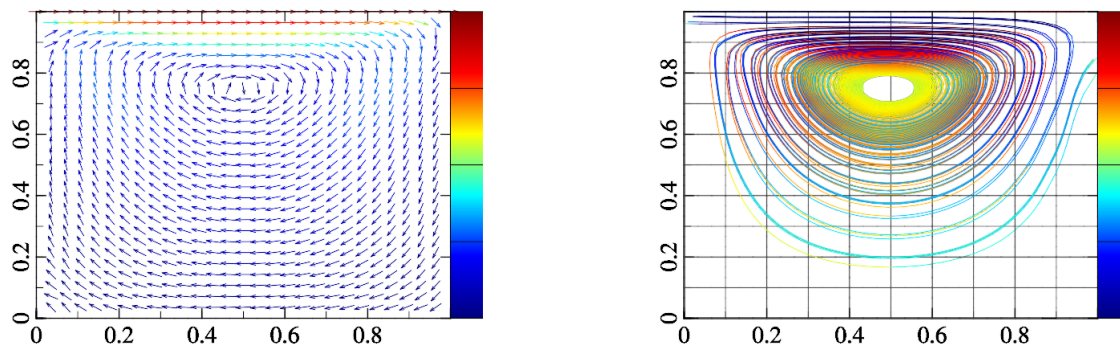


Figura 7.2: $\rho = 0.001$, viscosidade não local, $T = 0$.

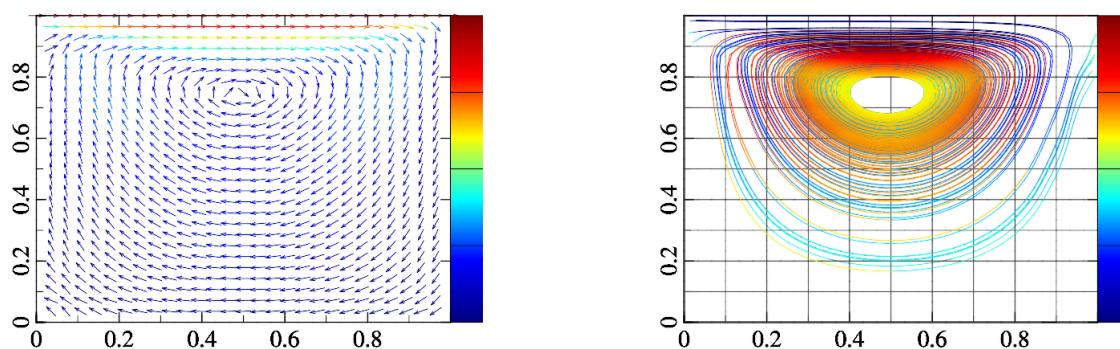


Figura 7.3: $\rho = 0.001$, viscosidade não local, $T = 0.25$.

Para $\rho = 0.001$ e viscosidade não-local, o vórtice teve centro $(0.5, 0.75)$, em formato elíptico com área aproximada de $0.34U.A$. Conforme t se aproximava do valor 1, o tamanho do vórtice manteve o tamanho de $0.34U.A$. Conforme o valor de t aumentava, podemos notar o aumento das "*stream-lines*", como previsto em [1]. Podemos notar que o campo vetorial ficou com um tom mais claro conforme avançamos no tempo, isso significa que a intensidade do vórtice aumentou, como era o esperado. Os resultados obtidos se assemelham com os obtidos por [39].

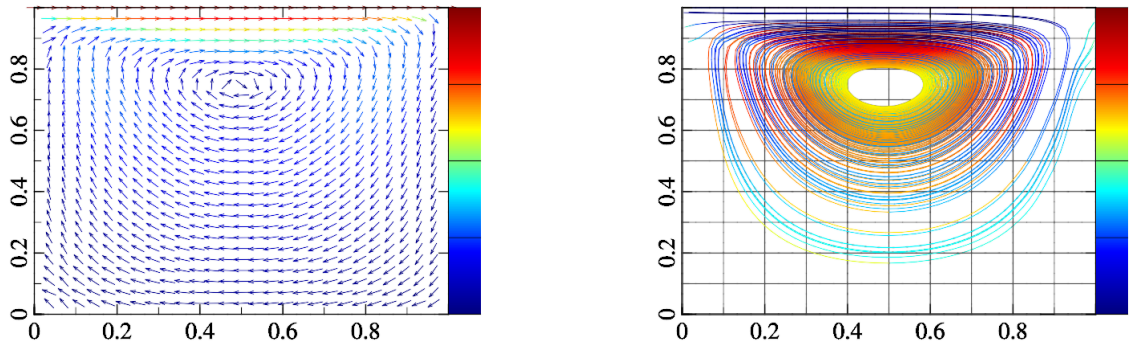


Figura 7.4: $\rho = 0.001$, viscosidade não local, $T = 1..$

7.2.2 Densidade $\rho = 0.0001$ e viscosidade não-local

Para $\rho = 0.0001$ e viscosidade não-local, foram obtidos os seguintes resultados:

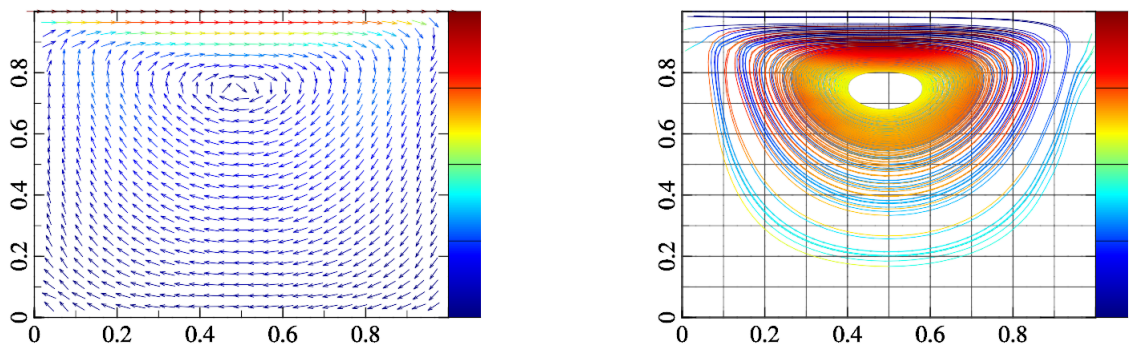


Figura 7.5: $\rho = 0.0001$, viscosidade não local, $T = 0.$

Para $\rho = 0.0001$ e viscosidade não-local, o vórtice teve centro $(0.5, 0.75)$, em formato elíptico com área aproximada de $0.23U.A$. Conforme t se aproximava do valor 1, o tamanho do vórtice se expandiu na vertical e cresceu até atingir o tamanho de $0.34U.A$. Conforme o valor de t aumentava, podemos notar o aumento das "stream-lines", como previsto em [1]. Podemos notar que o campo vetorial ficou com um tom mais claro conforme avançamos no tempo, isso significa que a intensidade do vórtice aumentou, como era o esperado. Os resultados obtidos se assemelham com os obtidos por [39].

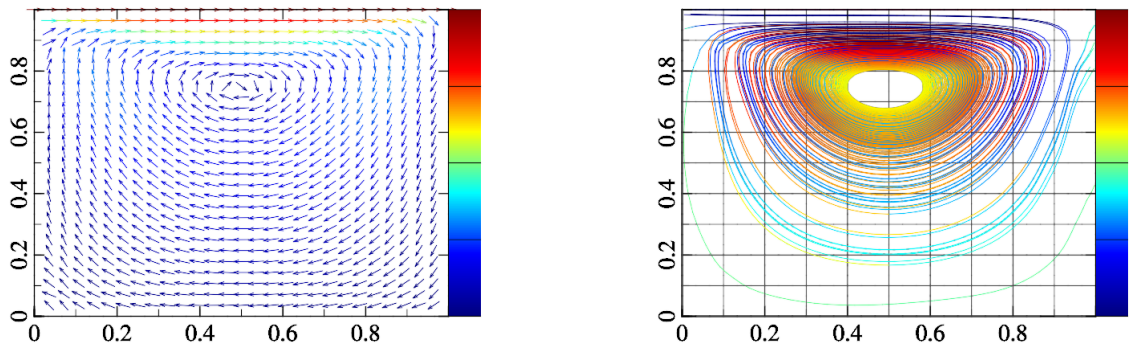


Figura 7.6: $\rho = 0.0001$, viscosidade não local, $T = 0.25$.

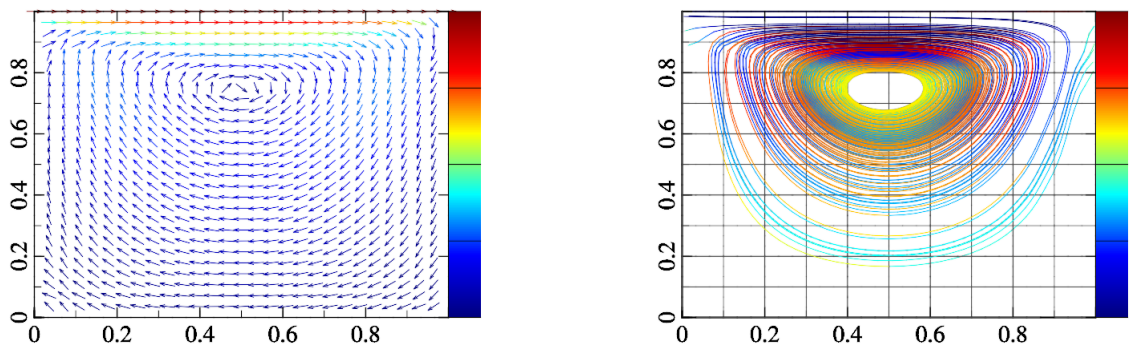
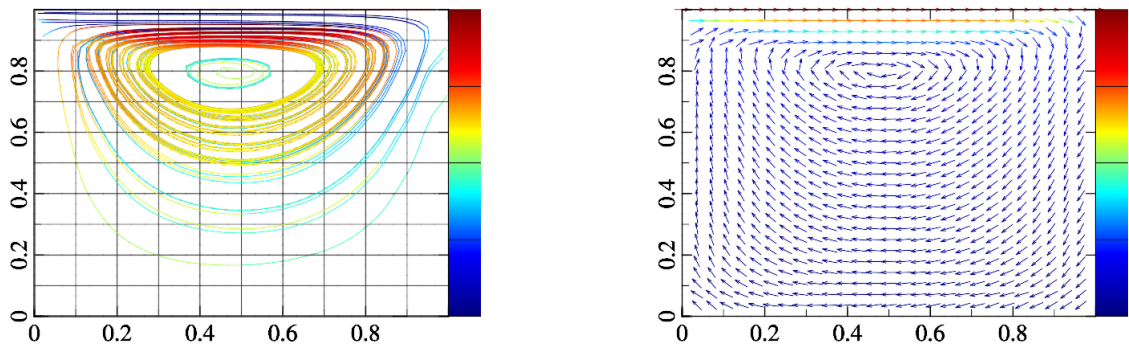
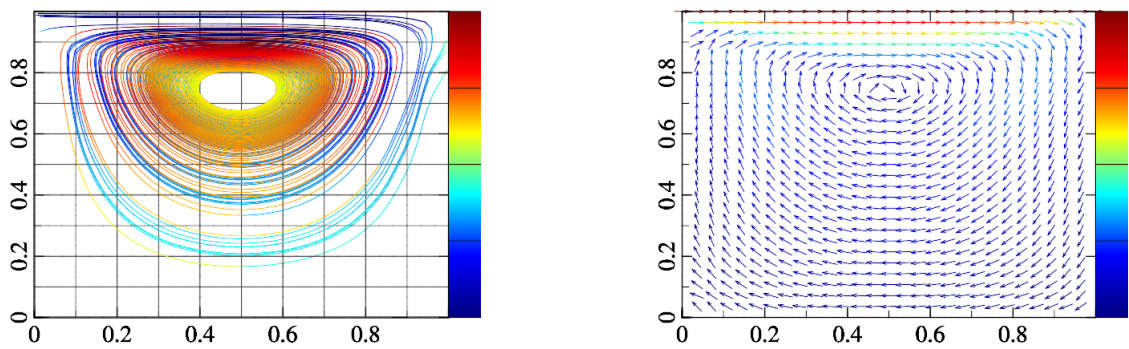
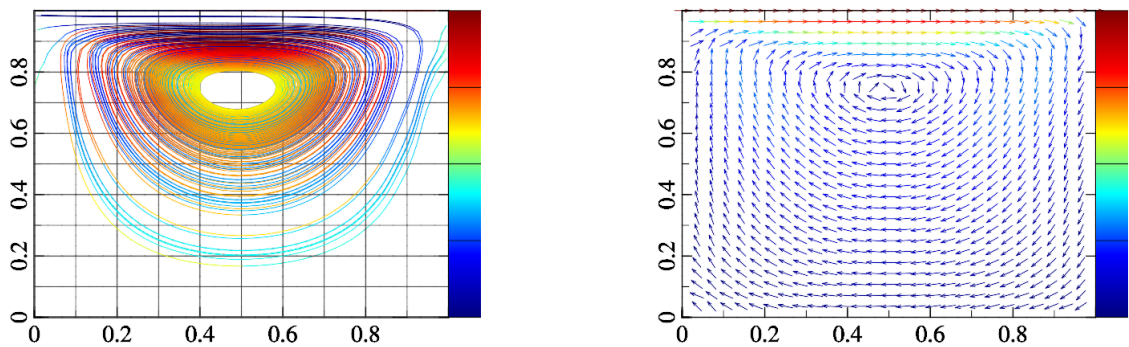


Figura 7.7: $\rho = 0.0001$, viscosidade não local, $T = 1$.

7.2.3 Densidade $\rho = 0.001$ e viscosidade $\mu = 0.02$

Para $\rho = 0.001$ e viscosidade positiva $\mu = 0.02$, foram obtidos os seguintes resultados:

Para $\rho = 0.001$ e viscosidade $\mu = 0.02$, obtivemos dois vórtices o maior centro $(0.45, 0.75)$, e área $2.513UA$, e o menor com centro $(0.5, 0.8)$ e área $0.47UA$ ambos tem um formato elíptico. Conforme t se aproximava do valor 1, o sistema convergiu para um único vórtice de centro $(0.5, 0.75)$, e, área $0.34UA$. Podemos notar o aumento das "stream-lines", como previsto em [1]. Podemos notar que o campo vetorial ficou com um tom mais claro conforme o valor de t aumentava, isso significa que a intensidade do vórtice aumentou, como era o esperado. Os resultados obtidos se assemelham com os obtidos por [39].

Figura 7.8: $\rho = 0.001$, $\mu = 0.02$, $T = 0$.Figura 7.9: $\rho = 0.001$, $\mu = 0.02$, $T = 0.25$.Figura 7.10: $\rho = 0.001$, $\mu = 0.02$, $T = 1$.

7.2.4 Densidade $\rho = 0.001$ e viscosidade $\mu = 0.25$

Para $\rho = 0.001$ e viscosidade positiva $\mu = 0.25$, foram obtidos os seguintes resultados:

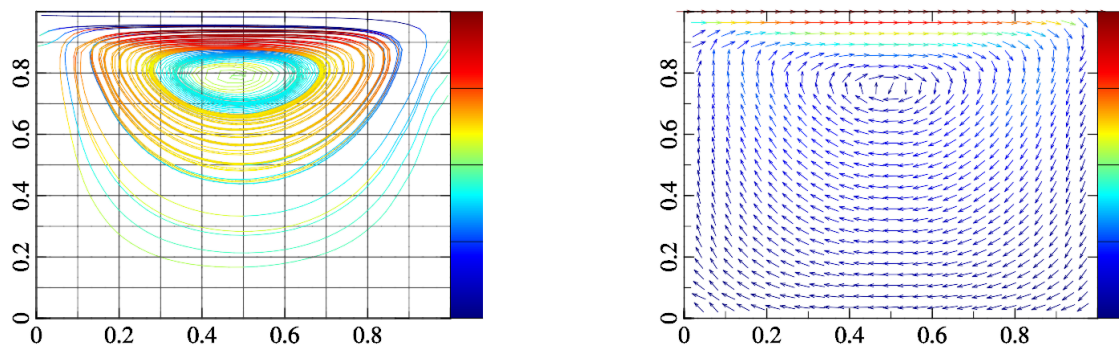


Figura 7.11: $\rho = 0.001$, $\mu = 0.025$, $T = 0$.

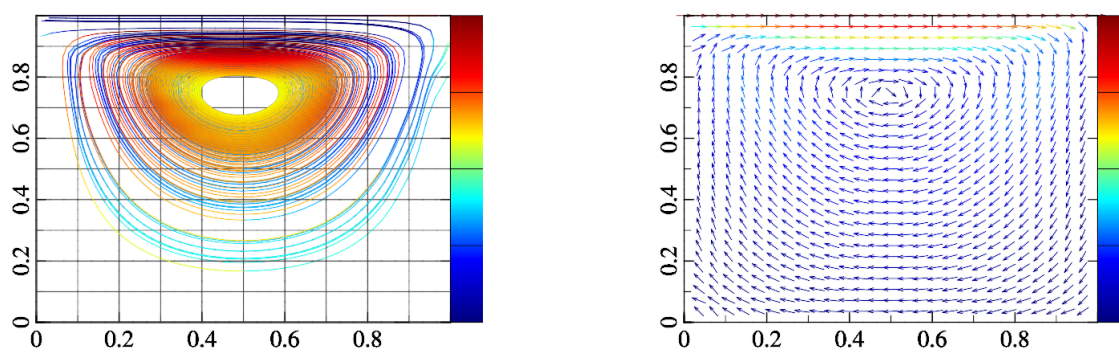


Figura 7.12: $\rho = 0.001$, $\mu = 0.25$, $T = 0.25$.

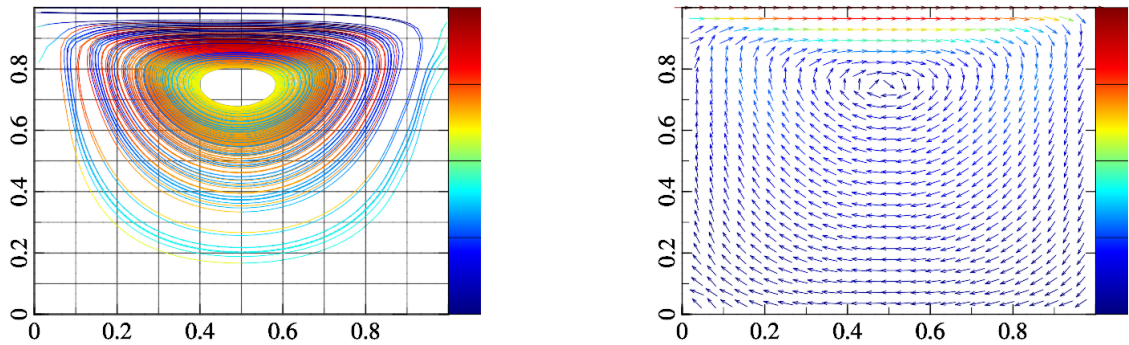


Figura 7.13: $\rho = 0.001$, $\mu = 0.25$, $T = 1..$

Para $\rho = 0.001$ e viscosidade $\mu = 0.25$, o vórtice teve centro $(0.5, 0.8)$, em formato elíptico com área aproximada de $2.513UA$. Conforme t se aproximava do valor 1, o tamanho do vórtice se expandiu na vertical e cresceu até atingir o tamanho de $0.34UA$. Conforme o valor de t aumentava, podemos notar o aumento das "*stream-lines*", como previsto em [1]. Podemos notar que o campo vetorial ficou com um tom mais claro conforme avançamos no tempo, isso significa que a intensidade do vórtice aumentou, como era o esperado. Os resultados obtidos se assemelham com os obtidos por [39].

Capítulo 8

Conclusões e trabalhos futuros

8.1 Conclusões

Podemos concluir que obtivemos soluções similares, tanto quando usamos viscosidade positiva quanto quando usamos viscosidade não-local. Devido a dificuldade de obter funções que satisfazem as hipóteses para a viscosidade não-local, trabalhamos apenas com uma. Quando usamos uma viscosidade não-local, obtivemos uma maior uniformidade das stream-lines no tempo $t = 0$, que quando usamos uma viscosidade constante.

8.2 Trabalhos futuros

Neste trabalho, na parte analítica, fizemos um breve resumo de resultados importantes relacionados a análise funcional, fizemos a dedução das equações de Navier-Stokes, provamos a existência de soluções fracas, fortes, unicidade das soluções, soluções periódicas, e, estabelecemos um critério para haver decaimento exponencial da solução.

Para a parte numérica, executamos o *Lid-driven cavity benchmark*, para investigar o comportamento das soluções obtidas. Na parte de discretização usamos elementos finitos para simular a parte espacial, e, para a parte temporal usamos o método conhecido como Θ -Scheme. Os resultados obtidos condizeram com o que era esperado, [29], [22], [31].

Para trabalhos futuros podemos estender diversas propriedades relacionadas com o problema (4.2.1), por exemplo dependência contínua dos dados iniciais de posse que o problema (1.0.1) seja bem posto, pode-se ainda generalizar (1.0.1) com relação a solvabilidade (existência e unicidade das soluções fraca e forte) considerando o operador não linear Δ_p , $\Delta_{p(x)}$, $\Delta_{p(x,t)}$, e finalmente considerar o problema (4.2.1) para obter os mesmos

resultados para $\Delta_{p(x,t,u)}$. Também podemos estudar a desigualdade variacional associada ao nosso problema e obter os resultados de existência e unicidade e analisar o problema (4.2.1) em domínio não limitado e com fronteira móvel. Considerando, ainda, operadores com expoente variável, para outros problemas, ver [3] [19] [41] [1] [2].

Vale ressaltar que existe poucos resultados na literatura relacionado com o problema (4.2.1) considerando os operadores mencionados anteriormente. Além disso pode-se ainda estudar a análise numérica do problema em questão e suas simulações usando métodos adequados, por exemplo, o método de Rothe.

Referências

- [1] STANISLAV ANTONTSEV. Wave equation with $p(x, t)$ -laplacian and damping term: Existence and blow-up. *Differ. Equ. Appl* 3, 4 (2011), 503–525.
- [2] S ANTONTSEV, M CHIPOT, E Y XIE. Uniqueness results for equations of the $p(x)$ -laplacian type. *ADVANCES IN MATHEMATICAL SCIENCES AND APPLICATIONS* 17, 1 (2007), 287.
- [3] S ANTONTSEV, J FERREIRA, E OTHERS. On a viscoelastic plate equation with strong damping and $\overrightarrow{p}(x, t)$ - laplacian. existence and uniqueness. *Differential and Integral Equations* 27, 11/12 (2014), 1147–1170.
- [4] HAIM BREZIS. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [5] MARCELO M. CAVALCANTI. *Introdução às Equações Diferenciais Parciais*. UEM - Universidade Estadual de Maringá, 2010.
- [6] M CHIPOT E J-F RODRIGUES. On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 26, 3 (1992), 447–467.
- [7] RUEL V. CHURCHILL. *Complex Variables and Applications - THIRD EDITION*. MCGRAW-HILL, Reading, Massachusetts, 1974.
- [8] PHILIPPE G CIARLET E JACQUES LOUIS LIONS. *Handbook of numerical analysis. Vol. 2, Finite Element Methods, (part 1)*. Handbook of numerical analysis, 1990.
- [9] FRANCISCO JSA CORRÊA, SILVANO DB MENEZES, E JORGE FERREIRA. On a class of problems involving a nonlocal operator. *Applied Mathematics and Computation* 147, 2 (2004), 475–489.
- [10] LUIZ ADAUTO DA JUSTA MEDEIROS E MANUEL MILLA MIRANDA. *Introdução aos espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. No. 25. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1993.
- [11] GM DE ARAÚJO, M MILLA MIRANDA, E LA MEDEIROS. On the navier–stokes equations with variable viscosity in a noncylindrical domain. *Applicable Analysis* 86, 3 (2007), 287–313.
- [12] MARIA DE JESUS RODRIGUES DA SILVA. *Análise Matemática do Problema de Navier-Stokes no \mathbb{R}^3* . dissertation, Universidade Federal do Paraíba, 2007.
- [13] BARRE DE SAINT-VENANT. Notea joindre au mémoire sur la dynamique des fluides. *Comptes Rendus* 17 (1843), 1240–1244.

-
- [14] LOKENATH DEBNATH E PIOTR MIKUSINSKI. *Introduction to Hilbert spaces with applications*. Academic press, 2005.
- [15] J DONEA, S GIULIANI, H LAVAL, E L QUARTAPELLE. Finite element solution of the unsteady navier-stokes equations by a fractional step method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 30, 1 (1982), 53–73.
- [16] PHILIP G DRAZIN E NORMAN RILEY. *The Navier-Stokes equations: a classification of flows and exact solutions*. No. 334. Cambridge University Press, 2006.
- [17] CG DU TOIT. Finite element solution of the navier-stokes equations for incompressible flow using a segregated algorithm. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 151, 1-2 (1998), 131–141.
- [18] JOSÉ CM DUQUE, RUI MP ALMEIDA, STANISLAV N ANTONTSEV, E JORGE FERREIRA. The euler–galerkin finite element method for a nonlocal coupled system of reaction–diffusion type. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 296 (2016), 116–126.
- [19] J FERREIRA E SA MESSAOUDI. On the general decay of a nonlinear viscoelastic plate equation with a strong damping and $\vec{p}(x, t)$ -laplacian. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 104 (2014), 40–49.
- [20] ROLAND GLOWINSKI. Numerical methods for fluids (part 3). *Handbook of numerical analysis* 9, 3 (2003).
- [21] MARKUS HAASE. *Functional analysis: an elementary introduction*, vol. 156. American Mathematical Society, 2014.
- [22] PETER HANSBO E ANDERS SZEPESSY. A velocity-pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 84, 2 (1990), 175–192.
- [23] DAVID HENWOOD E JAVIER BONET. *Finite elements: a gentle introduction*. Macmillan International Higher Education, 1996.
- [24] JOHN G HEYWOOD E ROLF RANNACHER. Finite element approximation of the nonstationary navier–stokes problem. i. regularity of solutions and second-order error estimates for spatial discretization. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 19, 2 (1982), 275–311.
- [25] EL-MEKKAOUI JAOUAD, AHMED ELKHALFI, E ABDESLAM ELAKKAD. Resolution of unsteady navier-stokes equations with the boundary condition. *Editorial Preface* 4, 3 (2013).
- [26] PETR KLOUČEK E FRANZ S RYS. Stability of the fractional step θ -scheme for the nonstationary navier–stokes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 31, 5 (1994), 1312–1335.
- [27] HENDRIK C KUHLMANN E FRANCESCO ROMANÒ. The lid-driven cavity. In *Computational Modelling of Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics*. Springer, 2019, p. 233–309.

- [28] OLGA A LADYZHENSKAYA. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, vol. 2. Gordon and Breach New York, 1969.
- [29] MATS G LARSON E FREDRIK BENGTSON. *The finite element method: theory, implementation, and applications*, vol. 10. Springer Science & Business Media, 2013.
- [30] JEAN LERAY E OTHERS. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta mathematica* 63 (1934), 193–248.
- [31] YUAN LI, KAITAI LI, E OTHERS. Operator splitting methods for the navier-stokes equations with nonlinear slip boundary conditions. *Int. J. Numer. Anal. Model* 7 (2010), 785.
- [32] OSMUNDO ALVES LIMA. *Existência e Unicidade de Soluções de uma Equação Hiperbólica-Parabólica Não-Linear*. thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1985.
- [33] JACQUES-LOUIS LIONS. Un théorème d'existence et unicité dans les équations de navier-stokes en dimension 2. *CR Acad. Sci. Paris* 248 (1959), 3519–3521.
- [34] JACQUES LOUIS LIONS. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.
- [35] XIN LIU, JIAN LI, E ZHANGXIN CHEN. A weak galerkin finite element method for the navier–stokes equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 333 (2018), 442–457.
- [36] RENATO FABRÍCIO COSTA LOBATO. *SOLVABILIDADE E DECAIMENTO EXPONENCIAL PARA UM SISTEMA DE EDP NAO LINEAR COM ACOPLAMENTO NA FONTE*. dissertation, Universidade Federal do Pará, 2006.
- [37] CLMH NAVIER. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France* 6, 1823 (1823), 389–440.
- [38] SIMÉON DENIS POISSON. *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et de fluides*. L'imprimerie Royale, 1831.
- [39] B RAMASWAMY, TC JUE, E JE AKIN. Finite-element analysis of unsteady two-dimensional navier-stokes equations. *Numerical Heat Transfer, Part B Fundamentals* 21, 2 (1992), 147–182.
- [40] JAIME MUÑOZ RIVERA. *Introdução à Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*. LNCC, 2004.
- [41] RUI J ROBALO, RUI MP ALMEIDA, MARIA DO CARMO COIMBRA, E JORGE FERREIRA. A reaction–diffusion model for a class of nonlinear parabolic equations with moving boundaries: Existence, uniqueness, exponential decay and simulation. *Applied Mathematical Modelling* 38, 23 (2014), 5609–5622.
- [42] GEORGE GABRIEL STOKES. Report on recent researches in hydrodynamics. *Brit. Assoc. Rep* 1 (1846), 1–20.

-
- [43] GEORGES GABRIEL STOKES. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 8 (1880).
- [44] BRIAN STRAUGHAN. *The energy method, stability, and nonlinear convection*, vol. 91. Springer Science & Business Media, 2013.
- [45] ROGER TEMAM E A CHORIN. Navier stokes equations: Theory and numerical analysis. *Journal of Applied Mechanics* 45 (1978).
- [46] JIACHUAN ZHANG, KAI ZHANG, JINGZHI LI, E XIAOSHEN WANG. A weak galerkin finite element method for the navier–stokes equations. *Commun Comput Phys* 23 (2018), 706–746.

Índice Remissivo

Análise Funcional

Lema de Gronwall, [34](#)

Elementos Finitos

Base, [59](#)

Elemento, [59](#)

Elemento de Referência, [60](#)

Espaço de elemento finito, [60](#)

Espaços de elementos finitos, [55](#)

Grau de liberdade em um espaço de elementos finitos, [60](#)

Energia, [85](#)

Espaço Métrico, [18](#)

Espaço Normado, [19](#)

Espaços

$C(a, b)$, [20](#)

$\mathcal{H}(\mathbb{R}; X_0, X_1)$, [53](#)

\mathfrak{D} , [70](#)

H , [70](#)

$L^1(a, b)$, [19](#)

V , [70](#)

Convergência dominada de Lebesgue, [29](#)

Convergência fraca \star , [26](#)

Convergência fraca, [26](#)

Desigualdade de Hölder, [29](#)

Desigualdade de Young, [28](#)

Desigualdade Triangular, [19](#)

Distribuição de Dirac, [40](#)

Espaço $L^p(\Omega)$, [28](#)

Espaço Bidual, [25](#)

Espaço de Banach, [23](#)

Espaço Dual, [24](#)

Espaço métrico, [20](#)

Espaço Topológico, [22](#)

Espaços de Hilbert, [42](#)

Espaços de Sobolev, [42](#)

Funções teste, [36](#)

Igualdade de Parseval, [52](#)

Métrica, [18](#)

Norma, [19](#)

Operador de Derivada Parcial, [37](#)

Sequência de Cauchy, [20](#)

Suporte de uma função, [36](#)

Teorema de Aubin-Lions, [32](#)

Teorema de Banach Steinhaus, [31](#)

Teorema de Banach-Alaoglu, [32](#)

Teorema de Carathéodory, [34](#)

Teorema de Plancharel, [52](#)

Teorema de Riesz, [30](#)

Topologia fraca $\sigma(E, E')$, [26](#)

Topologia fraca $\star \sigma(E', E)$, [26](#)

Navier Stokes

$a(l(u_1), l(u_2))$, [69](#)

Conservação de Massa, [66](#)

Conservação de Momento, [67](#)

equações de Navier-Stokes com viscosidade positiva, [69](#)

Estimativa, [73](#)

Existência, [74](#)

Forma trilinear $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, [70](#)

Navier-Stokes

Densidade, [65](#)

Fluxo, [65](#)

Resultados, [107](#)