

Universidade Federal Fluminense

MARCOS FELIPE MEDEIROS DE SOUZA

Simulações Numéricas de Discos de Acreção de  
Buracos Negros

VOLTA REDONDA - RJ

2018

MARCOS FELIPE MEDEIROS DE SOUZA

# Simulações Numéricas de Discos de Acreção de Buracos Negros

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Astronomia.

Orientador:

Prof. Dr. Tibério Borges Vale

Coorientador:

Prof. Dr. Ricardo Silveira Sousa

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

VOLTA REDONDA - RJ

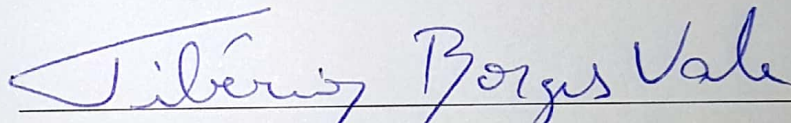
2018

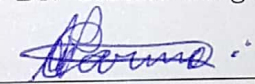
# Simulações Numéricas de Discos de Acreção de Buracos Negros

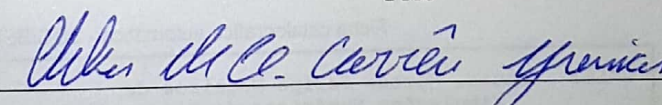
Marcos Felipe Medeiros de Souza

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Astronomia.

Aprovada por:

  
Prof. Dr. Tibério Borges Vale / MCCT-UFF (Presidente)

  
Prof. Dr. Alexandre Peixoto do Carmo / IFF *Campus* Cabo Frio

  
Prof. Dr. Cléber de Almeida Corrêa Júnior / MCCT-UFF

Volta Redonda, 07 de Dezembro de 2018.

Ficha catalográfica automática - SDC/BEM

S719s Souza, Marcos Felipe Medeiros de  
Simulações Numéricas de Discos de Acreção de Buracos  
Negros / Marcos Felipe Medeiros de Souza ; Tibério Borges  
Vale, orientador ; Ricardo Silveira Sousa, coorientador. Volta  
Redonda, 2018.  
156 f.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,  
Volta Redonda, 2018.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPG-MCCT.2018.m.12561068790>

1. Discos de Acreção. 2. Produção intelectual. I.  
Título II. Borges Vale, Tibério, orientador. III. Silveira  
Sousa, Ricardo, coorientador. IV. Universidade Federal  
Fluminense. Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de  
Volta Redonda.

CDD -

Biblioteca responsável: Andreia de Oliveira Paim - CRB7/5183

*Dedicatória. Para minha querida esposa Caroline e aos meus queridos filhos Arthur e  
Matheus*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força, saúde e sabedoria para superar as dificuldades enfrentadas durante o curso, o que me proporcionou crescimento intelectual e pessoal.

Agradeço ao professor Dr. Tibério Borges Vale por ter aceitado me orientar. Agradeço a ele todo o ensinamento, paciência, confiança para elaboração e desenvolvimento do trabalho e cobrança nos momentos certos com a sua experiência acadêmica e toda sabedoria.

Agradeço ao professor Dr. Ricardo Silveira Sousa por todo o conhecimento, principalmente na parte de Lógica de Programação e Otimização durante todo o curso e durante a orientação.

Agradeço, com muito amor, à minha querida esposa Caroline, por estar ao meu lado nos momentos em que mais precisei, oferecendo carinho, acalento e inúmeras e significativas contribuições técnicas em todos os momentos dessa trajetória. Suas palavras generosas e confortantes contribuíram para que eu seja hoje uma pessoa melhor e com objetivos.

Aos meus queridos filhos Arthur e Matheus, por todos os momentos felizes e demonstrações de amor que me proporcionaram. Serão meus futuros companheiros de estudos e debates sobre ciência.

Agradeço aos meus pais Marcio e Rosana, pelo empenho na minha criação, não deixando que nada me faltasse para que eu tivesse condições de me desenvolver em toda a plenitude.

Agradeço à minha irmã Renata, por todos os bons momentos vividos ao seu lado, momentos que despertaram em mim o real sentido do amor fraterno.

À minha avó Elinor e ao meu Avô José Machado, pela criação, ensinamentos, amor, carinho e paciência em tantos momentos, desde a minha infância até os dias de hoje.

Agradeço aos meus amigos Rafael Pureza, Elson Júnior, José Felipe Peres, Theo Goulart, Carlim Paravidino e Fábio Penna por longos períodos de discussões, debates

e conselhos acadêmicos que em muitos momentos souberam me confortar e mostrar o caminho correto, tornando esse trabalho mais simples.

Agradeço ao meu amigo Alex Tavares, companheiro de curso, por tantas conversas e debates sobre temas e trabalhos futuros.

Agradeço aos meus alunos e amigos João Vitor Leite e Vinycios Moreira pelo apoio e longos períodos de conversas que foram fundamentais nessa jornada. Lhes desejo um ótimo futuro na vida acadêmica.

À todos os demais que contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Tiago Neves do VCE/EEIMVR/UFF pela gentileza de doar este TEMPLATE.

# Resumo

A massa inicial tem uma grande influência na evolução estelar. Estrelas de baixa massa em seu estágio final evoluirão para uma Anã Branca (AB), enquanto que estrelas de massa intermediária evoluirão para uma Estrela de Nêutrons (EN) e estrelas de alta massa evoluirão para um Buraco Negro (BN). Os Objetos Compactos (OC) tem sido alvo de muitos estudos ultimamente. No processo de acreção de matéria é possível identificar um disco de acreção. Existem dois principais modelos numéricos que buscam explicar os discos de acreção: a Parametrização  $\alpha$  e a Instabilidade Magneto Rotacional (IMR). Em ambos os métodos, considera-se um disco fino com escala de altura  $H/R \ll 1$ . Nosso trabalho representa uma simulação tridimensional de um disco de acreção com Magnetohidrodinâmica (MHD). Buscou-se investigar as propriedades do disco e da turbulência gerada pela IMR através de simulações do *software* PLUTO, em coordenadas esféricas, utilizando o método Riemann HLLD para solucionar os sistemas lineares gerados a partir das Equações Diferenciais Parciais (EDPs) de Continuidade através do Método de Volumes Finitos (MVF). Investigamos o perfil de densidade para 5 diferentes escalas de altura, no meio do plano do disco e acima do meio do plano do disco. O objetivo é analisar e compreender os mecanismos físicos envolvidos no processo de acreção e de transferência de momento angular nos discos de acreção. São analisados os valores de densidade ( $\rho$ ), taxa de acreção ( $\dot{M}$ ), a intensidade do campo magnético final e pressão em toda a evolução temporal do disco para diferentes escalas de altura, considerando o caso de um Disco de Acreção Magnetizado. É possível perceber que os resultados obtidos são comparáveis com artigos estabelecidos na literatura de simulação de discos de acreção.

# Abstract

The initial mass has a great influence on stellar evolution. The low-mass stars will evolve to a White Dwarf (AB) at their final stage, while stars of average evolutionary mass will evolve into a Neutron Star (EN) and stars of high mass will evolve possible originating a Black Hole (BN). Compact objects (OCs) have been the subject of much research lately. In the process of mass accretion it is possible to identify an accretion disk. There are two main numerical models that look for accretion disks:  $\alpha$ -Parametrization and Magneto Rotational Instability (IMR). In both methods, we consider a thin disk with height scale  $H/R \ll 1$ . Our work represents a three-dimensional simulation of an accretion disk with Magnetohydrodynamics (MHD). We have investigated the disk properties and the turbulence generated by the IMR through simulations using PLUTO software with spherical coordinates adopting the Riemann HLLD method to obtain linear systems generated from the EDPs of Continuity through the Finite Volume Method (MVF). We investigate the density profile for 5 different height scales in the midplane and above the midplane of the disk. The objective is to analyze and understand the physical mechanisms involved in the accretion process and in the angular momentum transference in the accretion disks. We analyze the values of density ( $\rho$ ), accretion rate ( $\dot{M}$ ), the intensity of final magnetic field and pressure in the whole temporal evolution of the disk for different height scales, considering a case of a Magnetized Accretion Disk. It is possible to notice that the obtained results are comparable with the accretion disk simulations.

# Palavras-chave

1. Formação Estelar
2. Evolução Estelar
3. Objetos Compactos
4. Discos de Acreção
5. Método de Volumes Finitos
6. Equações da Hidrodinâmica

# Glossário

OC	:	Objetos Compactos
AB	:	Anãs Brancas
EN	:	Estrelas de Nêutrons
BN	:	Buracos Negros
BNE	:	Buracos Negros Estelares
BNSM	:	Buracos Negros Supermassivos
AGN	:	Núcleos Ativos de Galáxias
SP	:	Sequência Principal
MHD	:	Magnetohidrodinâmica
EDP	:	Equações Diferenciais Parciais
MDF	:	Método das Diferenças Finitas
MEF	:	Método de Elementos Finitos
MVF	:	Método de Volumes Finitos
VC	:	Volume de Controle
RMA	:	Refinamento de Malha Adaptativa
HD	:	Hidrodinâmica
RHD	:	Hidrodinâmica Relativística
RMHD	:	Magnetohidrodinâmica Relativística
IPM	:	Interface de Passagem de Mensagem
IPA	:	Interface de Programação de Aplicativos
FARGO	:	Advecção Rápida na Rotação de Objetos Gasosos
U.A.	:	Unidades Astronômicas

# Lista de Símbolos

$M_{\odot}$	: Unidade de massa, equivalente à uma massa solar
$R_{\odot}$	: Unidade de raio, equivalente ao raio solar
$L_{\odot}$	: Unidade de luminosidade, equivalente à luminosidade solar
$E_{acc}$	: Energia de Acreção
$E_{nuc}$	: Energia de Liberação
$\dot{M}$	: Taxa de acreção
$\Omega$ e $\Omega_k$	: Velocidade Kepleriana
$R_*$	: Raio da Estrela
$M$	: Massa
$\mathcal{M}$	: Número de Mach
$M_*$	: Massa da Estrela
$F$	: Fluxo Radiativo
$F_{\nu}$	: Fluxo Radiativo na frequência $\nu$
$P$	: Pressão
$\mathbb{T}$	: Tensor de estresse
$\Phi$	: Potencial Gravitacional
$C$	: Número de Courant
$\Delta x$	: Tamanho local dos Volumes Finitos da Malha
$\ u\ $	: Velocidade local normalizada
$m_p$	: Massa do próton
$\sigma_T$	: Seção de Choque de Thomson
$L_{Edd}$	: Luminosidade de Eddington
$L_{acc}$	: Luminosidade de acreção
$\mu$	: Peso Molecular Médio
$m$	: Magnitude
$m_H$	: Massa do átomo de Hidrogênio
$B$	: Campo Magnético

$B_r$	:	Componente radial do Campo Magnético
$B_\phi$	:	Componente perpendicular ao plano do Campo Magnético
$B_\theta$	:	Componente angular no plano do Campo Magnético
$D(R)$	:	Dissipação Viscosa por unidade de área
$v_\phi$	:	Velocidade Circular
$v_R$	:	Velocidade radial de arrasto
$\nu$	:	Viscosidade
$\rho$	:	Densidade de Matéria
$\rho(R)$	:	Densidade de Matéria em função do raio
$\Sigma$	:	Densidade Superficial de Matéria
$z$	:	Direção vertical do Disco
$H$	:	Escala de Altura do Disco
$v_A$	:	Velocidade de Alfvén
$c_s$	:	Velocidade do Som
$c$	:	Velocidade da luz
$v_t$	:	Velocidade turbulenta
$l_t$	:	Escala de altura para velocidade turbulenta
$T$	:	Temperatura
$T_*$	:	Temperatura da Estrela
$T_b$	:	Temperatura do Corpo Negro
$G$	:	Constante Gravitacional
$R$	:	Variável na direção radial
$R_s$	:	Raio de Schwarzschild
$\alpha$	:	Parâmetro de Viscosidade
$\kappa$	:	Opacidade
$Q^+$	:	Taxa de Produção de Energia pela Dissipação Viscosa
$\tau$	:	Profundidade Ótica
$\gamma$	:	Expoente que define a variabilidade de $\rho$ com $R$ ( $\rho \propto R^\gamma$ )
$\gamma$	:	Expoente que define a variabilidade de $P$ com $R$ ( $P \propto R^{\gamma'}$ )
$\kappa_R$	:	Opacidade Média de Rosseland
$k$ e $k_b$ e $\sigma$	:	Constante de Boltzmann

$t_{max}$  : Intervalo de tempo dinâmico total da simulação  
 $t_{sim}$  : Tempo dinâmico da simulação  
 $E$  : Densidade de Energia  
 $E'$  : Densidade de Energia Residual  
 $\Gamma$  : Taxa de calor específico  
 $w$  : Velocidade Senoidal  
 $v'$  : Velocidade Residual  
 $H/R$  : Escala de Altura

# Sumário

## Lista de Figuras

## Lista de Tabelas

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>24</b>
1.1	Objetivos . . . . .	28
1.2	Justificativa da Dissertação . . . . .	29
1.3	Estrutura da Dissertação . . . . .	30
<b>2</b>	<b>A Formação e Evolução Estelar</b>	<b>32</b>
2.1	Formação das Estrelas . . . . .	32
2.2	Estrelas na Sequência Principal . . . . .	34
2.3	A vida pós-sequência principal e Objetos Compactos . . . . .	35
2.4	A formação dos Objetos Compactos . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Acreção</b>	<b>41</b>
3.1	Acreção como uma fonte de energia . . . . .	41
3.1.1	Luminosidade, Magnitude e Luminosidade de Eddington . . . . .	42
3.1.1.1	Luminosidade . . . . .	42
3.1.1.2	Magnitude . . . . .	43
3.1.1.3	Luminosidade de Eddington . . . . .	44
3.2	Discos de Acreção . . . . .	45
3.2.1	Modelos de Discos de Acreção - Parametrização $\alpha$ e instabilidade Magneto Rotacional (IMR) . . . . .	45

3.2.2	Estrutura Radial do Disco . . . . .	47
3.2.2.1	Discos Estáveis Finos . . . . .	48
3.2.3	Estrutura local dos discos finos . . . . .	51
3.2.4	O espectro emitido . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Metodologia</b>	<b>55</b>
4.1	Equações da Hidrodinâmica . . . . .	55
4.2	Métodos Numéricos para solução de EDPs . . . . .	56
4.2.1	Método dos Volumes Finitos . . . . .	58
4.3	O programa PLUTO . . . . .	60
4.4	Testes de comparação dos resultados do <i>software</i> PLUTO . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>71</b>
5.1	Descrição do Problema . . . . .	71
5.2	Abordagem do Problema FARGO . . . . .	73
5.2.1	Análise dos Dados do FARGO . . . . .	76
5.2.2	Descrição da Máquina . . . . .	78
5.2.3	Resultados da Simulação . . . . .	78
5.2.3.1	Evolução Temporal do Disco com escala de altura $H/R =$ 0.04 . . . . .	79
5.2.3.2	Evolução Temporal do Disco com escala de altura $H/R =$ 0.05 . . . . .	82
5.2.3.3	Evolução Temporal do Disco com escala de altura $H/R =$ 0.06 . . . . .	85
5.2.3.4	Evolução Temporal do Disco com escala de altura $H/R =$ 0.08 . . . . .	88
5.2.3.5	Evolução Temporal do Disco com escala de altura $H/R =$ 0.10 . . . . .	91

5.2.3.6	Análise da Evolução Temporal do Disco com diferentes escalas de altura . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Análise de Resultados</b>	<b>96</b>
6.1	Ajuste polinomial para a densidade $\rho$ . . . . .	96
6.2	Ajuste polinomial para a pressão $P$ . . . . .	102
6.3	Evolução Temporal da taxa de acreção $\dot{M}$ . . . . .	108
6.4	Evolução temporal para o Campo Magnético . . . . .	111
6.5	Evolução Temporal da densidade $\rho$ para diferentes escalas de altura . . . .	115
6.5.1	$\phi = 0.46\pi$ . . . . .	115
6.5.2	$\phi = 0.5\pi$ . . . . .	118
6.6	Evolução Temporal da pressão $P$ para diferentes escalas de altura . . . . .	120
6.6.1	$\phi = 0.46\pi$ . . . . .	120
6.6.2	$\phi = 0.5\pi$ . . . . .	124
<b>7</b>	<b>Conclusão e Considerações Finais</b>	<b>128</b>
7.1	Conclusões . . . . .	128
7.2	Trabalhos Futuros . . . . .	131
	<b>Apêndice A - Análise da dependência da densidade <math>\rho</math> em relação à <math>\theta</math></b>	<b>132</b>
	<b>Apêndice B - Link para acesso aos vídeos do comportamento das propriedades estudadas</b>	<b>136</b>
	<b>Referências</b>	<b>154</b>

# Lista de Figuras

1.1	Anatomia Simplificada do Buraco Negro de Schwarzschild. Fonte: Martin Silvertant. <a href="https://bit.ly/2StkO3t">https://bit.ly/2StkO3t</a> . . . . .	25
1.2	Anatomia Simplificada do Buraco Negro de Kerr. Fonte: Martin Silvertant. <a href="https://bit.ly/2StkO3t">https://bit.ly/2StkO3t</a> . . . . .	26
1.3	Representação de um BN acretando matéria de uma estrela. Fonte: NASA/CXC/M. Weiss. <a href="https://bit.ly/2OeQGpc">https://bit.ly/2OeQGpc</a> . . . . .	27
1.4	Representação artística de um Disco de Acreção Protoplanetário. Fonte: ESO <a href="https://bit.ly/2AzsgmQ">https://bit.ly/2AzsgmQ</a> . . . . .	28
2.1	Representação do funcionamento do equilíbrio hidrostático em uma estrela. Fonte: [3] . . . . .	33
2.2	Estrutura Interna de uma estrela de acordo com a sua massa. Fonte: Adaptado de [1] . . . . .	35
2.3	Diagrama Hertzsprung-Russel. Fonte: [2] . . . . .	37
2.4	Evolução Estelar. Fonte: [4]. . . . .	39
3.1	O espectro contínuo $F_\nu$ de um disco de acreção opticamente estável espesso irradiando localmente como um corpo negro. Fonte: [19] . . . . .	53
4.1	Representação de uma matriz tridiagonal. Fonte: <a href="https://bit.ly/2Q9648t">https://bit.ly/2Q9648t</a> . . . . .	57
4.2	Representação da malha discretizada. Cada ponto vermelho representa a metade da região entre os pontos azuis $x_{i-1/2}$ e $x_{i+1/2}$ . . . . .	58
4.3	Representação da configuração inicial do problema. Adaptado de [52]. . . . .	62
4.4	Resultado das Simulações de [47] em escala de cinza. . . . .	64
4.5	Resultado das Simulações de [47] colorido. . . . .	64
4.6	Localização do <i>.dbl</i> com menor valor de $m$ . . . . .	66
4.7	Resultado das Simulações em escala de cinza. . . . .	67

4.8	Resultado das Simulações colorido. . . . .	67
4.9	Resultado das Diferenças Quadráticas entre [47] e nossas simulações em escala de cinza. . . . .	68
4.10	Resultado das Diferenças Quadráticas entre [47] e nossas simulações colorido.	68
4.11	Imagem de Subtração em escala de cinza. . . . .	69
4.12	Imagem de Subtração colorida. . . . .	69
5.1	Representação gráfica inicial do disco de acreção com $H/R = 0.04$ . . . . .	74
5.2	Representação gráfica inicial do disco de acreção com $H/R = 0.05$ . . . . .	74
5.3	Representação gráfica inicial do disco de acreção com $H/R = 0.06$ . . . . .	75
5.4	Representação gráfica inicial do disco de acreção com $H/R = 0.08$ . . . . .	75
5.5	Representação gráfica inicial do disco de acreção com $H/R = 0.1$ . . . . .	76
5.6	Representação dos planos considerados em $\phi$ . . . . .	77
5.7	Representação dos planos considerados em $\theta$ . . . . .	77
5.8	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para $H/R = 0.04$ . . . . .	79
5.9	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para $H/R = 0.04$ . . . . .	80
5.10	Gráfico de Raio $\times$ Componente radial do Campo Magnético $B_r$ para $H/R = 0.04$ com $\phi = 0.46\pi$ . . . . .	80
5.11	Gráfico de Raio $\times$ Componente radial do Campo Magnético $B_r$ para $H/R = 0.04$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . . .	81
5.12	Gráfico de Raio $\times$ Pressão para $H/R = 0.04$ . . . . .	81
5.13	Gráfico de Raio $\times$ Pressão para $H/R = 0.04$ . . . . .	82
5.14	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para $H/R = 0.05$ . . . . .	82
5.15	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para $H/R = 0.05$ . . . . .	83
5.16	Gráfico de Raio $\times$ componente radial do Campo Magnético $B_r$ para $H/R = 0.05$ com $\phi = 0.46\pi$ . . . . .	83
5.17	Gráfico de Raio $\times$ Componente radial do Campo Magnético $B_r$ para $H/R = 0.05$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . . .	84
5.18	Gráfico de Raio $\times$ Pressão para $H/R = 0.05$ . . . . .	84

5.19	Gráfico de Raio $\times$ Pressão para $H/R = 0.05$ . . . . .	85
5.20	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para $H/R = 0.06$ . . . . .	85
5.21	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para $H/R = 0.06$ . . . . .	86
5.22	Gráfico de Raio $\times$ componente radial do Campo Magnético $B_r$ para $H/R =$ 0.06 com $\phi = 0.46\pi$ . . . . .	86
5.23	Gráfico de Raio $\times$ Componente radial do Campo Magnético $B_r$ para $H/R =$ 0.06 com $\phi = 0.5\pi$ . . . . .	87
5.24	Gráfico de Raio $\times$ Pressão para $H/R = 0.06$ . . . . .	87
5.25	Gráfico de Raio $\times$ Pressão para $H/R = 0.06$ . . . . .	88
5.26	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para $H/R = 0.08$ . . . . .	88
5.27	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para $H/R = 0.08$ . . . . .	89
5.28	Gráfico de Raio $\times$ componente radial do Campo Magnético $B_r$ para $H/R =$ 0.08 com $\phi = 0.46\pi$ . . . . .	89
5.29	Gráfico de Raio $\times$ componente radial do Campo Magnético $B_r$ para $H/R =$ 0.08 com $\phi = 0.5\pi$ . . . . .	90
5.30	Gráfico de Raio $\times$ Pressão para $H/R = 0.08$ . . . . .	90
5.31	Gráfico de Raio $\times$ Pressão para $H/R = 0.08$ . . . . .	91
5.32	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para $H/R = 0.10$ . . . . .	91
5.33	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para $H/R = 0.10$ . . . . .	92
5.34	Gráfico de Raio $\times$ Componente radial do Campo Magnético $B_r$ para $H/R =$ 0.10 com $\phi = 0.46\pi$ . . . . .	92
5.35	Gráfico de Raio $\times$ Componente radial do Campo Magnético $B_r$ para $H/R =$ 0.10 com $\phi = 0.5\pi$ . . . . .	93
5.36	Gráfico de Raio $\times$ Pressão para $H/R = 0.10$ . . . . .	93
5.37	Gráfico de Raio $\times$ Pressão para $H/R = 0.10$ . . . . .	94
6.1	Gráfico de ajuste do expoente $p$ pelo Método dos Mínimos Quadrados para $H/R = 0.04$ . . . . .	99

6.2	Gráfico de ajuste do expoente $p$ pelo Método dos Mínimos Quadrados para $H/R = 0.05$ . . . . .	99
6.3	Gráfico de ajuste do expoente $p$ pelo Método dos Mínimos Quadrados para $H/R = 0.06$ . . . . .	100
6.4	Gráfico de ajuste do expoente $p$ pelo Método dos Mínimos Quadrados para $H/R = 0.08$ . . . . .	100
6.5	Gráfico de ajuste do expoente $p$ pelo Método dos Mínimos Quadrados para $H/R = 0.10$ . . . . .	101
6.6	Gráfico de ajuste do expoente $p'$ pelo Método dos Mínimos Quadrados para $H/R = 0.04$ . . . . .	105
6.7	Gráfico de ajuste do expoente $p'$ pelo Método dos Mínimos Quadrados para $H/R = 0.05$ . . . . .	105
6.8	Gráfico de ajuste do expoente $p'$ pelo Método dos Mínimos Quadrados para $H/R = 0.06$ . . . . .	106
6.9	Gráfico de ajuste do expoente $p'$ pelo Método dos Mínimos Quadrados para $H/R = 0.08$ . . . . .	106
6.10	Gráfico de ajuste do expoente $p'$ pelo Método dos Mínimos Quadrados para $H/R = 0.10$ . . . . .	107
6.11	Gráfico de Raio $\times$ Taxa de Acreção para $H/R = 0.04$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . .	108
6.12	Gráfico de Raio $\times$ Taxa de Acreção para $H/R = 0.05$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . .	109
6.13	Gráfico de Raio $\times$ Taxa de Acreção para $H/R = 0.06$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . .	109
6.14	Gráfico de Raio $\times$ Taxa de Acreção para $H/R = 0.08$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . .	110
6.15	Gráfico de Raio $\times$ Taxa de Acreção para $H/R = 0.10$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . .	110
6.16	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	115
6.17	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	116
6.18	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	116
6.19	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	117
6.20	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	117
6.21	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura. . . . .	118

6.22	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	119
6.23	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	119
6.24	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	120
6.25	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	121
6.26	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	122
6.27	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	122
6.28	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	123
6.29	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	123
6.30	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	124
6.31	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	125
6.32	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	125
6.33	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	126
6.34	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para diferentes escalas de altura . . . . .	126
A.1	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para $H/R = 0.04$ e diferentes valores de $\theta$ . . . . .	132
A.2	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para $H/R = 0.05$ e diferentes valores de $\theta$ . . . . .	133
A.3	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para $H/R = 0.06$ e diferentes valores de $\theta$ . . . . .	133
A.4	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para $H/R = 0.08$ e diferentes valores de $\theta$ . . . . .	134
A.5	Gráfico de Raio $\times$ Densidade para $H/R = 0.10$ e diferentes valores de $\theta$ . . . . .	134
B.1	Comportamento da Densidade durante a evolução temporal. . . . .	137
B.2	Comportamento da Densidade durante a evolução temporal. . . . .	137
B.3	Comportamento da Densidade durante a evolução temporal. . . . .	138
B.4	Comportamento da Densidade durante a evolução temporal. . . . .	138
B.5	Comportamento da Densidade durante a evolução temporal. . . . .	139
B.6	Comportamento da Pressão durante a evolução temporal. . . . .	140
B.7	Comportamento da Pressão durante a evolução temporal. . . . .	140
B.8	Comportamento da Pressão durante a evolução temporal. . . . .	141

B.9	Comportamento da Pressão durante a evolução temporal. . . . .	141
B.10	Comportamento da Pressão durante a evolução temporal. . . . .	142
B.11	Comportamento da Componente Radial do Campo Magnético $B_r$ durante a evolução temporal. . . . .	143
B.12	Comportamento da Componente Radial do Campo Magnético $B_r$ durante a evolução temporal. . . . .	143
B.13	Comportamento da Componente Radial do Campo Magnético $B_r$ durante a evolução temporal. . . . .	144
B.14	Comportamento da Componente Radial do Campo Magnético $B_r$ durante a evolução temporal. . . . .	144
B.15	Comportamento da Componente Radial do Campo Magnético $B_r$ durante a evolução temporal. . . . .	145
B.16	Comportamento da Componente no plano do disco do Campo Magnético $B_\phi$ durante a evolução temporal. . . . .	146
B.17	Comportamento da Componente no plano do disco do Campo Magnético $B_\phi$ durante a evolução temporal. . . . .	146
B.18	Comportamento da Componente no plano do disco do Campo Magnético $B_\phi$ durante a evolução temporal. . . . .	147
B.19	Comportamento da Componente no plano do disco do Campo Magnético $B_\phi$ durante a evolução temporal. . . . .	147
B.20	Comportamento da Componente no plano do disco do Campo Magnético $B_\phi$ durante a evolução temporal. . . . .	148
B.21	Comportamento da Componente angular no plano do Campo Magnético $B_\theta$ durante a evolução temporal. . . . .	149
B.22	Comportamento da Componente angular no plano do Campo Magnético $B_\theta$ durante a evolução temporal. . . . .	149
B.23	Comportamento da Componente angular no plano do Campo Magnético $B_\theta$ durante a evolução temporal. . . . .	150
B.24	Comportamento da Componente angular no plano do Campo Magnético $B_\theta$ durante a evolução temporal. . . . .	150

B.25 Comportamento da Componente angular no plano do Campo Magnético $B_\theta$ durante a evolução temporal. . . . .	151
B.26 Comportamento da Taxa de Acreção durante a evolução temporal. . . . .	151
B.27 Comportamento da Taxa de Acreção durante a evolução temporal. . . . .	152
B.28 Comportamento da Taxa de Acreção durante a evolução temporal. . . . .	152
B.29 Comportamento da Taxa de Acreção durante a evolução temporal. . . . .	153
B.30 Comportamento da Taxa de Acreção durante a evolução temporal. . . . .	153

# Lista de Tabelas

4.1	Valores temporais da simulação $t_{sim}$ e os seus respectivos valores de $m$ . . .	66
6.1	Valores de $p$ e $\gamma$ para $H/R = 0.04$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . . .	97
6.2	Valores de $p$ e $\gamma$ para $H/R = 0.05$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . . .	97
6.3	Valores de $p$ e $\gamma$ para $H/R = 0.06$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . . .	97
6.4	Valores de $p$ e $\gamma$ para $H/R = 0.08$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . . .	98
6.5	Valores de $p$ e $\gamma$ para $H/R = 0.10$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . . .	98
6.6	Valores de $p'$ e $\gamma'$ para $H/R = 0.04$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . . .	103
6.7	Valores de $p'$ e $\gamma'$ para $H/R = 0.05$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . . .	103
6.8	Valores de $p'$ e $\gamma'$ para $H/R = 0.06$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . . .	103
6.9	Valores de $p'$ e $\gamma'$ para $H/R = 0.08$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . . .	104
6.10	Valores de $p'$ e $\gamma'$ para $H/R = 0.10$ com $\phi = 0.5\pi$ . . . . .	104
6.11	$B_r$ com $\phi = 0.5\pi$ para cada escala de altura. . . . .	112
6.12	$B_r$ com $\phi = 0.46\pi$ para cada escala de altura. . . . .	112
6.13	$B_\phi$ com $\phi = 0.5\pi$ para cada escala de altura. . . . .	112
6.14	$B_\phi$ com $\phi = 0.46\pi$ para cada escala de altura. . . . .	113
6.15	$B_\theta$ com $\phi = 0.5\pi$ para cada escala de altura. . . . .	113
6.16	$B_\theta$ com $\phi = 0.46\pi$ para cada escala de altura. . . . .	113

# Capítulo 1

## Introdução

Na evolução estelar a massa inicial da estrela influencia na sua evolução. Estrelas com baixa massa  $0,08M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$  ( $M_{\odot}$  é a massa solar), que representam cerca de 98% dos casos, serão uma Anã Branca (AB) no seu último estágio evolutivo. Já para estrelas com massa intermediária  $8M_{\odot} < M < 25M_{\odot}$  será uma Estrela de Nêutrons (EN) no seu último estágio evolutivo. Estrelas muito massivas (com massa inicial maior que  $25M_{\odot}$ ) ao final do seu ciclo de vida resultarão em Buracos Negros Estelares (BNE). O nome Buraco Negro (BN) foi dado devido ao forte campo gravitacional, que impossibilita a emissão de qualquer radiação e, conseqüentemente, que a luz escape desse objeto. A justificativa pode ser dada pela velocidade de escape, que pode ser escrita de acordo com a equação abaixo:

$$v^2 = \frac{2GM}{R} \quad , \quad (1.1)$$

onde  $v$  é a velocidade de escape,  $G$  é a constante gravitacional,  $M$  é a massa do objeto e  $R$  é o raio do objeto. Em objetos como BN, a velocidade de escape é maior do que a velocidade da luz ( $c$ ). Dessa forma, como nenhum corpo/partícula pode alcançar velocidades maiores que  $c$ , não é possível retirar qualquer informação do BN.

Da equação (1.1), considerando a velocidade de escape  $v$  igual a velocidade da luz  $c$  é possível determinar o raio no qual qualquer distribuição de massa, independente da escala, pode se transformar em um buraco negro, desde que toda a sua massa seja comprimida nesse raio, que chamamos de Raio de Schwarzschild ( $R_s$ ), que pode ser dado pela equação abaixo [44]:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.2)$$

O Raio de Schwarzschild descreve uma região que chamamos de Horizonte de Eventos de um BN. Esse raio determina o limite a partir do qual não exista qualquer comunicação

interna com o meio externo. Para efeito de comparação, para que o nosso Sol, que apresenta uma massa de  $M_{\odot} = 1,9891 \times 10^{30}$  Kg, se transformasse em um BN seria necessário que o seu raio de  $R_{\odot} = 695700$  Km fosse reduzido para apenas 3 Km.

Diante disso, o BN de Schwarzschild pode ser escrito matematicamente como uma solução da Relatividade Geral na forma [44]:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\Omega^2) \quad (1.3)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional,  $c$  é a velocidade da luz,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ ,  $M$  é a massa do objeto que está localizada em  $r = 0$ , que consideramos como a singularidade [44]. Podemos dizer que a singularidade é a região central do BN, onde toda a massa está concentrada.

A Figura 1.1 representa a anatomia simplificada de um BN de Schwarzschild:

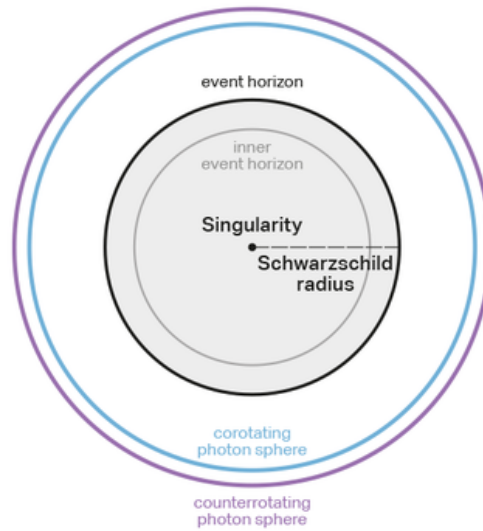


Figura 1.1: Anatomia Simplificada do Buraco Negro de Schwarzschild. Fonte: Martin Silvertant. <https://bit.ly/2StkO3t>

Dessa forma, podemos dizer que o BN de Schwarzschild é o mais simples que podemos representar, porém, não é o único. Uma outra solução da Relatividade Geral prevê um BN com rotação (ou com momento angular intrínseco), que chamamos de BN de Kerr. Diante disso, o BN de Kerr pode ser escrito matematicamente como uma solução da Relatividade

Geral na forma:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GMr}{c^2 \Sigma}\right) dt^2 - \frac{4aGMr \sin^2 \theta}{c^3 \Sigma} c dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1.4)$$

onde  $\Sigma = r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta$  e  $\Delta = r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}$ ,  $M$  é a massa do objeto,  $a = J/M$  relacionado ao momento angular  $J$ ,  $c$  é a velocidade da luz e  $G$  a constante gravitacional.

A Figura 1.2 representa a anatomia simplificada de um BN de Kerr:

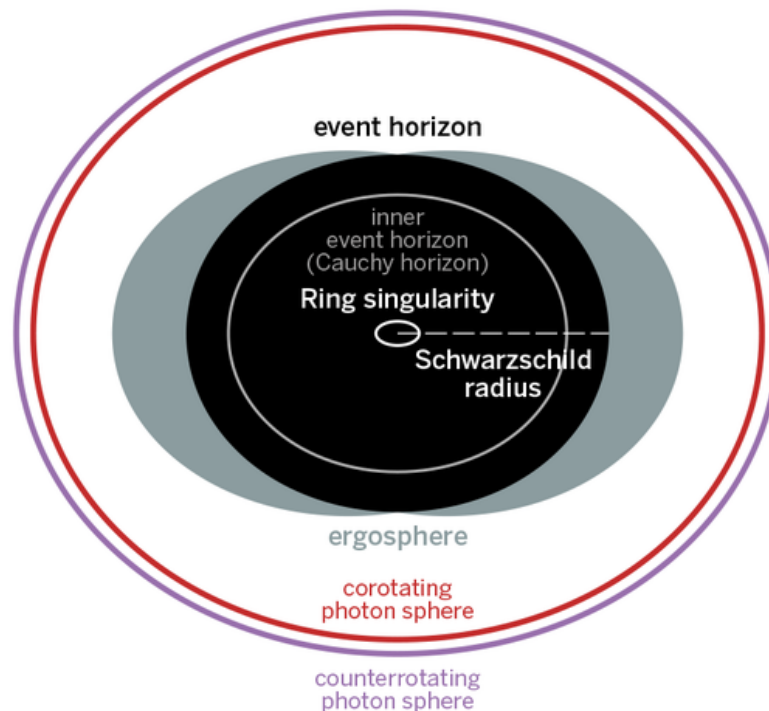


Figura 1.2: Anatomia Simplificada do Buraco Negro de Kerr. Fonte: Martin Silvertant. <https://bit.ly/2StkO3t>

Estudos recentes tem mostrado que mais de 1/3 das estrelas estão em regime binário [11]. Os sistemas binários são sistemas de duas (ou mais) estrelas que estão ligadas gravitacionalmente. Em geral, o centro de massa do sistema está em um ponto entre as estrelas e ambas o orbitam [11]. Diante dessa informação, entender o funcionamento da física de acreção é extremamente importante para o entendimento dos fenômenos astronômicos, por conta disso, esse tema tem ganhado uma grande atenção nos últimos anos. Os avanços computacionais propiciaram um crescente entendimento do fenômeno, possibilitando um grande desenvolvimento nessa área [29].

A Figura 1.3 é uma representação artística de um BN acretando matéria de uma estrela vizinha:

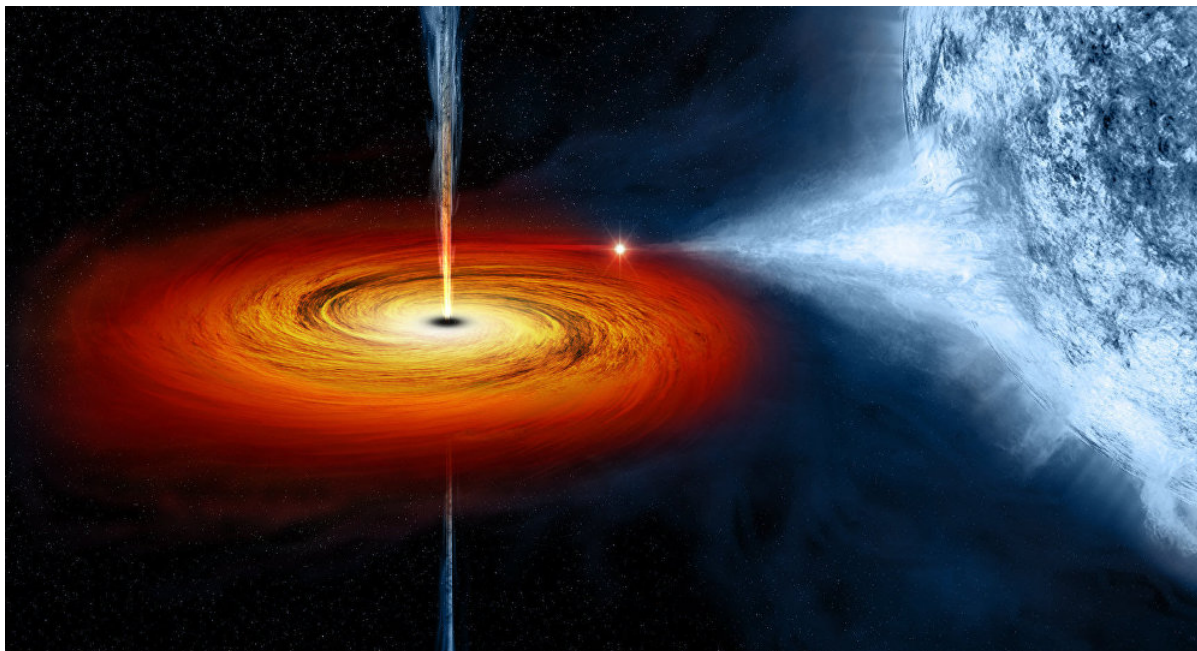


Figura 1.3: Representação de um BN acretando matéria de uma estrela. Fonte: NASA/CXC/M. Weiss. <https://bit.ly/2OeQGpc>

Quando a matéria (que é formado basicamente de gás ionizado e plasma) cruza o Horizonte de Eventos, ela é capturada pelo BN. Por conta dessa matéria apresentar um momento angular, ela forma um disco que gira em torno do BN, tudo isso devido à conservação do momento angular. O disco proveniente dessa captura de matéria é chamado de Disco de Acreção. Esse é um termo que se refere à matéria que se encontra no processo de queda com uma grande rotação em torno do objeto massivo que está acretando matéria. O grau de ocorrência desse fenômeno é maior em EN (principalmente em regime binário), BN e BNSM, apesar de ser encontrado também em sistemas binários que contém uma AB.

Porém, os Discos de Acreção não são encontrados apenas nos casos citados acima. Com o avanço das observações de exoplanetas e diversos sistemas planetários, é possível verificar que os Discos Protoplanetários são semelhantes aos Discos de Acreção, seja na sua formulação ou até mesmo em seu comportamento. A Figura 1.4 é uma representação artística de um disco protoplanetário.

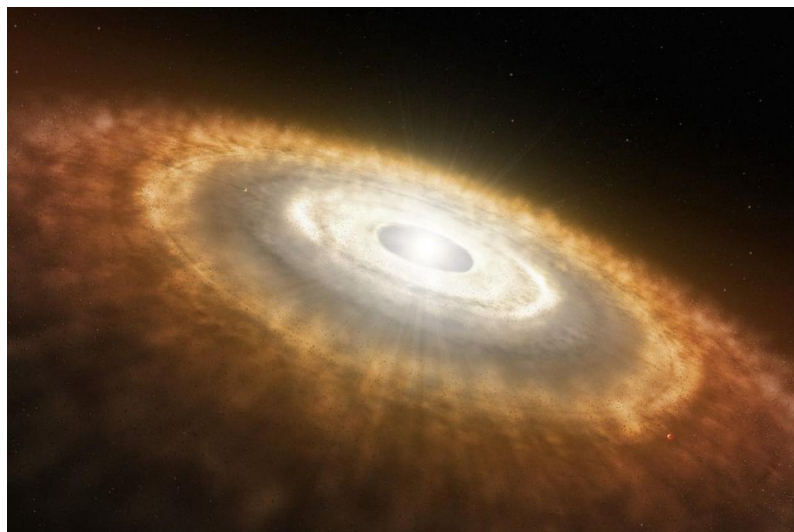


Figura 1.4: Representação artística de um Disco de Acreção Protoplanetário. Fonte: ESO <https://bit.ly/2AzsgmQ>

O trabalho de Shakura & Sunyaev [38] foi o pioneiro no tratamento da viscosidade como mecanismo de transporte de momento angular com o parâmetro  $\alpha$ . Um segundo modelo numérico que trata do transporte de momento angular é a Instabilidade Magneto Rotacional (IMR). No geral, a viscosidade é responsável pelo transporte do momento angular para fora, permitindo assim que a matéria se mova em direção ao objeto acretor. Ambos modelos numéricos serão abordadas posteriormente na seção 3.2.1.

## 1.1 Objetivos

Esta dissertação tem por objetivo estudar a dinâmica dos Discos de Acreção para que seja possível um melhor entendimento dos processos físicos que ocorrem no entorno dos Objetos Compactos (OC). Para isso, utiliza-se o *software* PLUTO para realização da simulação numérica e análise dos resultados. Diante disso, os objetivos podem ser elencados na seguinte forma:

1. O objetivo mais importante deste projeto é contribuir para a pesquisa e melhor compreensão de discos de acreção no entorno de núcleos ativos de galáxias (AGNs);
2. Compreender os mecanismos físicos envolvidos no processo de acreção e de transferência de momento angular nestes discos;

3. Estudar conceitos básicos sobre Evolução Estelar, formação de buracos negros e objetos compactos e luminosidade de Eddington;
4. Estudar os modelos de discos de acreção, com parametrização  $\alpha$  e instabilidade rotacional devido ao magnetismo (IMR), em especial os discos finos;
5. Estudar os métodos de análise numérica de Física Computacional para simulação de discos finos, de solução de EDPs com base no Método de Volumes Finitos;
6. Aprender a utilizar *softwares* científicos de magnetohidrodinâmica, como o *software* PLUTO, com refinamento de malhas adaptativas.

## 1.2 Justificativa da Dissertação

Devido à alta complexidade dos processos físicos envolvidos esta área da astronomia ainda apresenta carência na compreensão desses fenômenos e tendo em vista as muitas descobertas astronômicas recentes, tais como as Ondas Gravitacionais e principalmente as descobertas de diversos sistemas exoplanetários, a escolha do tema é um importante passo para o estudo da dinâmica dos Discos de Acreção de um dos objetos mais estudados atualmente, os Buracos Negros.

A física da acreção tem recebido grande atenção nas últimas décadas e muitas simulações numéricas foram realizadas e contribuíram para um entendimento do problema em diversos aspectos [29].

Podemos dizer que no processo de acreção que a energia potencial gravitacional do gás acretante é convertida em energia cinética e térmica. Se considerarmos que o processo irradia a energia térmica de forma eficiente, o gás que está orbitando o objeto acretor se torna muito mais frio e o disco apresenta uma configuração de disco fino [33].

Na literatura, em geral, considera-se que a taxa de acreção de massa é independente do tempo, ou seja,  $\dot{M} = \text{constante}$ . Para esses casos, o perfil radial da densidade  $\rho$  satisfaz uma lei de potência do tipo  $\rho(r) \propto R^{-3/2}$  [51, 50]. Diversos trabalhos utilizando simulações com hidrodinâmica (HD) e magnetohidrodinâmica (MHD) tem sido realizados, com foco na dinâmica do fluxo de acreção [51].

Dessa forma o trabalho se justifica com o objetivo de contribuir para o conhecimento e melhor compreensão sobre os processos físicos envolvidos na acreção e ejeção de material por parte dos buracos negros supermassivos presentes nos núcleos de galáxias ativas.

## 1.3 Estrutura da Dissertação

No Capítulo 2 é feita uma breve revisão bibliográfica sobre a Formação e a Evolução Estelar. Essa discussão servirá como base para o entendimento sobre as Estrelas. Na seção 2.1 será abordado a como ocorre a Formação Estelar. Na seção 2.2 será explicado o que é a fase Sequência Principal de uma estrela. Na seção 2.3 será discutido sobre o final da vida de uma estrela. Por fim, na seção 2.4 será explicado como ocorre a formação dos Objetos Compactos.

No Capítulo 3 é feita uma descrição sobre o que é a Acreção, mostrando diferentes facetas do processo, descrevendo os modelos e as suas equações. Essa discussão servirá como base para o entendimento do processo. Na seção 3.1 será abordada a Acreção como uma fonte de energia. Na seção 3.1.1.1 será discutido sobre luminosidade e sua importância para o estudo dos estágios evolutivos de uma estrela. Na seção 3.1.1.2 será relacionada a magnitude de uma estrela com a sua massa. Na seção 3.1.1.3 será explicada a existência de um limite de luminosidade que é denominado de Luminosidade de Eddington. Na seção 3.2 será introduzida o conceito de discos de acreção. Na seção 3.2.1 serão mostrados os dois modelos mais aceitos para os discos de acreção e que são mais estudados pelos artigos atuais. Nas seções 3.2.2 e 3.2.3 serão mostradas as equações que explicam a Estrutura Radial de um Disco e as Estrutura dos Discos Finos. Na seção 3.2.2.1 será discutido sobre os Discos Estáveis finos. Na seção 3.2.4 será abordado o espectro emitido pelos discos.

No Capítulo 4 será tratado a metodologia do trabalho. Na seção 4.1 é feita a descrição das Equações da Hidrodinâmica que serão de fundamental importância no desenvolvimento do trabalho. Na seção 4.2 será abordado os métodos numéricos para solução das Equações Diferenciais Parciais (EDPs), especificamente o Método dos Volumes Finitos (MVF). Na seção 4.3 será feita uma breve explanação sobre o *software* PLUTO que será utilizado para geração e análise dos dados na pesquisa. Na seção 4.4 será mostrado a validação do código PLUTO.

No Capítulo 5 será descrito o problema que será abordado no trabalho. Na seção 5.1 é descrito com detalhes o problema que será abordado no trabalho, mostrando as equações que o descrevem. Na seção 5.2 serão introduzidos os resultados iniciais da simulação. Na seção 5.2.1 será explicado com detalhes como foi feita a análise dos dados do problema FARGO. Em 5.2.2 será descrita a configuração do computador utilizado para realização das simulações. Em 5.2.3 serão expostos os resultados da análise de densidade, campo magnético e pressão para diferentes escalas de altura e diferentes planos do disco. Na

seção 6 será feita uma análise da densidade e da taxa de acreção se comparado à outros artigos da literatura estabelecida.

No Capítulo 6 será feita uma análise aprofundada dos resultados encontrados. Na seção 6.1 será abordado o ajuste polinomial pelo Método dos Mínimos Quadrados realizado para determinar o expoente  $p$  da densidade. Na seção 6.2 será feita uma análise similar à anterior para determinar o expoente  $p'$  da pressão. Na seção 6.3 será feita uma análise para a taxa de acreção, enquanto que em 6.4 será feita uma análise similar para o campo magnético. Por fim, nas seções 6.5 e 6.6 será mostrado o comportamento da densidade e pressão, respectivamente, durante toda a evolução temporal para diferentes escalas de altura.

No Capítulo 7 a conclusão do trabalho será apresentada indicando possibilidades para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## A Formação e Evolução Estelar

### 2.1 Formação das Estrelas

Os Objetos Compactos (OC) são objetos de intenso campo gravitacional e altíssima densidade em relação à matéria usual. Alguns deles são estágios evolutivos finais das estrelas. As estrelas se formam em imensas nuvens moleculares imersas em nebulosas gasosas existentes nas galáxias. Tal como as galáxias, as nuvens moleculares são compostas quase que majoritariamente de hidrogênio. Devido à variações de densidade, causadas por exemplo, por explosões de supernovas nas proximidades de tais nebulosas, estas se adensam formando glóbulos de gás frio, que acabam colapsando sob seu próprio peso devido a sua auto-gravidade. Esse processo ocorre em uma escala de centenas de milhares de anos. Conforme esse glóbulo vai se colapsando, inicia-se a formação de um disco em rotação com a protoestrela, ou seja, estágio evolutivo inicial da estrela, no centro. A pressão no seu centro irá aumentar até o ponto onde alcança o equilíbrio hidrostático [11].

As estrelas mantêm o seu formato aproximadamente esférico pois existe um equilíbrio entre a soma das forças que apontam para dentro menos a soma das forças que apontam para fora, onde esse resultado é igual a zero. As forças que apontam para dentro são chamadas de Forças Gravitacionais, pois diferentes partes da estrela se atraem gravitacionalmente e, portanto, apresentam uma resultante líquida apontando para o seu centro. A pressão de radiação gerada no núcleo da estrela “empurra” suas camadas superiores para fora radialmente, implicando desta forma em uma resultante líquida de pressão que aponta radialmente para fora da estrela. Portanto, o Equilíbrio Hidrostático nada mais é do que o equilíbrio entre as Forças Gravitacionais e as Forças de Pressão de Radiação, ponto a ponto no interior da estrela. A Figura 2.1 mostra como o equilíbrio hidrostático se apresenta.

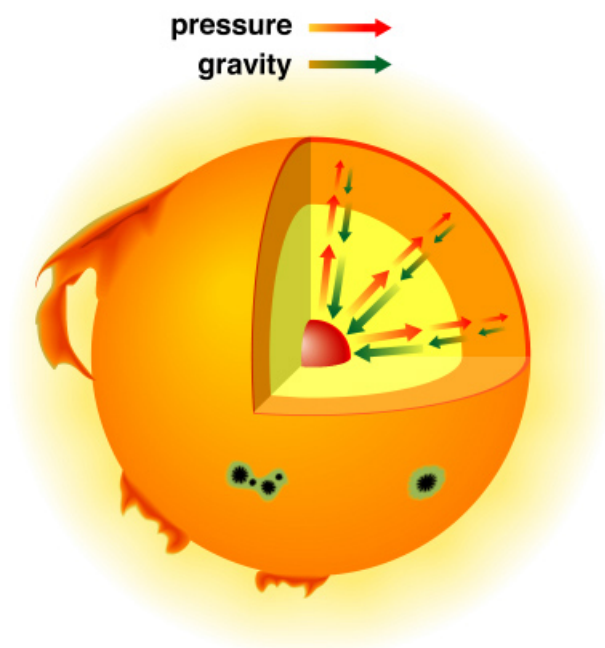


Figura 2.1: Representação do funcionamento do equilíbrio hidrostático em uma estrela. Fonte: [3]

No interior da protoestrela, o núcleo continua acretando matéria das camadas mais externas, ficando cada vez mais quente e mais denso. Quando a temperatura central alcança valores da ordem de  $8 \times 10^6 \text{K}$ , a estrela inicia no seu centro as reações termonucleares. A partir deste momento, a protoestrela passa a ser chamada de estrela, iniciando assim a fase da sua vida chamada de Sequência Principal (SP), transformando Hidrogênio em Hélio através da fusão atômica. A SP nada mais é do que uma região no espaço de parâmetros visualizada no gráfico de Temperatura *versus* Luminosidade das estrelas, onde as estrelas de baixa massa passam a maior parte de suas vidas. A posição da estrela na SP vai depender de sua massa inicial, pois tanto a temperatura quanto a luminosidade da estrela são ditados pela sua massa. Esse gráfico é chamado de Diagrama HR e pode ser encontrado na Figura 2.3. A massa mínima que uma protoestrela precisa ter para atingir a temperatura de  $8 \times 10^6 \text{K}$  é de  $0,08M_{\odot}$  (8% da massa solar  $M_{\odot}$ ). Se a massa for menor do que isso, ela será uma Anã Marrom. As estrelas pouco massivas são muito mais numerosas do que as de alta massa: estima-se que nascem aproximadamente 300 estrelas de  $1M_{\odot}$  para cada uma estrela de  $10M_{\odot}$  e, 300 estrelas de  $10M_{\odot}$  para cada uma estrela de  $100M_{\odot}$  [11].

## 2.2 Estrelas na Sequência Principal

As estrelas permanecem na SP enquanto estiverem transformando Hidrogênio em Hélio. Em geral, essa fase de evolução dura cerca de 90% do tempo total de vida da estrela, onde elas se mantêm em equilíbrio hidrostático e têm a luminosidade e temperatura determinados pela sua massa. De acordo com Filho & Saraiva [15] existe uma relação entre massa e luminosidade que pode ser dado por:

$$L \propto M^3 \quad . \quad (2.1)$$

onde  $L$  representa a luminosidade, que trataremos mais detalhadamente na seção 3.1.1.1 e  $M$  representa a massa da estrela. Assim, podemos dizer que, se as massas das estrelas variam entre  $0,08M_{\odot}$  e  $100M_{\odot}$ , então, as suas luminosidades variam entre  $10^{-4}L_{\odot}$  e  $10^6L_{\odot}$ , sendo  $M_{\odot}$  e  $L_{\odot}$  a massa e luminosidade do Sol, respectivamente.

Podemos dizer que a estrutura interna de uma estrela é composta por três regiões principais: zona radiativa, zona convectiva e o núcleo. O núcleo é a região onde será gerada toda a energia da estrela, através da fusão atômica do Hidrogênio em Hélio. A energia é transportada para fora através de processos radiativos ou convectivos, e isso depende das condições do gás, tais como temperatura, densidade e opacidade [11].

A Figura 2.2 mostra a estrutura interna esquemática das estrelas de acordo com a sua massa. As estrelas com massas entre  $0,45M_{\odot}$  e  $1,75M_{\odot}$  apresentam uma camada de convecção externa, por fora da camada radiativa que envolve o núcleo. Estrelas com massas maiores do que  $1,75M_{\odot}$  apresentam uma camada de convecção mais interna, entre o núcleo e a camada radiativa. Já para estrelas com massa menor do que  $0,45M_{\odot}$ , elas não apresentam a camada radiativa, sendo que o transporte de energia ocorre exclusivamente por convecção.

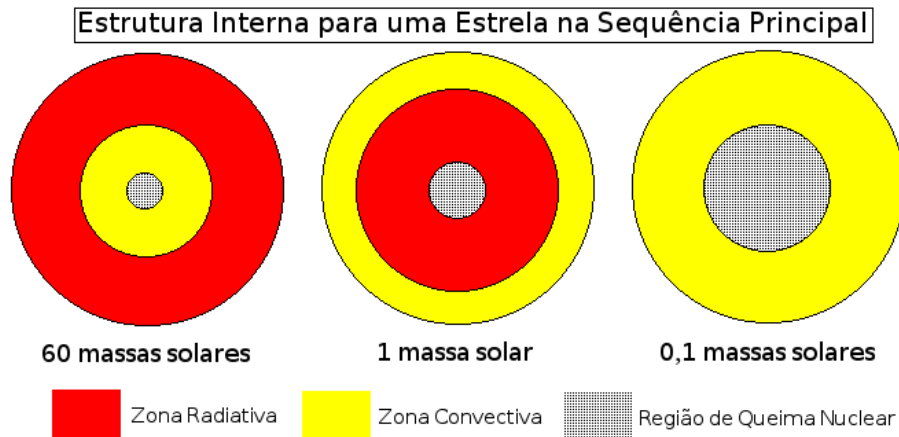


Figura 2.2: Estrutura Interna de uma estrela de acordo com a sua massa. Fonte: Adaptado de [1]

O tempo de vida de uma estrela na SP depende da sua massa inicial. O tempo de vida máximo do nosso Sol é estimado em 10 bilhões de anos e a idade atual estimada é da ordem de 4,5 a 5 bilhões de anos. Estrelas com  $0,1M_{\odot}$  levarão 3 trilhões de anos na SP, enquanto uma estrela com  $10M_{\odot}$  ficará na SP por “apenas” 100 milhões de anos. A partir do momento em que uma estrela consome todo o Hidrogênio do núcleo (o qual corresponde a cerca de 10% da sua massa total) ela sai da SP, migrando para outra região do espaço de parâmetros visualizado no gráfico Temperatura *versus* Luminosidade, também chamado de Diagrama HR [11], que será mostrado na próxima seção na Figura 2.3.

## 2.3 A vida pós-sequência principal e Objetos Compactos

O destino final de uma estrela depende de sua massa inicial. Depois que as estrelas consomem o Hidrogênio presente em seu núcleo, elas evoluem para outros estágios intermediários, tais como, nebulosas planetárias, gigantes ou supergigantes dependendo de sua massa inicial. Ao final deste processo evolutivo que envolve grande perda de massa por ejeção, as estrelas resultam no que se chamam Objetos Compactos (OC). Existem três principais tipos de OC gerados de acordo com a sua massa inicial. As estrelas de baixa massa resultarão em OC chamados de Anãs Brancas (AB), enquanto que as estrelas de alta massa resultarão em OC chamados de Estrelas de Nêutrons (EN) ou Buracos Negros

(BN) [39].

Estima-se que na Via Láctea cerca de 90% das estrelas tenham sua massa inicial no intervalo entre  $0,08M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$ . Estas estrelas neste intervalo de massa, que estão em maior número no universo, darão origem em seus estágios finais às AB. Já as estrelas de massa inicial mais elevada, acima de  $8M_{\odot}$  ou  $10M_{\odot}$  vão dar origem em seus estágios finais a EN e BN. O surgimento desses OC ocorre justamente com a evolução das estrelas, justamente quando não é mais possível “queimar” o combustível que elas dispõem, impossibilitando a manutenção do equilíbrio hidrostático. Quando se diz que a estrela não tem mais combustível no seu núcleo, significa que ela não tem gravidade suficiente para continuar fundindo elementos químicos pesados no seu centro, pela pressão gravitacional [11].

Existem duas principais diferenças entre as estrelas compactas e as estrelas menos evoluídas. Tais diferenças podem ser listadas de acordo com Shapiro & Teukolsky [39] da seguinte forma:

- O fato de as estrelas não conseguirem mais “queimar” seu combustível no núcleo significa que elas não conseguem mais conter a Força Gravitacional que puxa sua massa para o seu interior. As AB e EN se mantêm em equilíbrio hidrostático devido a pressão dos elétrons degenerados e pressão dos nêutrons degenerados, respectivamente. Já os BN são estrelas completamente colapsadas. Dessa forma, podemos dizer que os OC de massa estelar são essencialmente estáticos no tempo de vida do universo, representando assim o estágio final na evolução estelar.
- A segunda diferença que podemos notar é que os OC apresentam um tamanho extremamente pequeno, se comparados com objetos estelares de mesma massa em estágios evolutivos anteriores. Se compararmos estrelas de massa parecida, os OC apresentarão um raio muito menor, e dessa forma, um campo gravitacional mais forte em sua superfície. Todas as quatro interações fundamentais (Força Forte, Força Fraca, Eletromagnetismo e Gravidade) exercem um importante papel em OC. A Relatividade Geral, portanto, é uma importante ferramenta para determinar a estrutura desses OC por tratar dessas situações de campos gravitacionais muito intensos.

Devido à seu pequeno raio, AB irradiam sua energia térmica residual e apresentam temperaturas maiores que as estrelas menos evoluídas, mas, em contrapartida, apresentam menor luminosidade. Podemos verificar isso no gráfico que representa o espaço de parâ-

metros Temperatura *versus* Luminosidade chamado de Diagrama Hertzsprung-Russel, mais conhecido como Diagrama HR e mostrado na Figura 2.3. Em geral, nesse diagrama AB apresentam maior temperatura quando comparadas ao nosso Sol, porém, apresentam menor luminosidade [39].

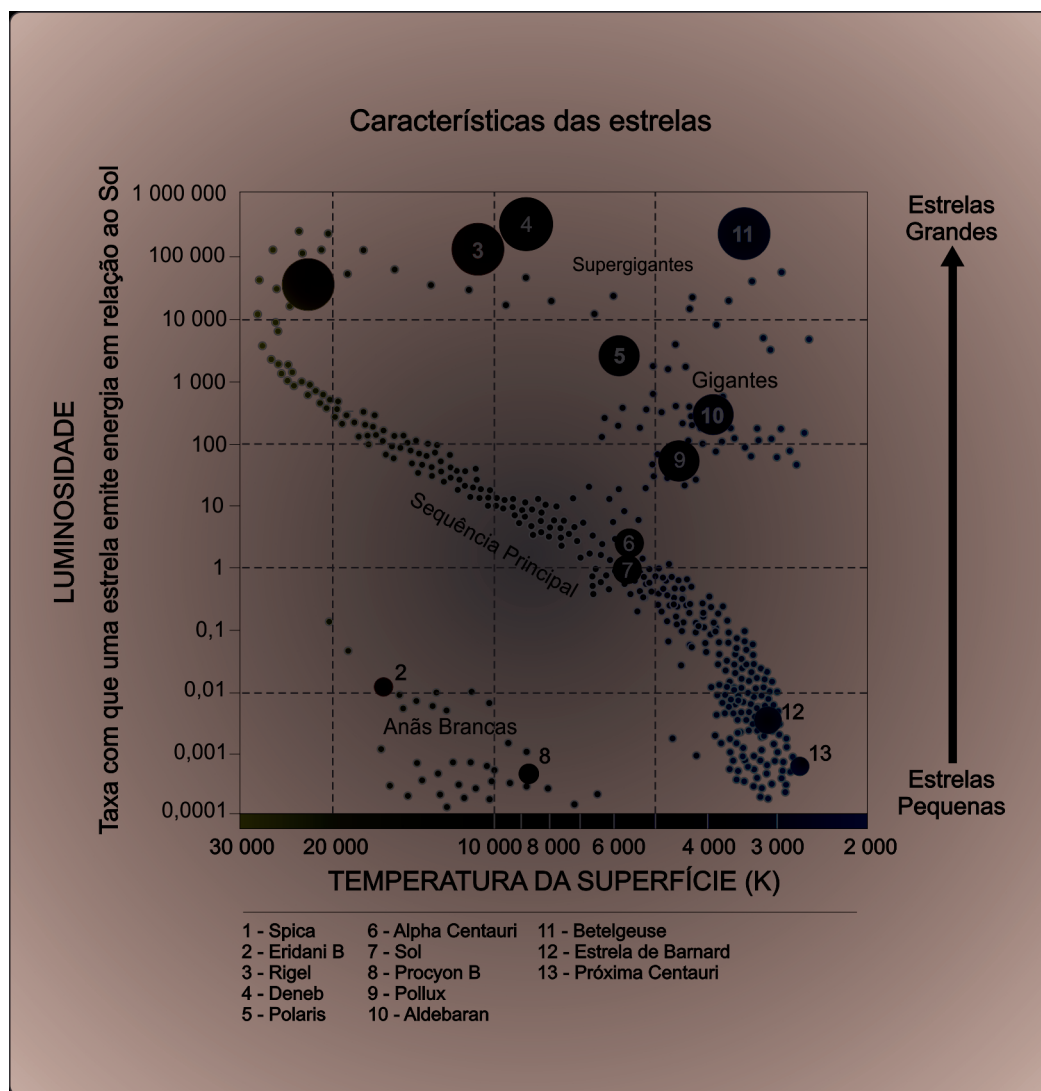


Figura 2.3: Diagrama Hertzsprung-Russel. Fonte: [2]

As EN apresentam esse nome porque acredita-se que seu interior seja predominantemente composto de nêutrons degenerados devido a eliminação mútua de elétrons e prótons através do decaimento  $\beta$ . Devido ao fato da densidade de EN serem comparada à densidade de núcleos atômicos, podemos dizer que as EN são núcleos atômicos gigantes. As EN não são colocadas no Diagrama HR devido ao seu tamanho, ou seja, elas são muito pequenas para serem observadas [39].

As estrelas AB podem ser observadas diretamente com telescópios óticos. As EN

podem ser observadas em solo tanto em telescópios óticos (no espectro visível) quanto em rádio-telescópios no comprimento de onda do Hidrogênio ionizado (H II) ou ainda em telescópios orbitais nos comprimentos de onda de Raios-X e Raios- $\gamma$ , que são extremamente energéticos. Os exemplos típicos de EN são os pulsares. Já os BN só podem ser observados indiretamente, através da influência exercida no seu entorno, principalmente quando são formados discos de acreção de matéria [39].

Um disco de acreção é um termo utilizado para se referir à matéria que está no processo de queda com alta rotação em torno de um objeto massivo. Isso ocorre com maior frequência em estrelas altamente colapsadas, tais como, EN e BN. Muitas das observações indicam que esses discos são desalinhados com o plano preferencial de órbita dos discos estelares das estrelas das galáxias espirais, sendo também possível verificá-los em galáxias elípticas.

É possível verificar discos de acreção também em AB que se localizam em sistemas binários, onde a matéria da estrela menos evoluída é acretada na mais evoluída [32]. Também é possível verificar a ocorrência desses discos em protoestrelas: apesar de serem estágios muito iniciais da formação das estrelas, a dinâmica dos discos de acreção envolvidos nesse estágio se assemelha à dinâmica dos casos citados anteriormente [24].

## 2.4 A formação dos Objetos Compactos

A Figura 2.4 representa esquematicamente a evolução temporal de estrelas de diferentes intervalos de massa.

As estrelas com massa inicial  $M < 0,4M_{\odot}$  não apresentam pressão e nem temperatura suficiente (devido à sua baixa massa) para realizar a fusão nuclear. Essas estrelas podem ser classificadas como Anã Marrom e Anã Vermelha.

As estrelas com massa inicial entre  $0,4M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$  conseguem transformar apenas Hidrogênio em Hélio ( $H \rightarrow He$ ). Elas também se expandem em uma Gigante Vermelha, com núcleo composto majoritariamente de Hélio. Essa gigante vermelha, apesar de ter uma densidade menor, ainda consegue evoluir para uma Supergigante Vermelha, expandindo ainda mais as suas camadas externas. Quando chega nesse estágio, a estrela já transformou Hélio em Carbono e Oxigênio ( $He \rightarrow C, O$ ). Quando não se tem mais Hélio suficiente para ser transformado, a estrela passa por um estágio chamado de Nebulosa Planetária, no qual ela ejeta as suas camadas exteriores. Após este estágio, o caroço central remanescente será chamado de AB, composta basicamente por Carbono e Oxigênio.

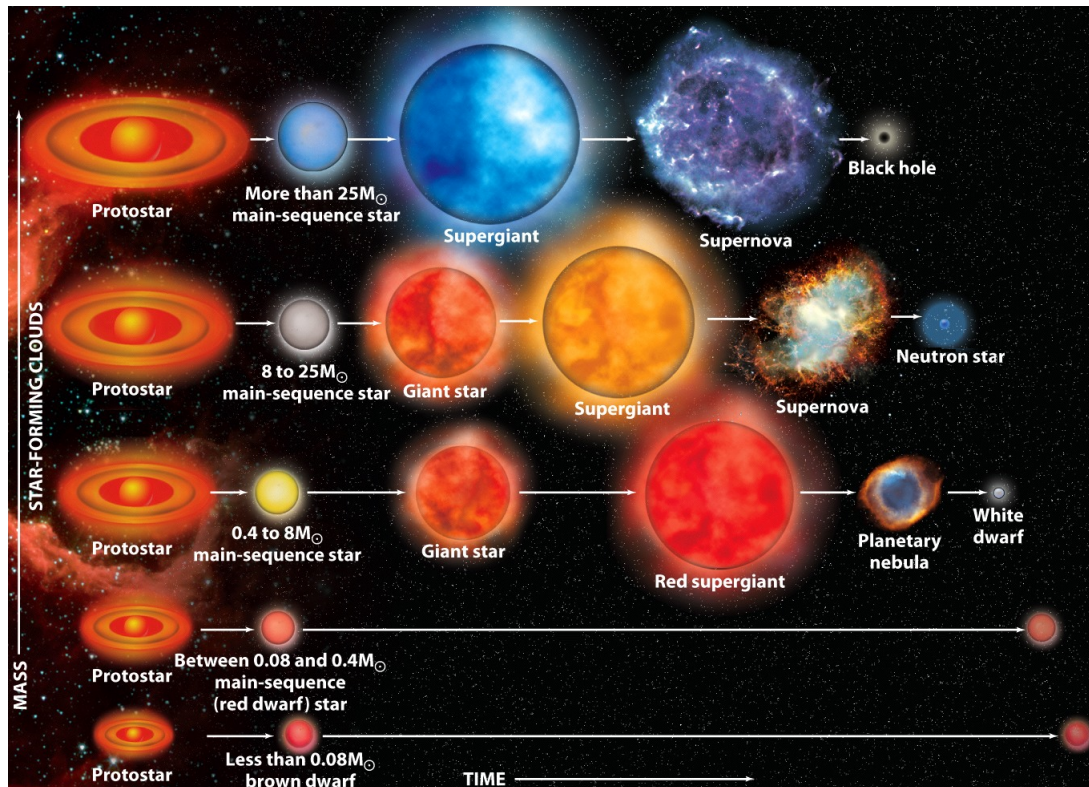


Figura 2.4: Evolução Estelar. Fonte: [4].

As estrelas com massa inicial entre  $8M_{\odot} < M < 25M_{\odot}$  permanecem pouquíssimo tempo na SP e rapidamente conseguem transformar Hidrogênio em Hélio ( $H \rightarrow He$ ). Durante o processo de transformação de elementos químicos leves em elementos químicos mais pesados pela fusão atômica, estas estrelas conseguem transformar Hélio em Carbono e Oxigênio ( $He \rightarrow C, O$ ), devido à sua alta massa e, conseqüentemente, sua elevada auto-gravidade, exercendo assim uma grande pressão nos átomos no seu núcleo. Posteriormente, ocorre a transformação de Oxigênio em Sódio (Na), Sódio em Magnésio (Mg) e Magnésio em Silício (Si) ( $O \rightarrow Na \rightarrow Mg \rightarrow Si$ ). Por fim, tais estrelas chegam a formar Enxofre (S) e o transformam em Ferro (Fe) ( $S \rightarrow Fe$ ). Ao chegar ao estágio de produção do Ferro<sup>1</sup>, naturalmente surgem instabilidades em camadas superiores e tais estrelas simplesmente explodem, passando por uma curtíssima fase chamada de Supernova. Se a explosão não for forte o suficiente e sobrar um remanescente nuclear, esse remanescente será chamado de EN.

As estrelas com massa inicial  $M > 25M_{\odot}$  também transformam inicialmente Hidrogê-

<sup>1</sup>Devido ao fato do ferro ser o elemento químico da tabela periódica que tem a maior energia de ligação por núcleon, é extremamente difícil para as estrelas continuarem gerando outros elementos químicos mais pesados através do processo de fusão nuclear. Os elementos químicos mais pesados que o Ferro são gerados em pequenas quantidades e por outros processos, em especial por acreção de nêutrons livres.

nio em Hélio ( $H \rightarrow He$ ) durante um curto intervalo de tempo. Contudo, tais estrelas são extremamente instáveis, como as Estrelas Wolf-Rayet. Assim, após produzir a sequência de elementos químicos até o Ferro, como no intervalo de massa anterior, a estrela explode em Supernova devido à instabilidades em camadas superiores ao núcleo. Se o processo de explosão desta camada não for esfericamente homogêneo em torno do núcleo da estrela e se durante o processo de explosão a velocidade do material for supersônica, então, é possível que não sobre um remanescente central. Mas se o processo de explosão desta camada for esfericamente homogêneo e se a velocidade do material durante a explosão for uma velocidade subsônica, então as camadas mais externas serão ejetadas abruptamente, mas o seu caroço central poderá dar origem à um objeto remanescente, chamado de BN. Desta forma, uma vez que a explosão é em camada, também é necessário que a velocidade do material que implode em direção ao centro da estrela não seja uma velocidade supersônica.

# Capítulo 3

## Acreção

O processo pelo qual OC capturam gravitacionalmente a matéria ambiente é chamado de acreção. Sabemos que a acreção de gás em estrelas compactas de  $M \sim M_{\odot}$  é a provável fonte de energia nas fontes Binárias de Raios-X observadas. Esse mesmo processo também pode ser visto em larga escala em quasares e Núcleos Ativos de Galáxias (AGNs), onde emissões variam rapidamente com altas luminosidades e são observadas a partir de regiões relativamente compactas. Acreção em BNSM com  $M \gtrsim 10^6 - 10^9 M_{\odot}$  podem alimentar o sistema. Isoladamente, estrelas compactas com  $M \sim M_{\odot}$  podem também acretar gás enquanto atravessam o meio interestelar de sua galáxia. Um fato interessante desse processo é que ao cair em um forte campo gravitacional de um OC, aproximadamente 10% da energia da massa de repouso acretada pode ser convertida em radiação. Assim, a acreção é um processo que pode ser consideravelmente mais eficiente do que muitos outros mecanismos na Astrofísica [39].

### 3.1 Acreção como uma fonte de energia

Acredita-se amplamente que a extração de energia potencial por parte de um corpo gravitante que absorve o material num disco de acreção seja a principal fonte de energia da emissão observada em AGNs e quasares [19].

Para um corpo de massa  $M$  e raio  $R_*$ , a energia potencial gravitacional liberada pela acreção de uma massa  $m$  na sua superfície é:

$$\Delta E_{acc} = \frac{GMm}{R_*} \quad , \quad (3.1)$$

onde o  $G$  é a constante gravitacional. Se o corpo acretante for, por exemplo, uma EN

de massa  $M \sim M_{\odot}$  e raio  $R \sim R_*$ , então será produzido um  $\Delta E_{acc}$  por grama acretado em torno de  $10^{20}$  erg/g. Espera-se que essa energia seja liberada principalmente na forma de radiação eletromagnética. Se quisermos comparar, podemos considerar a energia que poderia ser extraída de uma massa  $m$  por reações de fusão nuclear. A máxima energia é obtida, quando se transforma Hidrogênio em Hélio ( $H \rightarrow He$ ), o que produzirá uma energia de liberação  $\Delta E_{nuc} = 0,007mc^2$ , onde  $c$  é a velocidade da luz. O resultado final seria algo em torno de  $6 \times 10^{18}$  erg/g, ou seja, 1/20 da quantidade produzida pela acreção.

A partir da equação (3.1), podemos verificar o quão compacto o objeto acretante deve ser, ou seja, quanto maior for a taxa  $M/R_*$ , maior será a energia liberada pela acreção e, conseqüentemente, maior será a eficiência [19].

Assim, quando se trata de acreção em objetos de massa estelar, certamente devemos considerar EN ( $R_* \sim 10\text{km}$ ) e BN com raio  $R_* \sim 2GM/c^2 \sim 3(M/M_{\odot})$  km. Quando tratamos de AB com  $M \sim M_{\odot}$  e  $R_* \sim 10^9\text{cm}$ , o processo de “queima” nuclear é mais eficiente que a acreção por um fator 25 – 50. Apesar de menos eficiente que a fusão nuclear em uma AB, a acreção é muito importante quando se trata de observações, pois em quase todo o seu tempo de vida não ocorre nenhuma “queima” nuclear. Assim ela pode gerar toda a sua luminosidade a partir da acreção [19].

Se considerarmos um valor fixo para a compactação,  $M/R_*$ , a luminosidade de um sistema acretante depende da taxa  $\dot{M} \equiv dM/dt$  no qual a matéria é acretada. Em altas luminosidades, a taxa de acreção pode ser controlada pela transferência de momento para fora pela radiação para o material acretante pelo espalhamento e absorção [19].

### 3.1.1 Luminosidade, Magnitude e Luminosidade de Eddington

#### 3.1.1.1 Luminosidade

A luminosidade pode ser definida como sendo a quantidade de energia eletromagnética irradiada por um corpo em determinado período de tempo. Assim como utilizamos a massa solar ( $M_{\odot}$ ) como referência para diversas medidas na Astronomia, faremos o mesmo com a luminosidade solar ( $L_{\odot}$ ) que é  $3,827 \times 10^{26}$  W [12].

Podemos encontrar uma fórmula para a luminosidade a partir da equação de Stefan-Boltzmann aplicada a um corpo negro, que de acordo com Filho & Saraiva [15], pode ser dada por:

$$L = \sigma AT^4 \quad , \quad (3.2)$$

onde  $A$  é a área de superfície do objeto,  $T$  é a temperatura em Kelvin e  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma = 5,670 \times 10^{-8} \text{W m}^2 \text{K}^{-4}$ ). Queremos calcular a luminosidade de uma estrela, a qual podemos tratar como um objeto esférico, portanto podemos considerar a área como sendo  $A = 4\pi R^2$ . Assim, podemos reescrever a equação (3.2) da seguinte forma:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad . \quad (3.3)$$

### 3.1.1.2 Magnitude

De acordo com Filho & Saraiva [15], o brilho aparente de um astro é o fluxo  $F$ , onde  $F = L_*/4\pi R_*^2$ , medido na Terra e, normalmente é expresso em termos da magnitude aparente  $m$ , que por definição é dado por:

$$m = -2,5 \log F + \text{constante} \quad . \quad (3.4)$$

A medida de brilho de um astro em magnitude surge a cerca de 2000 anos, quando Hiparco (160-125 a.C.) dividiu as estrelas visíveis a olho nu de acordo com seu brilho aparente, classificando às mais brilhantes como tendo magnitude 1 e magnitude 6 às mais fracas. Norman Robert Pogson em 1856 propôs que o fluxo correspondente a uma estrela de magnitude 1 era 100 vezes mais brilhante que uma estrela de magnitude 6. Podemos escrever tal relação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 &= K \log \frac{F_1}{F_2} \longrightarrow 1 - 6 = K \log \left( \frac{F_1}{F_2} \right) \\ -5 &= K \log(100) \longrightarrow K = -2,5 \quad , \end{aligned} \quad (3.5)$$

e conseqüentemente,

$$m_2 - m_1 = -2,5 \log \frac{F_2}{F_1} \quad . \quad (3.6)$$

Na definição na Equação (3.4) define-se o zero da escala, que geralmente utilizamos a magnitude aparente da estrela Vega como  $m \equiv 0$ . Como efeito de comparação,  $m(\text{Sírius}) = -1,46$ ,  $m(\text{Lua Cheia}) = -12,8$  e  $m(\text{Sol}) = -26,74$ .

Podemos comparar os brilhos de duas estrelas utilizando uma medida de brilho que seja independente da distância. Assim, define-se como magnitude absoluta  $M_{abs}$ , a magnitude teórica que uma estrela teria se estivesse a 10 parsecs de distância do observador [15].

$$M_{abs} = -2,5 \log[F(10pc)] + \text{constante} \quad . \quad (3.7)$$

A magnitude integrada correspondente ao fluxo em todos os comprimentos de onda é o que chamamos de magnitude bolométrica  $m_{bol}$ , e ela pode ser dada pela equação abaixo:

$$L = 4\pi R^2 \int_0^\infty F_\nu d\nu = 4\pi R^2 F_{bol} \quad . \quad (3.8)$$

Dessa forma, podemos dizer que a magnitude bolométrica é a magnitude aparente integrada em todos os comprimentos de onda (ou frequências).

### 3.1.1.3 Luminosidade de Eddington

Existe uma limitação de luminosidade emitida por qualquer processo chamada de Limite de Eddington, que representa a maior luminosidade que uma estrela com uma dada massa pode ter e ainda manter-se em equilíbrio hidrostático. O Limite de Eddington pode ser dado pela equação seguinte:

$$L_{Edd} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} \quad , \quad (3.9)$$

onde  $\sigma_T = 6,7 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$  é a seção de choque de Thomson,  $m_p$  é a massa do Próton,  $M$  é a massa da estrela,  $c$  é a velocidade da luz e  $G$  é a constante gravitacional. Substituindo os valores das constantes, a equação (3.9), pode ser simplificada para a equação a seguir:

$$L_{Edd} = 1,3 \times 10^{38} \frac{M}{M_\odot} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} \quad . \quad (3.10)$$

Para objetos acretantes, o Limite de Eddington implica em um limite na taxa de acreção estável,  $\dot{M}(g \cdot s^{-1})$ . Se toda a energia cinética da matéria acretada é dada pela radiação na superfície estelar de raio  $R_*$ , então a partir da equação (3.1), a luminosidade de acreção é dada pela equação:

$$L_{acc} = \frac{GM\dot{M}}{R_*} \quad . \quad (3.11)$$

Podemos reescrever a equação (3.11) para a Luminosidade de Acreção típica de uma AB como na equação (3.12), ou, para o caso de uma EN, como nas equações (3.13).

$$L_{acc} = 1,3 \times 10^{33} \dot{M}_{16} (M/M_\odot) (10^9 \text{ cm}/R_*) \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} \quad . \quad (3.12)$$

$$L_{acc} = 1,3 \times 10^{36} \dot{M}_{16} (M/M_\odot) (10 \text{ km}/R_*) \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} \quad . \quad (3.13)$$

A razão para fazermos isso é que as quantidades  $(M/M_\odot)$ ,  $(10^9 \text{cm}/R_*)$  e  $(10 \text{km}/R_*)$  são de ordem unitária para AB e EN, respectivamente. As taxas de acreção em sistemas binários próximos, com estrelas deste tipo, apresentam valores típicos  $10^{16} \text{g} \cdot \text{s}^{-1}$  ( $\sim 1,5 \times 10^{-10} M_\odot \text{anos}^{-1}$ ). Além disso, temos que  $\dot{M}_{16} \sim 1$  nas equações (3.12) e (3.13). Assim os valores comumente encontrados para estas luminosidades em tais sistemas são  $10^{33} \text{erg} \cdot \text{s}^{-1}$  e  $10^{36} \text{erg} \cdot \text{s}^{-1}$ , respectivamente.

## 3.2 Discos de Acreção

De acordo com Frank, King & Raine [19], em sistemas binários submetidos à transferência de massa, o material que é acumulado terá um momento angular suficiente para que se forme um disco de acreção. Na maioria dos casos, o fluxo do disco é confinado ao plano orbital, de forma que podemos aproximar o disco como um fluxo de gás bidimensional.

### 3.2.1 Modelos de Discos de Acreção - Parametrização $\alpha$ e instabilidade Magneto Rotacional (IMR)

Atualmente existem duas vertentes principais de modelos que explicam a acreção, diferenciando-se pela forma como elas tratam a viscosidade. A primeira é a parametrização  $\alpha$  que foi originalmente desenvolvida para discos de Binárias de Raios-X [38]. Neste tipo de modelo, assume-se que o disco é geometricamente fino, ou seja, com a espessura  $H$  do disco muito menor que o raio  $R$ , isso é  $H/R \ll 1$ . A segunda vertente se baseia na Instabilidade Magneto Rotacional (IMR) como uma solução dos discos de acreção (e discos protoplanetários) na presença de um campo magnético fraco, sendo a IMR responsável pela instabilidade dinâmica do fluido, podemos dizer também que o IMR é o mecanismo responsável pelo transporte da turbulência e de momento angular através dos campos magnéticos [5, 26, 46, 23, 17].

De acordo com Vieira [48], no modelo de parametrização  $\alpha$ , mais conhecido como modelo de Shakura & Sunyaev [38], grande parte das partículas do disco movem-se em órbitas praticamente circulares com uma pequena componente radial na direção do objeto central. Essa velocidade radial é gerada devido à viscosidade do disco, que faz com que a matéria vá lentamente perdendo energia e momento angular. As propriedades do disco, tais como perfil de temperatura, espectro de radiação emitida e espessura, são todas dependentes da velocidade angular do gás, podendo ser aproximada pela velocidade angular gerada pelo potencial gravitacional do objeto central [19].

Em [38] também foi previsto a  $\alpha$ -parametrização do disco. Trata-se do mecanismo mais adotado na literatura, devido a sua complexidade de implementação computacional relativamente mais simples, aplicada ao transporte de momento angular, que é uma forma de viscosidade magnética.

O campo magnético existe devido ao fluxo de material no disco. O campo magnético e movimentos turbulentos do material permitem que o momento angular seja transferido para fora no disco. A eficiência do mecanismo de transporte de momento angular é caracterizado pelo parâmetro de viscosidade adimensional  $\alpha$ , onde  $\alpha \leq 1$ . Devido a fricção entre as camadas adjacentes, as partículas no disco perdem seu momento angular e espiralam para dentro do BN e a energia gravitacional é liberada durante esse espiralamento. Parte da energia liberada contribui para o aumento da energia cinética de rotação e a outra parte se transforma em energia térmica, a qual é irradiada a partir da superfície do disco. A energia total e o espectro da radiação liberadas são determinadas preferencialmente pela taxa de acreção [38].

A fim de comparar as viscosidades dos discos em objetos com diferentes tamanhos e diferentes condições físicas, Shakura & Sunyaev introduzem o parâmetro de viscosidade adimensional  $\alpha$ , que foi citado anteriormente [38]. A viscosidade pode ser dada pela equação a seguir:

$$\nu = \alpha c_s H \quad , \quad (3.14)$$

onde  $c_s$  é a velocidade do som (assumindo que  $c_s = kT/\mu m_H$ , onde  $k$  é a Constante de Boltzmann,  $T$  é a temperatura,  $\mu$  é o peso molecular médio e  $m_H$  é a massa do átomo do Hidrogênio) e  $H$  representa a espessura do disco. A equação (3.14) busca colocar um limite à turbulência desconhecida.

O parâmetro  $\alpha$  pode ser dado pela seguinte equação:

$$\alpha = \frac{v_t}{c_s} + \frac{B^2}{4\pi\rho c_s^2} = \frac{v_t}{c_s} + \frac{v_A^2}{c_s^2} \quad , \quad (3.15)$$

onde  $v_t$  é a velocidade turbulenta e  $v_A$  é a velocidade de Alfvén. Ou, de acordo com Magalhães [26] até mesmo pela equação abaixo:

$$\alpha = \frac{v_t l_t}{c_s H} + \frac{B^2}{4\pi\rho c_s^2} \equiv \frac{1}{c_s H} \left[ v_t l_t + c_s H \frac{B^2}{4\pi\rho c_s^2} \right] \quad , \quad (3.16)$$

onde  $\nu = v_t l_t$  na equação (3.16) é a viscosidade turbulenta,  $v_t$  é uma velocidade turbulenta,  $l_t$  é a escala de comprimento que está associada à turbulência,  $B$  é o campo magnético e  $\rho$  é a densidade de matéria. O parâmetro  $v_A^2/c_s^2 \equiv B^2/4\pi\rho c_s^2$  expressa a importância da

turbulência IMR.

De acordo com Spruit [41], o parâmetro  $\alpha$  introduzido por Shakura & Sunyaev [38] é uma forma de parametrizar a nossa ignorância em relação ao processo de transporte de momento angular (e conseqüentemente, a viscosidade), permitindo assim uma comparação entre sistemas com tamanho e origens físicas diferentes.

### 3.2.2 Estrutura Radial do Disco

Vamos considerar a dinâmica de um disco fino ( $H/R \ll 1$ ). Assumiremos que nas coordenadas cilíndricas  $(R, \phi, z)$  a matéria está muito próxima do plano  $z = 0$ . Assumiremos também que a matéria se move com velocidade angular  $\Omega$  em círculos em torno de uma estrela acretante que tem massa  $M$  e raio  $R_*$ . Frequentemente a velocidade angular terá um valor kepleriano dado por [19]:

$$\Omega = \Omega_K(R) = \left( \frac{GM_*}{R^3} \right)^{1/2}, \quad (3.17)$$

e a velocidade circular pode ser dada por:

$$v_\phi = R\Omega_K(R) \quad . \quad (3.18)$$

Assumimos também que o gás possui uma pequena velocidade radial de arrasto  $v_R$ , que é negativa perto da estrela central, de modo que a matéria seja acretada. Em geral,  $v_R$  será uma função tanto do raio  $R$  quanto do tempo  $t$ . O disco é então caracterizado pela sua densidade de superfície  $\Sigma(R, t)$ , que é a massa por unidade de área superficial do disco, dado pela integração da densidade  $\rho$  do gás na direção  $z$  [19].

Para descrever a estrutura radial do disco, devemos levar em conta as equações que a descrevem. Seja um anel de um disco material situado entre  $R$  e  $R + \Delta R$ , tendo massa total  $2\pi R\Delta R\Sigma$  e o momento angular total  $2\pi R\Delta R\Sigma R^2\Omega$ . A taxa de variação temporal dessas quantidades são dados pelo fluxo líquido na vizinhança dos anéis. A variação temporal da massa total e a conservação de momento angular podem ser dadas pelas equações (3.19) e (3.21) [19].

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(2\pi R\Delta R\Sigma) &= v_R(R, t)2\pi R\Sigma(R, t) - v_R(R + \Delta R, t) \\ &\quad \times 2\pi(R + \Delta R)\Sigma(R + \Delta R, t) \\ &\cong -2\pi\Delta R \frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma v_R) \quad , \end{aligned} \quad (3.19)$$

A aproximação feita na equação acima só é possível se considerarmos  $\Delta R \rightarrow 0$ . Dessa forma obtemos a Equação de Conservação de Massa [19]:

$$R \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R}(R \Sigma v_R) = 0 \quad . \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(2\pi R \Delta R \Sigma R^2 \Omega) &= v_R(R, t) 2\pi R \Sigma(R, t) R^2 \Omega(R) \\ &\quad - v_R(R + \Delta R, t) 2\pi (R + \Delta R) \Sigma(R + \Delta R, t) \\ &\quad \times (R + \Delta R)^2 \Omega(R + \Delta R) + \frac{\partial G}{\partial R} \Delta R \\ &\cong -2\pi \Delta R \frac{\partial}{\partial R}(R \Sigma v_R R^2 \Omega) + \frac{\partial G}{\partial R} \Delta R \quad , \end{aligned} \quad (3.21)$$

então, assim como anteriormente, quando  $\Delta R \rightarrow 0$  obtemos a Equação de Conservação de Momento Angular [19]:

$$R \frac{\partial}{\partial t}(\Sigma R^2 \Omega) + \frac{\partial}{\partial R}(R \Sigma v_R R^2 \Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial R} \quad , \quad (3.22)$$

onde  $G(R, t) = 2\pi R \nu \Sigma R^2 \Omega'$ , onde  $\Omega'$  indica  $\partial \Omega / \partial R$ . Agora, usando as equações (3.20) e (3.22), podemos escrever uma nova equação para a estrutura do disco [19].

$$R \Sigma v_R \frac{\partial (R^2 \Omega)}{\partial R} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial R} \quad . \quad (3.23)$$

Combinando as equações (3.20) e (3.23) encontramos  $v_R$  e substituindo na equação (3.20), obtemos a equação abaixo:

$$R \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial R}(R \Sigma v_R) = -\frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{1}{2\pi (R^2 \Omega)'} \frac{\partial G}{\partial R} \right] \quad . \quad (3.24)$$

Substituindo  $G$  e  $\Omega = \Omega_K$  (considerando um disco kepleriano) em (3.24) obtemos a equação básica que governa toda a evolução temporal da densidade superficial em um disco kepleriano:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} (\nu \Sigma R^{1/2}) \right] \quad . \quad (3.25)$$

Podemos dizer que essa é uma equação não-linear de  $\Sigma$ , pois  $\nu$  pode ser uma função de variáveis locais no disco, seja  $\Sigma$ ,  $R$  e até mesmo  $t$  [19].

### 3.2.2.1 Discos Estáveis Finos

De acordo com Frank, King & Raine [19], um disco estável deverá apresentar uma estrutura de estado estacionário, que pode ser examinada definindo  $\partial / \partial t = 0$  nas equa-

ções (3.20) e (3.22). Apesar de considerarmos essa estrutura do disco para simplificação, é evidente que os discos de acreção são sistemas altamente dinâmicos [23].

A partir de (3.20), com  $\partial/\partial t = 0$ , obtemos  $R\Sigma v_R = \text{constante}$ . Considerando agora que  $v_R < 0$ , podemos dizer que:

$$\dot{M} = 2\pi R\Sigma(-v_R) \quad , \quad (3.26)$$

onde  $\dot{M}(g \cdot s^{-1})$  é a taxa de acreção.

A partir da equação (3.22) de momento angular e se considerarmos  $\partial/\partial t = 0$ , obtemos  $R\Sigma v_R R^2 \Omega = \frac{G}{2\pi} + \frac{C}{2\pi}$ , com  $C$  sendo uma constante. Substituindo  $G$ , encontramos [19]:

$$-\nu\Sigma\Omega' = \Sigma(-v_R)\Omega + C/(2\pi R^3) \quad , \quad (3.27)$$

onde a constante  $C = -\dot{M}(GM R_*)^{1/2}$  está relacionada com a taxa em que o momento angular flui para o OC, ou equivalentemente, a interação exercida pela estrela na borda mais interna do disco [19].

Substituindo na equação (3.27) e tomando  $\Omega = \Omega_K$  encontramos:

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right] \quad . \quad (3.28)$$

Embora este seja um resultado usual, existem casos onde ele não é válido, isso é, onde  $C$  não tem o valor  $C = -\dot{M}(GM R_*)^{1/2}$ . Um exemplo seria o caso de uma estrela central apresentar um campo magnético suficientemente forte de modo a controlar o fluxo do material do disco nos raios  $R$  tais que:

$$v_\phi = R\Omega_* > v_\phi(\text{Kepler}) = R\Omega_K(R) \quad , \quad (3.29)$$

onde a equação (3.28) não é mais válida. Nesse caso, o disco seria atraído pela estrela, diminuindo a sua energia rotacional e seu momento angular [19].

A expressão dada pela (3.28) para um disco estável com uma estrela central rotacionando lentamente tem um importante e elegante resultado. Se tomarmos  $\Omega = \Omega_K$ , podemos escrever a expressão de dissipação viscosa por unidade de área  $D(R)$  do disco como [19]:

$$D(R) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right] \quad . \quad (3.30)$$

Se considerarmos a luminosidade produzida no disco entre os raios  $R_1$  e  $R_2$ , teremos

que:

$$L(R_1, R_2) = 2 \int_{R_1}^{R_2} D(R) 2\pi R dR \quad , \quad (3.31)$$

onde o fator 2 surge pela consideração de ambos os lados do disco. Substituindo a Equação (3.30) na (3.31), encontramos que [19]:

$$L(R_1, R_2) = \frac{3GM\dot{M}}{2} \int_{R_1}^{R_2} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right] \frac{dR}{R^2} \quad . \quad (3.32)$$

Ao resolvermos a integral, considerando  $R_1 = R_*$  e  $R_2 \rightarrow \infty$ , obtemos a luminosidade em todo o disco dada por:

$$L_{disco} = \frac{GM\dot{M}}{2R_*} = \frac{1}{2} L_{acc} \quad . \quad (3.33)$$

Como resultado do Teorema do Virial, a matéria em  $R_*$  retém como energia cinética a metade da energia potencial que perdeu ao espiralar para dentro, o que implica que a metade de  $L_{acc}$  permanece disponível para ser irradiada a partir da própria camada limite.

Para a construção do modelo de discos estáveis finos devemos levar em consideração alguns pontos. Primeiramente devemos considerar a estrutura de um disco na direção  $z$ . Como o fluxo nessa direção é quase nulo, então o equilíbrio hidrostático deve ser mantido e devemos ter:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{GM}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \quad . \quad (3.34)$$

Como  $z \ll R$  temos um disco fino e a equação (3.34) torna-se:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{GMz}{R^3} \quad . \quad (3.35)$$

Se considerarmos que existe uma escala de altura  $H$  típica do disco na direção  $z$  então, também devemos considerar que  $\partial P/\partial z \sim P/H$  onde  $z \sim H$  e, conseqüentemente,  $H \ll R$ . Se considerarmos também que  $P \sim \rho c_s^2$  então encontraremos a seguinte equação, onde  $c_s$  é a velocidade do som:

$$H \cong c_s \left( \frac{R}{GM} \right)^{1/2} R \quad , \quad (3.36)$$

de modo que

$$c_s \ll \left( \frac{GM}{R} \right)^{1/2} \quad . \quad (3.37)$$

No caso de um disco fino, devemos ter uma velocidade kepleriana local altamente

supersônica. Ainda de acordo com Frank, Raine & King [19], se a condição de disco fino, dado pela equação (3.37) se mantém, a velocidade circular da matéria  $v_\phi$  terá um valor muito próximo do valor kepleriano. Podemos definir o número de Mach  $\mathcal{M}$  como sendo  $\mathcal{M} = v_\phi/c_s$ , podemos relacionar  $H$  e  $v_R$  em função de  $\mathcal{M}$ :

$$H \sim \mathcal{M}^{-1} R \quad . \quad (3.38)$$

$$v_R \sim \alpha \mathcal{M}^{-1} c_s \quad . \quad (3.39)$$

A partir das equações (3.38) e (3.39) concluimos que em um disco fino a velocidade  $v_\phi$  é kepleriana e altamente supersônica. A velocidade radial de arrasto e a escala vertical são pequenas [19].

### 3.2.3 Estrutura local dos discos finos

De acordo com Frank, Raine & King [19] podemos definir a densidade central do disco aproximadamente por:

$$\rho = \frac{\Sigma}{H} \quad (3.40)$$

e  $H$  e  $c_s$ , respectivamente, como:

$$H = \frac{Rc_s}{v_\phi} \quad , \quad e \quad (3.41)$$

$$c_s^2 = \frac{P}{\rho} \quad . \quad (3.42)$$

Em geral a pressão  $P$  é a soma da pressão do gás com a pressão de radiação, a qual pode ser dada pela equação abaixo:

$$P = \frac{\rho k T_c}{\mu m_P} + \frac{4\sigma}{3c} T_c^4 \quad , \quad (3.43)$$

onde  $T_c$  é a temperatura central. A temperatura  $T_c$  que deve ser dada por uma equação de energia que relacione o fluxo de energia na direção vertical com a taxa de geração de energia pela dissipação viscosa. O fluxo de energia através de uma superfície com  $z$  constante é dada por:

$$F(z) = \frac{-16\sigma T^3}{3\kappa_R \rho} \frac{\partial T}{\partial z} \quad , \quad (3.44)$$

onde  $\kappa_R$  é a opacidade média de Rosseland. Implicitamente assume-se na equação (3.44) que o disco é opticamente espesso, pois:  $\tau = \rho H \kappa_R(\rho, T_c) = \Sigma \kappa_R \gg 1$ , de modo que, localmente, o campo de radiação é muito próximo do valor de um corpo negro. Uma vez

que  $\tau \lesssim 1$  a expressão (3.28) indica que a radiação pode escapar diretamente. A equação do balanço de energia é dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = Q^+ \quad , \quad (3.45)$$

onde  $Q^+$  é taxa de produção de energia pela dissipação viscosa. Ao integrarmos, obtemos:

$$F(H) - F(0) = \int_0^H Q^+(z) dz = D(R) \quad , \quad (3.46)$$

a taxa de dissipação total através da metade da estrutura vertical deve fornecer  $D(R)$  de acordo com a equação (3.30) [19].

A partir da equação (3.44) temos que  $F(z) = (4\sigma/3\tau)[T(z)]^4$ . Se utilizarmos a expressão de  $\tau = \rho H \kappa_R(\rho, T_c)$  podemos demonstrar que a temperatura central excede a temperatura na face do disco, ou seja,  $T_c^4 \gg [T(H)]^4$ . Então (3.46) se torna aproximadamente [19]:

$$\frac{4\sigma}{3\tau} = D(R) \quad . \quad (3.47)$$

De acordo com Frank, King & Raine [19], podemos escrever um conjunto com 8 equações que podem ser utilizadas para calcular as propriedades de um disco de acreção.

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad \rho = \Sigma/H; \\ 2. \quad H = c_s R^{3/2}/(GM)^{1/2}; \\ 3. \quad c_s^2 = P/\rho; \\ 4. \quad P = \frac{\rho k T_c}{\mu m_p} + \frac{4\sigma}{3c} T_c^4; \\ 5. \quad \frac{4\sigma T_c^4}{3\tau} = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[ 1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2} \right]; \\ 6. \quad \tau = \Sigma \kappa_R(\rho, T_c) = \tau(\Sigma, \rho, T_c); \\ 7. \quad \nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[ 1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2} \right]; \\ 8. \quad \nu = \nu(\rho, T_c, \Sigma, \alpha, \dots). \end{array} \right\} \quad (3.48)$$

### 3.2.4 O espectro emitido

Se cada elemento da face do disco irradia como um corpo negro com uma temperatura  $T(R)$  dado pela equação da dissipação viscosa (3.30), encontramos uma equação que relaciona as duas grandezas [19]:

$$\sigma [T(R)]^4 = D(R) \quad . \quad (3.49)$$

Usando a equação (3.30) e substituindo em (3.49), obtemos:

$$T(R) = \left\{ \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3\sigma} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/4}. \quad (3.50)$$

Para  $R \gg R_*$ , temos  $T = T_*(R/R_*)^{-3/4}$  onde:

$$T_* = \left( \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R_*^3\sigma} \right)^{1/4}. \quad (3.51)$$

Aqui fica claro que  $T_*$  na equação (3.51) é da ordem da temperatura do corpo negro dado por  $T_b = (L_{acc}/4\pi R_*^2\sigma)^{1/4}$ . A ordem de grandeza dessas temperaturas mostra que devemos esperar discos de acreção em torno de AB e EN que sejam fontes de emissão de radiação ultravioleta ou em torno de BN que sejam fontes de emissão de radiação Raios-X [19].

Evidenciamos que os efeitos de absorção dos gases em torno do disco são desconsiderados. Consequentemente, uma análise não pode representar exatamente o espectro detalhado do disco. Uma importante característica desse resultado é que o fluxo na frequência  $\nu$  ( $F_\nu$ ) é independente da viscosidade do disco, e que em diferentes partes do disco teremos comportamentos diferentes [19].

Podemos analisar a Figura 3.1 das seguintes formas:

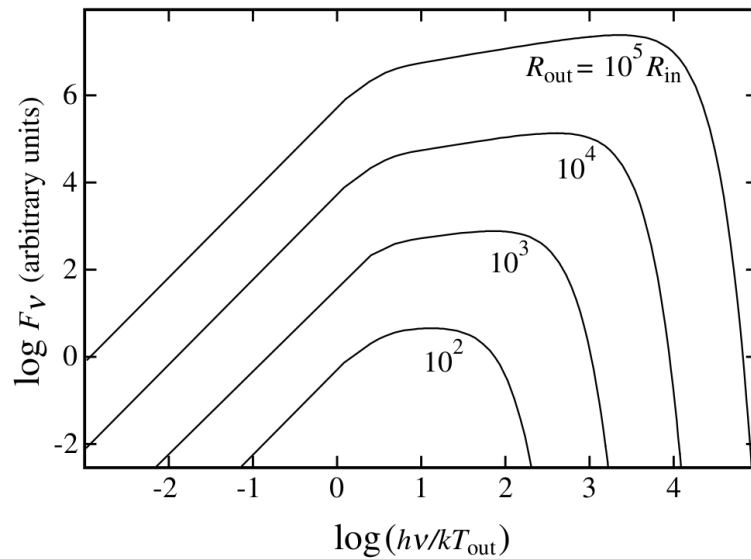


Figura 3.1: O espectro contínuo  $F_\nu$  de um disco de acreção opticamente estável espesso irradiando localmente como um corpo negro. Fonte: [19]

Para frequências menores ( $\nu \ll kT(R_{out})/h$ ) o gráfico mostra que o fluxo é proporcional à frequência ao quadrado, isso é  $F_\nu \propto \nu^2$ . Quando temos frequências maiores ( $\nu \gg kT_*/h$ ) o gráfico mostra que o espectro é exponencial e as partes mais quentes do disco dominam o seu comportamento. Para frequências intermediárias ( $kT(R_{out})/h \ll \nu \ll kT_*/h$ ) o fluxo é proporcional à frequência elevada a 1/3, isso é  $F_\nu \propto \nu^{1/3}$  [19].

# Capítulo 4

## Metodologia

### 4.1 Equações da Hidrodinâmica

Neste capítulo descreveremos as Equações da Hidrodinâmica tal como foi feito por [46]. A Equação de Continuidade que pode ser dada pela equação abaixo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade e  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade e  $\partial/\partial t \equiv \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ .

A Equação de Euler pode ser dada por:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \nabla \cdot \mathbb{T} \quad (4.2)$$

onde  $P$  é a pressão térmica,  $\Phi$  é o potencial gravitacional e  $\mathbb{T}$  é o tensor de estresse. A adição do termo  $\nabla \cdot \mathbb{T}$  é necessária para que seja incluída a viscosidade no sistema [46].

A Equação de Conservação de Energia pode ser dada por:

$$\rho \frac{\partial (e/\rho)}{\partial t} = -P \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbb{T}^2/\mu \quad (4.3)$$

onde  $e$  é a densidade de energia interna e  $\mu$  é a função de dissipação viscosa [46].

Pode-se notar que todas as equações (4.1), (4.2) e (4.3) são Equações Diferenciais Parciais (EDP) e na próxima seção, explicaremos um método para solucioná-las.

Assim como [46], utilizaremos, para fins numéricos, a versão conservativa das equa-

ções, que pode ser dada como:

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ \mathbf{m} \\ E + \rho\Phi \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho\mathbf{v} \\ \mathbf{m}\mathbf{v} + P\mathbf{l} \\ (E + P + \rho\Phi)\mathbf{v} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho\nabla\Phi + \rho\mathbf{g} \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{m} = \rho\mathbf{v}$  é a densidade de momento e  $E$  é a energia total.

$$\text{Consideraremos também } s = \begin{bmatrix} \rho \\ \mathbf{m} \\ E + \rho\Phi \end{bmatrix} \text{ e } f(s) = \begin{bmatrix} \rho\mathbf{v} \\ \mathbf{m}\mathbf{v} + P\mathbf{l} \\ (E + P + \rho\Phi)\mathbf{v} \end{bmatrix}$$

## 4.2 Métodos Numéricos para solução de EDPs

A solução de EDPs complexas que estão envolvidas em determinados problemas se dá através da utilização de algumas ferramentas. Muitos métodos numéricos são utilizados para encontrar soluções aproximadas de EDPs. O objetivo principal dos métodos numéricos é reduzir um problema contínuo, com infinitas variáveis, em um problema discreto, com finitas variáveis, facilitando assim a obtenção da solução [13, 18].

Existem alguns tipos de métodos que são utilizados para solucionar EDPs, dentre eles: Método de Diferenças Finitas (MDF), o Método de Elementos Finitos (MEF), o Método de Volumes Finitos (MVF), o Método de Elementos de Contorno e o Método de Análise das transformadas de Fourier.

O MDF é o método de resolução de EDPs mais antigo [22] e tem como ideia principal transformar a solução da EDP em um sistema de equações algébricas, fazendo a substituição das derivadas por diferenças [36]. Este método consiste em discretizar o domínio utilizando os valores numéricos da função. Utiliza-se a fórmula de Taylor para o cálculo das aproximações das derivadas [13, 18].

O MEF é utilizado para analisar fenômenos físicos em meios contínuos descritos pelas EDPs com condições de contorno/domínio explícitas e, em geral, com condições iniciais. Tem como ideia principal discretizar o domínio, de forma que o mesmo seja representado por uma reunião de um número finito de elementos. Em geral, independente se o domínio é plano ou curvo, esses elementos podem ser triângulos ou quadriláteros. É utilizado também para solução de problemas elípticos [14, 20].

O MVF, derivado do MEF, é uma técnica numérica que transforma EDPs que representam Leis de Conservação (ou Equações de Continuidade) em equações algébricas

discretas [16]. O método utiliza então, o balanço de massa, momento e/ou energia sobre um volume de controle (VC) determinado, onde o fluxo dessas variáveis atravessam as faces dos VC. Ele é caracterizado, assim como nos métodos anteriores, por dividir o domínio em intervalos de tamanhos finitos, os VC, calculando então uma aproximação das soluções das EDPs em cada VC [8].

As EDPs são discretizadas/transformadas em equações algébricas integrando cada elemento discretizado. O sistema de equações algébricas é resolvido para calcular os valores das variáveis dependentes de cada elemento. No processo de transformação de EDPs em equações algébricas, o método gera Matrizes Tridiagonais (MT) para, após isso, solucioná-las [16].

No MVF alguns termos da equação de conservação são transformados em fluxos e avaliados como um fluxo em cada VC. Como o fluxo que entra em um determinada célula é o mesmo que sai da mesma célula, podemos dizer que o MVF é um método estritamente conservativo. Essa importante propriedade do MVF coloca o método como o principal na análise de Dinâmica dos Fluidos [16].

Diante das características citadas anteriormente, o MVF se torna bastante adequado para a simulação numérica de diversas aplicações que envolvem a dinâmica dos fluidos, tais como transferência de massa, de calor e fluxo de um determinado fluido [16].

As MT são matrizes quadradas cujos elementos não-nulos se apresentam na diagonal principal e nas diagonais acima e abaixo da principal. Além de discretizar as equações Para melhor visualização, a Figura 4.1 é a representação de uma MT.

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} & & \\ & & & a_n & b_n & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Figura 4.1: Representação de uma matriz tridiagonal. Fonte: <https://bit.ly/2Q9648t>

Neste trabalho abordaremos o MVF e esquemas tipo Godunov utilizados para solucionar EDPs, tendo em vista que este é o método utilizado pelo *software* PLUTO, sendo o qual será neste trabalho, para realizar os cálculos dos problemas. Na seção 4.2.1 explicaremos o MVF e o que é o uso do esquema tipo Godunov, abordaremos também os

detalhes do *software* PLUTO.

### 4.2.1 Método dos Volumes Finitos

O MVF foi utilizado inicialmente para solução de equações de Euler dependentes do tempo em 2D e 3D no campo da Dinâmica dos Fluidos. É provável que esse nome tenha surgido pela referência à técnica utilizada na discretização das leis de conservação [7].

O MVF tem grande sucesso na aproximação de soluções de EDPs na forma padrão das leis de conservação, dada pela equação abaixo:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} s(x, t) dx = f(s(x_1, t)) - f(s(x_2, t)) \quad (4.5)$$

De acordo com [46], EDPs são chamadas de hiperbólicas quando a matriz jacobiana for diagonalizável e os autovalores resultantes sejam reais. Com isso, elas também podem ter uma outra propriedade chamada de bem-posta, ou seja, apresentam apenas uma solução, a matriz é única e a solução depende continuamente das condições iniciais.

Segundo [45], as equações da hidrodinâmica são hiperbólicas e bem-postas, permitindo que apliquemos a técnica de volume finito a partir da equação na versão conservativa.

A definição de uma malha é necessária para que possamos utilizar o MVF, de forma que a mesma discretize o sistema e, assim, possamos resolver as equações. A malha pode ser definida de acordo com a Figura 4.2.

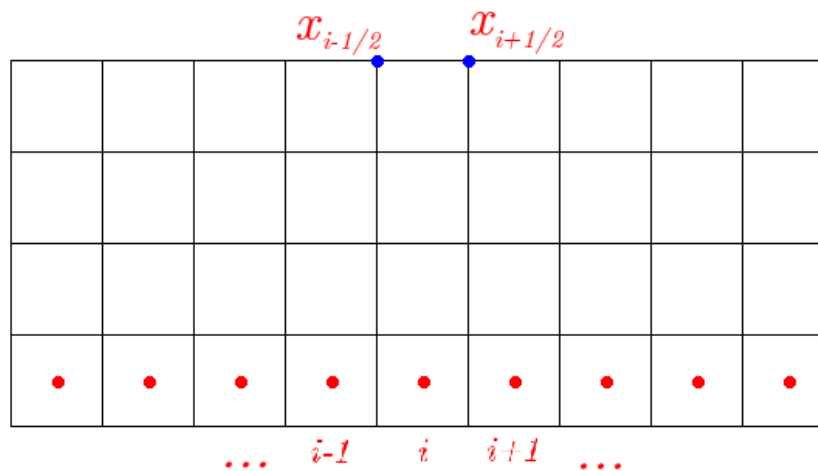


Figura 4.2: Representação da malha discretizada. Cada ponto vermelho representa a metade da região entre os pontos azuis  $x_{i-1/2}$  e  $x_{i+1/2}$ .

A Figura 4.2 nos fornece uma informação importante. Os pontos em vermelho representam o centro de cada célula de nossa malha e os pontos em azul representam as fronteiras de cada célula. As fronteiras são importantes no mapeamento das propriedades que serão estudadas em cada célula, seja a energia, densidade ou qualquer outra propriedade que desejemos estudar.

Diante do exposto, Utilizando a equação (4.5) substituindo as fronteiras como limites superior e interior, obtemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} s(x, t) dx = f(s(x_{i-1/2}, t)) - f(s(x_{i+1/2}, t)) \quad (4.6)$$

assim como em [46], com o intuito de retirar a dependência temporal da Equação (4.6), integraremos de  $t^n$  a  $t^{n+1}$ :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} s(x, t^{n+1}) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} s(x, t^n) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s(x_{i-1/2}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s(x_{i+1/2}, t)) dt \quad (4.7)$$

A partir da equação (4.7) podemos simplificar as expressões com o intuito de obtermos a notação utilizada no esquema tipo Godunov. Assim, podemos dizer que:

$$s_i^{n+1} = s_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i-1/2} - f_{i+1/2}) \quad (4.8)$$

Através da Equação (4.8) é possível perceber que a configuração espacial de um instante posterior será igual a configuração espacial de um instante anterior somado com a variação de um funcional que também depende da configuração espacial. Ainda a partir de (4.8), podemos separá-la em duas partes, dadas por:

$$s_i^n \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} s(x, t^n) dx \quad (4.9)$$

$$f_{i\pm 1/2} \equiv \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s(x_{i\pm 1/2}, t)) dt \quad (4.10)$$

de forma que, a Equação (4.9) representa a configuração espacial e a Equação (4.10) representa um funcional que depende da configuração espacial.

Por fim, as equações (4.9) e (4.10) representam o que chamamos de Método de Godunov [46, 45, 21].

## 4.3 O programa PLUTO

O programa PLUTO<sup>1</sup> [28, 31] é um *software* desenvolvido para resolver numericamente os sistemas hiperbólicos/parabólicos mistos de EDPs da hidrodinâmica (leis de conservação). O código foi inicialmente projetado com uma estrutura flexível, permitindo que diferentes algoritmos numéricos sejam combinados de forma a resolver sistemas com leis de conservação, usando as técnicas de volume finito e/ou diferenças finitas, baseando-se em esquemas do tipo Godunov.

As equações são discretizadas e solucionadas em uma malha estruturada, podendo ser estática ou adaptada. A biblioteca Chombo<sup>2</sup> é incorporada ao PLUTO e utilizada para os cálculos das chamadas RMA (Refinamento de Malha Adaptativa) com o objetivo de melhorar a resolução em zonas turbulentas da simulação.

O PLUTO apresenta 4 opções de dinâmica: HD (Hidrodinâmica), MHD (Magnetohidrodinâmica), RHD (Hidrodinâmica Relativística) e RMHD (Magnetohidrodinâmica Relativística) [46]. O *software* também disponibiliza 7 tipos de métodos de resolução de sistemas lineares: `two_shock`, `roe`, `ausm+`, `hlld`, `hllc`, `hll` e `tvdlf`. Também é possível definir a malha que será utilizada no problema, configurar o refinamento da malha através do Chombo, as condições temporais da simulação, os parâmetros de entrada e os dados de saída.

O programa foi desenvolvido inicialmente por A. Mignone, do Departamento de Física da Universidade de Turim e os módulos auxiliares foram desenvolvidos por colaboradores do INAF - Observatório Astronômico de Turim e do Departamento SCAI do Consórcio Interuniversitário CINECA.

O *software* foi desenvolvido de forma a poder operar tanto com modelo de memória compartilhada quanto com modelo de memória distribuída (através do uso de um compilador paralelizado, como o *mpicc* ou *mpif90*) de forma que seja utilizado o processamento em paralelo com o objetivo de otimizar o tempo de processamento. O programa suporta diversos tipos de saída, principalmente *.hdf5*<sup>3</sup>, *.dbl* e *.vtk*. Em nosso trabalho optamos por utilizar o *software* PLUTO associado à linguagem de programação python através do módulo pyPLUTO<sup>4</sup> desenvolvido por B. Vaidya, o qual se trata de um IPA (Interface de Programação de Aplicativos) para visualização e leitura dos dados gerados pelo *software*.

<sup>1</sup>Disponível gratuitamente em <https://plutocode.ph.unito.it/>

<sup>2</sup>Disponível em <https://commons.lbl.gov/display/chombo/>

<sup>3</sup>Disponível em [www.hdfgroup.org](http://www.hdfgroup.org)

<sup>4</sup>Disponível em <https://bit.ly/2kpS8IO> ou <https://github.com/coolastro/pyPLUTO>

A adoção do *software* PLUTO se deve à sua relevância no meio acadêmico e sua robustez comprovados pelas centenas de citações ao trabalho de [28, 31] as quais fazem uso desde código para simulações de hidrodinâmica em astrofísica.

## 4.4 Testes de comparação dos resultados do *software* PLUTO

É importante demonstrar a eficiência do código apresentando a comparação dos seus resultados com artigos clássicos da literatura. Para validar o *software* PLUTO utilizaremos o Problema Teste disponível na pasta `\PLUTO\Test_Problems\MHD\Shock_Cloud`. O problema busca analisar o impacto de um choque rápido em uma nuvem muito densa, em relação ao seu entorno. O entendimento dessa interação é importante para explicar muitos fenômenos dinâmicos, tais como a interação entre remanescentes de supernovas com o meio interestelar não-homogêneo e, até mesmo, a interação entre os ventos solares e a magnetosfera terrestre [9].

As primeiras tentativas de resolver o problema da Nuvem de Choque com simulações numéricas foram apresentadas pelos autores Sgro [37], McKee & Cowie [27], Woodward [49], Nittman, Falle & Gaskell [34], Tenorio-Tagle & Rozyczka [43], Rozyczka & Tenorio-Tagle [35], Klein, Collela & McKee [25], Belogni & Woodward [6], Stone & Norman [42], Dai & Woodward [9, 10], G. Toth [47] e U. Ziegler [52] [9].

Dessa forma, utilizaremos o artigo de G. Tóth (2000) [47] como comparação, para a demonstrar a eficiência do PLUTO. No trabalho de G. Tóth (2000) [47], o autor utiliza um código próprio em suas simulações. Neste artigo, é simulada a colisão de uma nuvem cilíndrica com um gás em repouso, conforme a Figura 4.3 a seguir:

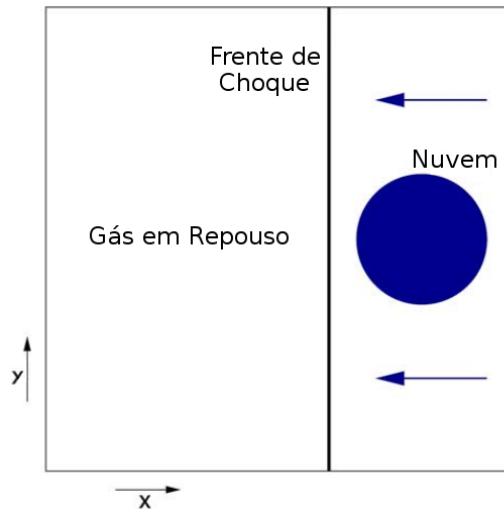


Figura 4.3: Representação da configuração inicial do problema. Adaptado de [52].

A Figura 4.3 representa a configuração inicial do Problema Teste que será utilizado na análise. Em [47] foi aplicado um código computacional bidimensional para as interações entre Choques MHD e Nuvens Densas. O eixo  $x$  é a direção da propagação do choque, enquanto o eixo  $y$  é perpendicular ao cilindro e à direção da propagação do choque. A frente de choque e o centro do cilindro estão localizados em  $x = 0,6$  e  $(x, y) = (0,8; 0,5)$ , respectivamente, de forma que o cilindro apresente um raio  $r = 0,15$ . Nossa simulação foi uma simulação bidimensional, por conta disso, a malha espacial discretizada utilizada foi de 256 células em  $x$  e 256 células em  $y$ , considerando apenas zonas retangulares uniformes. Essa malha foi escolhida para obtermos uma resolução melhor do que a utilizada por [47]. Para a resolução dos sistemas lineares, foi utilizado o método roe. Esse método, desenvolvido por Phil Roe, é uma variação do Método de Riemann utilizando esquemas tipo Godunov.

As condições iniciais são divididas em duas partes, a parte pré-choque e a parte pós-choque. Esses valores de condições iniciais do problema foram retirados do trabalho de

G. Tóth (2000) [47] e podem ser representadas por:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ p \\ u_x \\ u_y \\ u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -11.2536 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.56418958 \\ 0.56418958 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ p \\ u_x \\ u_y \\ u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.86859 \\ 167.345 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.1826182 \\ -2.1826182 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

onde  $\rho$  representa a densidade,  $p$  a pressão,  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$  são as velocidades nas respectivas direções e  $B_x$ ,  $B_y$  e  $B_z$  são os campos magnéticos nas respectivas direções. A Equação (4.11) mostra as condições iniciais antes do choque, enquanto que a Equação (4.12) apresenta os valores para o pós-choque.

O intervalo de tempo dinâmico total da simulação de [47] foi de  $t_{max} = 0.06$  e o *snapshot* mostrado como resultado representa esse momento. O motivo da escolha desse tempo foi devido ao fato do passo temporal ser ajustado dinamicamente de forma que o Número de Courant nunca exceda  $C = 0.6$ .

O Número de Courant (grandeza adimensional que trata de um fluxo que atravessa um determinado volume da malha em um intervalo de tempo) pode ser definido como o fluxo numérico advectivo adimensionalizado pelas malhas espacial e temporal e pode ser dado pela seguinte equação:

$$C = \frac{|u|\Delta t}{\Delta x}, \quad (4.13)$$

onde  $|u|$  é a magnitude da velocidade local normalizada,  $\Delta t$  é o passo temporal utilizado na simulação e  $\Delta x$  é o tamanho local dos volumes finitos da malha.

O resultado obtido pela simulação de [47] pode ser visualizado nas Figuras 4.4 e 4.5.

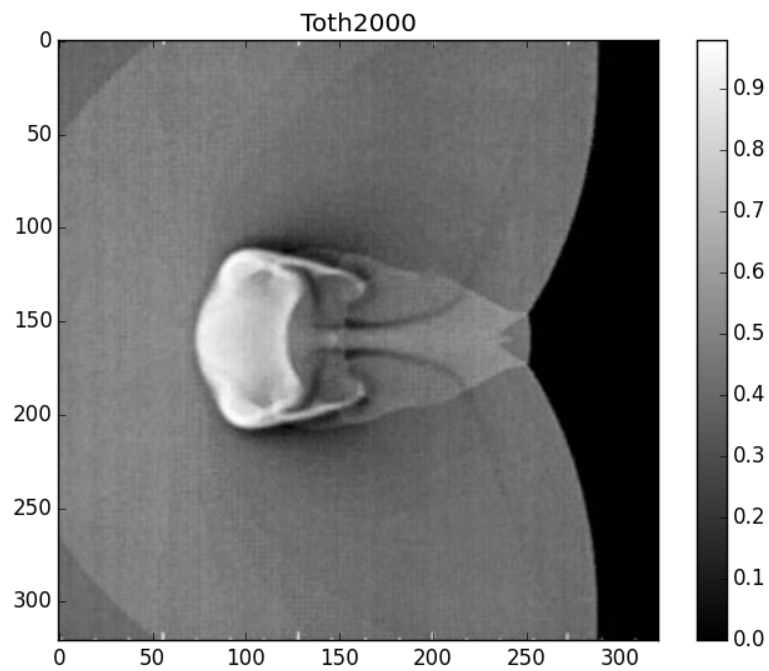


Figura 4.4: Resultado das Simulações de [47] em escala de cinza.

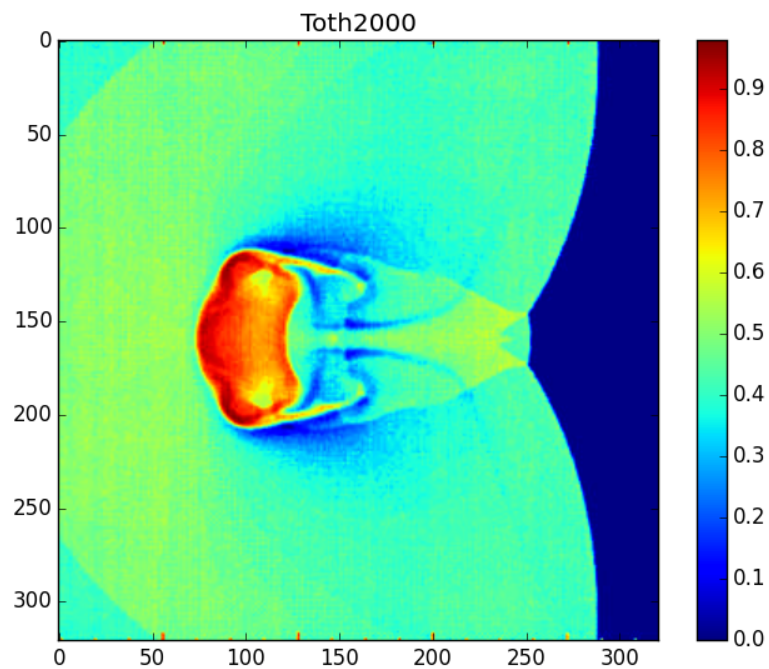


Figura 4.5: Resultado das Simulações de [47] colorido.

A Figura 4.4 é idêntica à Figura 17 de [47], enquanto que a Figura 4.5 se trata da mesma imagem mas numa escala colorida para melhor visualização do perfil de gradiente da imagem original.

O intervalo de tempo dinâmico total de nossa simulação foi de  $t_{max} = 0.08$ , escolhido para ultrapassar o tempo utilizado por [47] de forma que possamos localizar o passo da simulação que melhor se compara a simulação de [47]. O passo temporal  $dt$  adotado foi de  $1 \times 10^{-6}$  e o intervalo de tempo de gravação dos dados (em formato de arquivo *.dbl*) foi de  $t_{dbl} = 3 \times 10^{-5}$ . Diante disso, foram gerados 765 arquivos *.dbl* (contendo informações relacionadas à simulação tais como: densidade, pressão, velocidade, campo magnético, entre outros).

Em nossa análise, utilizamos uma subtração de imagens, que pode ser explicada pela equação abaixo:

$$I_C = |I_A - I_{REF}| \quad , \quad (4.14)$$

onde  $I_C$  representa a imagem resultante da subtração,  $I_A$  representa a imagem de gerada pelo *software* PLUTO,  $I_{REF}$  representa a imagem de referência (que em nosso caso é o resultado encontrado por [47]). Numericamente, a imagem  $I_C$  é calculada como o resultado das diferenças quadráticas *pixel* à *pixel* entre  $I_A$  e  $I_{REF}$ . As três imagens,  $I_C$ ,  $I_A$  e  $I_{REF}$ , precisam ser de mesmo tamanho,  $M \times N$  onde os valores de cada *pixel* com coordenadas  $j$  e  $k$  são representados por  $u_{j,k}$ .

A determinação da melhor imagem obtida em nossa simulação comparativamente a imagem gerada por [47] foi implementada a partir do cálculo da soma das diferenças quadráticas, definida pela seguinte equação:

$$m = \frac{\sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \sqrt{(u_{j,k} - u_{j,k}^{ref})^2}}{\sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N |u_{j,k}^{ref}|} \quad . \quad (4.15)$$

Note que o denominador da Equação (4.15) serve como um critério de normalização da soma das diferenças quadráticas no numerador desta equação.

Através da Figura 4.6, é possível notar que o instante de tempo dinâmico da nossa simulação com o menor valor  $m$ , ou seja, que mais se assemelha da imagem de referência de [47], localiza-se entre  $t_{sim} = 0.06$  e  $t_{sim} = 0.065$ , mais precisamente no instante  $t_{sim} = 0.06281687$ , apresentando um valor  $m = 0.15822403$ . Ainda na Figura 4.6, podemos perceber também que  $t_{sim} = 0.06281687$  é um mínimo global. Foram realizadas sucessivas simulações com redução tanto do valor de passo de tempo  $dt$  quanto do valor de tempo de

gravação  $t_{dbl}$  entre cada uma das simulações, de modo a melhor identificar instante  $t_{sim}$  com menor valor associado de soma de diferenças quadráticas  $m$ .

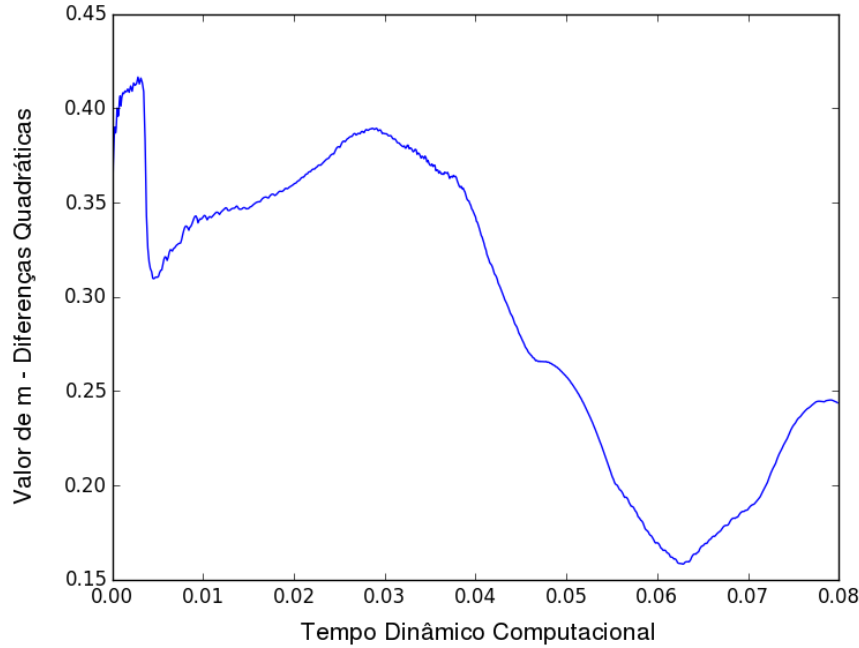


Figura 4.6: Localização do *.dbl* com menor valor de  $m$ .

A Tabela 4.1 mostra o tempo de simulação ( $t_{sim}$ ) e seus respectivos valores  $m$  de somas de diferenças quadráticas, onde apresentamos em vermelho a melhor combinação desses valores que indica o instante da imagem da simulação realizada com o *software* PLUTO que mais se assemelha com a imagem do artigo de referência [47].

$t_{sim}$	$m$	$t_{sim}$	$m$	$t_{sim}$	$m$	$t_{sim}$	$m$
0.06087	0.16553	0.06165	0.16187	0.06242	0.15859	0.06320	0.15948
0.06097	0.16508	0.06174	0.16150	0.06252	0.15855	0.06330	0.15952
0.06107	0.16431	0.06184	0.16092	0.06262	0.15850	0.06339	0.15950
0.06116	0.1640	0.06194	0.16103	0.06271	0.15844	0.06349	0.15940
0.06126	0.16380	0.06204	0.16080	<b>0.06281</b>	<b>0.15822</b>	0.06359	0.15987
0.06136	0.16313	0.06213	0.16018	0.06291	0.15830	0.06369	0.16063
0.06145	0.16202	0.06223	0.1591	0.06301	0.15890	0.06378	0.16178
0.06155	0.1619	0.0623	0.15872	0.06310	0.15929	0.06388	0.16266

Tabela 4.1: Valores temporais da simulação  $t_{sim}$  e os seus respectivos valores de  $m$ .

As Figuras 4.7 e 4.8 foram geradas a partir dos dados obtidos pelo *software* PLUTO. Foi escrito um programa na linguagem de programação Python afim de extrair as infor-

mações diretamente do arquivo *.dbl* e geração as figuras utilizadas no trabalho.

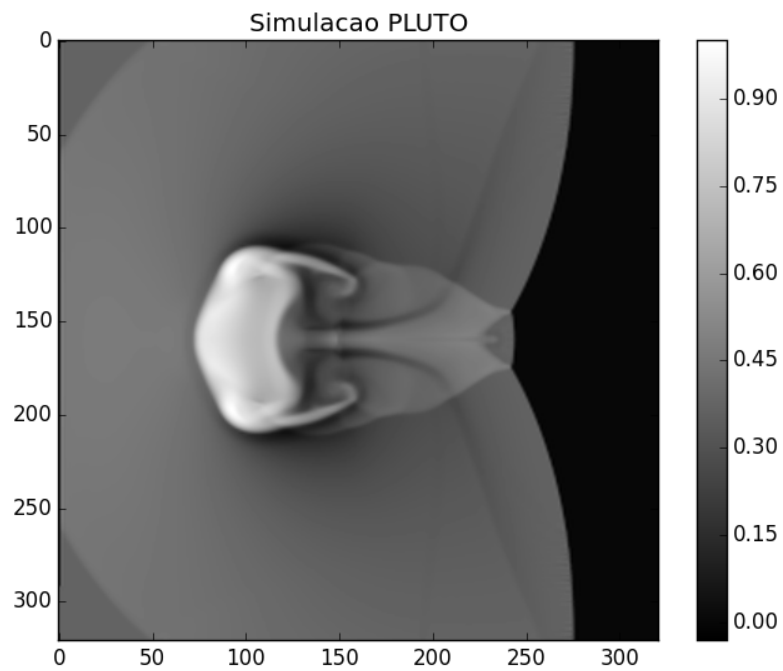


Figura 4.7: Resultado das Simulações em escala de cinza.

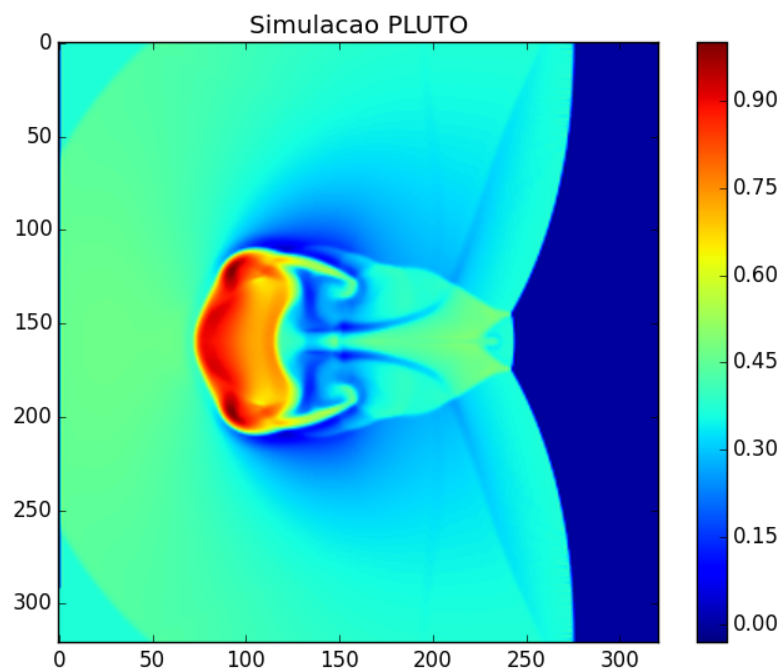


Figura 4.8: Resultado das Simulações colorido.

As Figuras 4.9 e 4.10 representam a imagem  $I_C$  de diferenças quadráticas *pixel a pixel* entre a imagem gerada a partir dos dados obtidos pelo *software* PLUTO e da imagem disponibilizada por [47], conforme a Equação (4.14), onde as imagens foram cortadas no eixo  $x$  a partir do *pixel* 251.

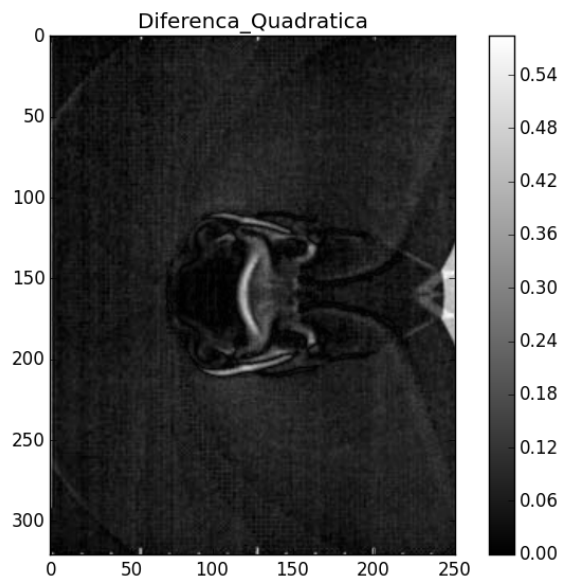


Figura 4.9: Resultado das Diferenças Quadráticas entre [47] e nossas simulações em escala de cinza.

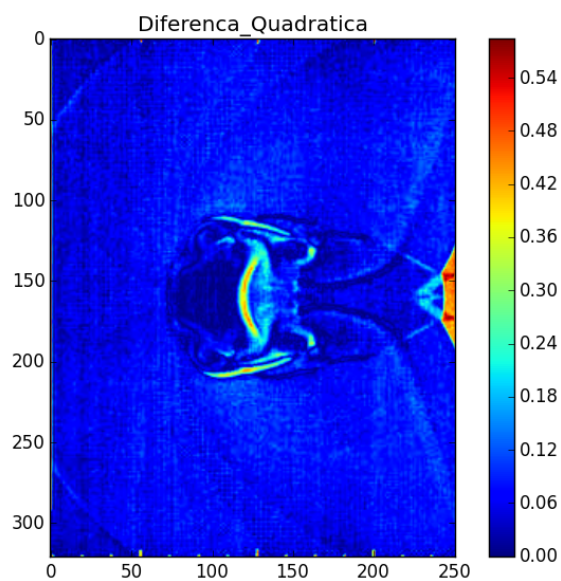


Figura 4.10: Resultado das Diferenças Quadráticas entre [47] e nossas simulações colorido.

As Figuras 4.11 e 4.12 representam a Equação (4.14) com a desconsideração do módulo, ou seja,  $I_C = I_A - I_{REF}$ .

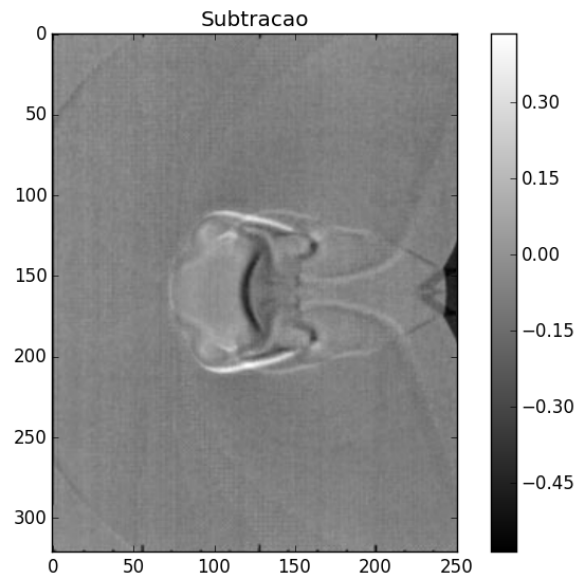


Figura 4.11: Imagem de Subtração em escala de cinza.

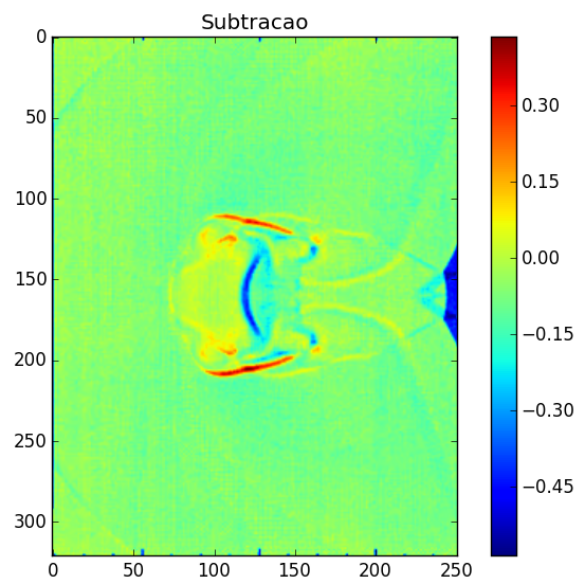


Figura 4.12: Imagem de Subtração colorida.

O valor médio da contagem de *pixels* das Figuras 4.9 e 4.10 é 0.0721118689855 o que nos mostra que a diferença quadrática aplicada apresenta um resultado próximo de zero.

O valor médio da contagem de *pixels* dessas figuras é  $-0.067651338875$  e podemos notar que a escala de cores tem seu máximo, em torno de 0.45, ou seja, abaixo do máximo das imagens normalizadas anteriores, Figuras 4.4, 4.5, 4.9 e 4.10, que é 1.0.

A imagem colorida nos permite visualizar melhor as regiões onde existem pequenas discrepâncias entre a simulação realizada com o *software* PLUTO e a simulação de [47], principalmente nas regiões de borda da Nuvem de Choque. Nos *pixels* mais alinhados ao eixo  $x$  essa diferença se apresenta positiva, ou seja,  $I_A$  apresenta um valor maior do que  $I_{REF}$ , enquanto que, na região posterior à Nuvem de Choque, alinhado ao eixo  $y$ , apresenta um valor negativo, ou seja  $I_A$  apresenta um valor menor do que  $I_{REF}$ .

Na região frontal da Nuvem de Choque não apresenta diferença, sendo o valor praticamente nulo, isso nos permite analisar que esse é o instante de tempo em que mais se assemelham as imagens, tratando-se do mesmo tempo dinâmico de simulação.

As discrepâncias apresentadas nas Figuras 4.11 e 4.12, e citadas anteriormente, são justificadas pelo fato do PLUTO resolver melhor as Nuvens de Choque em relação ao código adotado por [47]. Isso ocorre pela utilização de uma RMA disponibilizada pelo Chombo, de forma que esse ajuste de regiões (refinamento da malha que o Chombo nos fornece) seja mais adequado do que o que é utilizado em [47].

Nas regiões de frente de choque, como o decaimento de brilho nas duas imagens é muito abrupto é natural que sejam bem definidos em qualquer simulação, independente do grau de resolução dos *pixels*. Já em regiões de decaimento mais suave, a imagem mais confiável será aquela que apresenta um melhor refinamento de resolução, neste caso a imagem gerada pela *software* PLUTO. As Figuras 4.7 e 4.8 apresentam uma definição visivelmente melhor do que as Figuras 4.4 e 4.5, o que se deve ao fato da definição utilizada em nossa simulação ser superior à utilizada em [47].

Diante do exposto, é possível dizer que as imagens geradas em nossas simulações são mais confiáveis do que as imagens de [47] e essa confiabilidade se deve à utilização do *software* PLUTO e Chombo.

# Capítulo 5

## Resultados

### 5.1 Descrição do Problema

As simulações de discos de acreção podem ser divididas em dois tipos: local e global. Nas simulações locais uma pequena parte do fluxo de acreção é simulada de forma que sejam resolvidas em equações MHD em parte do sistema cartesiano enquanto que para os modelos globais, as simulações são realizadas em uma grande região do disco e geralmente trabalha-se em coordenadas esféricas e/ou cilíndricas [40].

Nosso trabalho visa simular o comportamento global de um disco de acreção no contexto de uma MHD em três dimensões, isotérmica e ideal. As equações são resolvidas utilizando um formalismo mais geral do esquema FARGO (Advecção Rápida na Rotação de Objetos Gasosos) original para equações de MHD para diferentes sistemas de coordenadas no contexto de esquemas tipo Godunov [29]. As simulações MHD de discos de acreção permitirão a investigação da turbulência carregada pela IMR [17]. Para essa investigação, será utilizado o código PLUTO, que permite simular discos de acreção ou discos protoplanetários. No contexto da formação planetária, as simulações de discos protoplanetários se apresentam como importante ferramenta no estudo da dinâmica do gás e de seu impacto com outras partículas ou planetas [29]. No contexto de objetos compactos, as simulações de discos de acreção se apresentam como importante ferramenta no estudo da turbulência do plasma ionizado e no estudo do transporte de momento angular nestes sistemas [29].

Nosso trabalho se baseia em simulações que buscam explorar o comportamento global de um disco de acreção sob um campo magnético fraco, como em [40].

O problema utilizado para obter os resultados é o FARGO-MHD que está disponível em `\MHD\FARGO\Spherical_Disk` e que trata de um disco de acreção magnetizado tri-

dimensional em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ . O modelo do disco pode ser encontrado em [29, 17, 40].

Inicialmente, consideraremos equações MHD ideais que podem ser escritas como Leis de Conservação de Sistemas não Lineares abaixo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho v v^T - \mathbf{B} \mathbf{B}^T] + \nabla p_t = -\rho \nabla \Phi \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p_t)v - (v \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}] = -\rho v \cdot \nabla \Phi \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (v \times \mathbf{B}) = 0 \quad (5.4)$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $v$  é a velocidade do fluido,  $\Phi$  é o potencial gravitacional,  $\mathbf{B}$  é o campo magnético,  $p_t = P + \mathbf{B}^2/2$  é a pressão total considerando as contribuições térmicas e magnéticas [29]. A densidade de energia  $E$  é dada por:

$$E = \frac{p}{\Gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 \quad (5.5)$$

onde uma equação de estado com taxa de calor específico  $\Gamma$  é usada.

Para melhor resolver as equações e nos apresentar um melhor resultado, devemos decompor a velocidade do fluido como  $v = v' + w$ , onde  $w$  é a velocidade senoidal e  $v'$  é a velocidade residual. Dessa forma, reescreveremos as equações (5.1), (5.2), (5.3) e (5.4) substituindo  $v = v' + w$  [29]. Logo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v') + w \cdot \nabla \rho = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \rho v'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v' v' - \mathbf{B} \mathbf{B} + I p_t) + w \cdot \nabla (\rho v') = S'_m - \rho \nabla \Phi \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial E'}{\partial t} + \nabla \cdot [(E' + p_t)v' - (v' \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}] + w \cdot \nabla E' = S'_E - \rho v' \cdot \nabla \Phi \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (v' \times \mathbf{B}) - \nabla \times (w \times \mathbf{B}) = 0 \quad (5.9)$$

onde  $I$  é a matriz identidade e  $E'$  a densidade de energia residual, definida por [29]:

$$E' = \frac{P}{\Gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(v')^2 + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 \quad (5.10)$$

e os termos adicionais  $S'_m = -\rho v \cdot \nabla w$  e  $S'_E = -\rho v' \cdot (v \cdot \nabla w) + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla w)$ .

O modelo do nosso problema consiste basicamente de um equilíbrio inicial em uma

massa pontual com gravidade dada por  $1/r^2$  e o perfil de equilíbrio final pode ser dado por:

$$\rho = \frac{1}{R^{3/2}} \exp \left[ \frac{\sin(\theta) - 1}{c_0^2} \right] \quad (5.11)$$

$$P = c_s^2 \rho \quad (5.12)$$

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{r}} \left( 1 - \frac{5}{2 \sin \theta} c_0^2 \right) \quad (5.13)$$

onde  $R = r \sin \theta$  é o raio cilíndrico,  $c_0 = H/R$  e  $c_s = H/R^{3/2}$  é a velocidade do som. Temos também, conforme citado anteriormente,  $H$  como sendo a escala de altura, que é proporcional ao raio cilíndrico. Em nossa simulação, o período de rotação da órbita mais interna é  $\Delta T = 2\pi$ .

O potencial do campo magnético poloidal utilizado na simulação pode ser escrito como:

$$A_\phi = A_0 \frac{\sin(2\pi R) - R \cos(2\pi R)}{R} \exp \left[ - \left( \frac{z}{H} \right)^4 \right] \exp \left[ - \left( \frac{R - 6}{2} \right)^4 \right] \quad (5.14)$$

onde  $A_0$  é uma constante que descreve o plasma. O termo exponencial no lado direito confina o campo magnético em torno de  $R = 6$  e o potencial vetor se anula identicamente para  $z/H > 2.5$  ou  $R < 2.5$ .

## 5.2 Abordagem do Problema FARGO

De acordo com o problema exposto na seção anterior, serão realizadas as simulações. Diante disso, utilizaremos diferentes escalas de altura  $H/R$  para analisar o comportamento de  $\rho$  em cada caso. Como comparação utilizaremos os artigos de [51, 50, 33]. A escala de altura  $H/R$  representa a relação entre o raio do disco e a sua espessura. Adotamos 5 escalas para serem analisadas: 0.04, 0.05, 0.06, 0.08 e 0.10.

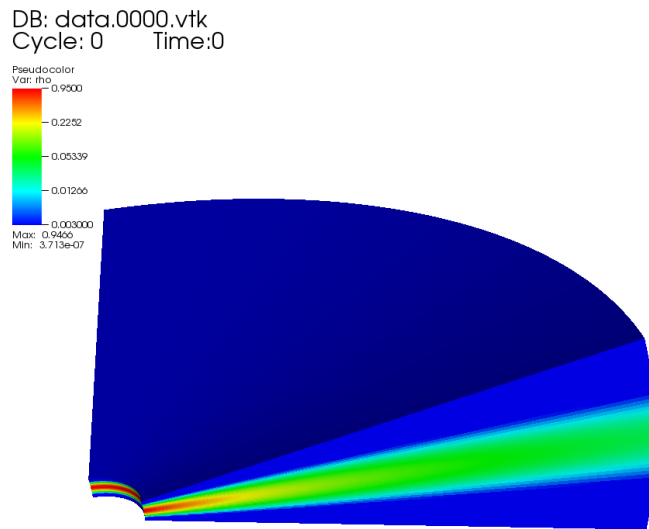


Figura 5.1: Representação gráfica inicial do disco de acreção com  $H/R = 0.04$ .

A Figura 5.1 representa a configuração inicial de um disco de acreção com escala de altura  $H/R = 0.04$ .

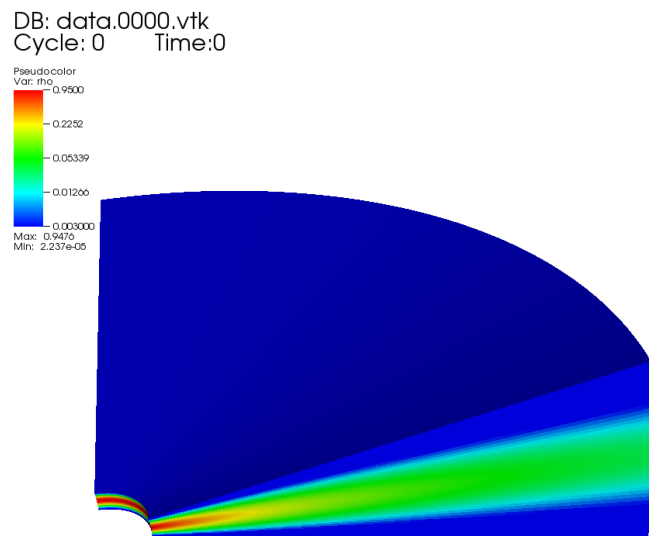


Figura 5.2: Representação gráfica inicial do disco de acreção com  $H/R = 0.05$ .

A Figura 5.2 representa a configuração inicial de um disco de acreção com escala de altura  $H/R = 0.05$ .

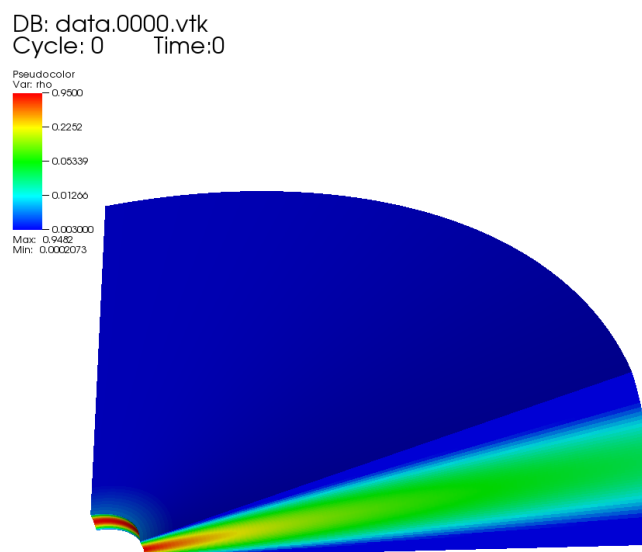


Figura 5.3: Representação gráfica inicial do disco de acreção com  $H/R = 0.06$ .

A Figura 5.3 representa a configuração inicial de um disco de acreção com escala de altura  $H/R = 0.06$ .

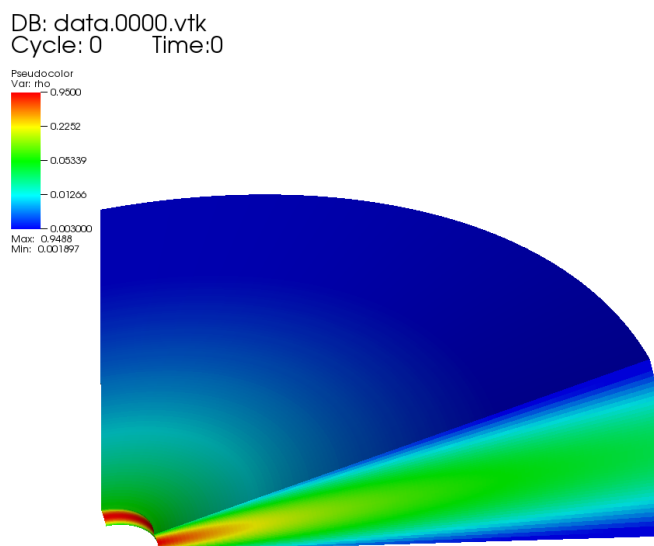


Figura 5.4: Representação gráfica inicial do disco de acreção com  $H/R = 0.08$ .

A Figura 5.4 representa a configuração inicial de um disco de acreção com escala de altura  $H/R = 0.08$ .

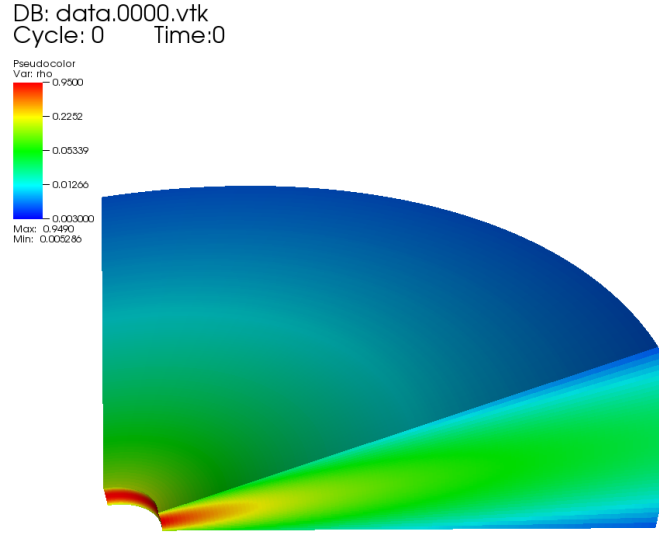


Figura 5.5: Representação gráfica inicial do disco de acreção com  $H/R = 0.1$ .

A Figura 5.5 representa a configuração inicial de um disco de acreção com escala de altura  $H/R = 0.1$ .

É possível perceber através das Figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 que conforme aumentamos a escala de altura, maior é a distribuição de matéria e maior é a quantidade de matéria em todo o disco.

Assim como em [17, 29], podemos calcular o valor do parâmetro  $\alpha$  pela seguinte equação:

$$\alpha = \frac{\int \rho \left( \frac{v'_\phi v'_R}{c_s^2} - \frac{B_\phi B_R}{4\pi \rho c_s^2} \right) dV}{\int \rho dV}, \quad (5.15)$$

e a viscosidade  $\nu = \alpha H c$ , como abordamos anteriormente. Diante disso, é possível encontrar os valores de viscosidade  $\nu = 10^{15} \text{cm}^2/\text{s}$  e do parâmetro  $\alpha = 0.004$ .

### 5.2.1 Análise dos Dados do FARGO

As simulações realizadas neste trabalho tratam de um disco de acreção inicialmente não magnetizado, simulado em 3 dimensões com coordenadas esféricas  $(r, \phi, \theta)$  e resolução da malha estruturada de  $128 \times 48 \times 192$ . Em  $r$  e em  $\theta$  adotamos zonas uniformes retangulares e em  $\phi$  adotamos zonas esticadas (stretched) e uniformes retangulares de forma que se adequem da melhor forma à simetria do problema em questão. Desta forma,  $r$  varia no

intervalo equivalente entre 1 e 10 U.A. (distância entre o planeta Terra e o Sol, cerca de 150 milhões de quilômetros),  $\phi$  varia de  $0.44\pi$  até  $0.56\pi$  (equivalente a  $[\pi/2 - \delta, \pi/2 + \delta]$  onde  $\delta = (3/50)\pi$ ) e, por fim,  $\theta$  varia de 0 até  $\pi/2$ . Para definição da malha, foram feitos testes de forma à adequar melhor ao nosso problema e apresentar melhores resultados.

Para efeito de visualização, as Figuras 5.6 e 5.7 representam os planos considerados nos cálculos de  $\rho$  em cada disco.

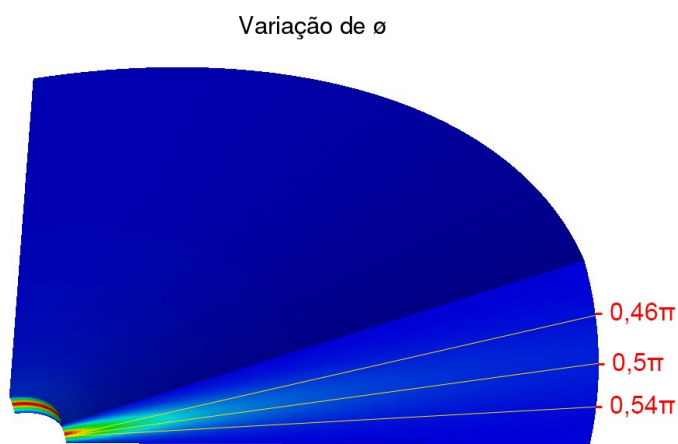


Figura 5.6: Representação dos planos considerados em  $\phi$ .

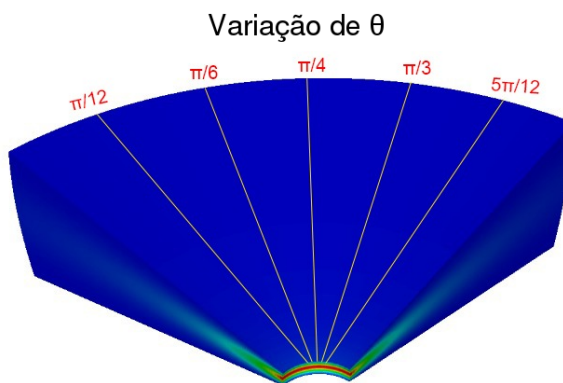


Figura 5.7: Representação dos planos considerados em  $\theta$ .

O método utilizado para solução de sistemas lineares foi `h11d`. O Método HLLD (Harten-Lax-van Leer com contato e modo Alfvén) é baseado no Método de Riemann para solução de sistemas lineares e depende da suposição aproximada da velocidade constante e pressão total, produzindo então uma representação da solução onde são formadas ondas de entropia [30]. De acordo com [30] é o método mais adequado para solução de sistemas que envolvem a magnetohidrodinâmica.

O intervalo de tempo dinâmico total de nossa simulação foi de  $t_{max} = 628.319$  que equivale a 1000 órbitas do disco, para que fosse possível verificar a sua evolução. A escolha do tempo total deve-se ao fato do passo temporal ser ajustado dinamicamente, de forma que o Número de Courant nunca exceda  $C = 1.1$ .

O passo temporal  $dt$  adotado foi de  $1 \times 10^{-1}$  e o intervalo de tempo de gravação dos dados (em formato de arquivo *.vtk*) foi de  $t_{vtk} = 1.0$ . Diante disso, foram gerados 630 arquivos tipo *.vtk* (contendo informações relacionadas à simulação tais como: densidade, pressão, velocidade, campo magnético, entre outros).

As Figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 foram geradas a partir dos dados gerados pelas simulações feitas com o *software* PLUTO, e visualizadas com o uso do programa VisIt<sup>1</sup>.

O VisIt é um programa de código aberto utilizado como ferramenta de visualização e análise. Ele apresenta uma gama de configurações que permite que sejam visualizados uma grande variedade de dados, sejam eles em 2 ou 3 dimensões e com malhas adaptativas e estruturadas. Com ele é possível visualizar e analisar dados de mais de 120 formatos científicos, tais como o *.dbl* e *.vtk* que são padrões de saída do *software* PLUTO.

### 5.2.2 Descrição da Máquina

Para que fosse possível realizar as simulações, foi utilizado um computador com Placa Mãe Asus P8H77-V LE, Memória DDR3 1333MHz Corsair de 8Gb, Processador IntelCore i7 3770K 350GHz Turbo Boost 3ª geração, Placa de Vídeo EVGA GeForce GTX Titan Black com memória dedicada de 6Gb DDR5, Fonte ATX 850W.

### 5.2.3 Resultados da Simulação

A seguir mostramos os gráficos de perfil de densidade  $\rho$  para diferentes escalas de altura  $H/R$ , em diferentes instantes temporais das simulações. Nos gráficos assumimos dois valores para  $\phi$ , sendo  $0.46\pi$ , que equivale à  $\pi/2 - \delta$  onde  $\delta = (1/25)\pi$ , e  $0.5\pi$  que equivale ao meio do plano (ou *midplane*). Os valores abaixo do plano são simétricos à parte de cima do plano e portanto os resultados obtidos para tais valores são iguais. Por exemplo,  $0.54\pi$  que equivale à  $\pi/2 + \delta$  apresenta os mesmos resultados obtidos para  $0.46\pi$ . Além disso, tomamos a média da densidade  $\rho$  ao longo da variação de  $\theta$ , a fim de se tomar valores mais representativos da densidade. Isso se justifica porque a densidade depende basicamente de  $R$  e  $\phi$  e independe significativamente de  $\theta$ . É importante lembrar

<sup>1</sup>Disponível gratuitamente em <https://wci.llnl.gov/simulation/computer-codes/visit/>

as unidades de cada grandeza física. A densidade é dada em  $g/cm^3$ , o campo magnético é dado em  $T$ , a taxa de acreção dada em unidade de massa por unidade de tempo ( $M_{\odot}/ano$ ) e a pressão é dada em  $Pa$ .

Para mostrar que a densidade  $\rho$  independe significativamente de  $\theta$ , no Apêndice A plotamos o valor da densidade ao longo de do raio para diferentes valores de  $\theta$ .

### 5.2.3.1 Evolução Temporal do Disco com escala de altura $H/R = 0.04$

Abordaremos um disco com escala de altura  $H/R = 0.04$  e como se dá a evolução temporal do mesmo ao longo de todo o tempo de simulação.

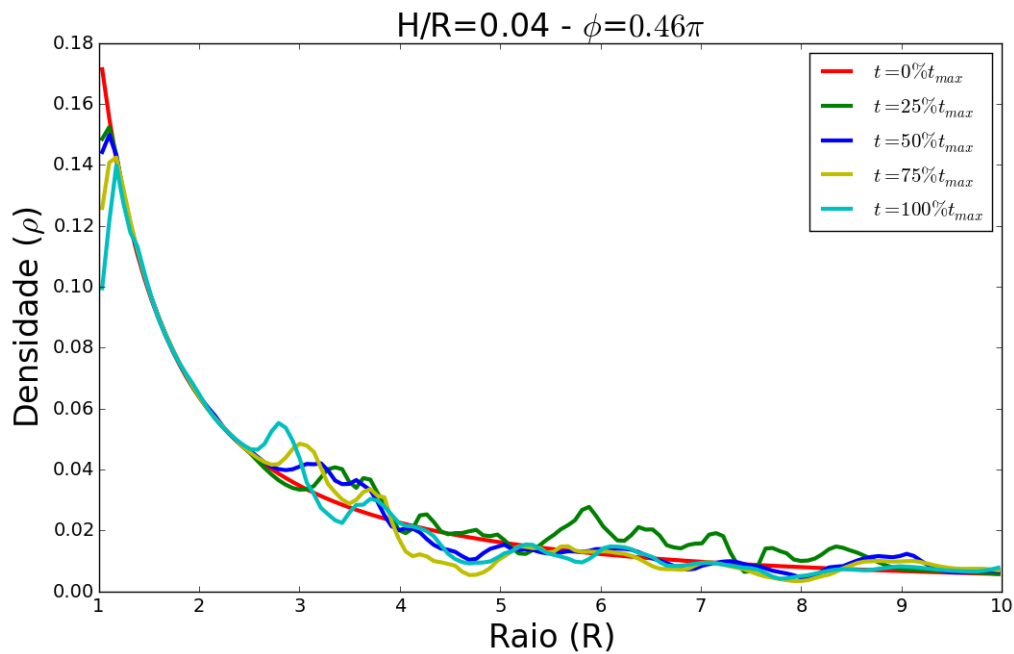


Figura 5.8: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para  $H/R = 0.04$ .

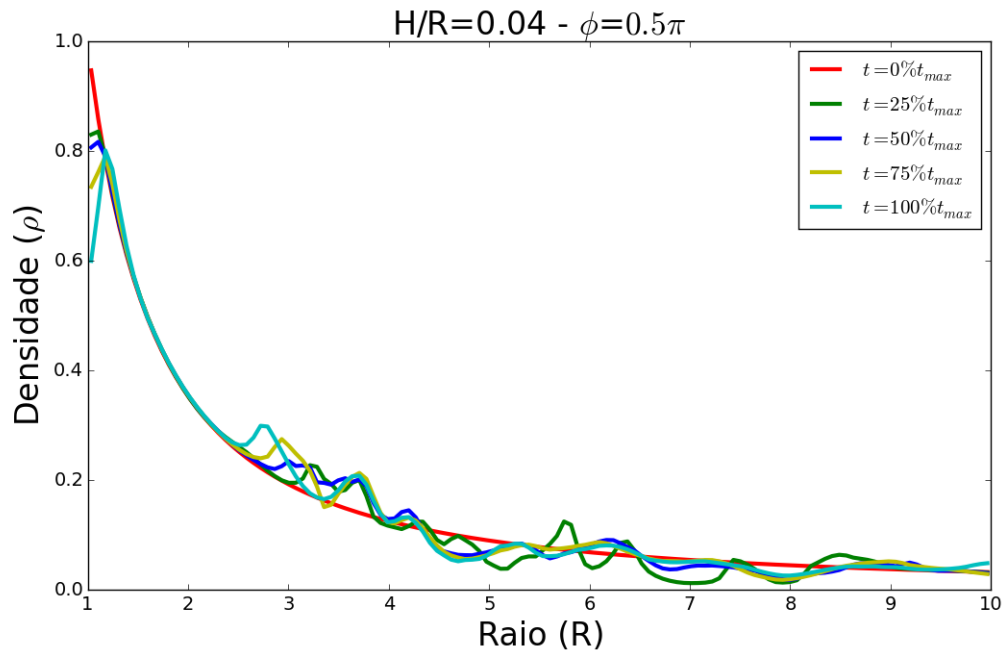


Figura 5.9: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para  $H/R = 0.04$ .

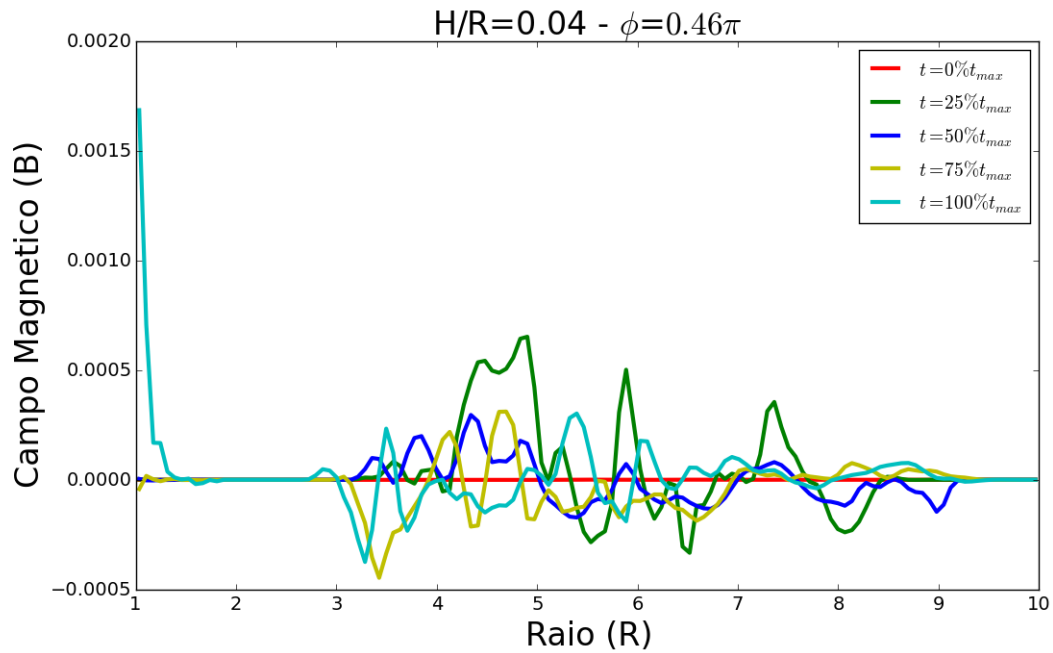


Figura 5.10: Gráfico de Raio  $\times$  Componente radial do Campo Magnético  $B_r$  para  $H/R = 0.04$  com  $\phi = 0.46\pi$ .

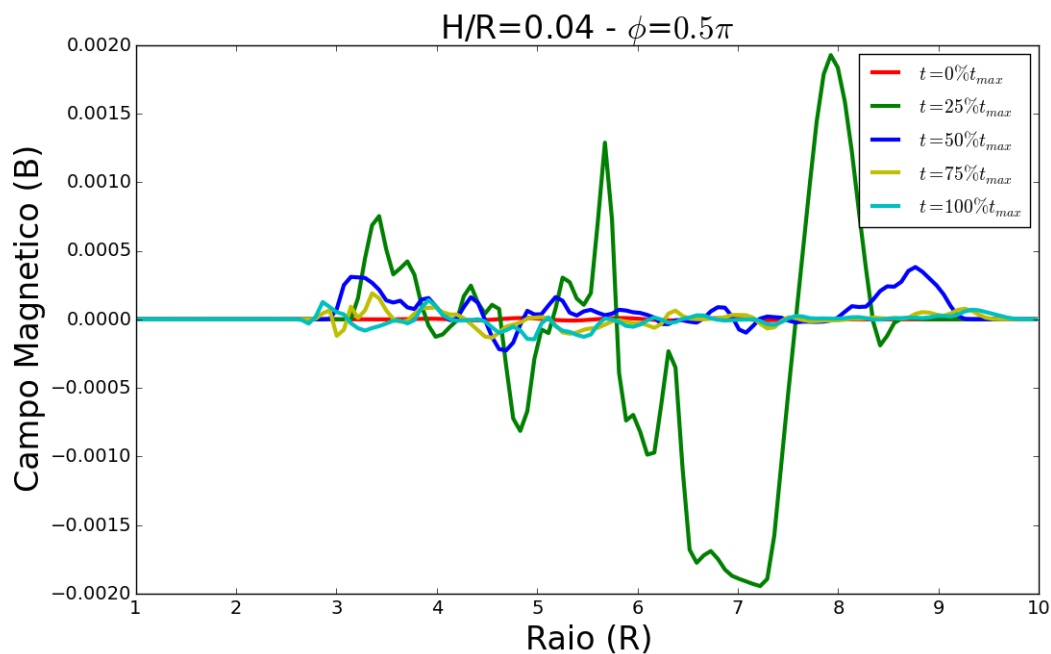


Figura 5.11: Gráfico de Raio  $\times$  Componente radial do Campo Magnético  $B_r$  para  $H/R = 0.04$  com  $\phi = 0.5\pi$ .

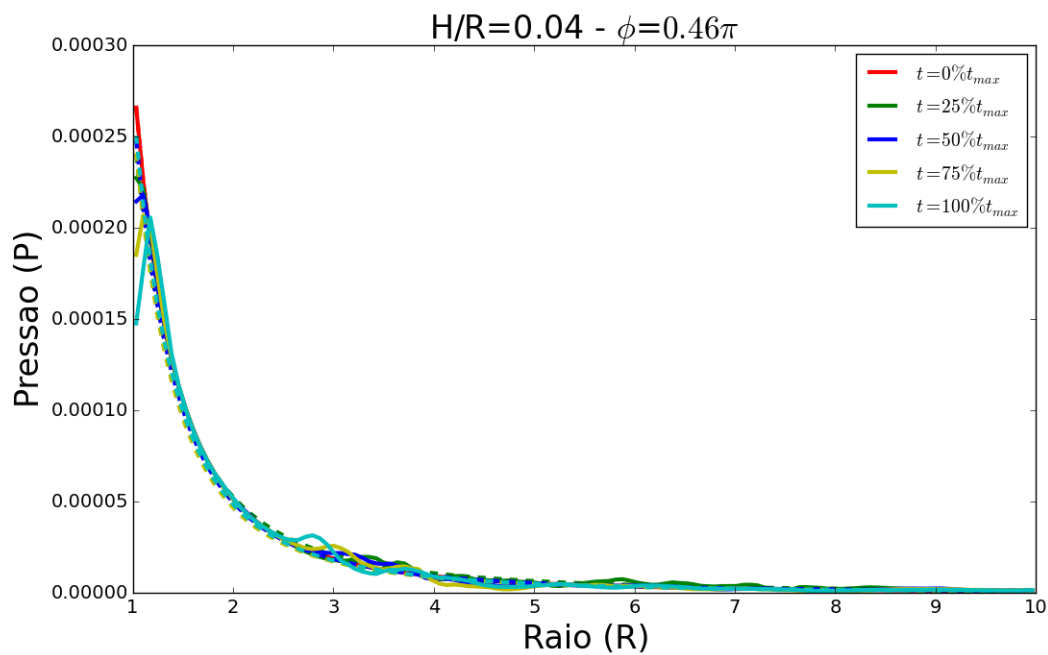


Figura 5.12: Gráfico de Raio  $\times$  Pressão para  $H/R = 0.04$ .

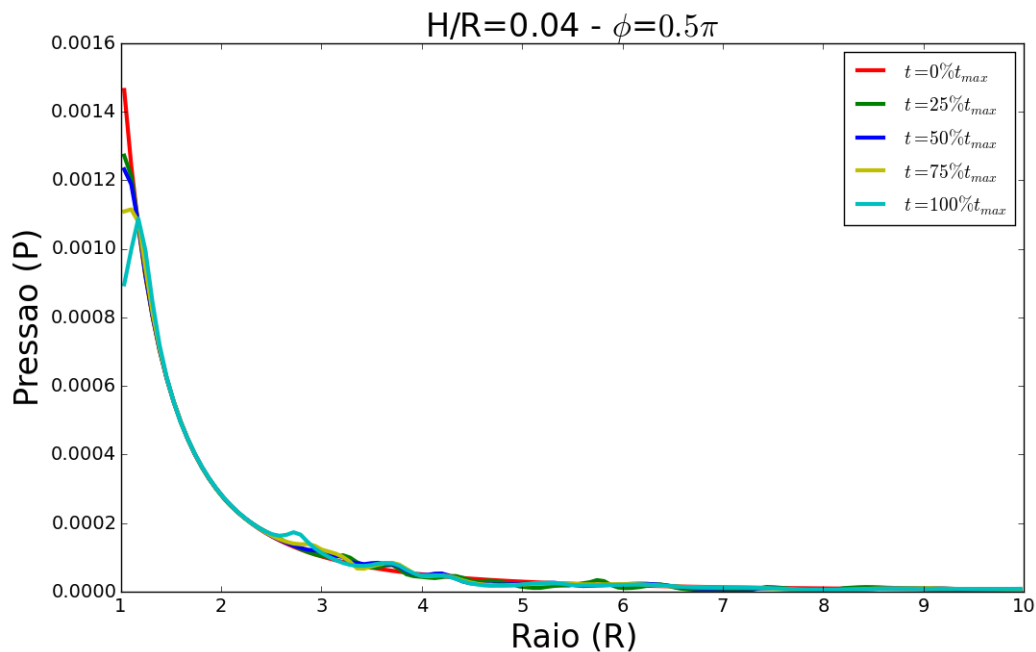


Figura 5.13: Gráfico de Raio  $\times$  Pressão para  $H/R = 0.04$ .

### 5.2.3.2 Evolução Temporal do Disco com escala de altura $H/R = 0.05$

Abordaremos a evolução temporal de um disco com escala de altura  $H/R = 0.05$ .

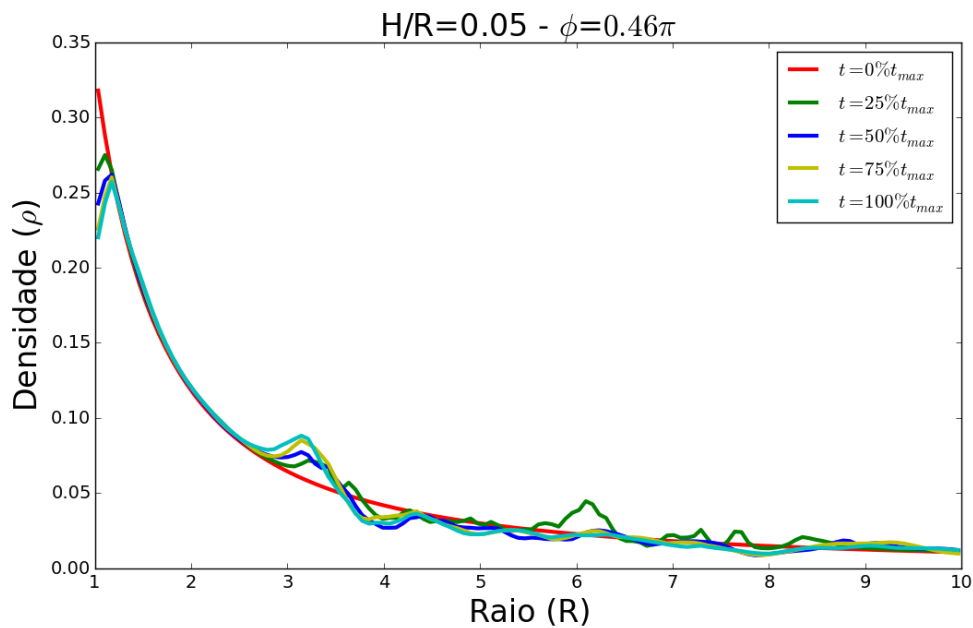


Figura 5.14: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para  $H/R = 0.05$ .

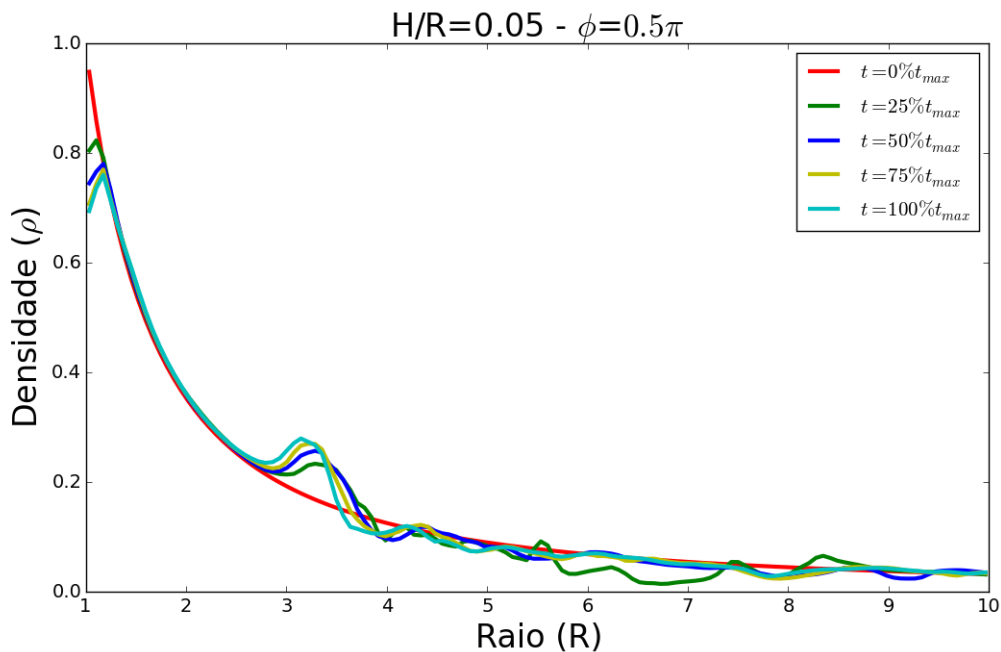


Figura 5.15: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para  $H/R = 0.05$ .

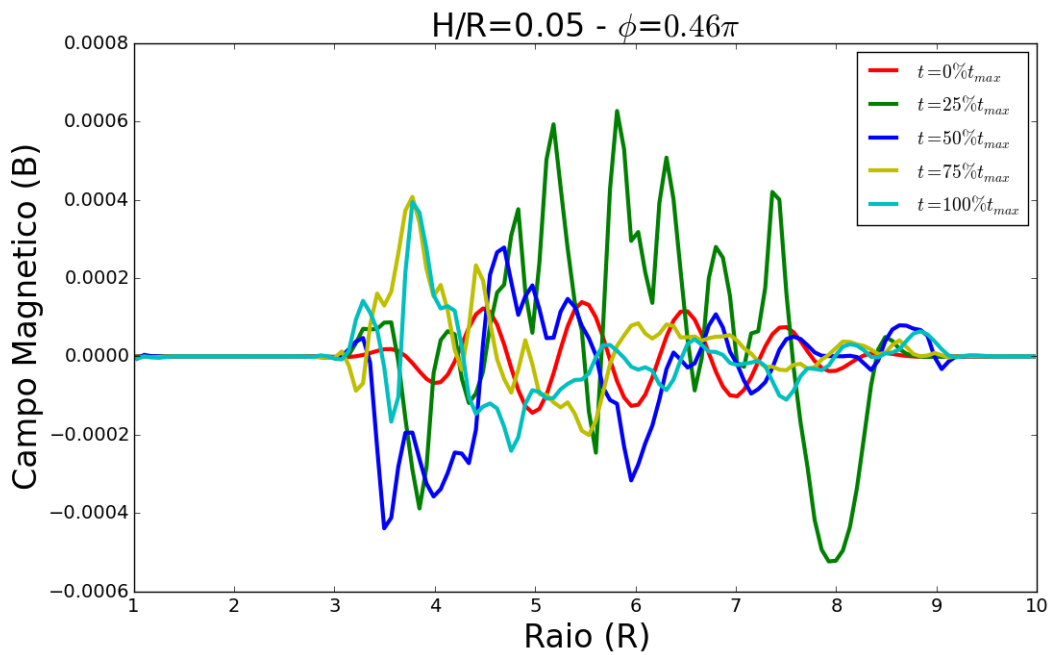


Figura 5.16: Gráfico de Raio  $\times$  componente radial do Campo Magnético  $B_r$  para  $H/R = 0.05$  com  $\phi = 0.46\pi$ .

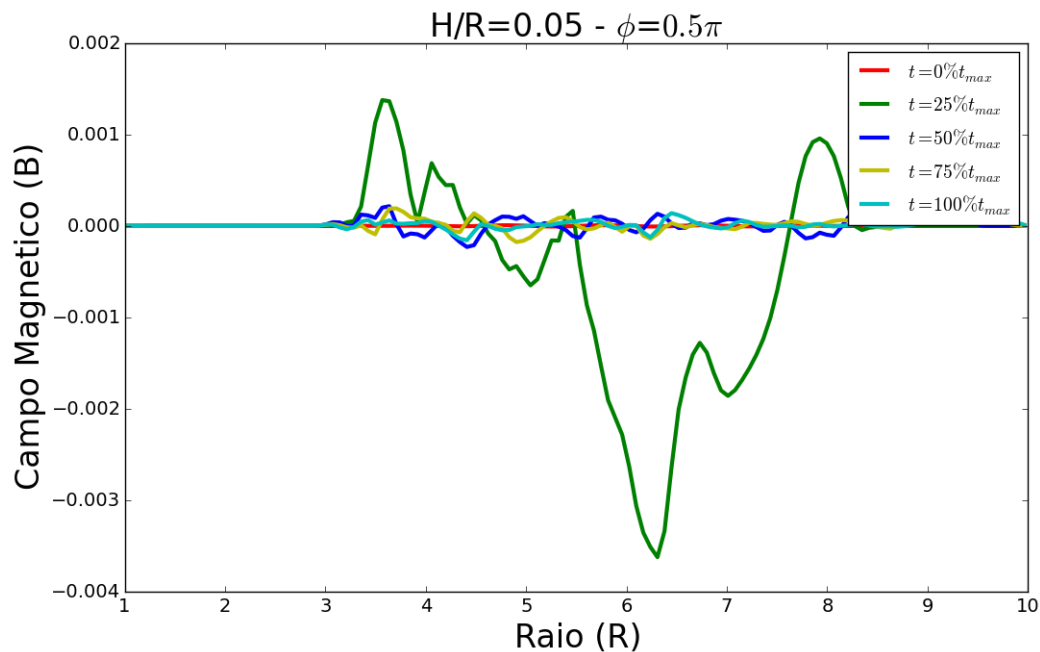


Figura 5.17: Gráfico de Raio  $\times$  Componente radial do Campo Magnético  $B_r$  para  $H/R = 0.05$  com  $\phi = 0.5\pi$ .

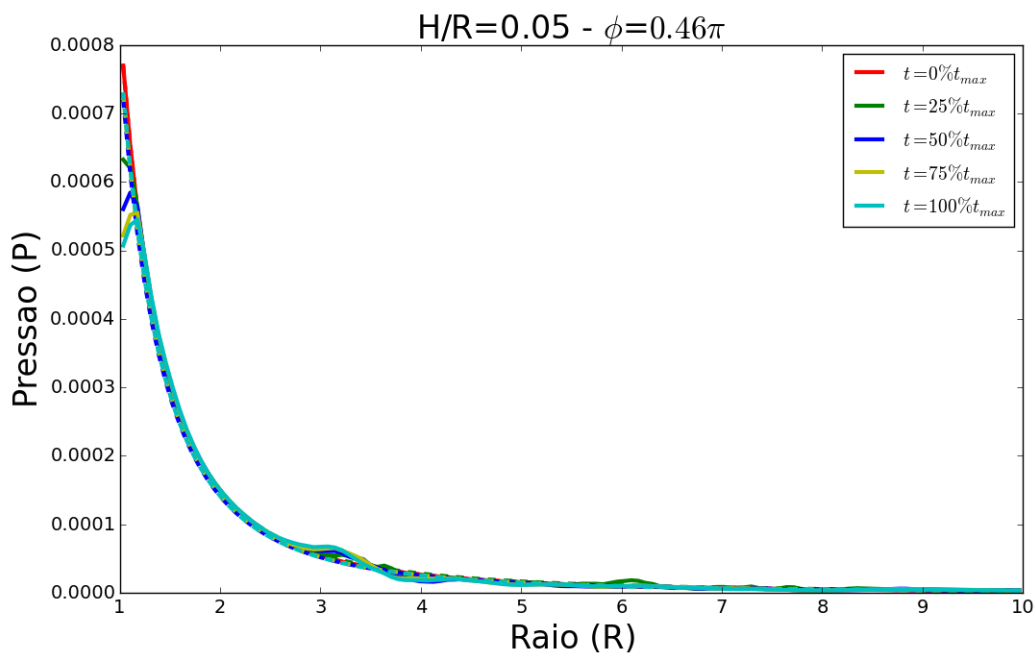


Figura 5.18: Gráfico de Raio  $\times$  Pressão para  $H/R = 0.05$ .

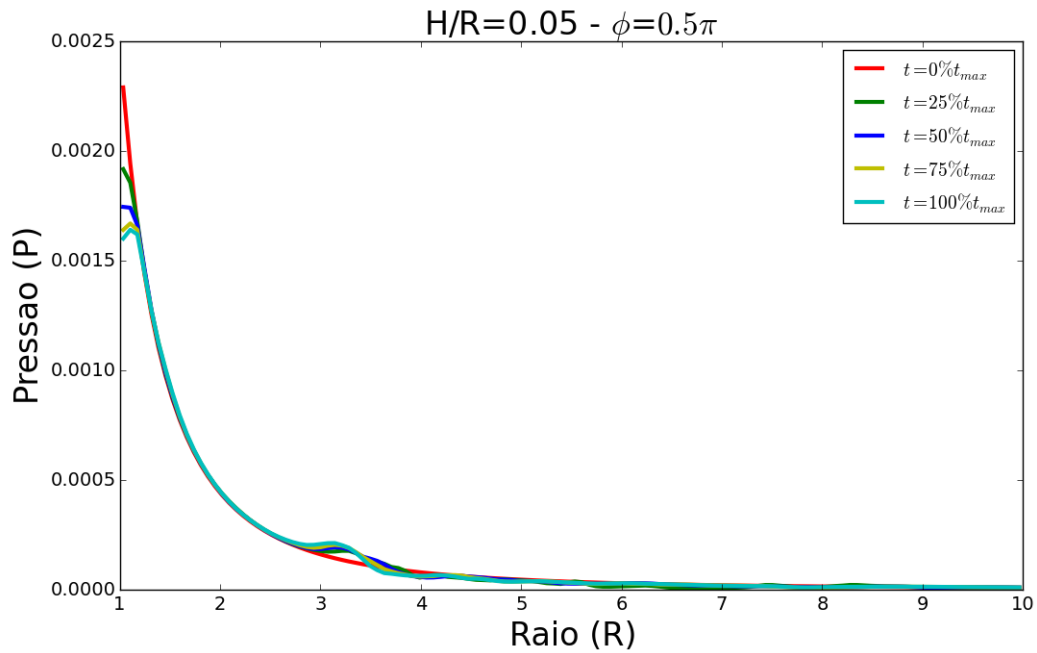


Figura 5.19: Gráfico de Raio  $\times$  Pressão para  $H/R = 0.05$ .

### 5.2.3.3 Evolução Temporal do Disco com escala de altura $H/R = 0.06$

Abordaremos a evolução temporal de um disco com escala de altura  $H/R = 0.06$ .

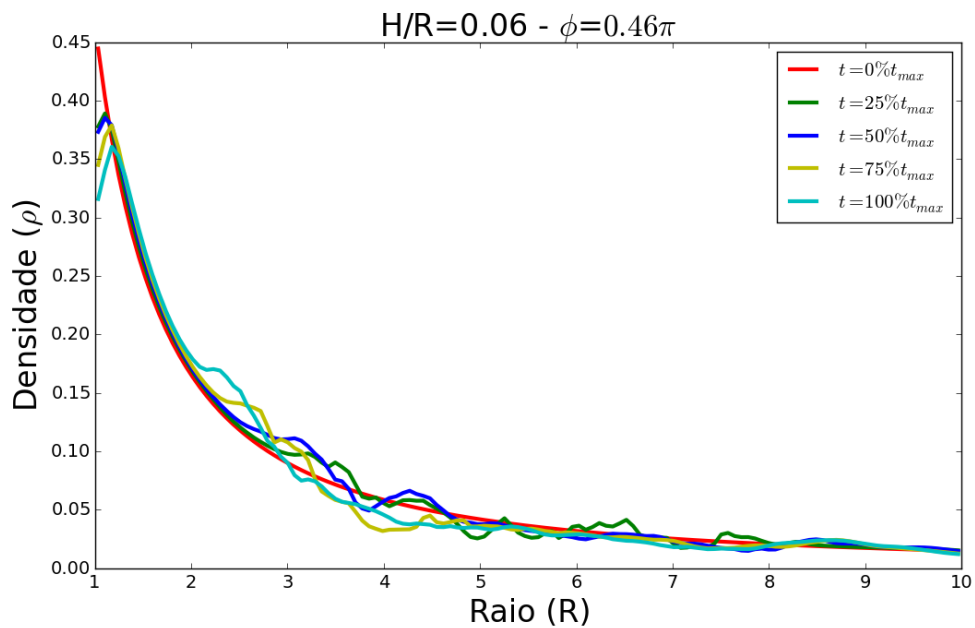


Figura 5.20: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para  $H/R = 0.06$ .

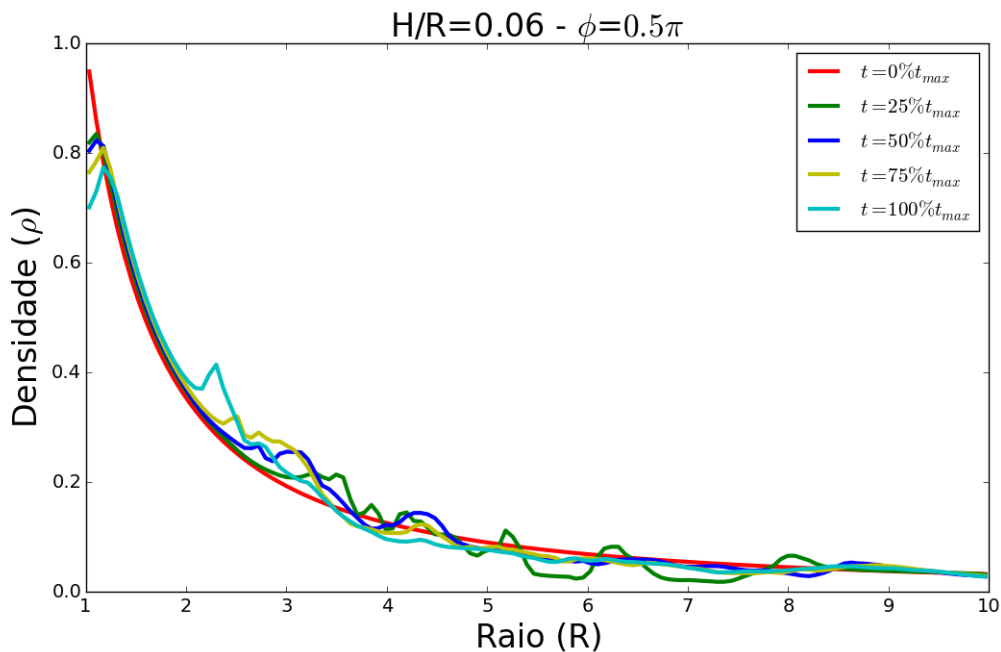


Figura 5.21: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para  $H/R = 0.06$ .

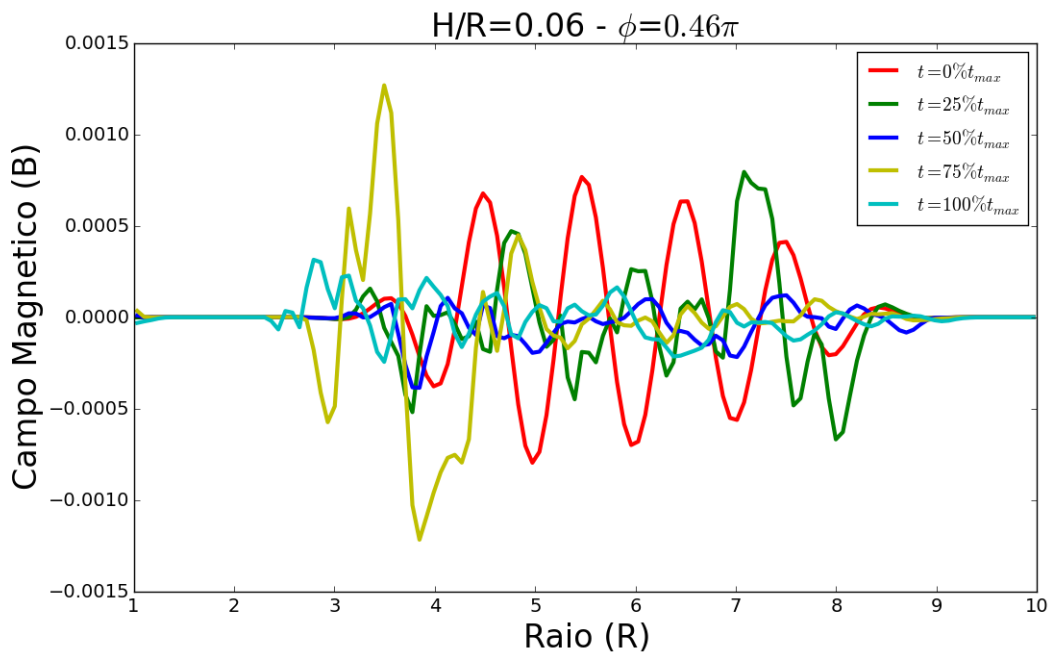


Figura 5.22: Gráfico de Raio  $\times$  componente radial do Campo Magnético  $B_r$  para  $H/R = 0.06$  com  $\phi = 0.46\pi$ .

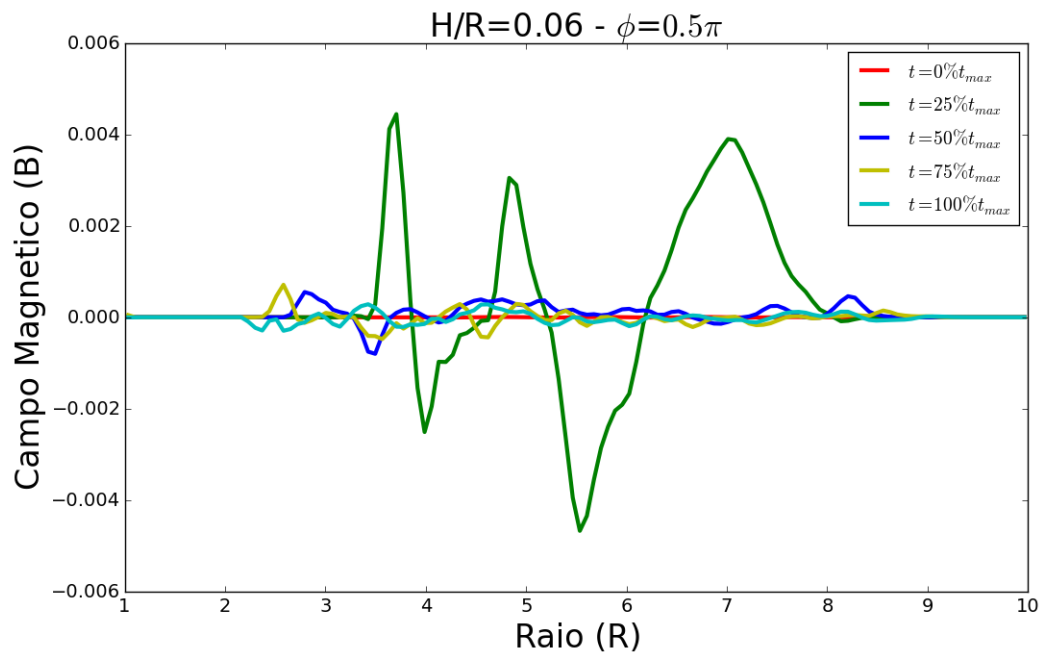


Figura 5.23: Gráfico de Raio  $\times$  Componente radial do Campo Magnético  $B_r$  para  $H/R = 0.06$  com  $\phi = 0.5\pi$ .

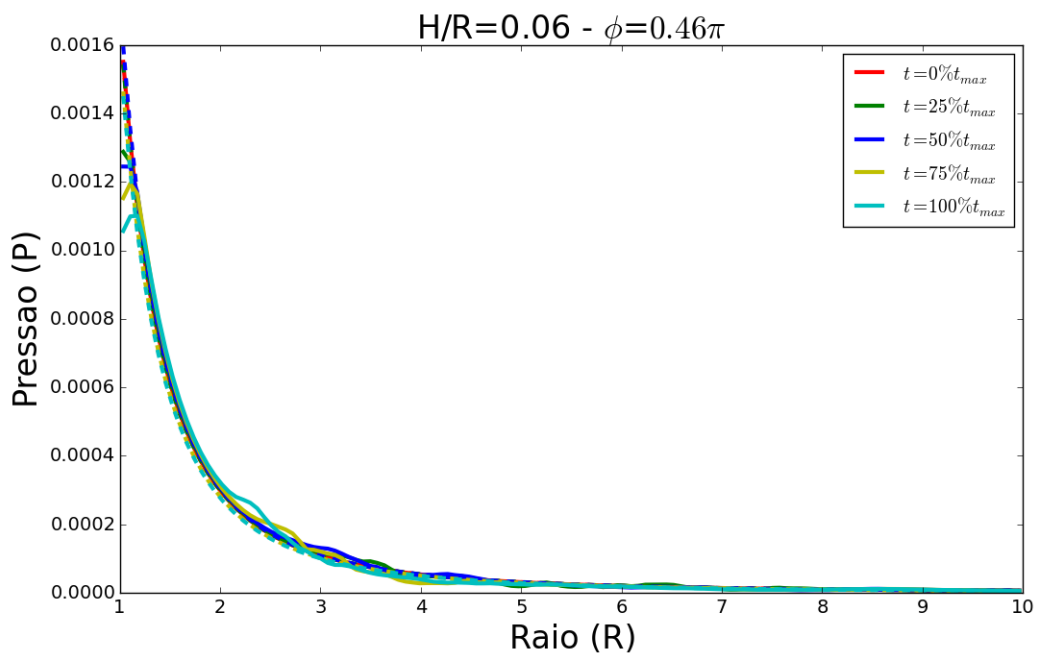


Figura 5.24: Gráfico de Raio  $\times$  Pressão para  $H/R = 0.06$ .

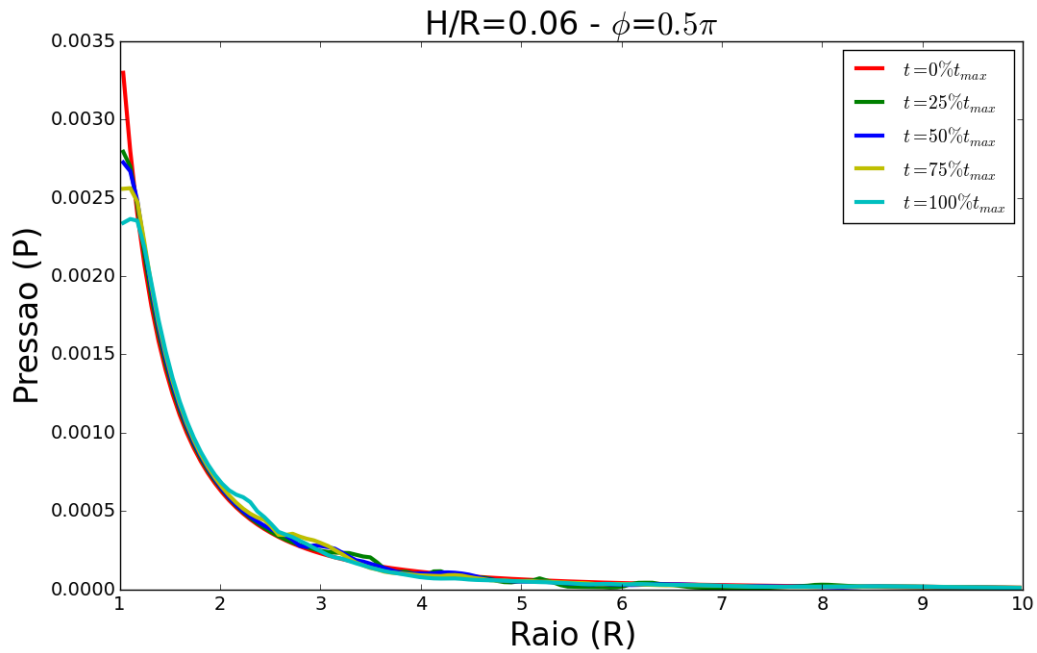


Figura 5.25: Gráfico de Raio  $\times$  Pressão para  $H/R = 0.06$ .

#### 5.2.3.4 Evolução Temporal do Disco com escala de altura $H/R = 0.08$

Abordaremos a evolução temporal de um disco com escala de altura  $H/R = 0.08$ .

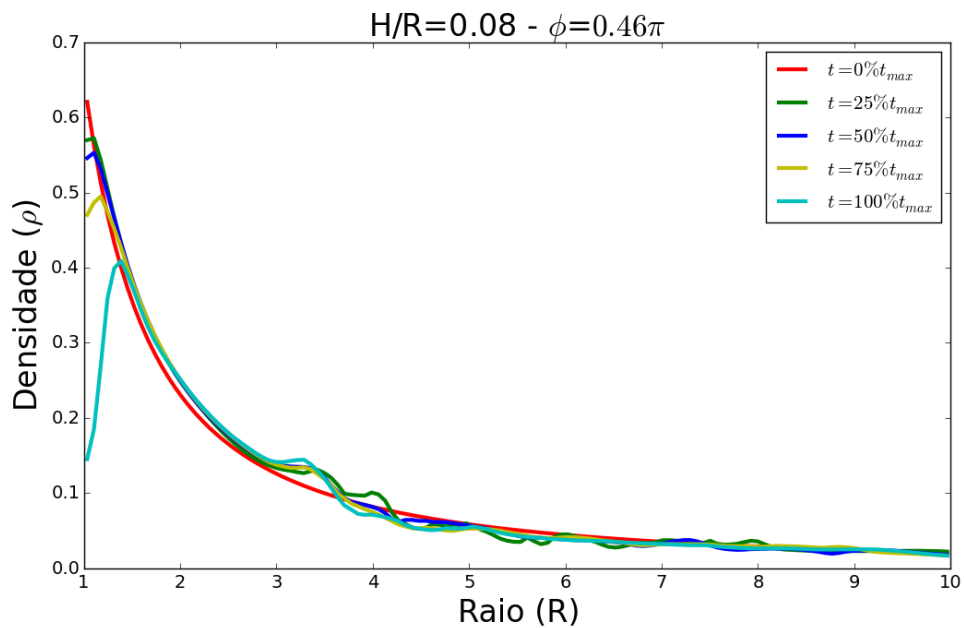
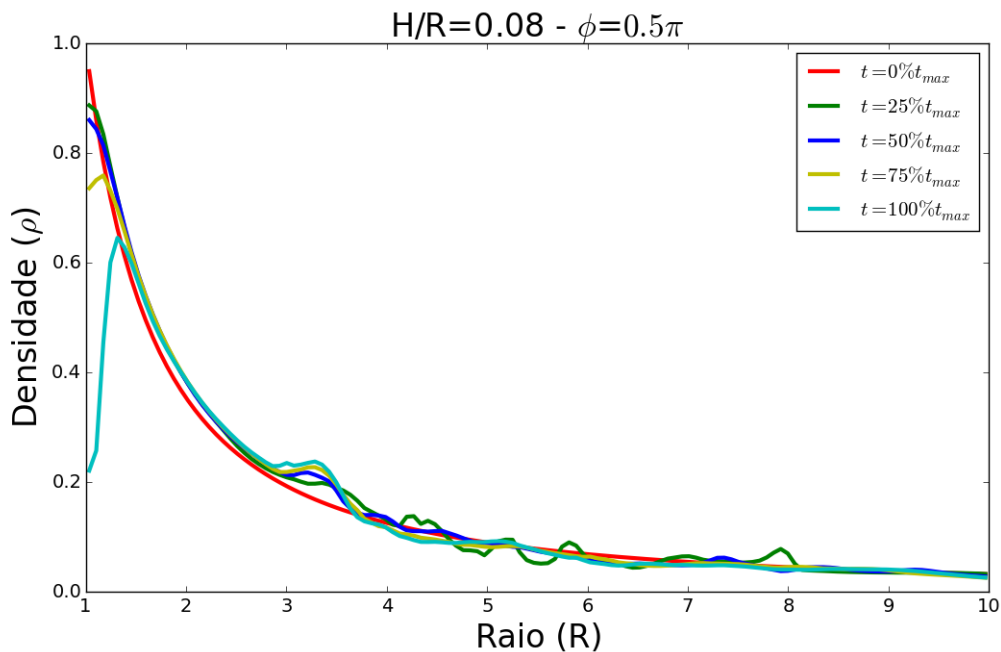
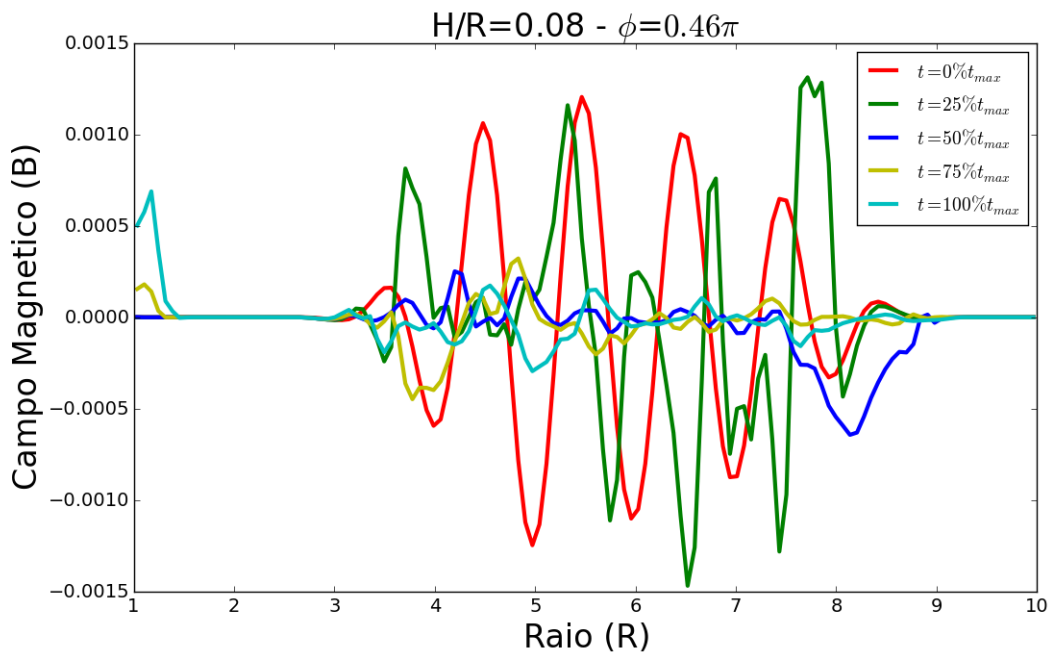


Figura 5.26: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para  $H/R = 0.08$ .

Figura 5.27: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para  $H/R = 0.08$ .Figura 5.28: Gráfico de Raio  $\times$  componente radial do Campo Magnético  $B_r$  para  $H/R = 0.08$  com  $\phi = 0.46\pi$ .

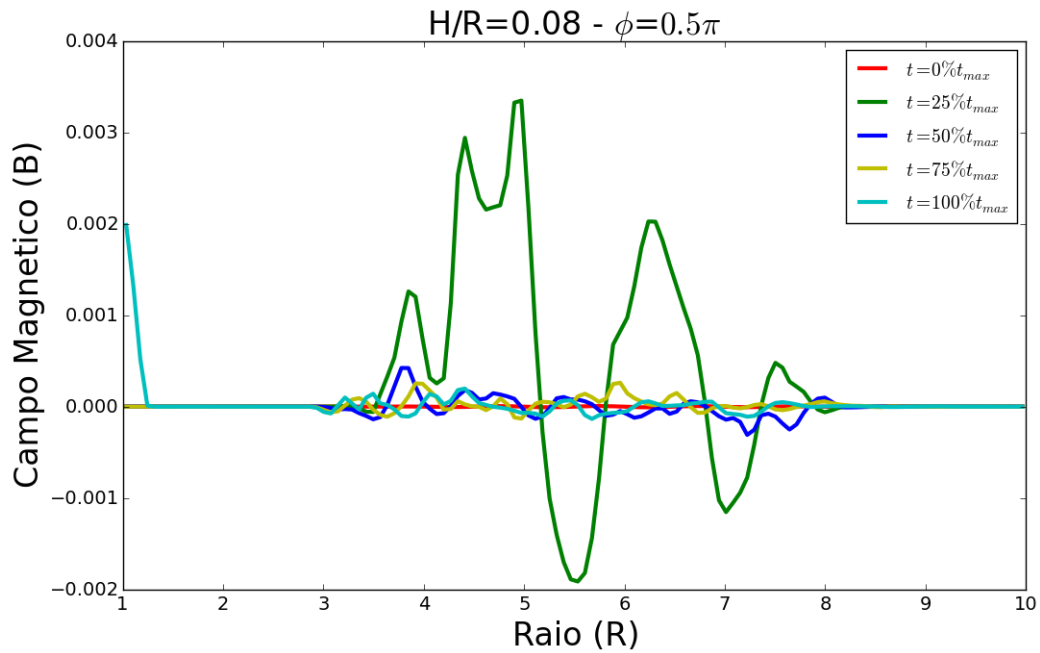


Figura 5.29: Gráfico de Raio  $\times$  componente radial do Campo Magnético  $B_r$  para  $H/R = 0.08$  com  $\phi = 0.5\pi$ .

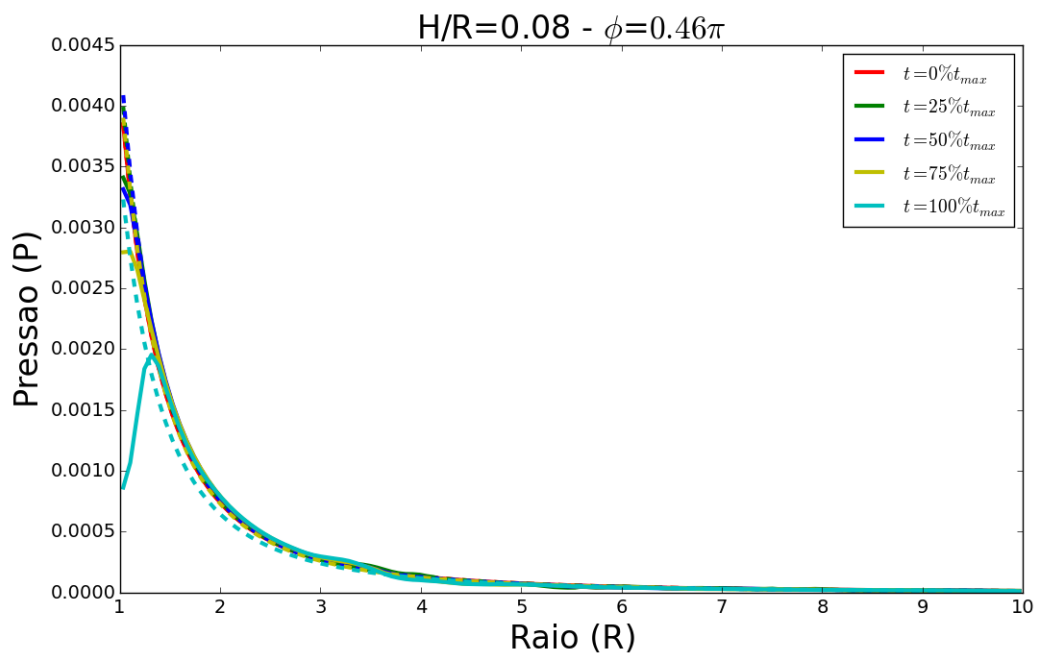


Figura 5.30: Gráfico de Raio  $\times$  Pressão para  $H/R = 0.08$ .

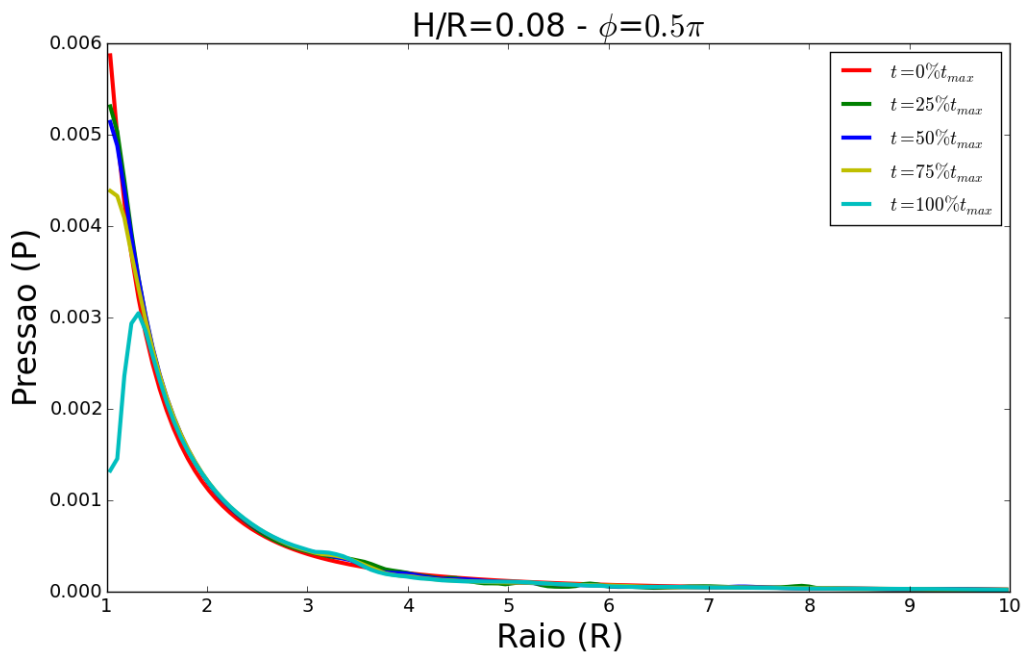


Figura 5.31: Gráfico de Raio  $\times$  Pressão para  $H/R = 0.08$ .

### 5.2.3.5 Evolução Temporal do Disco com escala de altura $H/R = 0.10$

Abordaremos a evolução temporal de um disco com escala de altura  $H/R = 0.10$ .

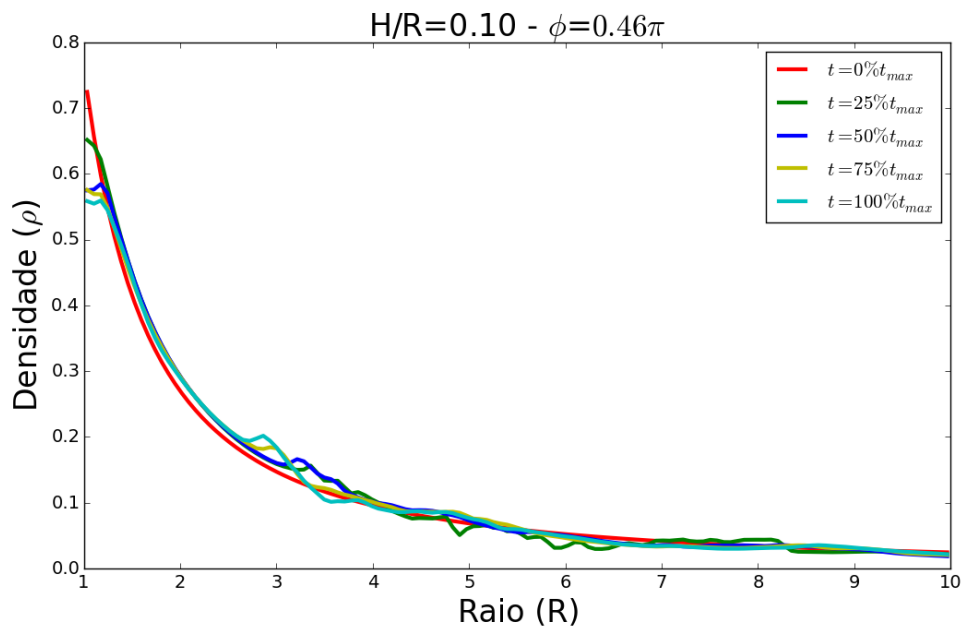


Figura 5.32: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para  $H/R = 0.10$ .

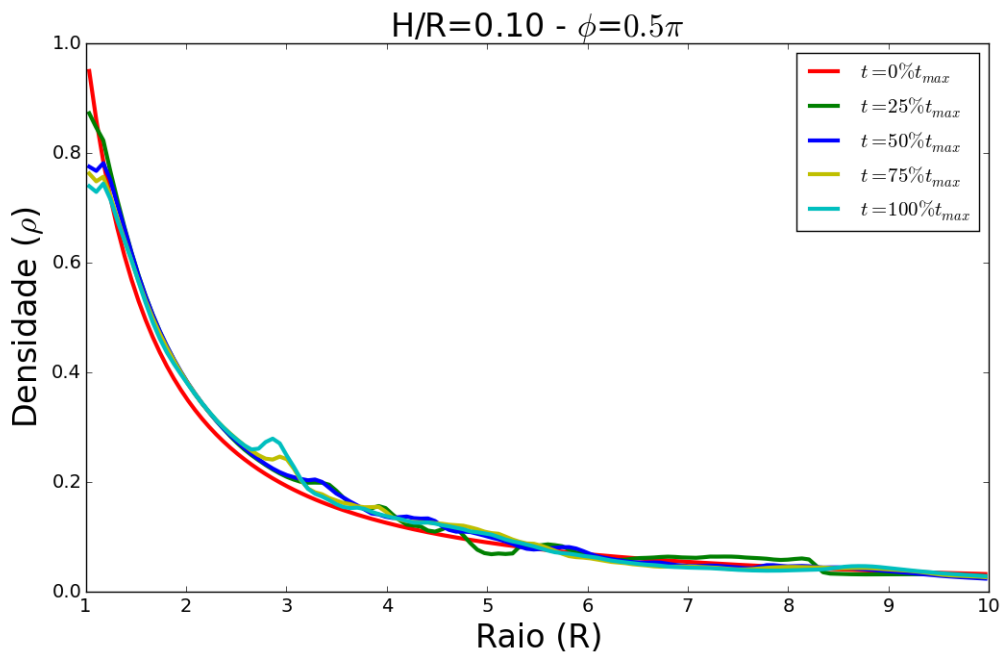


Figura 5.33: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para  $H/R = 0.10$ .

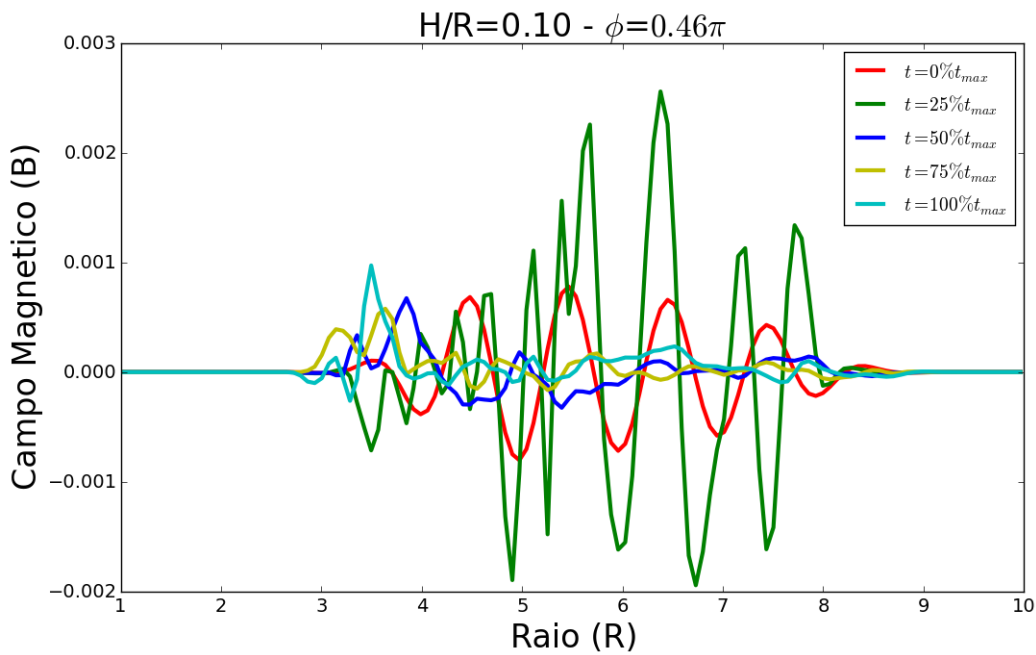


Figura 5.34: Gráfico de Raio  $\times$  Componente radial do Campo Magnético  $B_r$  para  $H/R = 0.10$  com  $\phi = 0.46\pi$ .

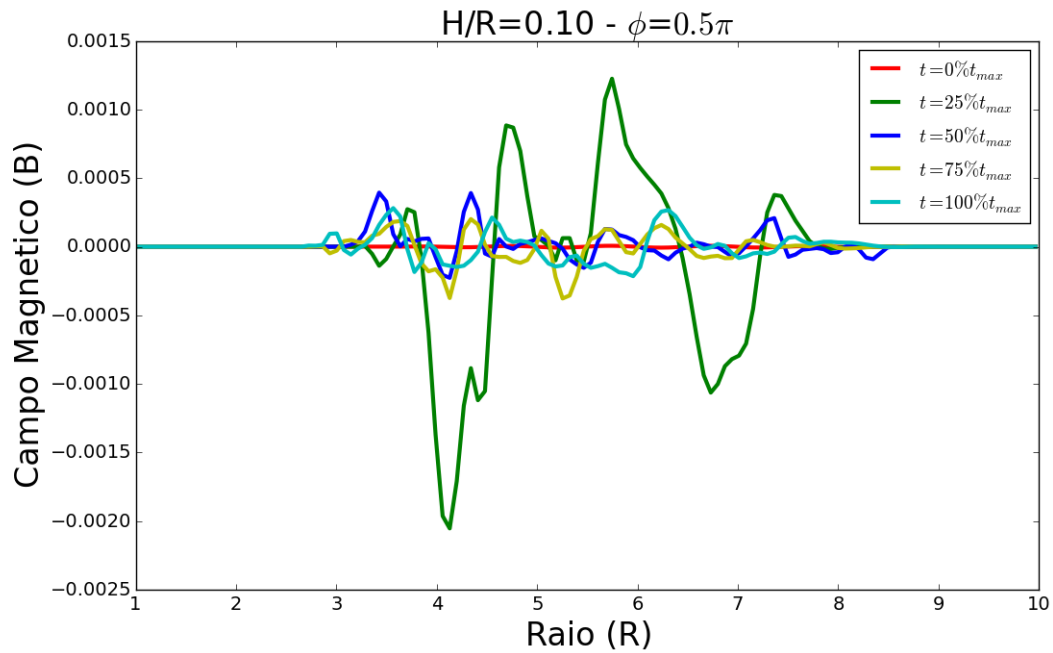


Figura 5.35: Gráfico de Raio  $\times$  Componente radial do Campo Magnético  $B_r$  para  $H/R = 0.10$  com  $\phi = 0.5\pi$ .

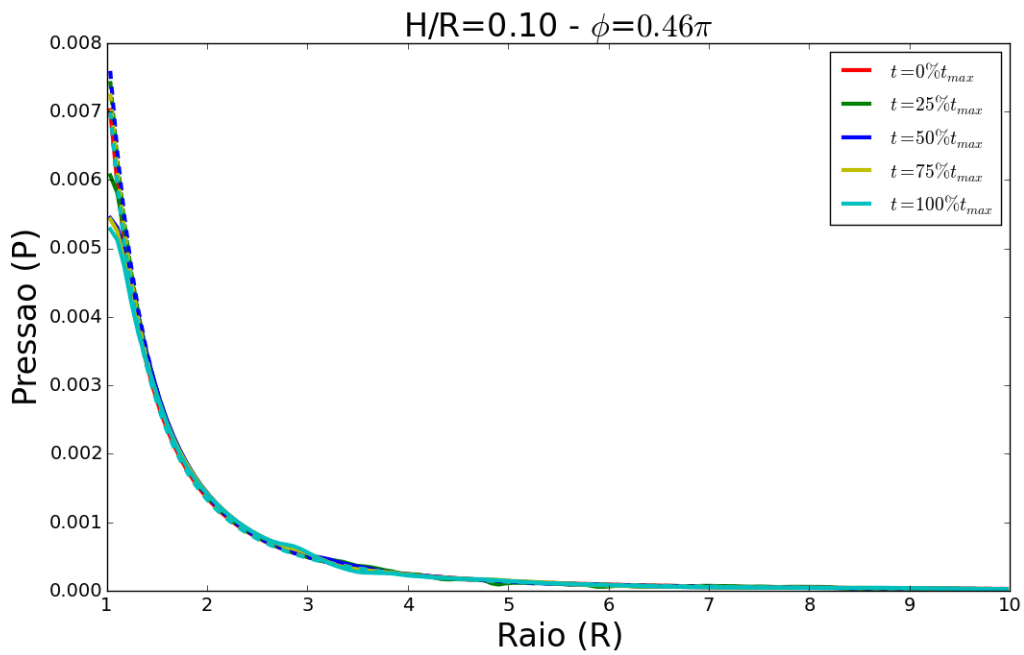


Figura 5.36: Gráfico de Raio  $\times$  Pressão para  $H/R = 0.10$ .

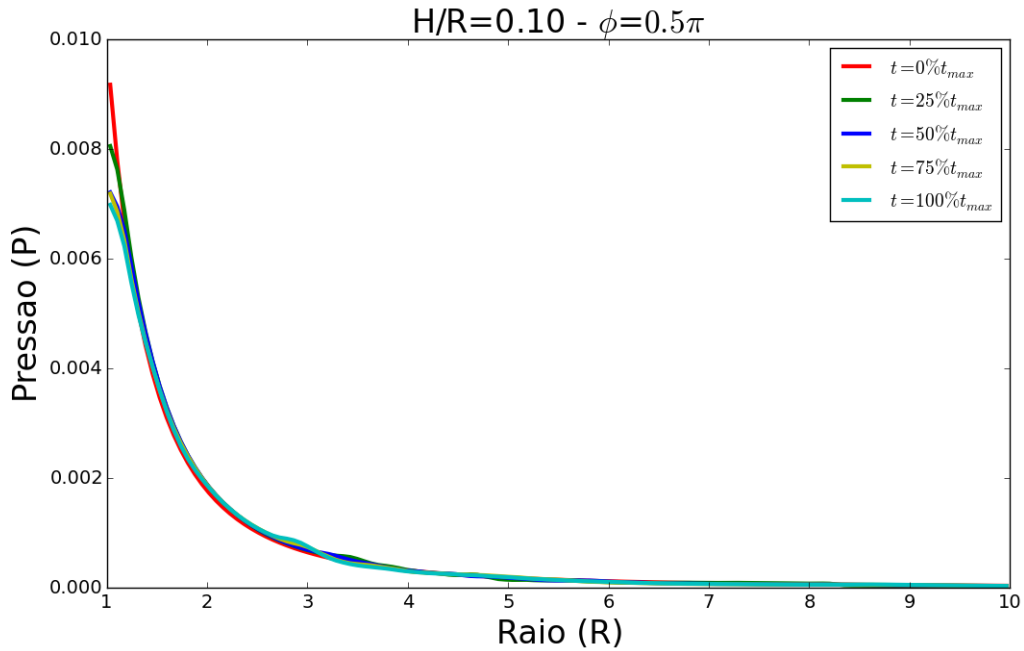


Figura 5.37: Gráfico de Raio  $\times$  Pressão para  $H/R = 0.10$ .

### 5.2.3.6 Análise da Evolução Temporal do Disco com diferentes escalas de altura

É possível perceber através das Figuras 5.8 e 5.9 (para  $H/R = 0.04$ ), 5.14 e 5.15 (para  $H/R = 0.05$ ), 5.20 e 5.21 (para  $H/R = 0.06$ ), 5.26 e 5.27 (para  $H/R = 0.08$ ) e 5.32 e 5.33 (para  $H/R = 0.10$ ) que os gráficos se assemelham, em todos os casos, com o comportamento de uma curva ajustada polinomialmente através do método dos mínimos quadrados, que trataremos com maiores detalhes no próximo capítulo.

Nas Figuras 5.9, 5.15, 5.21, 5.27 e 5.33 é possível perceber um valor inicial maior de  $\rho$ , o que se justifica por estarmos tratando de  $\phi = 0.5\pi$ , ou seja, no meio do plano (ou *midplane*) onde se encontra a maior parte da matéria distribuída, assim como foi comentado anteriormente.

Outro ponto interessante de ser analisado é que, conforme o disco evolui temporalmente, a distribuição de  $\rho$  também ocorre, ou seja, ocorre um transporte de matéria pelo disco. Acredita-se que isso ocorra devido do IMR, pois estamos tratando de um disco naturalmente magnetizado. Após 1000 órbitas o campo magnético apresenta variações exibidas nas Figuras 5.10 e 5.11 (para  $H/R = 0.04$ ), 5.16 e 5.17 (para  $H/R = 0.05$ ), 5.22

e 5.23 (para  $H/R = 0.06$ ), 5.28 e 5.29 (para  $H/R = 0.08$ ) e 5.34 e 5.35 (para  $H/R = 0.10$ ).

Podemos visualizar também que na região de maior instabilidade da densidade  $\rho$ , a componente radial do campo magnético apresenta oscilação significativa em relação ao valor originalmente nulo na simulação.

A pressão ao longo do disco ao final do tempo de simulação se comporta conforme nas Figuras 5.12 e 6.2 (para  $H/R = 0.04$ ), 5.18 e 6.2 (para  $H/R = 0.05$ ), 5.24 e 6.2 (para  $H/R = 0.06$ ), 5.30 e 6.4 (para  $H/R = 0.08$ ) e 5.36 e 5.37 (para  $H/R = 0.10$ ). A partir das Figuras citadas acima, é possível verificar este padrão bem comportado se repete nas simulações para todas as escalas de altura.

A fim de demonstrar o comportamento das quatro propriedades (densidade, pressão, campo magnético e taxa de acreção) analisadas, foi gerado um vídeo em 3D que nos permite visualizar todo o comportamento temporal das grandezas e perceber aspectos peculiares de cada grandezas. O link para acesso aos vídeos está disponível no Apêndice B.

# Capítulo 6

## Análise de Resultados

### 6.1 Ajuste polinomial para a densidade $\rho$

De acordo com [51], o valor do expoente da aproximação de  $\rho$  para um disco de acreção pode ser dado pela equação abaixo:

$$\rho \propto R^{-p} \quad (6.1)$$

Para determinar o valor de  $p$  em nossas simulações, utilizamos um ajuste polinomial através do métodos de mínimos quadrados. Esse método é utilizado quando se deseja obter uma curva de ajuste para uma dada distribuição de pontos. Como em nosso trabalho desejamos determinar o expoente  $p$ , podemos relacionar as equações, de forma que:

$$\begin{aligned} \rho &= \gamma R^{-p} \\ \log \rho &= \log \gamma + \log R^{-p} \\ \log \rho &= \log \gamma - p \log R \\ y &= b + ax \end{aligned} \quad (6.2)$$

logo,  $b = \log \gamma$  e  $a = -p$ . Assim, podemos considerar que o valor de  $a$  em nossa reta de ajuste corresponde ao valor de  $p$  do nosso expoente.

É possível verificar as tabelas com os valores de  $p$  e  $\gamma$  referentes ao ajuste realizado para cada escala de altura nas Tabelas 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5.

$t_{sim}$	$p$	$\gamma$
$0\%t_{max}$	-1.5000	0.9970
$25\%t_{max}$	-1.6643	1.1128
$50\%t_{max}$	-1.5928	1.0949
$75\%t_{max}$	-1.5698	1.0741
$100\%t_{max}$	-1.5348	1.0220
	$\sigma_p = 0.0557$	$\sigma_\gamma = 0.0439$
	$\bar{p} = -1.5723$	$\bar{\gamma} = 1.0602$

Tabela 6.1: Valores de  $p$  e  $\gamma$  para  $H/R = 0.04$  com  $\phi = 0.5\pi$ 

$t_{sim}$	$p$	$\gamma$
$0\%t_{max}$	-1.5000	0.9981
$25\%t_{max}$	-1.6603	1.1048
$50\%t_{max}$	-1.6129	1.1253
$75\%t_{max}$	-1.5831	1.0910
$100\%t_{max}$	-1.5480	1.0478
	$\sigma_p = 0.0547$	$\sigma_\gamma = 0.0454$
	$\bar{p} = -1.5809$	$\bar{\gamma} = 1.0734$

Tabela 6.2: Valores de  $p$  e  $\gamma$  para  $H/R = 0.05$  com  $\phi = 0.5\pi$ 

$t_{sim}$	$p$	$\gamma$
$0\%t_{max}$	-1.5000	0.9987
$25\%t_{max}$	-1.6574	1.1232
$50\%t_{max}$	-1.5869	1.1199
$75\%t_{max}$	-1.5964	1.1182
$100\%t_{max}$	-1.5899	1.0798
	$\sigma_p = 0.0502$	$\sigma_\gamma = 0.0474$
	$\bar{p} = -1.5861$	$\bar{\gamma} = 1.0880$

Tabela 6.3: Valores de  $p$  e  $\gamma$  para  $H/R = 0.06$  com  $\phi = 0.5\pi$

$t_{sim}$	$p$	$\gamma$
<b>0%</b> $t_{max}$	-1.5000	0.9992
<b>25%</b> $t_{max}$	-1.5541	1.1046
<b>50%</b> $t_{max}$	-1.5745	1.1283
<b>75%</b> $t_{max}$	-1.5777	1.1107
<b>100%</b> $t_{max}$	-1.4804	0.9230
	$\sigma_p = 0.0398$	$\sigma_\gamma = 0.0793$
	$\bar{p} = -1.5373$	$\bar{\gamma} = 1.0532$

Tabela 6.4: Valores de  $p$  e  $\gamma$  para  $H/R = 0.08$  com  $\phi = 0.5\pi$ 

$t_{sim}$	$p$	$\gamma$
<b>0%</b> $t_{max}$	-1.5000	0.9995
<b>25%</b> $t_{max}$	-1.5549	1.1342
<b>50%</b> $t_{max}$	-1.5879	1.1704
<b>75%</b> $t_{max}$	-1.5795	1.1494
<b>100%</b> $t_{max}$	-1.5733	1.1333
	$\sigma_p = 0.0315$	$\sigma_\gamma = 0.0604$
	$\bar{p} = -1.5591$	$\bar{\gamma} = 1.1174$

Tabela 6.5: Valores de  $p$  e  $\gamma$  para  $H/R = 0.10$  com  $\phi = 0.5\pi$ 

onde  $\sigma_p$  representa o desvio padrão dos valores de  $p$ ,  $\sigma_\gamma$  o desvio padrão dos valores de  $\gamma$ ,  $\bar{p}$  representa a média dos valores encontrados para  $p$  e  $\bar{\gamma}$  representa a média dos valores encontrados para  $\gamma$ .

É possível verificar os gráficos referentes ao ajuste realizado para cada escala de altura nas Figuras 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5.

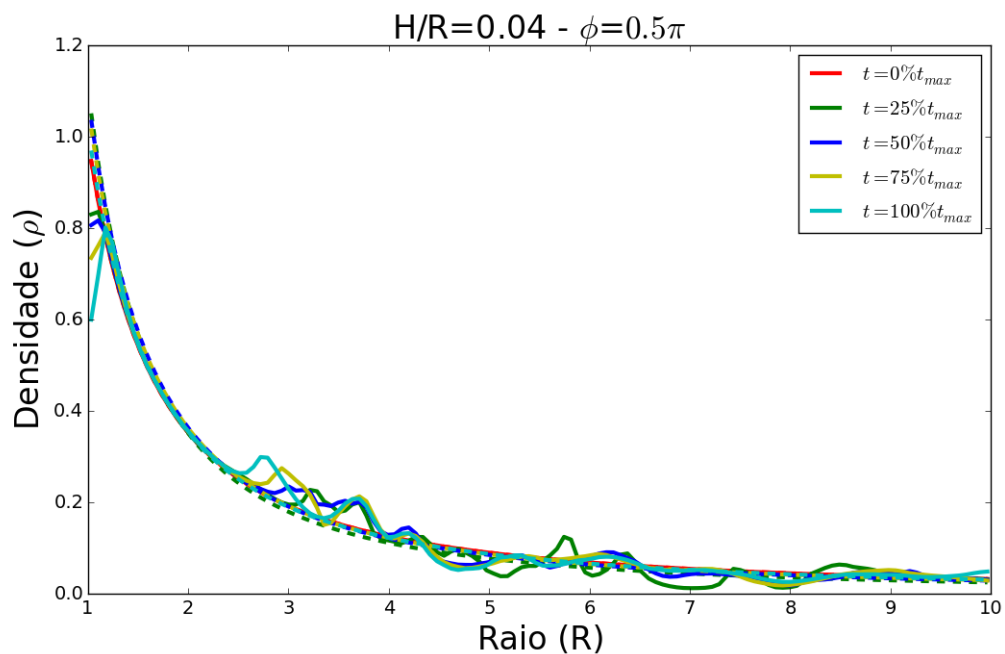


Figura 6.1: Gráfico de ajuste do expoente  $p$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $H/R = 0.04$

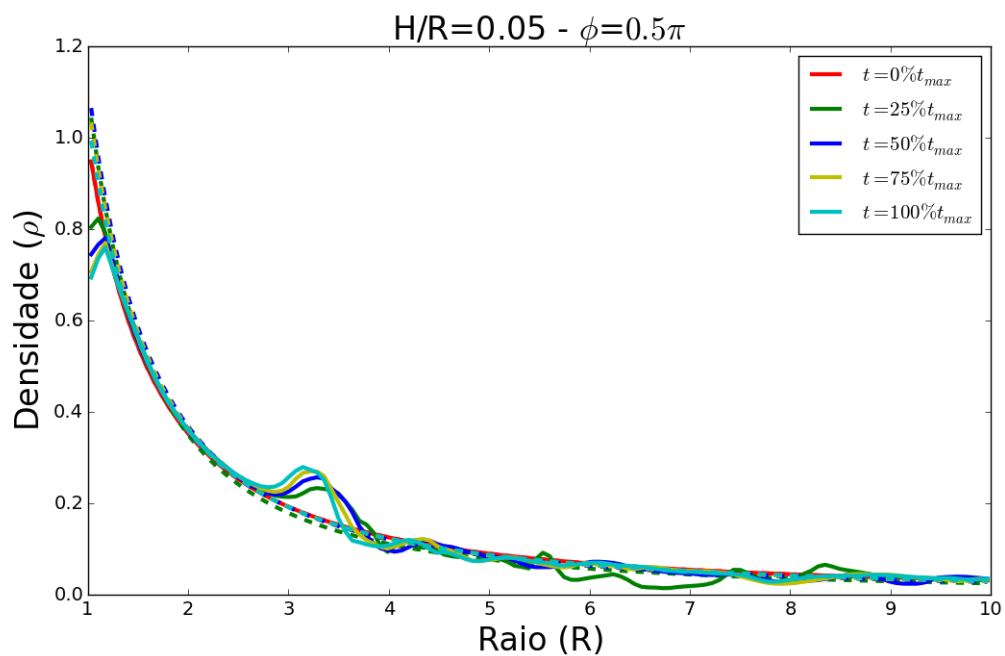


Figura 6.2: Gráfico de ajuste do expoente  $p$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $H/R = 0.05$

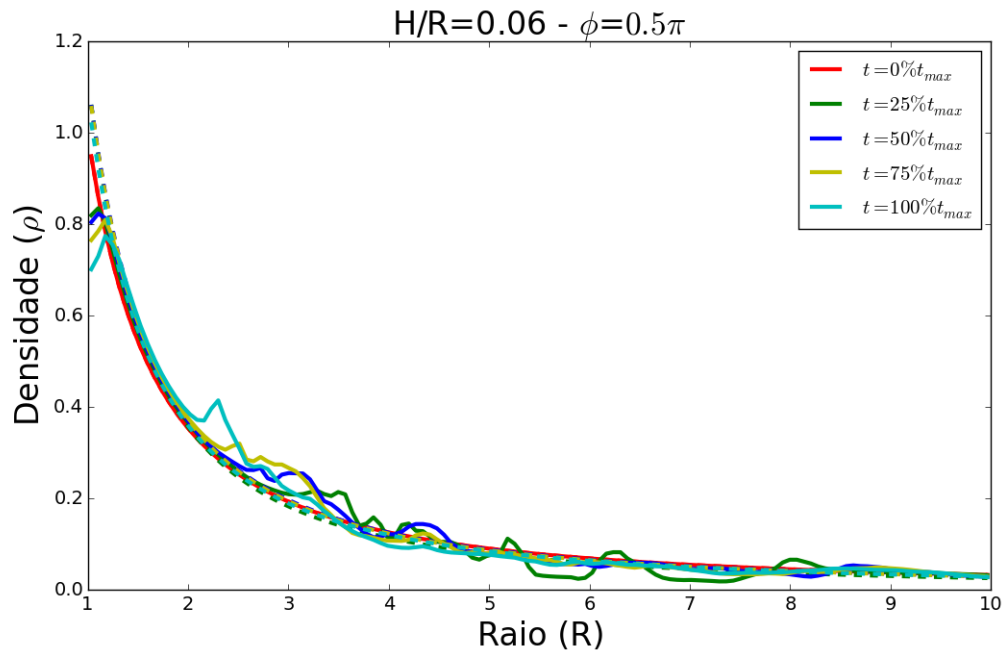


Figura 6.3: Gráfico de ajuste do expoente  $p$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $H/R = 0.06$

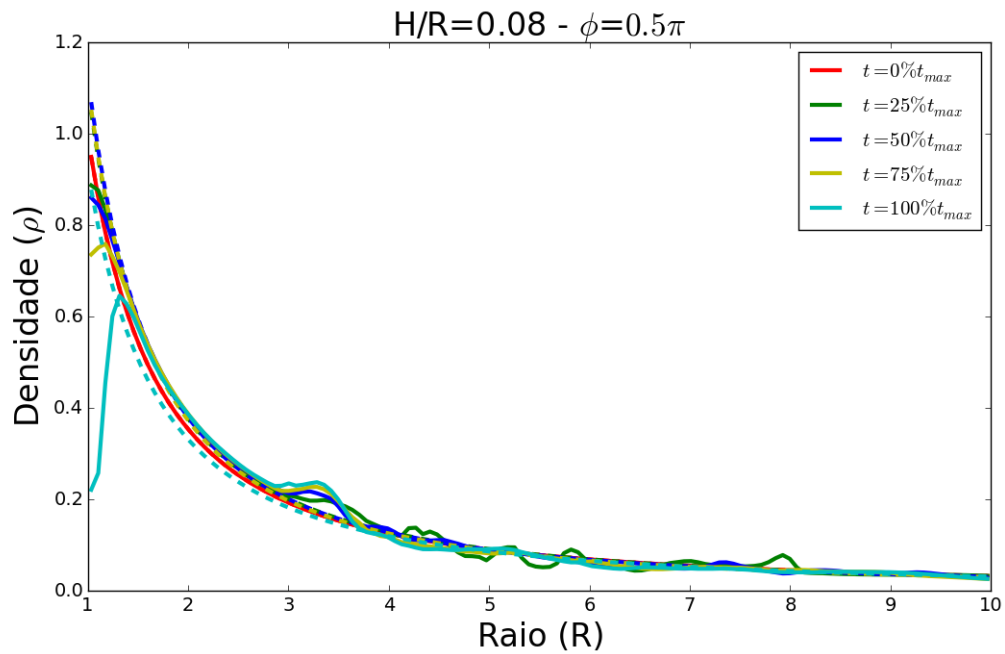


Figura 6.4: Gráfico de ajuste do expoente  $p$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $H/R = 0.08$

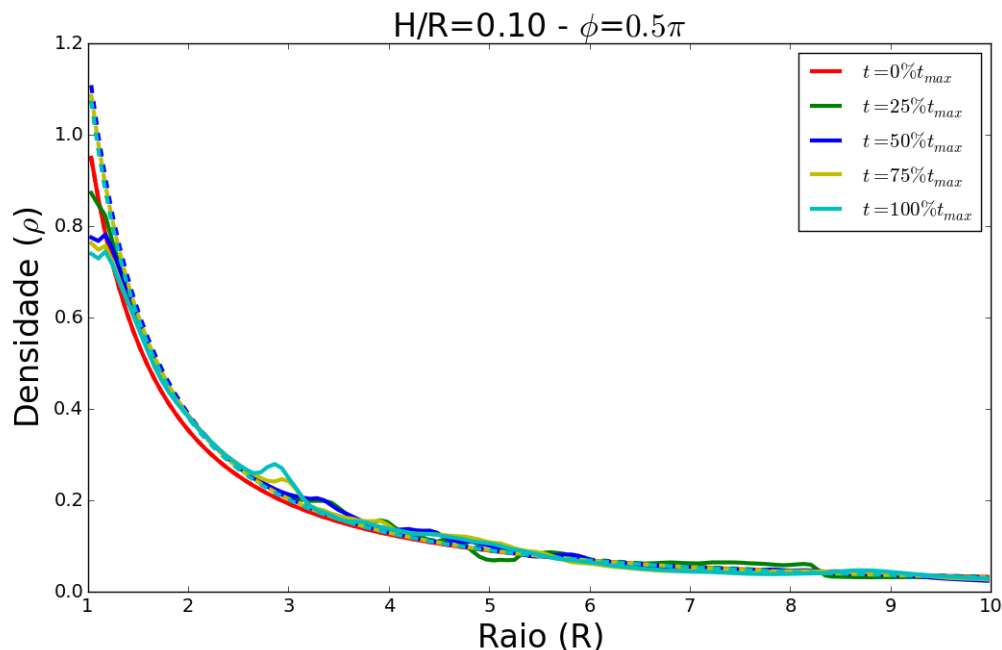


Figura 6.5: Gráfico de ajuste do expoente  $p$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $H/R = 0.10$

Os nossos resultados mostram que o disco se comporta como um disco aproximadamente kepleriano.

É possível perceber, através das Figuras 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5 e das Tabelas 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5 que os valores de  $p$  (calculados a partir da Equação (6.2)) são muito próximos, apresentando assim, valores muito similares. É possível perceber também que os valores de  $\gamma$  apresentam uma ligeira diferença e, conforme a escala de altura do disco aumenta,  $\gamma$  também aumenta. Isso pode ser explicado devido à maior quantidade de matéria próximo ao objeto acretor.

De acordo com [51, 33], o valor de  $\rho$  deve descrever uma lei de potência similar à Equação (6.1), de forma que o expoente  $p$  apresente um valor  $-3/2$  ou  $-1.5$ . Os nossos resultados mostram que o valor encontrado para o expoente de  $R$  (que pode ser visualizado nas Tabelas 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5) são inicialmente  $-1.5$  e devido à evolução temporal, esse valor oscila próximo à  $-1.5$ , ou seja, mesmo após toda a simulação, o perfil de densidade permanece próximo ao valor inicial.

## 6.2 Ajuste polinomial para a pressão $P$

Assim como feito na seção anterior para a densidade, de acordo com [33], o valor do expoente da aproximação de  $P$  para um disco de acreção pode ser dado pela equação abaixo:

$$P \propto R^{-p'} \quad (6.3)$$

Para determinar o valor de  $p$  em nossas simulações, utilizamos um ajuste polinomial através do métodos de mínimos quadrados. Esse método é utilizado quando se deseja obter uma curva de ajuste para uma dada distribuição de pontos. Como em nosso trabalho desejamos determinar o expoente  $p$ , podemos relacionar as equações, de forma que:

$$\begin{aligned} P &= \gamma' R^{-p'} \\ \log P &= \log \gamma' + \log R^{-p'} \\ \log P &= \log \gamma' - p' \log R \\ y &= b + ax \end{aligned} \quad (6.4)$$

logo,  $b = \log \gamma'$  e  $a = -p'$ . Assim, podemos considerar que o valor de  $a$  em nossa reta de ajuste corresponde ao valor de  $p'$  do nosso expoente.

É possível verificar as tabelas com os valores de  $p'$  e  $\gamma'$  referentes ao ajuste realizado para cada escala de altura nas Tabelas 6.6, 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10.

$t_{sim}$	$p'$	$\gamma'$
<b>0%<math>T_{max}</math></b>	-2.5000	0.0016
<b>25%<math>T_{max}</math></b>	-2.6274	0.0017
<b>50%<math>T_{max}</math></b>	-2.5557	0.0016
<b>75%<math>T_{max}</math></b>	-2.5414	0.0016
<b>100%<math>T_{max}</math></b>	-2.5070	0.0015
	$\sigma_{p'} = 0.0457$	$\sigma_{\gamma'} = 4.175 \times 10^{-5}$
	$\bar{p}' = -2.5463$	$\bar{\gamma}' = 0.0016$

Tabela 6.6: Valores de  $p'$  e  $\gamma'$  para  $H/R = 0.04$  com  $\phi = 0.5\pi$ 

$t_{sim}$	$p'$	$\gamma'$
<b>0%<math>T_{max}</math></b>	-2.5000	0.0025
<b>25%<math>T_{max}</math></b>	-2.6257	0.0026
<b>50%<math>T_{max}</math></b>	-2.5562	0.0026
<b>75%<math>T_{max}</math></b>	-2.5404	0.0025
<b>100%<math>T_{max}</math></b>	-2.5059	0.0024
	$\sigma_{p'} = 0.0452$	$\sigma_{\gamma'} = 6.29 \times 10^{-5}$
	$\bar{p}' = -2.5456$	$\bar{\gamma}' = 0.0025$

Tabela 6.7: Valores de  $p'$  e  $\gamma'$  para  $H/R = 0.05$  com  $\phi = 0.5\pi$ 

$t_{sim}$	$p'$	$\gamma'$
<b>0%<math>T_{max}</math></b>	-2.5000	0.0036
<b>25%<math>T_{max}</math></b>	-2.6414	0.0038
<b>50%<math>T_{max}</math></b>	-2.5597	0.0038
<b>75%<math>T_{max}</math></b>	-2.5627	0.0037
<b>100%<math>T_{max}</math></b>	-2.5509	0.0036
	$\sigma_{p'} = 0.0453$	$\sigma_{\gamma'} = 9.22 \times 10^{-5}$
	$\bar{p}' = -2.5629$	$\bar{\gamma}' = 0.0037$

Tabela 6.8: Valores de  $p'$  e  $\gamma'$  para  $H/R = 0.06$  com  $\phi = 0.5\pi$

$t_{sim}$	$p'$	$\gamma'$
<b>0%<math>T_{max}</math></b>	-2.5000	0.0064
<b>25%<math>T_{max}</math></b>	-2.5564	0.0067
<b>50%<math>T_{max}</math></b>	-2.5609	0.0068
<b>75%<math>T_{max}</math></b>	-2.5548	0.0066
<b>100%<math>T_{max}</math></b>	-2.4541	0.0055
	$\sigma_{p'} = 0.0419$	$\sigma_{\gamma'} = 0.0005$
	$\bar{p}' = -2.5252$	$\bar{\gamma}' = 0.0064$

Tabela 6.9: Valores de  $p'$  e  $\gamma'$  para  $H/R = 0.08$  com  $\phi = 0.5\pi$ 

$t_{sim}$	$p'$	$\gamma'$
<b>0%<math>T_{max}</math></b>	-2.5000	0.0099
<b>25%<math>T_{max}</math></b>	-2.5582	0.0109
<b>50%<math>T_{max}</math></b>	-2.5784	0.0109
<b>75%<math>T_{max}</math></b>	-2.5569	0.0106
<b>100%<math>T_{max}</math></b>	-2.5395	0.0103
	$\sigma_{p'} = 0.0264$	$\sigma_{\gamma'} = 0.0004$
	$\bar{p}' = -2.5466$	$\bar{\gamma}' = 0.0106$

Tabela 6.10: Valores de  $p'$  e  $\gamma'$  para  $H/R = 0.10$  com  $\phi = 0.5\pi$ 

onde  $\sigma_{p'}$  representa o desvio padrão dos valores de  $p'$ ,  $\sigma_{\gamma'}$  o desvio padrão dos valores de  $\gamma'$ ,  $\bar{p}'$  representa a média dos valores encontrados para  $p'$  e  $\bar{\gamma}'$  representa a média dos valores encontrados para  $\gamma'$ .

É possível verificar os gráficos referentes ao ajuste realizado para cada escala de altura nas Figuras 6.6, 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10.

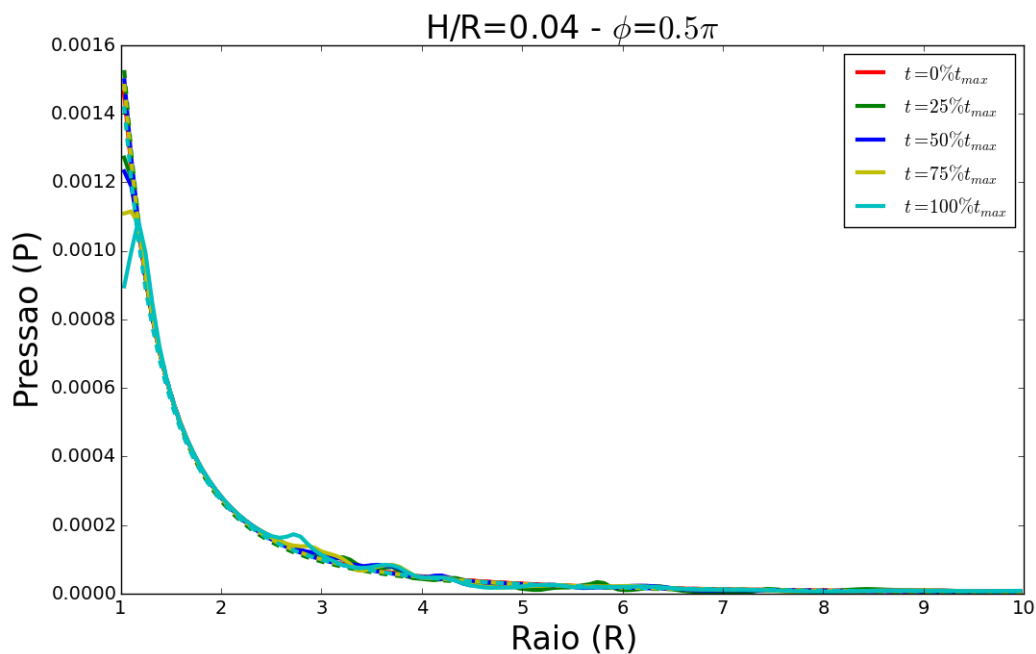


Figura 6.6: Gráfico de ajuste do expoente  $p'$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $H/R = 0.04$

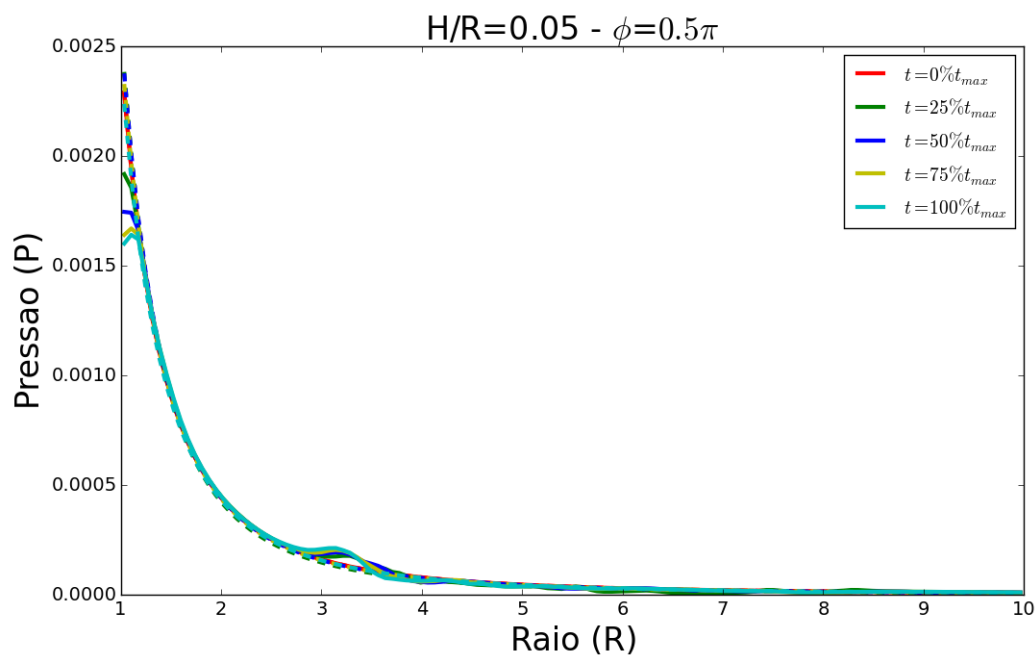


Figura 6.7: Gráfico de ajuste do expoente  $p'$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $H/R = 0.05$

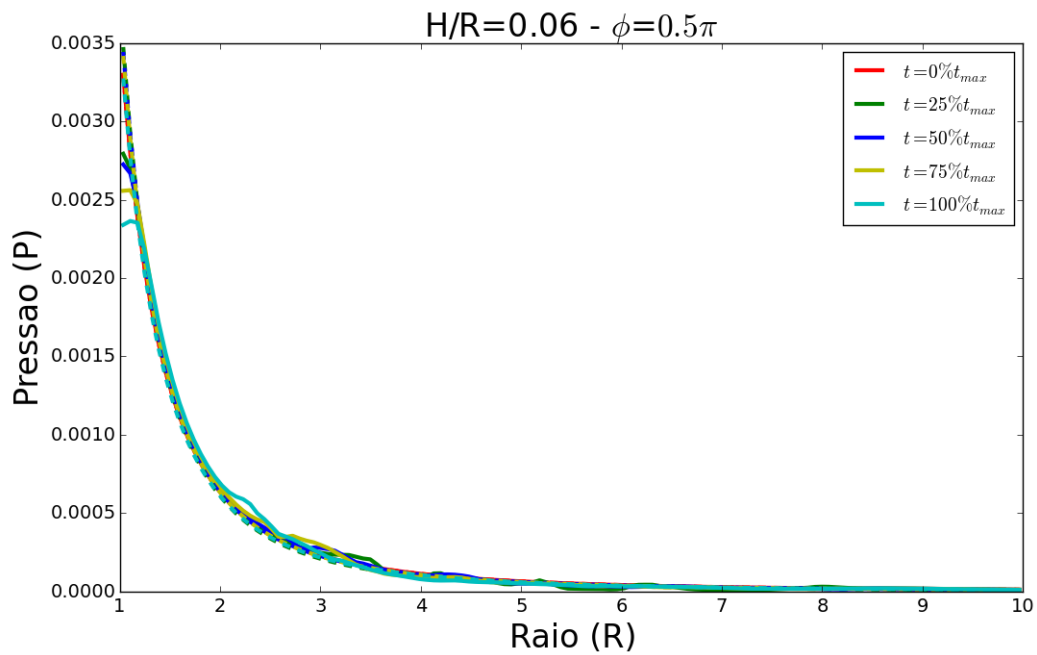


Figura 6.8: Gráfico de ajuste do expoente  $p'$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $H/R = 0.06$

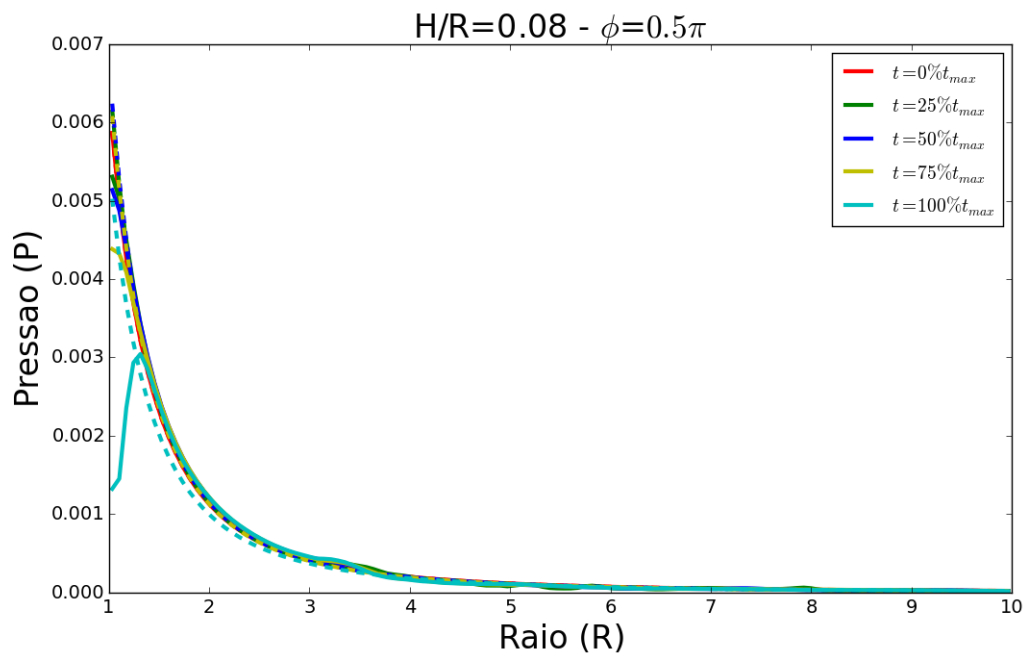


Figura 6.9: Gráfico de ajuste do expoente  $p'$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $H/R = 0.08$

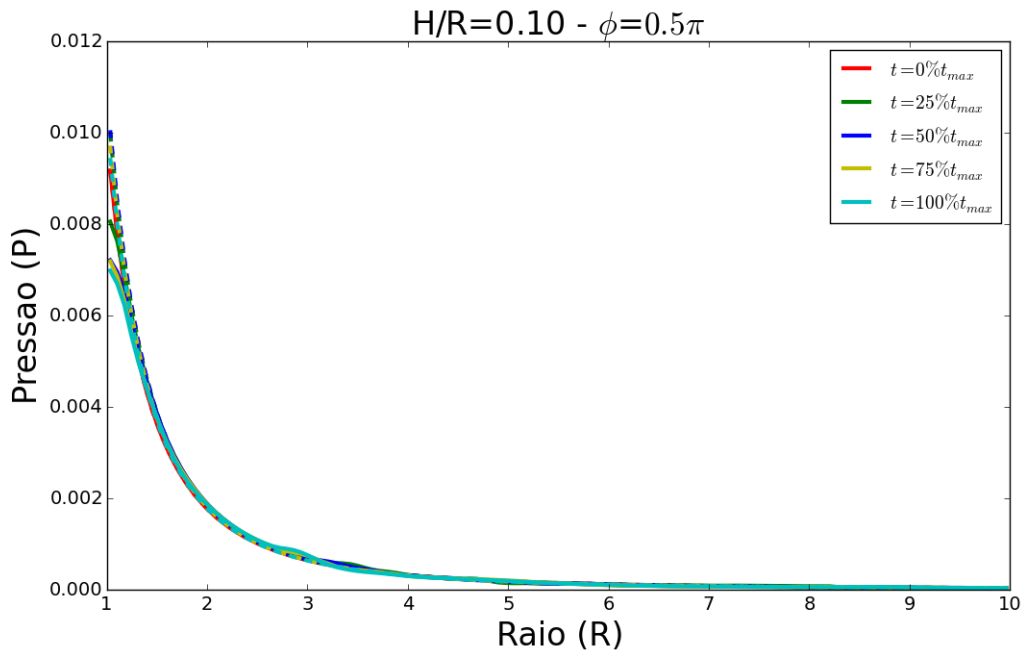


Figura 6.10: Gráfico de ajuste do expoente  $p'$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $H/R = 0.10$

É possível perceber, através das Figuras 6.6, 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10 e das Tabelas 6.6, 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10 que os valores de  $p'$  (calculados à partir da Equação (6.4)) são muito próximos, apresentando assim, valores muito similares. É possível perceber também que os valores de  $\gamma'$  apresentam uma ligeira diferença e, conforme a escala de altura do disco aumenta,  $\gamma'$  também aumenta. Isso pode ser explicado devido à maior quantidade de matéria próximo ao objeto acretor.

De acordo com [51, 33], o valor de  $P$  deve descrever uma lei de potência similar à Equação (6.3), de forma que o expoente  $p'$  apresente um valor  $-5/2$  ou  $-2.5$ . Os nossos resultados mostram que o valor encontrado para o expoente de  $R$  (que pode ser visualizado nas Tabelas 6.6, 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10) são inicialmente  $-2.5$  e devido à evolução temporal, esse valor oscila próximo à  $-2.5$ , ou seja, mesmo após toda a simulação, o perfil de densidade permanece próximo ao valor inicial.

### 6.3 Evolução Temporal da taxa de acreção $\dot{M}$

Em nossa análise calculamos o valor da taxa de acreção  $\dot{M}$  utilizando a Equação (3.26). Assim como foi feito para a densidade  $\rho$  analisaremos  $\dot{M}$ . Os gráficos que mostram o comportamento de  $\dot{M}$  podem ser visualizados pelas Figuras 6.11, 6.12, 6.13, 6.14 e 6.15 abaixo:

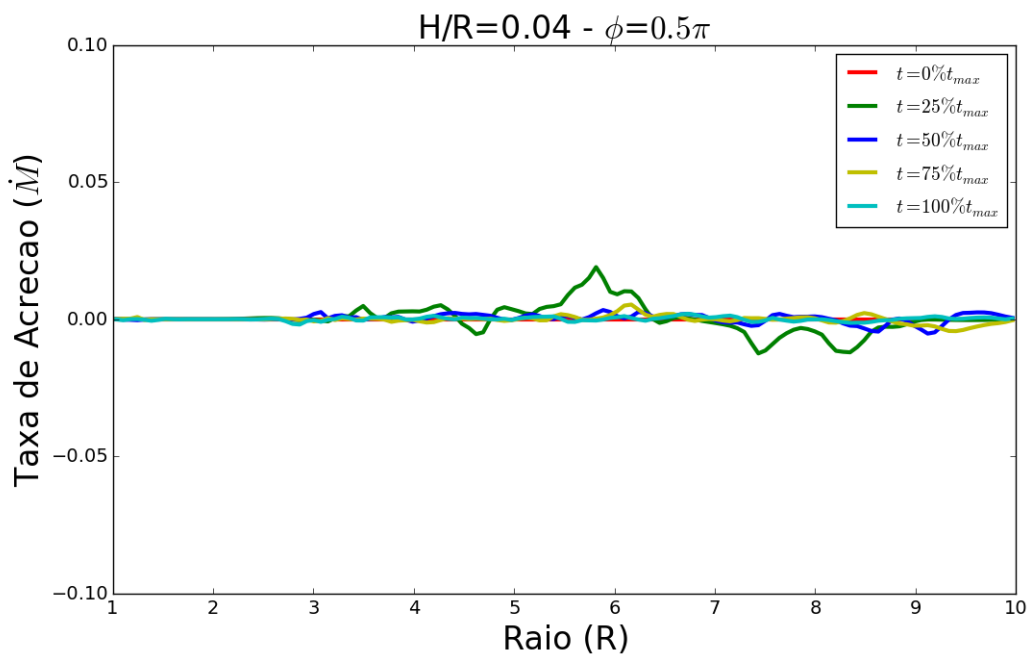
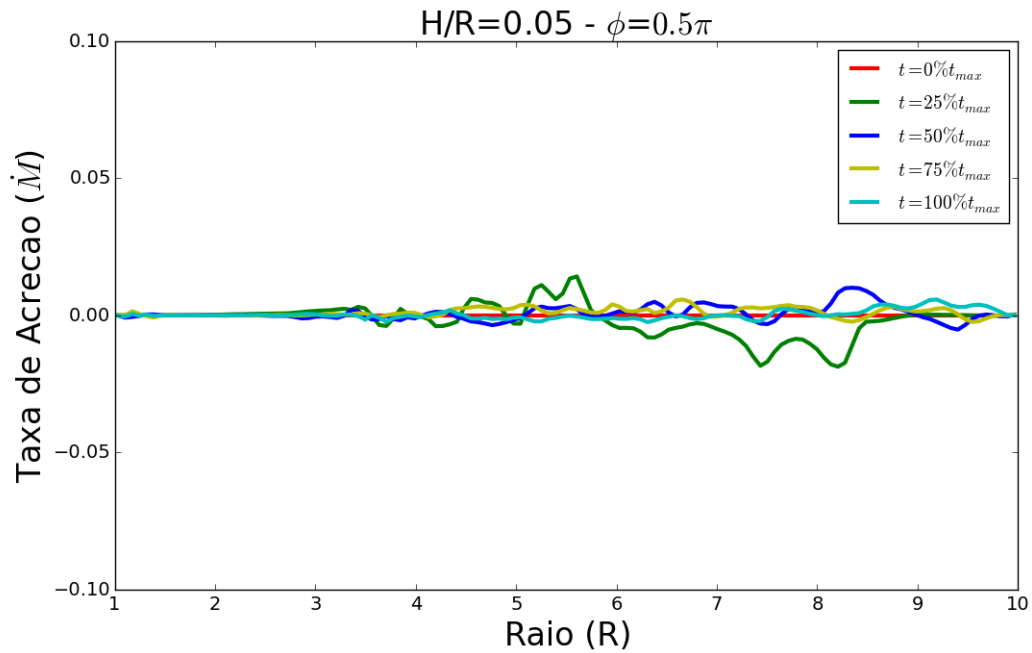
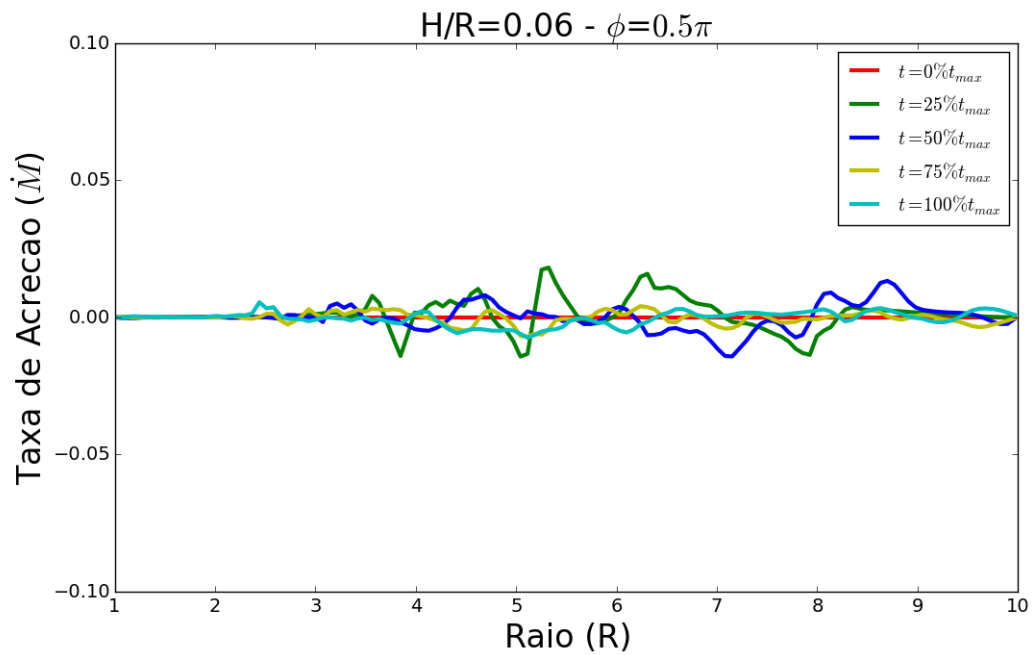
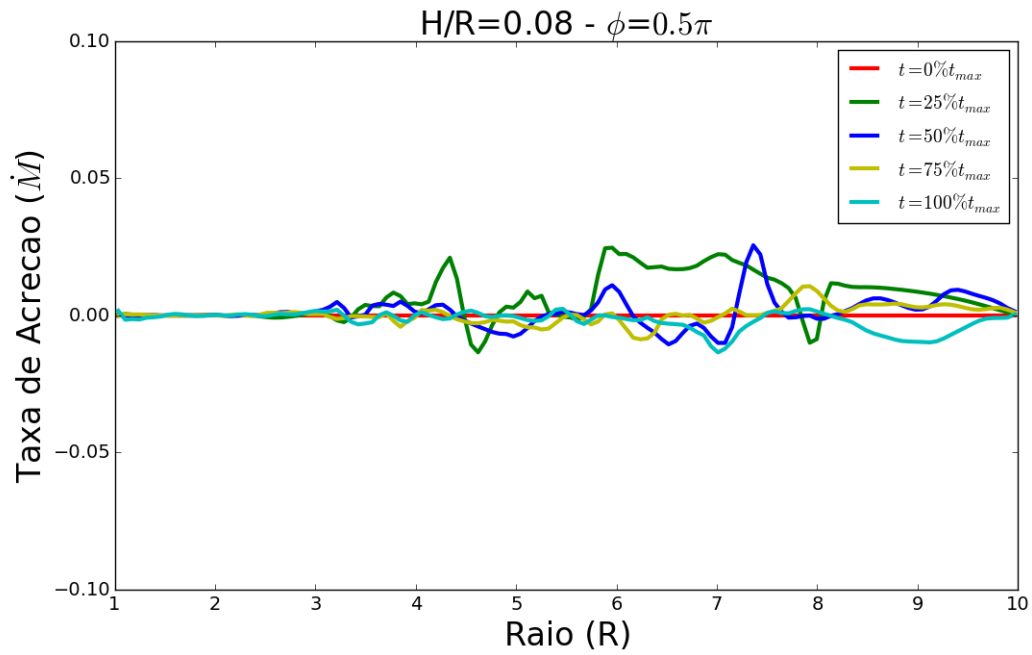
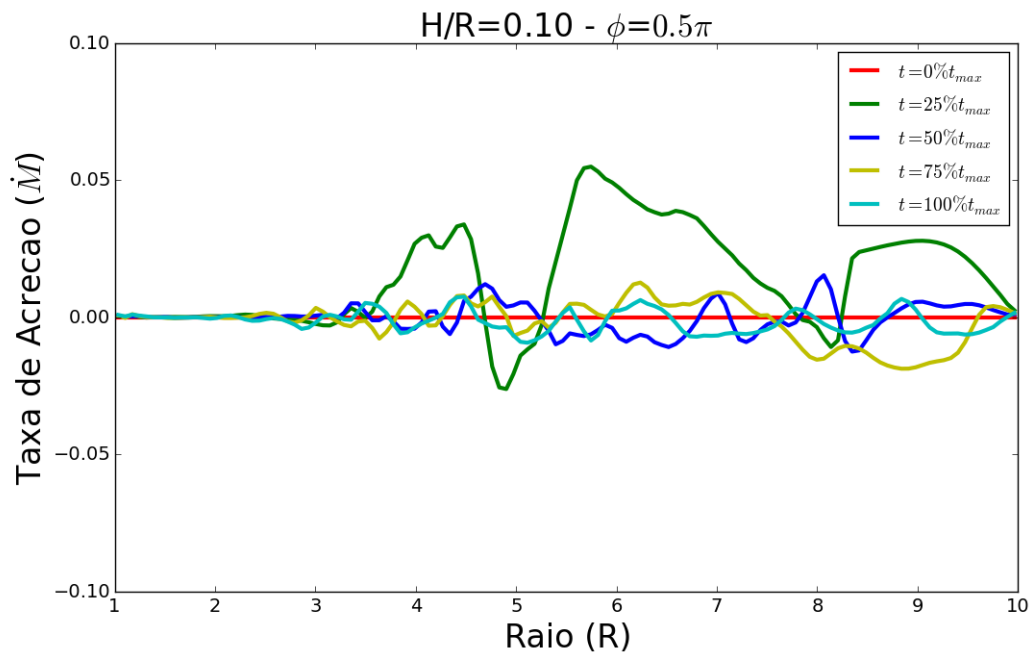


Figura 6.11: Gráfico de Raio  $\times$  Taxa de Acreção para  $H/R = 0.04$  com  $\phi = 0.5\pi$

Figura 6.12: Gráfico de Raio × Taxa de Acreção para  $H/R = 0.05$  com  $\phi = 0.5\pi$ Figura 6.13: Gráfico de Raio × Taxa de Acreção para  $H/R = 0.06$  com  $\phi = 0.5\pi$ .

Figura 6.14: Gráfico de Raio × Taxa de Acreção para  $H/R = 0.08$  com  $\phi = 0.5\pi$ Figura 6.15: Gráfico de Raio × Taxa de Acreção para  $H/R = 0.10$  com  $\phi = 0.5\pi$

Para o cálculo de  $\dot{M}$  utilizamos a Equação (3.26) que pode ser dada por  $\dot{M} = 2\pi R\Sigma(-v_R)$ . Fica claro pelo cálculo que a taxa de acreção não apresenta dependência em relação ao campo magnético.

É possível perceber, através das Figuras 6.11, 6.12, 6.13, 6.14 e 6.15, que os valores de  $\dot{M}$  conforme o disco evolui temporalmente oscilam e apresentam um valor diferente de zero, apesar de ser extremamente baixo.

Apesar da região central (próxima ao Buraco Negro, até 3 U.A.) apresentar maior quantidade de massa, a variação líquida no tempo do quanto de matéria que adentra a região central e do quanto de matéria que sai da região central é muito pequena, com  $\dot{M}$  oscilando muito pouco. Esse comportamento parecido pode ser visualizado também para as regiões mais externas do disco (após 8 U.A.).

Já a região intermediária do disco (entre 3 e 8 U.A.) apresenta uma grande variação no valor de  $\dot{M}$  e isso pode ser verificado com maiores detalhes no Apêndice B.

É possível também perceber que, a região onde o Campo Magnético (em todas as componentes) sofre a maior oscilação é a mesma onde a Taxa de Acreção sofre a maior oscilação, mostrando assim que ambas propriedades apresentam uma correlação (a qual não conseguimos mensurar neste trabalho). Isso pode ser explicado pela IMR que age no disco, pois o mesmo apresenta um Campo Magnético Fraco.

A maior instabilidade na região intermediária pode ser explicada da seguinte forma: A matéria que se encontra na região central é transportada para as partes intermediárias pela IMR e a matéria que se encontra na região mais externa do disco é transportada para o centro devido à gravidade. Dessa forma, esse processo permite que a região intermediária seja a região onde ocorre o maior trânsito de matéria e, conseqüentemente, a região onde apresenta a maior instabilidade.

Assim, diante do exposto acima, podemos concluir que o FARGO descreve com clareza os aspectos teóricos da taxa de acreção de um disco de acreção, independente de sua escala de altura e tempo de simulação, isso ocorre devido ao fato da simulação apresentar um valor de  $\dot{M}$  que, apesar de oscilar, se encontra próximo de um valor constante.

## 6.4 Evolução temporal para o Campo Magnético

Em nossa análise calculamos o valor do Campo Magnético nas três direções,  $B_r$  (representa a componente radial do Campo Magnético),  $B_\phi$  (representa a componente circular

do Campo Magnético no plano do disco) e  $B_\theta$  (representa a componente do Campo Magnético que se encontra perpendicular ao plano do disco).

$H/R$	Intensidade do Campo Magnético	$\sigma$	$\%t_{max}$	Órbitas
<b>0.04</b>	0.00015101	0.00134755	15.87	158
<b>0.05</b>	$9.53 \times 10^{-5}$	0.00132907	16.67	166
<b>0.06</b>	$3.61 \times 10^{-5}$	0.00168750	22.54	225
<b>0.08</b>	-0.00015329	0.00143853	28.09	280
<b>0.10</b>	-0.00012019	0.00131546	31.27	312

Tabela 6.11:  $B_r$  com  $\phi = 0.5\pi$  para cada escala de altura.

$H/R$	Intensidade do Campo Magnético	$\sigma$	$\%t_{max}$	Órbitas
<b>0.04</b>	$-9.93 \times 10^{-5}$	0.00028750	16.67	166
<b>0.05</b>	$3.14 \times 10^{-5}$	0.00045342	18.73	187
<b>0.06</b>	$-6.49 \times 10^{-5}$	0.00060185	17.14	171
<b>0.08</b>	$4.22 \times 10^{-6}$	0.00109347	18.25	182
<b>0.10</b>	$-2.95 \times 10^{-5}$	0.00081150	18.73	187

Tabela 6.12:  $B_r$  com  $\phi = 0.46\pi$  para cada escala de altura.

$H/R$	Intensidade do Campo Magnético	$\sigma$	$\%t_{max}$	Órbitas
<b>0.04</b>	$2.58 \times 10^{-6}$	0.00120199	11.43	114
<b>0.05</b>	$2.38 \times 10^{-6}$	0.00106599	10.95	109
<b>0.06</b>	$-1.84 \times 10^{-7}$	0.00105243	19.05	190
<b>0.08</b>	$2.93 \times 10^{-6}$	0.00095707	23.81	238
<b>0.10</b>	$1.29 \times 10^{-7}$	0.00093621	6.19	61

Tabela 6.13:  $B_\phi$  com  $\phi = 0.5\pi$  para cada escala de altura.

$H/R$	Intensidade do Campo Magnético	$\sigma$	$\%t_{max}$	Órbitas
<b>0.04</b>	$3.65 \times 10^{-7}$	0.00026249	15.40	154
<b>0.05</b>	$-1.97 \times 10^{-7}$	0.00026723	14.44	144
<b>0.06</b>	$-5.41 \times 10^{-7}$	0.00030094	15.23	152
<b>0.08</b>	$-1.46 \times 10^{-6}$	0.00049955	16.19	161
<b>0.10</b>	$1.15 \times 10^{-6}$	0.00078714	18.89	188

Tabela 6.14:  $B_\phi$  com  $\phi = 0.46\pi$  para cada escala de altura.

$H/R$	Intensidade do Campo Magnético	$\sigma$	$\%t_{max}$	Órbitas
<b>0.04</b>	-0.00032563	0.00324532	17.62	176
<b>0.05</b>	$-5.25 \times 10^{-5}$	0.00274134	17.46	174
<b>0.06</b>	-0.00097559	0.00300156	27.46	274
<b>0.08</b>	-0.00040686	0.00259009	22.54	225
<b>0.10</b>	0.00017905	0.00237983	31.43	314

Tabela 6.15:  $B_\theta$  com  $\phi = 0.5\pi$  para cada escala de altura.

$H/R$	Intensidade do Campo Magnético	$\sigma$	$\%t_{max}$	Órbitas
<b>0.04</b>	0.00028620	0.00132586	18.57	185
<b>0.05</b>	0.00041104	0.00190028	18.41	184
<b>0.06</b>	0.00022273	0.00235353	17.46	174
<b>0.08</b>	0.00017901	0.00307413	17.46	174
<b>0.10</b>	$-8.83 \times 10^{-5}$	0.00308672	18.41	184

Tabela 6.16:  $B_\theta$  com  $\phi = 0.46\pi$  para cada escala de altura.

As Tabelas acima nos mostram o instante de tempo em que apresenta a maior oscilação  $\sigma$  do Campo Magnético (com os valores de desvio padrão do Campo Magnético) para cada escala de altura simulada e o valor de máxima intensidade do Campo Magnético, no respectivo instante do tempo.

A fim de verificar se existe alguma correlação entre  $\sigma$  e  $\%t_{max}$ , utilizamos o Coeficiente de Pearson, que trataremos com  $cp$ .

A Tabela 6.11 apresenta  $cp = 0.04755775$  mostrando que a mesma apresenta uma Correlação desprezível entre as grandezas. A Tabela 6.12 apresenta  $cp = 0.51093101$

apresentando uma Correlação Moderada. A Tabela 6.13 apresenta  $cp = -0.14772995$  mostrando que a mesma apresenta uma Correlação desprezível. A Tabela 6.14 apresenta  $cp = 0.96957205$  mostrando que a mesma apresenta uma Forte Correlação. A Tabela 6.15 apresenta  $cp = -0.55212387$  mostrando que a mesma apresenta uma Correlação Moderada e por fim, a Tabela 6.16 apresenta um  $cp = -0.5093884$  apresentando uma Correlação Moderada entre as grandezas.

Diante disso, podemos identificar que, para as Tabelas que apresentam Forte Correlação e Correlação Moderada, quanto maior a escala de altura, maior o tempo evolucionar para encontrar o campo magnético máximo.

Podemos pontuar algumas conclusões: É possível perceber através das Figuras disponíveis no Apêndice B que o Campo Magnético apresenta uma grande oscilação na parte intermediária do disco (entre 3 e 8 U.A.) em todas as três componentes estudadas ( $B_r$  que representa a componente radial,  $B_\phi$  que representa a componente angular perpendicular ao plano e  $B_\theta$  que representa a componente angular planar). É possível perceber também que  $B_r$  e  $B_\theta$  divergem nessa mesma região, enquanto  $B_\phi$  se apresenta mais estável durante toda evolução temporal.

Quando tratamos da parte central do disco (até 3 U.A.) as três componentes do Campo Magnético ficam estáveis, assim como  $\dot{M}$ . Isso se deve à IMR e ao transporte de momento angular. Já na região mais externa do disco (após 8 U.A.)  $B_r$  e  $B_\theta$  apresentam grandes oscilações (assim como  $\dot{M}$ ), se estabilizando com o aumento de  $H/R$  enquanto  $B_\phi$  permanece estável na região externa do disco.

Também é possível verificar que, quanto maior a escala de altura  $H/R$  mais tardiamente se estabilizará a componente  $B_\phi$ .

Temos também que, assim como na Taxa de Acreção, ambas propriedades apresentam uma correlação e oscilam exatamente na mesma região do disco.

Diante do exposto acima, fica evidente que a IMR é responsável pelo transporte de momento angular, pois é a região onde  $\dot{M}$  e as componentes do Campo Magnético (principalmente a componente rotacional  $B_\theta$  e  $B_r$ ) apresentam a maior variação, na região intermediária do disco, entre 3 e 8 U.A..

## 6.5 Evolução Temporal da densidade $\rho$ para diferentes escalas de altura

### 6.5.1 $\phi = 0.46\pi$

Agora iremos mostrar o comportamento de  $\rho$  com um valor de  $\phi = 0.46\pi$  em cada instante de tempo para todas as escalas de altura.

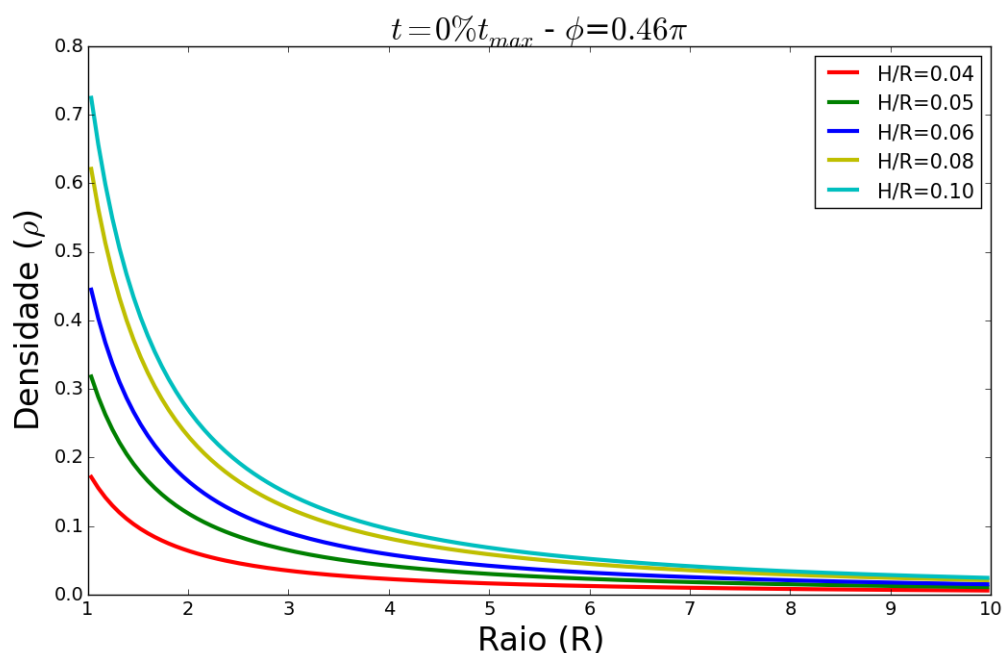
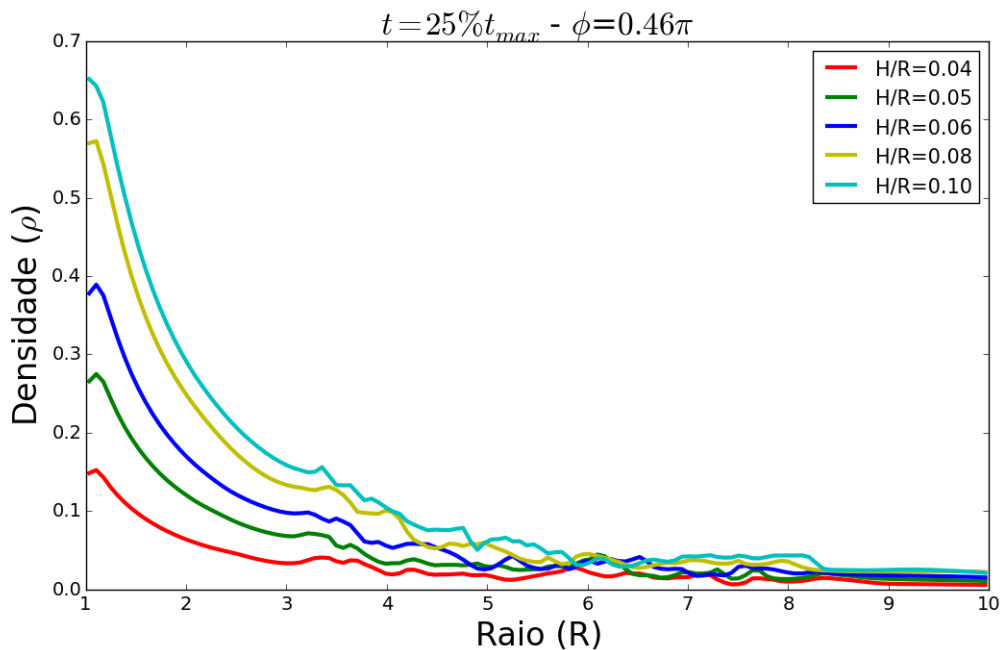
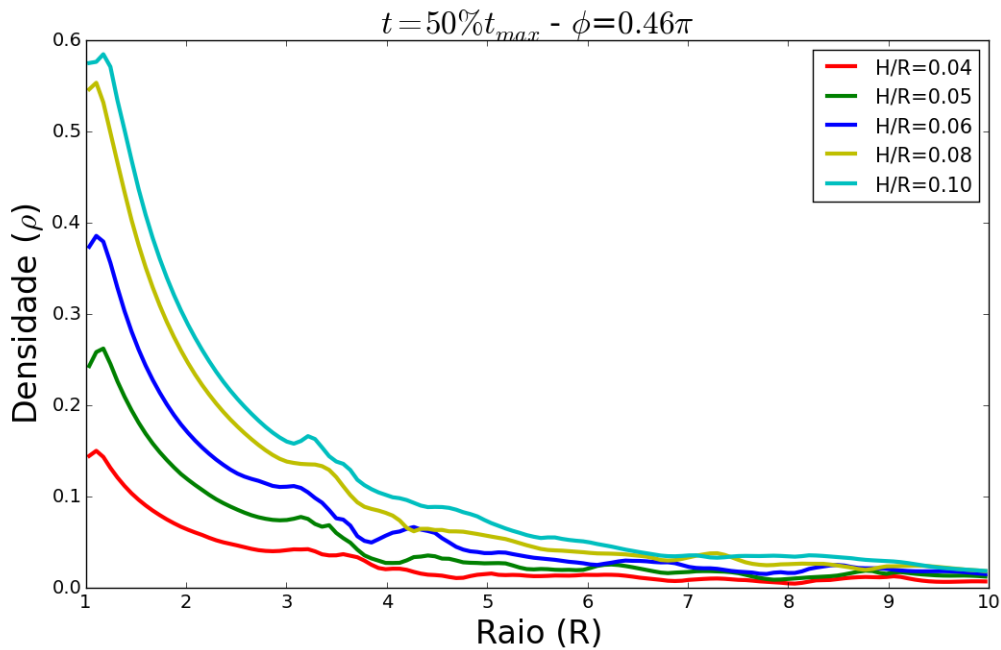
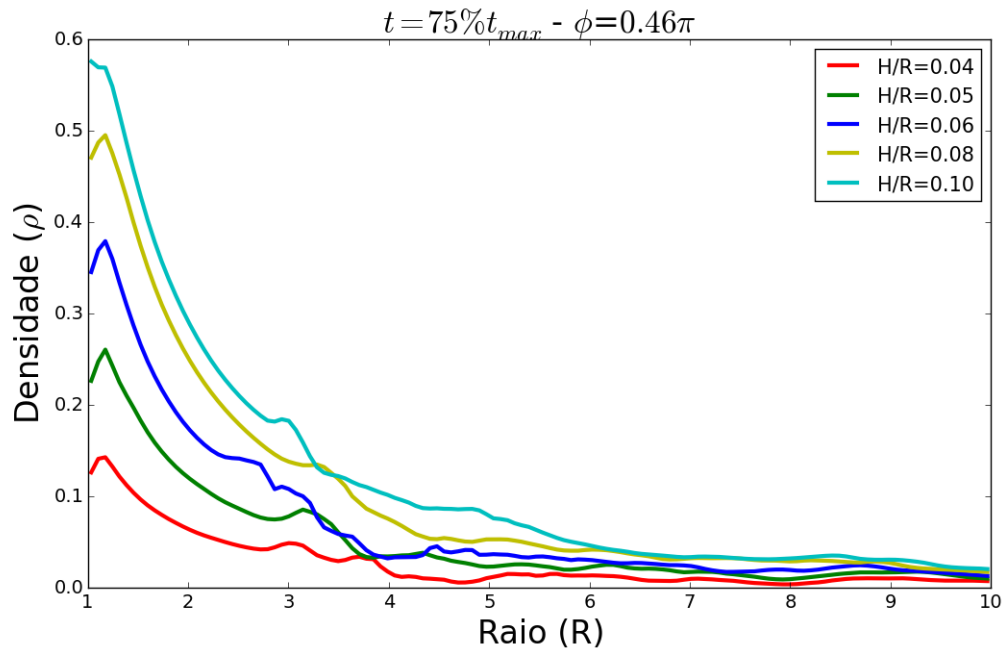
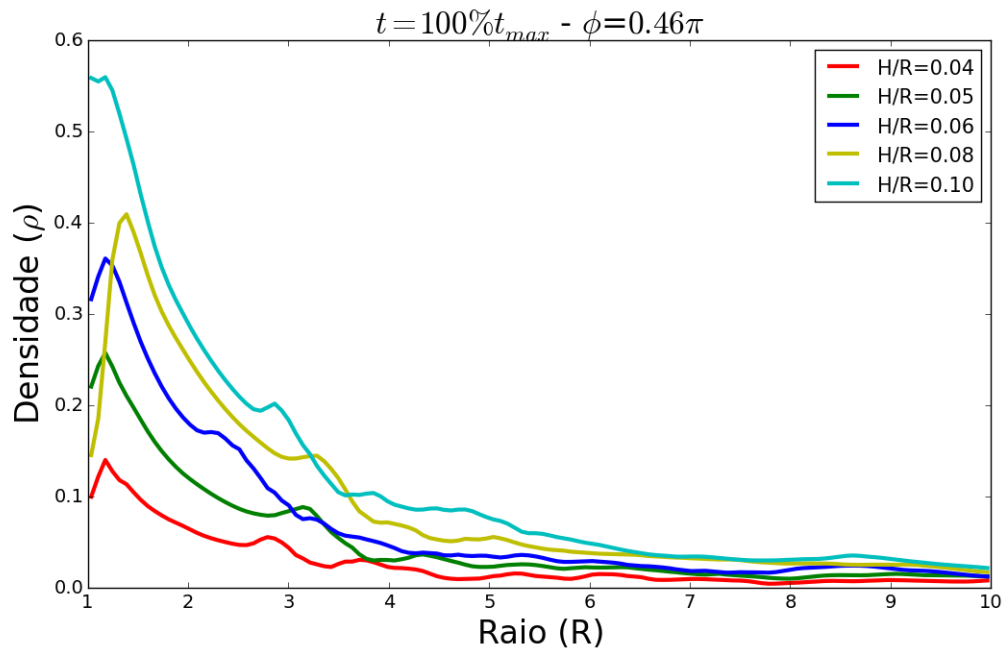


Figura 6.16: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de altura

Na Figura 6.16 é possível perceber que, para as 5 escalas de altura, o comportamento da curva é bastante similar. As diferenças ocorrem devido a quantidade de matéria em cada escala de altura. Em  $H/R = 0.10$ , o valor da densidade  $\rho$  é muito maior que em  $H/R = 0.04$ , e isso se deve pela maior distribuição e quantidade de matéria em  $H/R = 0.10$ . A maior quantidade de matéria pode ser visualizada também nas Figuras 5.5 e 5.1, respectivamente para as alturas  $H/R = 0.10$  e  $H/R = 0.04$ .

Figura 6.17: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de alturaFigura 6.18: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de altura

Figura 6.19: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de alturaFigura 6.20: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de altura

É possível perceber, através das Figuras 6.17, 6.18, 6.19 e 6.20 que, conforme o disco evolui temporalmente, a matéria é espalhada por todo o disco e isso ocorre para todas as escalas de altura apresentando, portanto, comportamento similar em todos os gráficos.

### 6.5.2 $\phi = 0.5\pi$

Nesse caso, iremos mostrar o comportamento de  $\rho$  com um valor de  $\phi = 0.5\pi$  em cada instante de tempo para todas as escalas de altura.

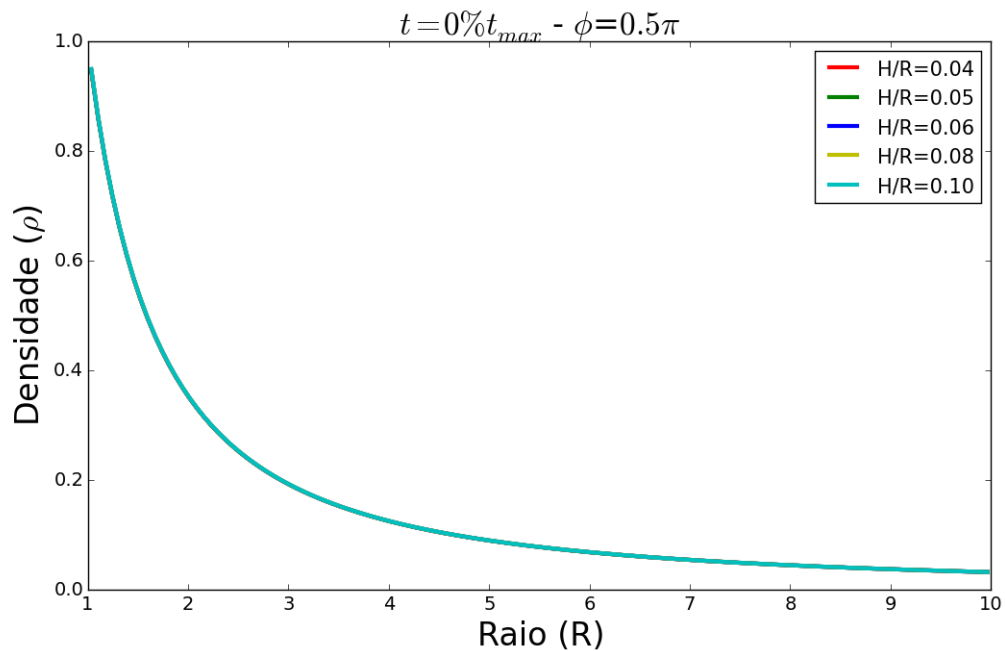
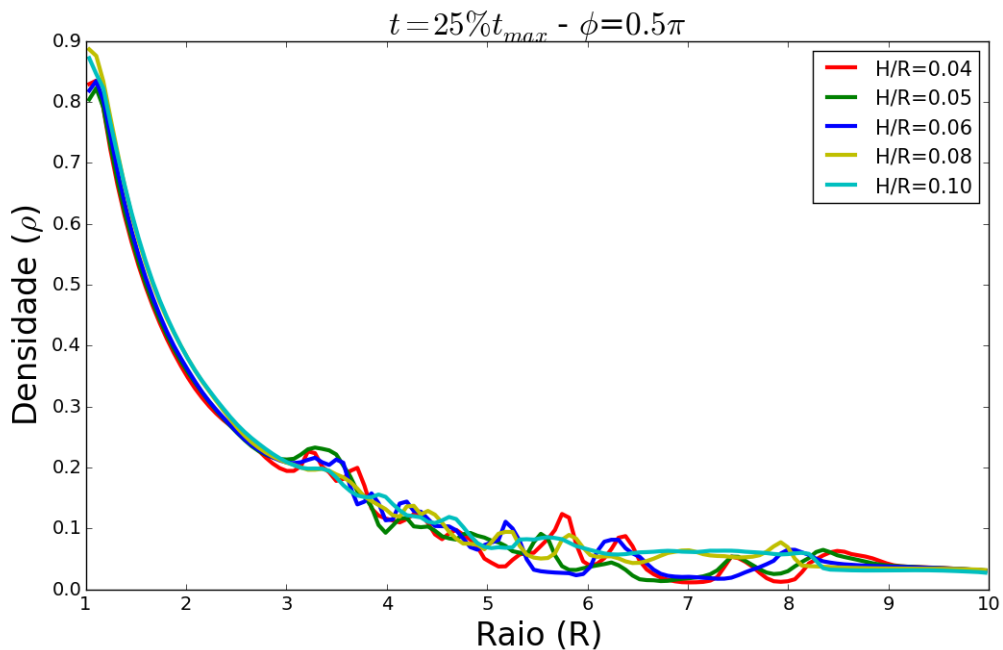
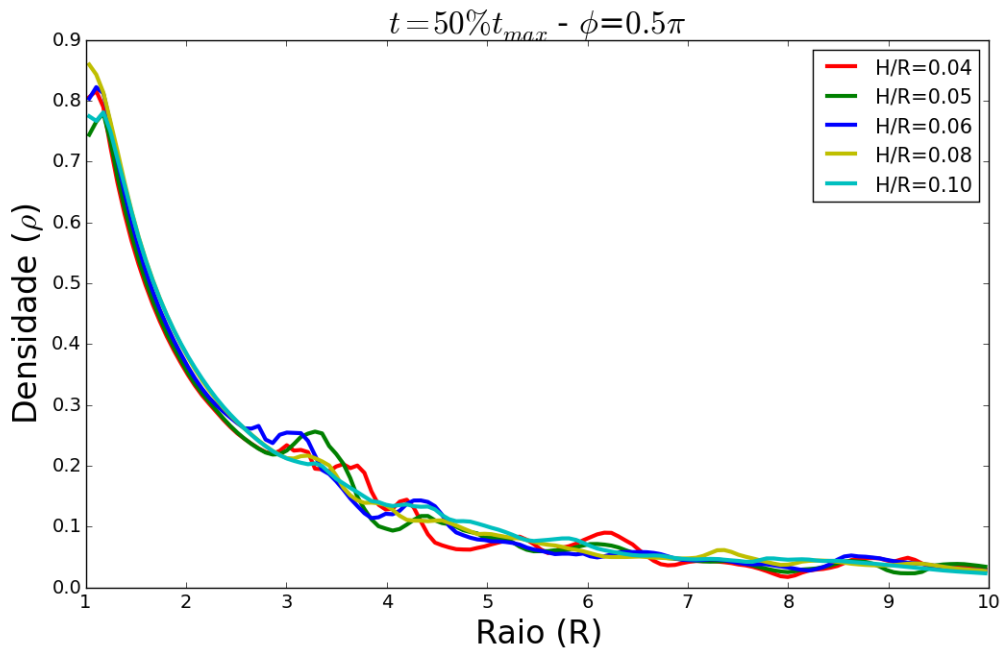


Figura 6.21: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de altura.

Na Figura 6.21 é possível perceber que, para as 5 escalas de altura, o comportamento da curva é similar. Como estamos tratando do *midplane*, este é o local onde o disco apresenta maior quantidade de matéria. Como a quantidade de matéria na parte central do disco em todos os casos é igual, é possível perceber que todas as curvas (para cada escala de altura) apresentam os mesmos resultados.

Figura 6.22: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de alturaFigura 6.23: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de altura

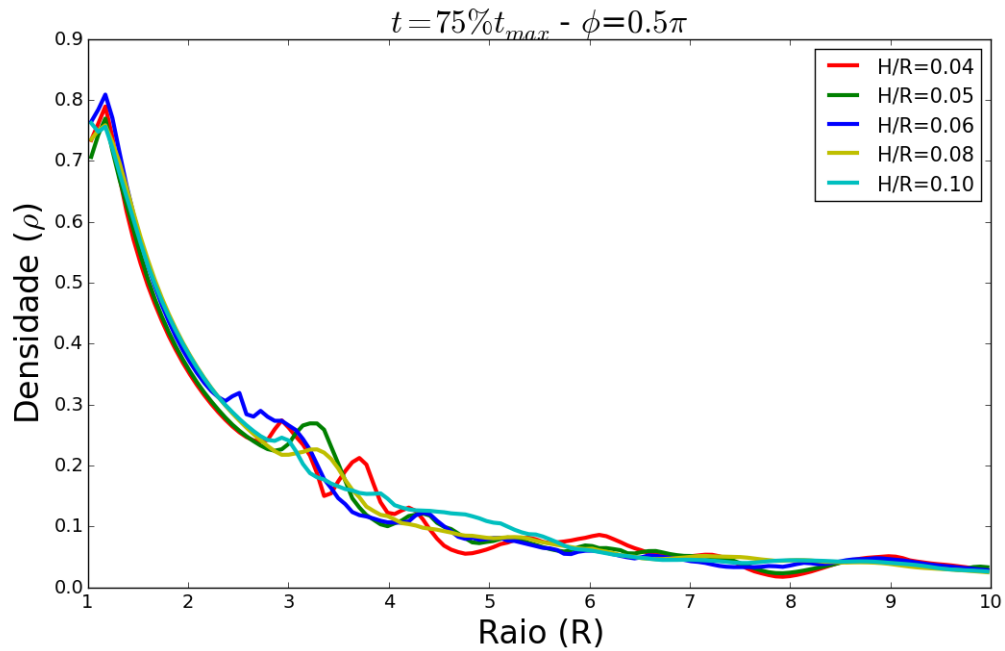


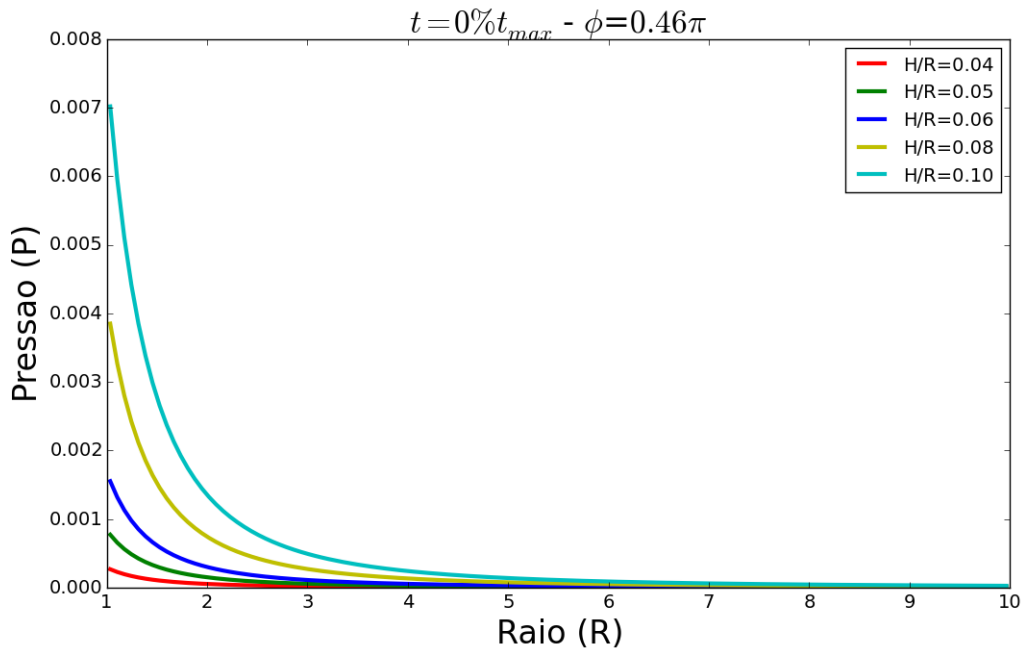
Figura 6.24: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de altura

É possível perceber, através das Figuras 6.22, 6.23, 6.24 e ?? que, conforme o disco evolui temporalmente, a matéria é espalhada por todo o disco e isso ocorre para todas as escalas de altura, apresentando comportamento similar em todos os gráficos.

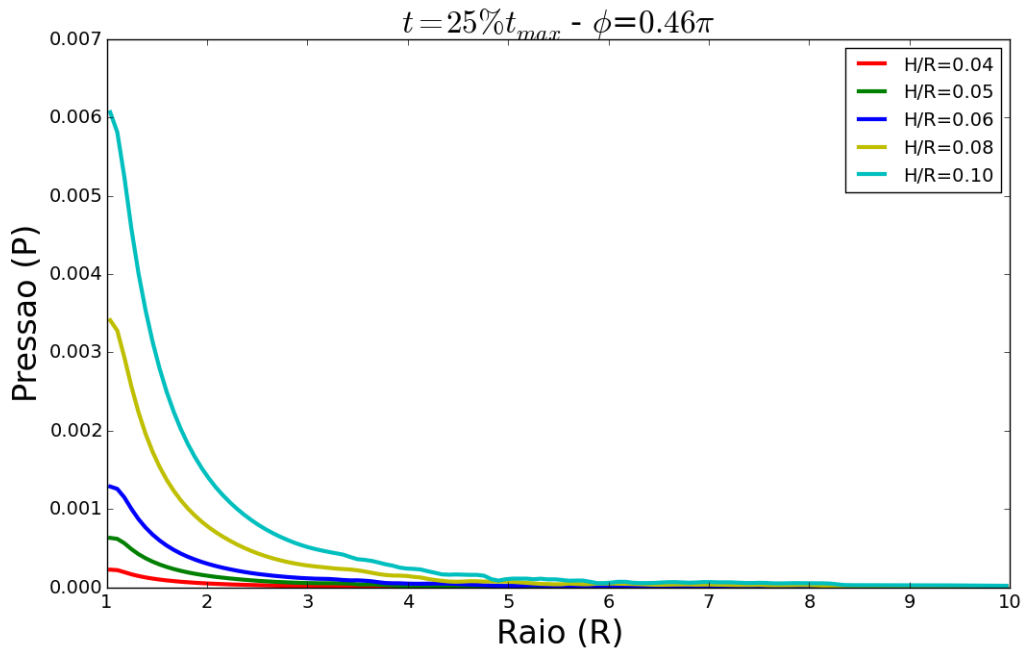
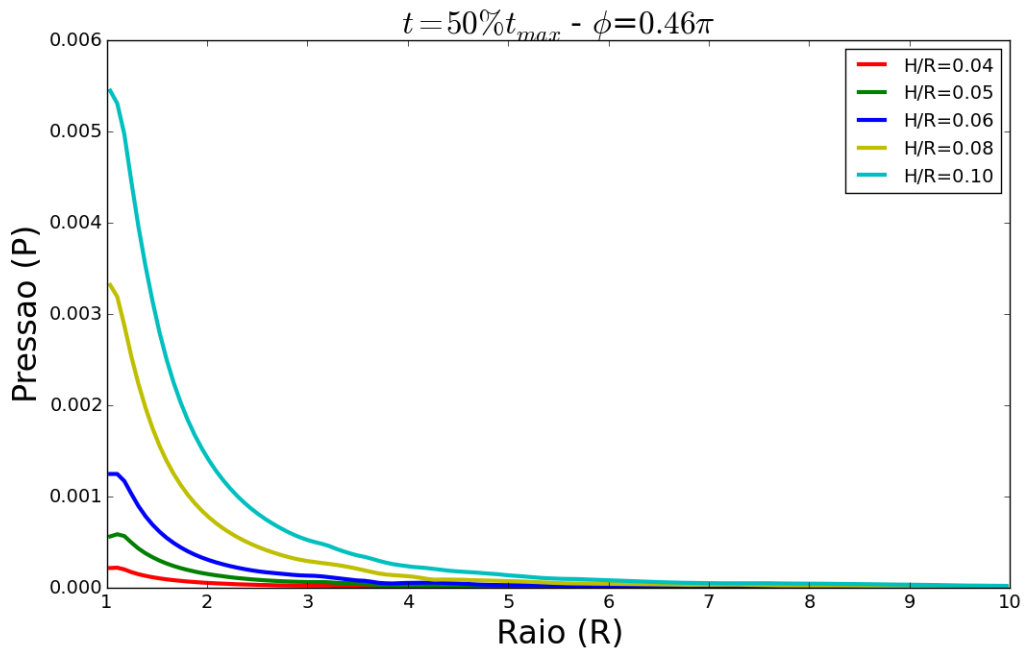
## 6.6 Evolução Temporal da pressão $P$ para diferentes escalas de altura

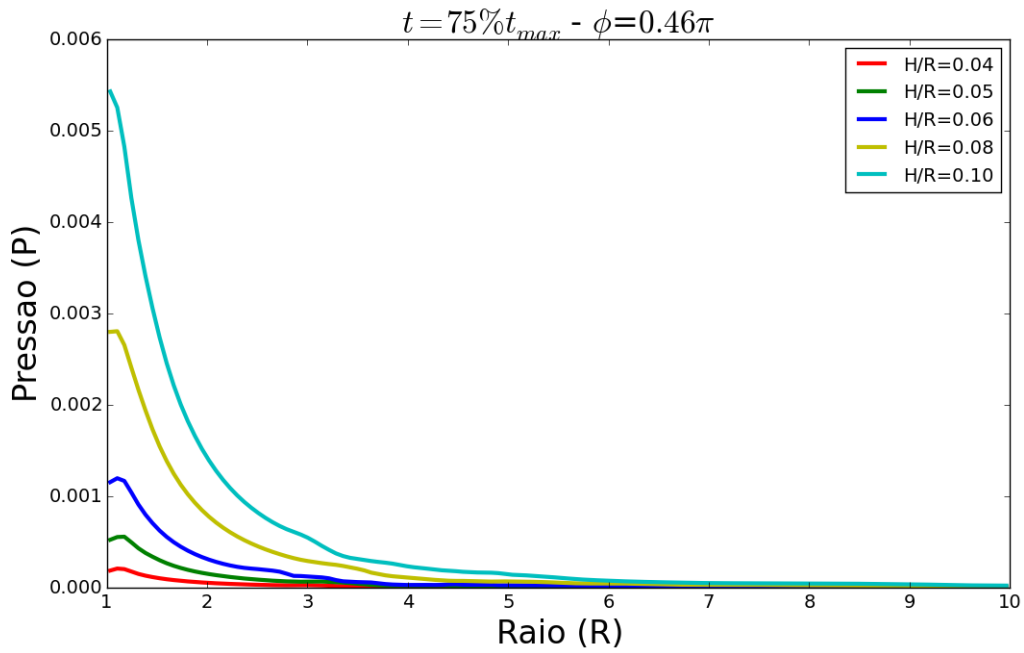
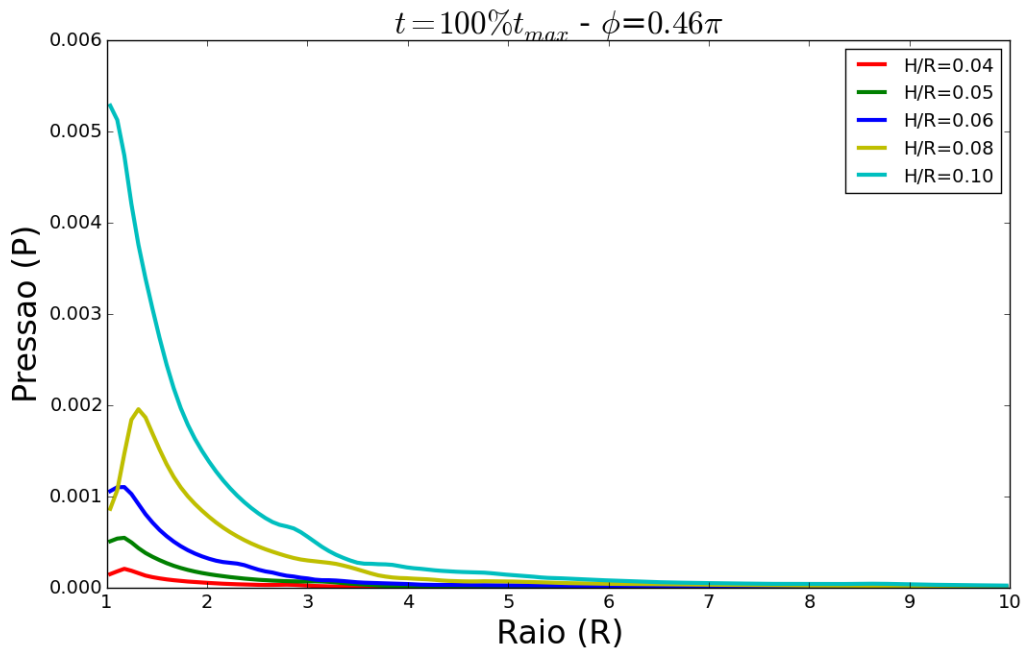
### 6.6.1 $\phi = 0.46\pi$

Agora iremos mostrar o comportamento de  $P$  com um valor de  $\phi = 0.46\pi$  em cada instante de tempo para todas as escalas de altura.

Figura 6.25: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de altura

Na Figura 6.25 é possível perceber que, para as 5 escalas de altura, o comportamento da curva é bastante similar. As diferenças ocorrem devido a quantidade de matéria em cada escala de altura. Em  $H/R = 0.10$ , o valor da densidade  $\rho$  é muito maior que em  $H/R = 0.04$ , e isso se deve pela maior distribuição e quantidade de matéria em  $H/R = 0.10$ . A maior quantidade de matéria pode ser visualizada também nas Figuras 5.5 e 5.1, respectivamente para as alturas  $H/R = 0.10$  e  $H/R = 0.04$ .

Figura 6.26: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de alturaFigura 6.27: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de altura

Figura 6.28: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de alturaFigura 6.29: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de altura

É possível perceber, através das Figuras 6.26, 6.27, 6.28 e 6.29 que, conforme o disco evolui temporalmente, a matéria é espalhada por todo o disco e isso ocorre para todas as escalas de altura apresentando, portanto, comportamento similar em todos os gráficos.

### 6.6.2 $\phi = 0.5\pi$

Nesse caso, iremos mostrar o comportamento de  $P$  com um valor de  $\phi = 0.5\pi$  em cada instante de tempo para todas as escalas de altura.

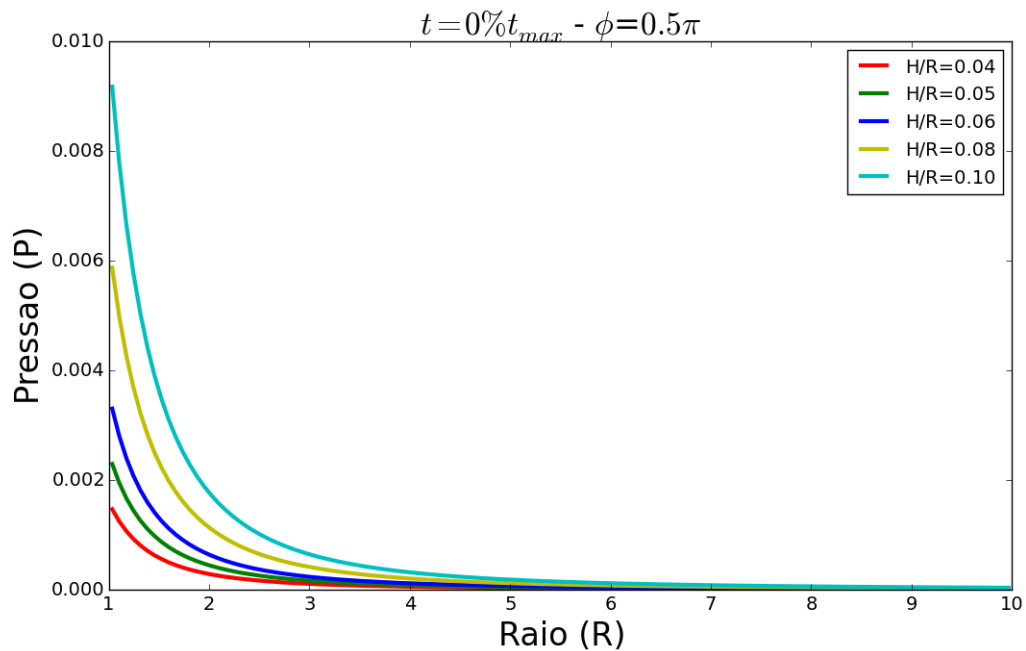
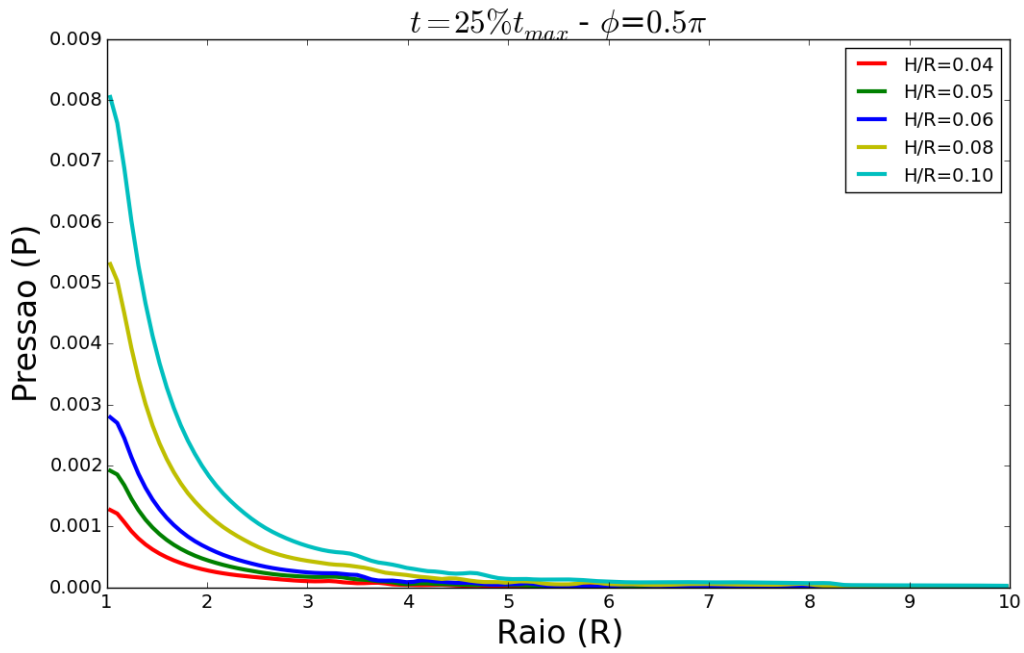
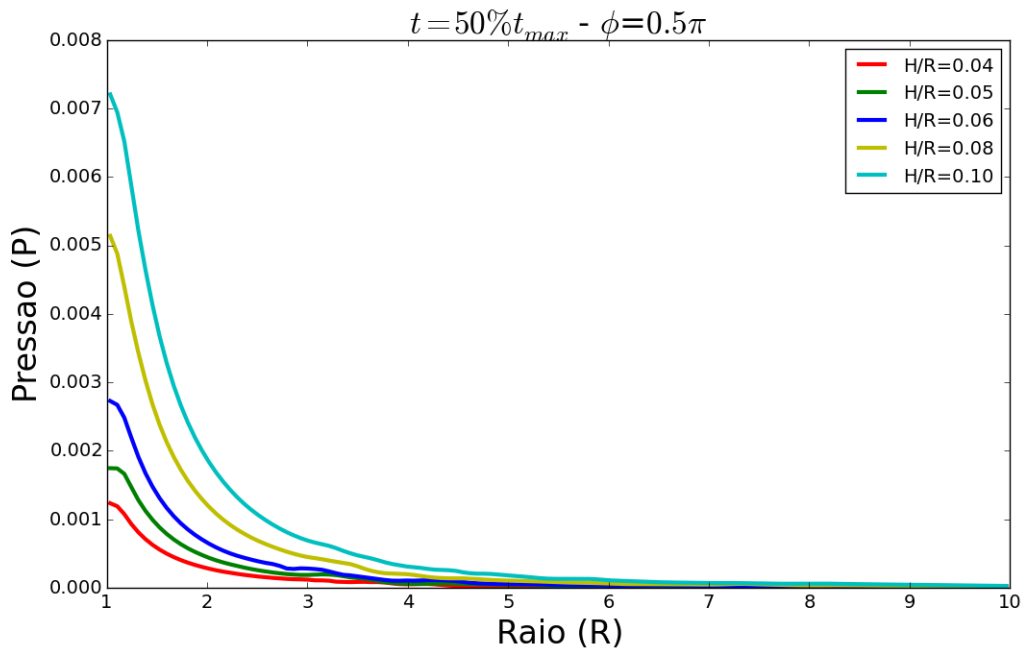
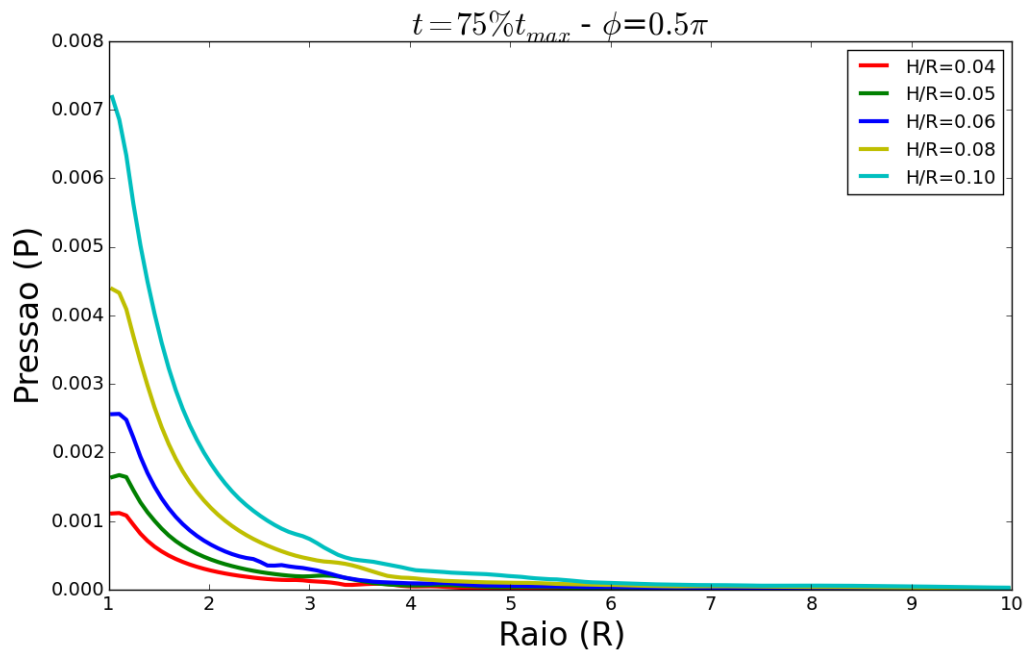
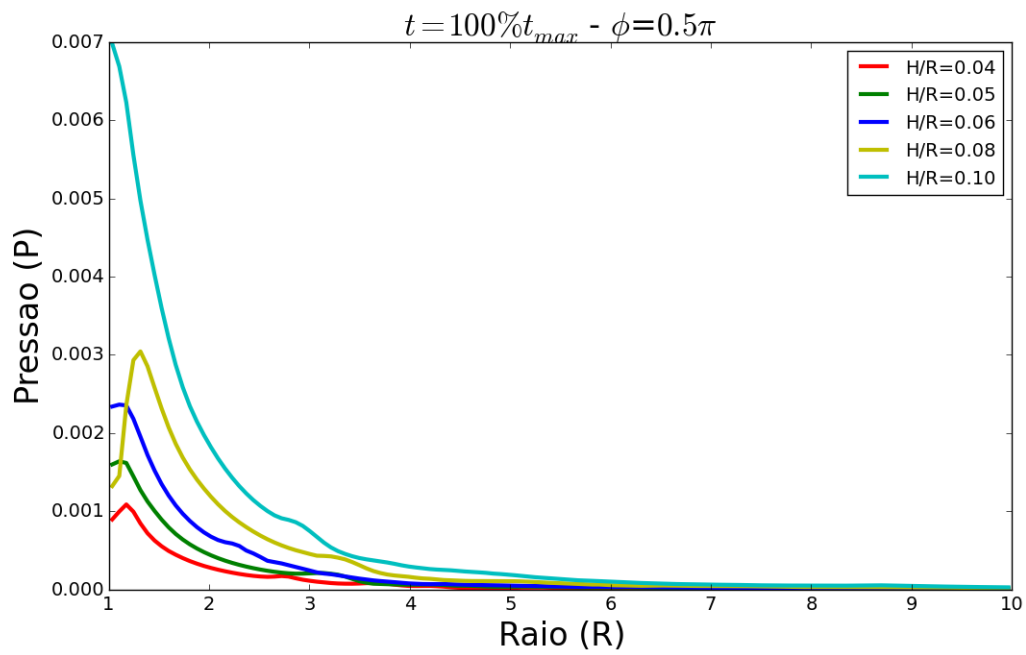


Figura 6.30: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de altura

Na Figura 6.30 é possível perceber que, para as 5 escalas de altura, o comportamento da curva é similar. Como estamos tratando do *midplane*, este é o local onde o disco apresenta maior quantidade de matéria. Como a quantidade de matéria na parte central do disco em todos os casos é igual, é possível perceber que todas as curvas (para cada escala de altura) apresentam os mesmos resultados.

Figura 6.31: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de alturaFigura 6.32: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de altura

Figura 6.33: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de alturaFigura 6.34: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para diferentes escalas de altura

É possível perceber, através das Figuras 6.31, 6.32, 6.33 e 6.34 que, conforme o disco evolui temporalmente, a matéria é espalhada por todo o disco e isso ocorre para todas as escalas de altura, apresentando comportamento similar em todos os gráficos.

# Capítulo 7

## Conclusão e Considerações Finais

### 7.1 Conclusões

O trabalho aborda uma simulação tridimensional de um disco de acreção com MHD. Buscou-se investigar a turbulência gerada pela IMR através de simulações com o *software* PLUTO com coordenadas esféricas utilizando o método Riemann HLLD para solucionar os sistemas lineares gerados a partir das EDPs. Analisou-se a densidade, taxa de acreção, campo magnético e pressão para 5 diferentes escalas de altura no meio do plano e acima do meio do plano.

Como resultado geramos vídeos em 3 dimensões para melhor visualização das propriedades abordadas no trabalho. Uma prévia desses vídeos estão disponíveis no Apêndice B e no link <https://bit.ly/2QE87Fw>

Os resultados mostram que é possível obter resultados similares aos da literatura sobre simulações de discos de acreção, principalmente se comparado à [33].

Em relação à densidade, podemos tirar algumas conclusões, que podem ser pontuadas:

- Conforme o disco evolui temporalmente, ocorre um transporte de matéria ao longo do disco;
- O maior valor de densidade ocorre na região central do disco (até 3 U.A.), ou seja, bem próximo ao Buraco Negro;
- Conforme aumenta-se a escala de altura  $H/R$ , aumenta-se a quantidade de matéria no meio do plano, assim como era esperado e como pode ser visto nas Figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5;

- Fica evidente que, na região intermediária (entre 3 e 8 U.A.) que a simulação descreve satisfatoriamente a instabilidade na densidade;
- É possível notar um excesso de densidade próximo à 3 U.A. para todas as escalas de altura;
- São verificadas ondas de densidade, que se espalham por todo o disco. Isso pode ser facilmente visualizado nas Figuras disponível no Apêndice B;
- Quanto maior a escala de altura, mais tardiamente ocorre a instabilidade na densidade;
- As simulações indicam fortemente que existe uma relação direta entre a IMR e o transporte de momento angular, assim como era esperado;
- É possível perceber que a densidade pode ser escrita por uma lei de potência dada por  $\rho \propto R^{-3/2}$  encontrado através do ajuste polinomial pelo Método dos Mínimos Quadrados.

Quando tratamos da Pressão, surgem as seguintes conclusões:

- Conforme o disco evolui temporalmente, a pressão apresenta um comportamento mais suave, se comparado à densidade;
- A região central do disco (até 3 U.A.) apresenta a maior pressão, similar ao que foi verificado para a densidade;
- Assim como para a densidade, foi verificada também ondas de pressão que se espalham por todo o disco, ao longo da evolução temporal;
- É possível perceber que a densidade pode ser escrita por uma lei de potência dada por  $\rho \propto R^{-3/2}$  encontrado através do ajuste polinomial pelo Método dos Mínimos Quadrados.

Em relação à Taxa de Acreção, as conclusões que podemos tirar são:

- $\dot{M}$  apresenta um valor oscilante em torno de zero;
- Apesar do cálculo da Taxa de Acreção não depender do Campo Magnético, as duas propriedades apresentam comportamentos similares, apresentando uma forte correlação;

- Conforme aumenta-se a escala de altura  $H/R$ , maior será a variação da taxa de acreção nos instantes iniciais da evolução temporal;
- Apesar da região central apresentar maior quantidade de matéria, ela se mantém bastante estável durante toda a simulação, mostrando então que a matéria que se encontra próxima ao Buraco Negro (até 3 U.A.) não apresenta uma grande variação;
- A região mais externa do disco (após 8 U.A.) apresenta um comportamento bastante estável;
- A região intermediária (entre 3 e 8 U.A.) apresenta uma grande oscilação. Isso se deve ao efeito da IMR e do transporte de momento angular;
- A taxa de acreção apresenta comportamento similar ao Campo Magnético, ambas apresentando uma grande oscilação na parte intermediária, mostrando assim uma forte correlação entre as grandezas;
- A matéria que se encontra na região central é transportada para as partes intermediárias pela IMR e a matéria que se encontra na região mais externa do disco é transportada para o centro devido à gravidade. Dessa forma, esse processo permite que a região intermediária seja a região onde ocorre o maior trânsito de matéria e, conseqüentemente, a região onde apresenta a maior instabilidade.

Para finalizar, quando analisamos o Campo Magnético, chegamos às seguintes conclusões:

- É possível perceber, principalmente pelas Figuras disponíveis no Apêndice B, que o Campo Magnético (todas as componentes) apresenta grandes oscilações na parte intermediária do disco (entre 3 e 8 U.A.);
- As componentes radial  $B_r$  e angular no plano  $B_\theta$  divergem na região intermediária;
- A componente perpendicular ao plano  $B_\phi$  se apresenta mais estável na região intermediária durante toda evolução temporal e quase constante nas regiões até 3 U.A. e após 8 U.A.;
- **O Campo Magnético apresenta uma forte correlação com a Taxa de Acreção;**
- É possível verificar que, quanto maior a escala de altura  $H/R$ , mais tardiamente se estabilizará a componente  $B_\phi$ ;

- As três componentes do Campo Magnético se apresentam estáveis na parte central do disco (até 3 U.A.), similar ao comportamento de  $\dot{M}$ . Podemos concluir que a verdadeira responsável pelo transporte de momento angular é a IMR;
- $B_r$  e  $B_\theta$  apresentam grandes oscilações na região mais externa do disco (após 8 U.A.) assim como foi verificado para a taxa de acreção, sendo estabilizadas conforme aumenta-se  $H/R$ .  $B_\phi$  permanece estável nessa região;
- Fica evidente que a IMR é responsável pelo transporte de momento angular, pois é a região onde  $\dot{M}$  e as componentes do Campo Magnético (principalmente a componente rotacional  $B_\theta$  e  $B_r$ ) apresentam a maior variação, na região intermediária do disco, entre 3 e 8 U.A.;

Portanto apresentam exatamente o mesmo comportamento na mesma região do espaço. Destacamos ainda que no cálculo da Taxa de Acreção não foi usado o Campo Magnético. Portanto, definitivamente, há correlação entre as duas grandezas.

## 7.2 Trabalhos Futuros

Sugere-se como trabalho futuro a análise do disco completo para diferentes escalas de altura e com tempo de simulação maior para verificar se o comportamento da densidade, taxa de acreção, pressão, campo magnético permanecem com o mesmo perfil identificado no presente trabalho. Outras análises pode ser feitas, modificando as equações de entrada do código, a fim de tentar modificar eventuais comportamentos do disco, além de análises de discos com campo magnético inicial mais intenso, verificando assim os efeitos gerados na evolução temporal.

## APÊNDICE A - Análise da dependência da densidade $\rho$ em relação à $\theta$

Assim como citado anteriormente na seção 5.2.3, mostraremos a fraca dependência da densidade  $\rho$  em relação à  $\theta$ . Os resultados encontrados podem ser visualizados nas Figuras A.1, A.2, A.3, A.4 e A.5 abaixo:

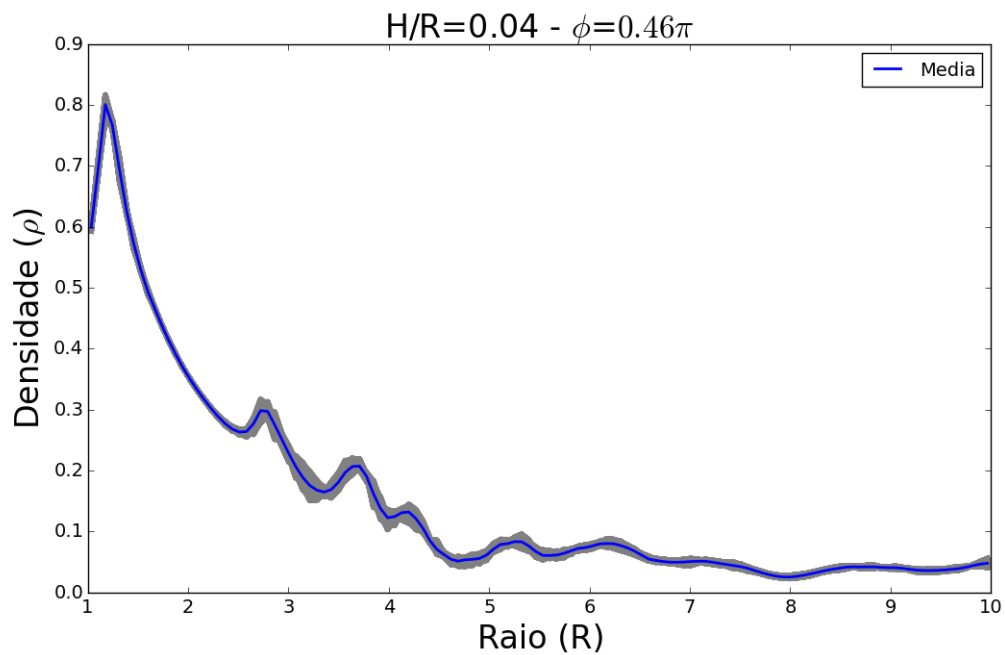


Figura A.1: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para  $H/R = 0.04$  e diferentes valores de  $\theta$ .

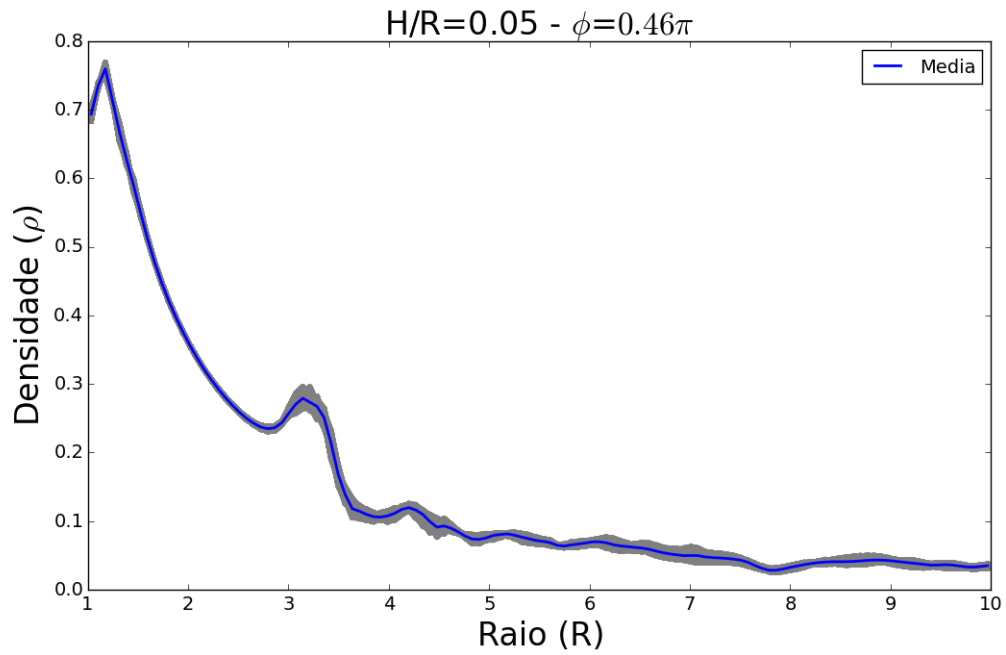


Figura A.2: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para  $H/R = 0.05$  e diferentes valores de  $\theta$ .

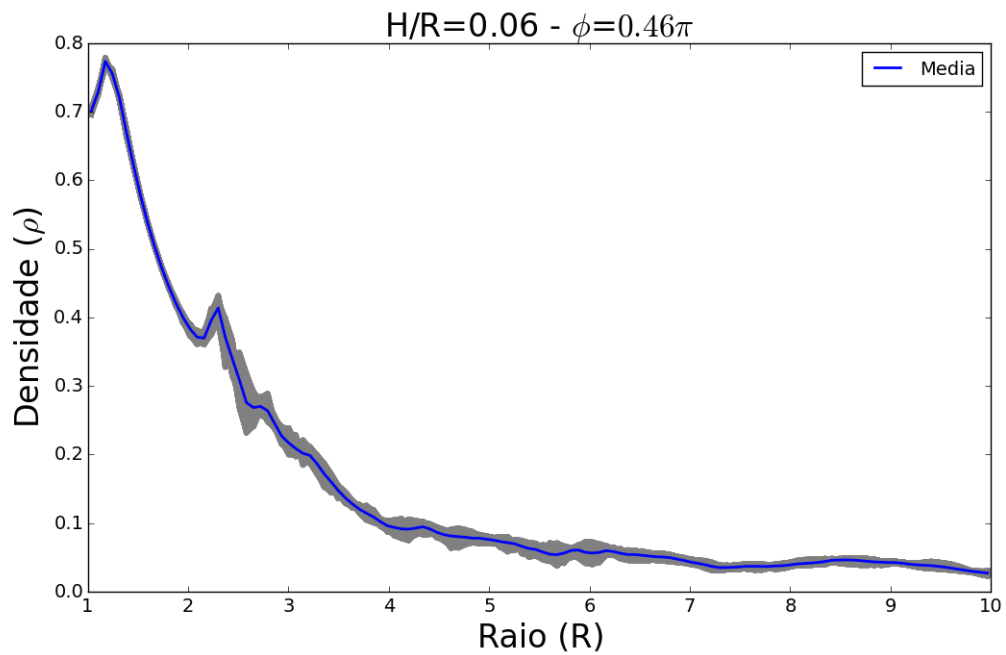


Figura A.3: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para  $H/R = 0.06$  e diferentes valores de  $\theta$ .

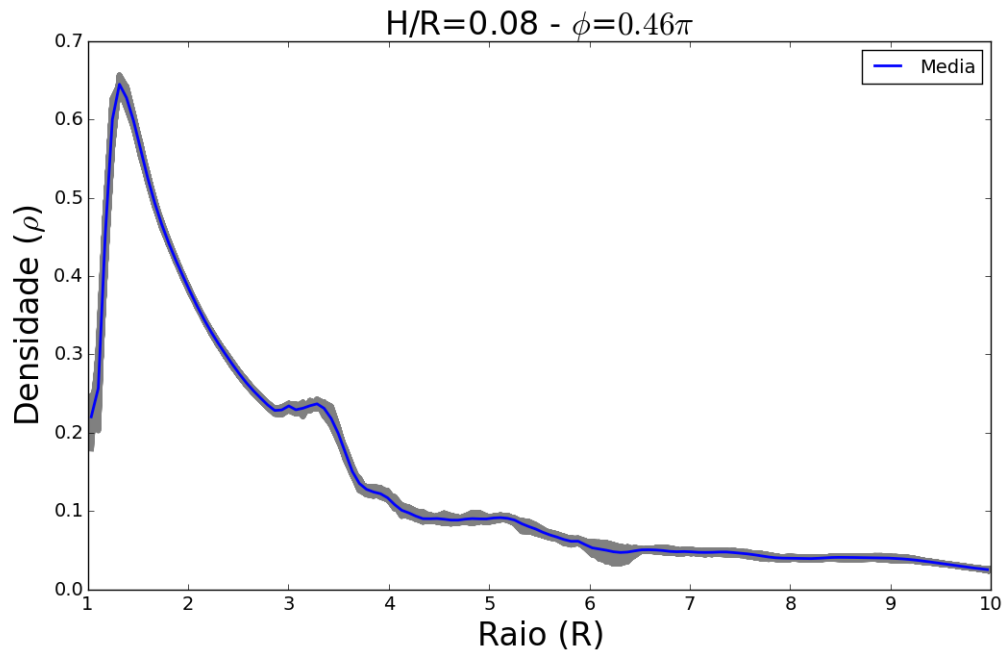


Figura A.4: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para  $H/R = 0.08$  e diferentes valores de  $\theta$ .

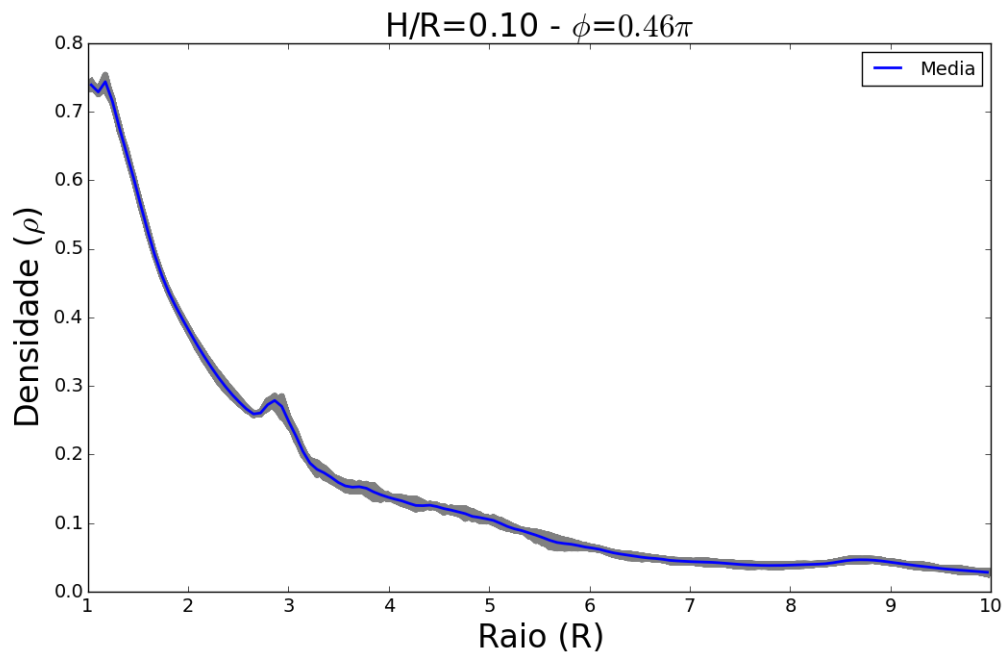


Figura A.5: Gráfico de Raio  $\times$  Densidade para  $H/R = 0.10$  e diferentes valores de  $\theta$ .

Podemos notar nas Figuras A.1, A.2, A.3, A.4 e A.5 que o gráfico em cinza representam todos os valores de  $\rho$  em diferentes valores de  $\theta$  e o gráfico em azul representa os a média dos valores em cinza. É possível perceber que pode-se utilizar a média dos valores de  $\rho$  ao longo de todos os valores  $\theta$ , demonstrando a média descreve muito bem o comportamento típico da densidade.

## APÊNDICE B - Link para acesso aos vídeos do comportamento das propriedades estudadas

Assim como citado anteriormente na seção 5.2.3, disponibilizamos o link<sup>1</sup> para os vídeos em 3D das propriedades analisadas em nosso trabalho. Os vídeos disponíveis no *link* descrevem todas as propriedades analisadas para diferentes valores de  $\phi$  e de  $H/R$ .

As Figuras a seguir mostram 5 instantes temporais para cada uma das propriedades estudadas, sendo utilizado a escala de altura  $H/R = 0.08$  e no meio do plano do disco  $\phi = 0.5\pi$ . Estes valores foram fixados de modo a permitir uma visualização de *frames* dos vídeos elaborados com os dados da simulação. Outras combinações de parâmetros podem ser visualizadas no *link* acima.

---

<sup>1</sup>Disponível em <https://bit.ly/2QE87Fw>

- Densidade

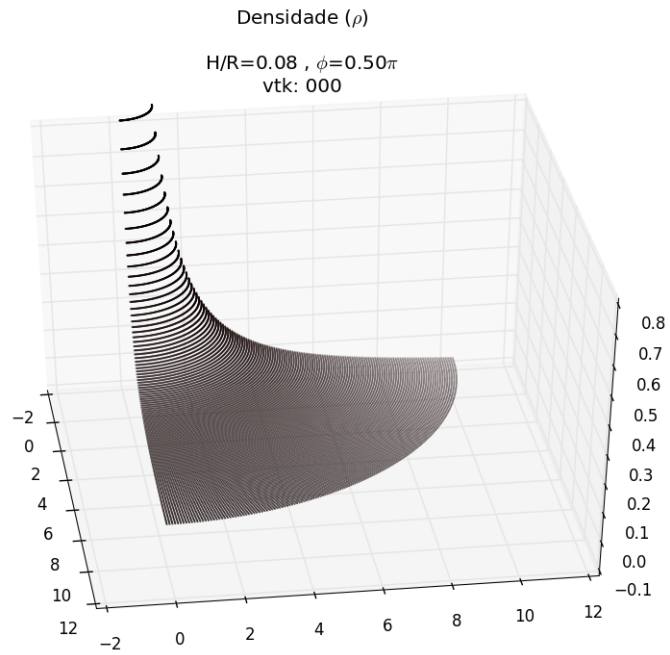


Figura B.1: Comportamento da Densidade durante a evolução temporal.

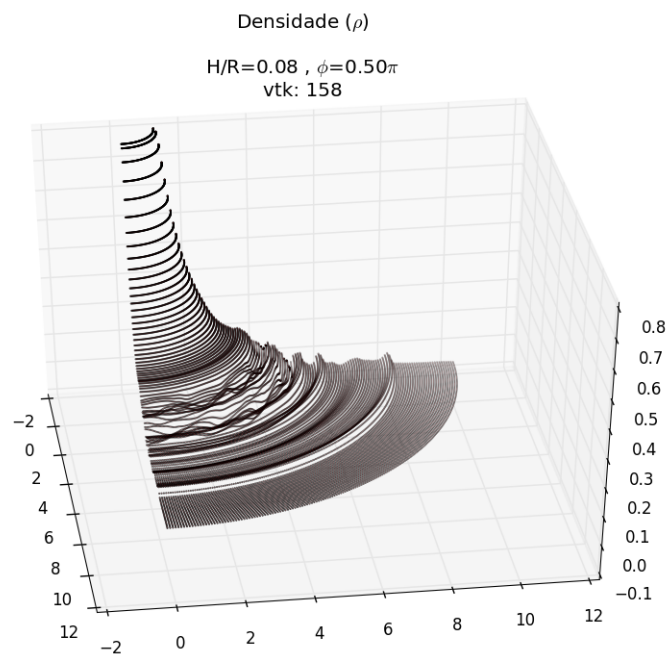


Figura B.2: Comportamento da Densidade durante a evolução temporal.

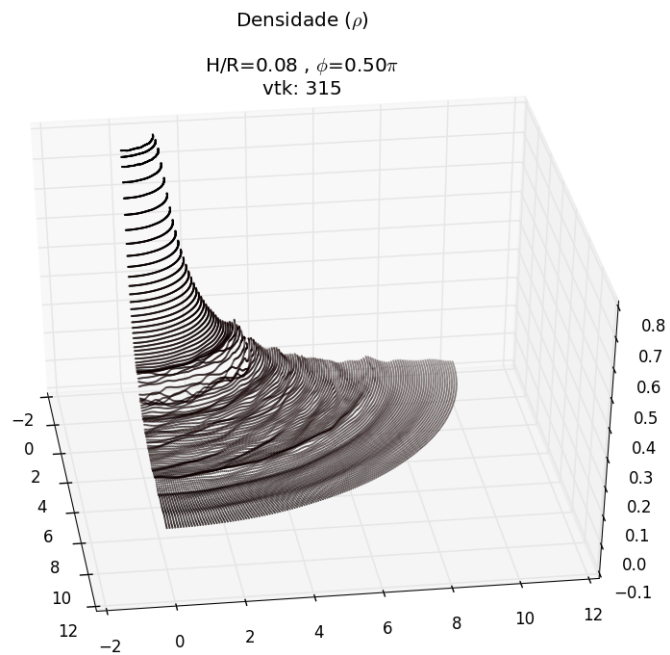


Figura B.3: Comportamento da Densidade durante a evolução temporal.

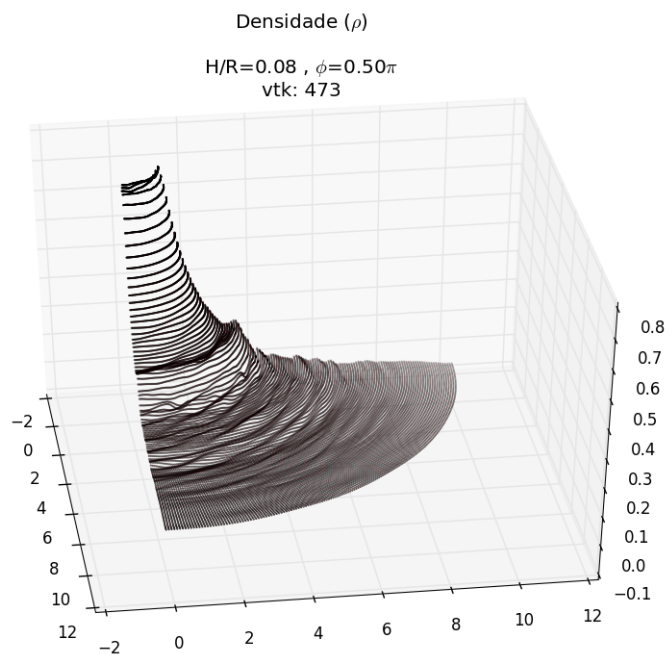


Figura B.4: Comportamento da Densidade durante a evolução temporal.

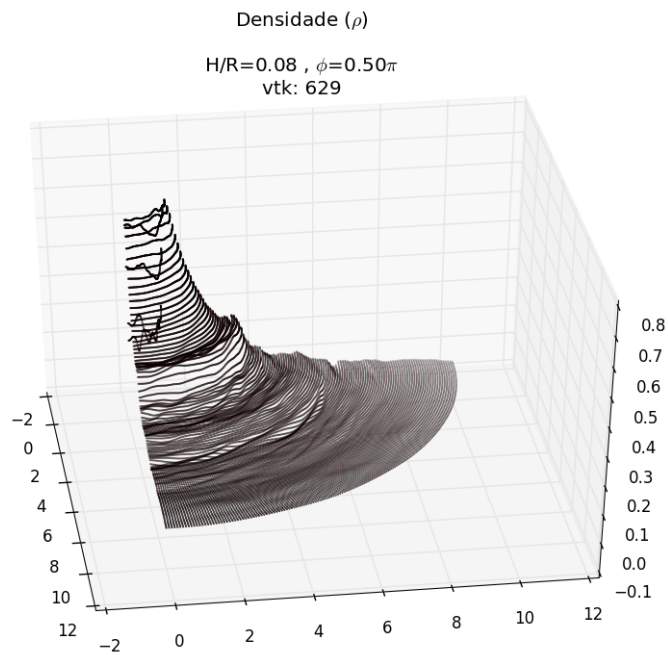


Figura B.5: Comportamento da Densidade durante a evolução temporal.

Próximo ao instante de tempo da Figura B.3 é possível visualizar uma reflexão da onda de densidade no limite externo do disco de acreção (10 U.A.), que consideramos ser um mero efeito de borda.

- Pressão

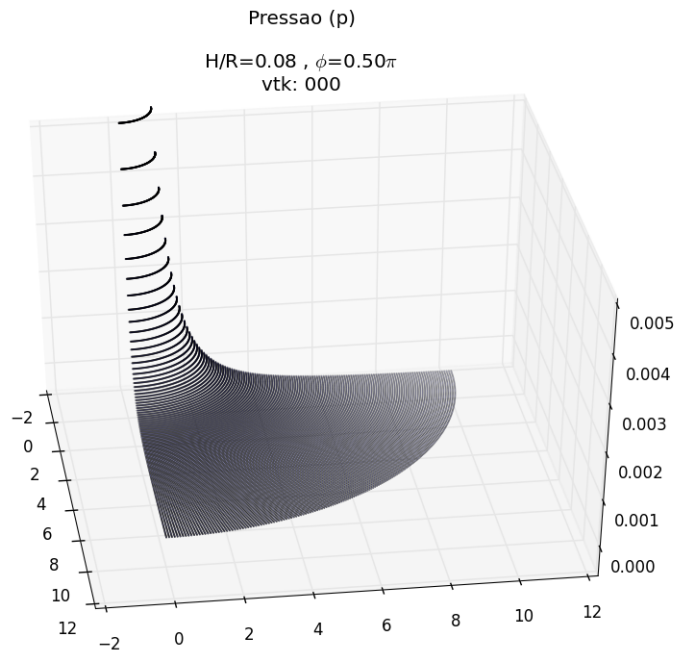


Figura B.6: Comportamento da Pressão durante a evolução temporal.

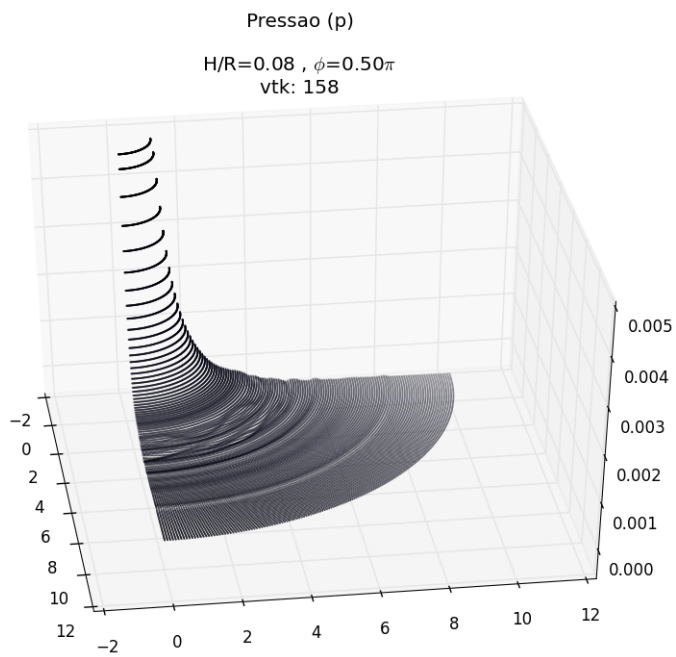


Figura B.7: Comportamento da Pressão durante a evolução temporal.

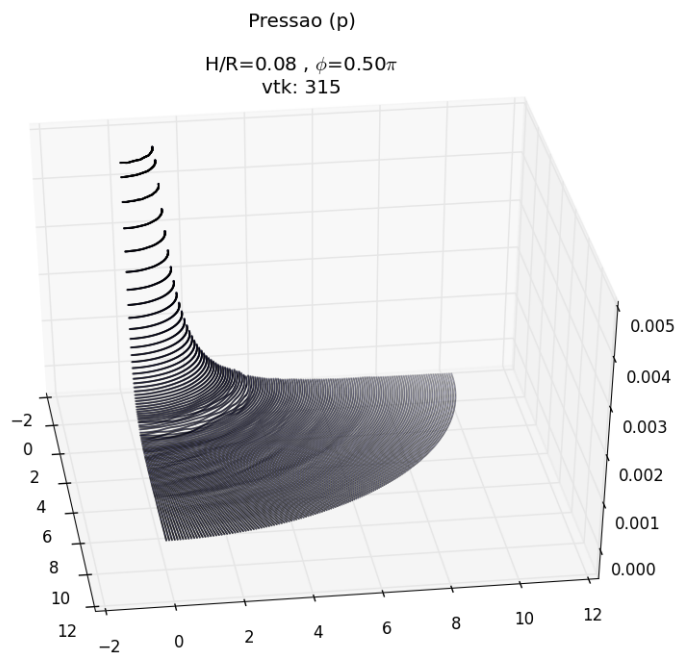


Figura B.8: Comportamento da Pressão durante a evolução temporal.

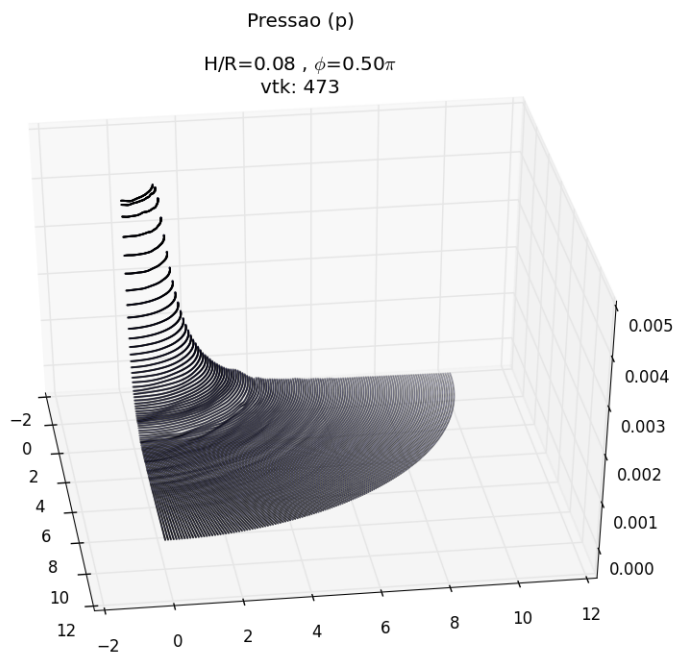


Figura B.9: Comportamento da Pressão durante a evolução temporal.

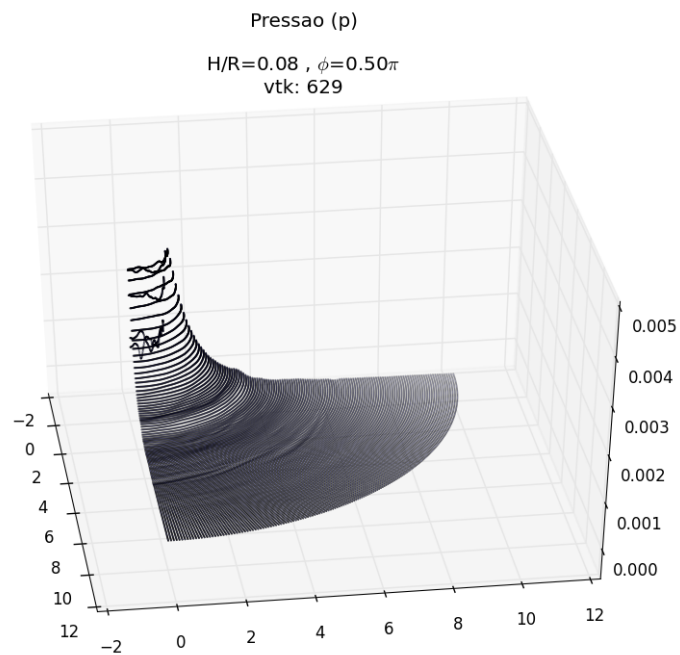


Figura B.10: Comportamento da Pressão durante a evolução temporal.

Próximo ao instante de tempo da Figura B.8 é possível visualizar uma reflexão da onda de pressão no limite externo do disco de acreção (10 U.A.), que consideramos ser um mero efeito de borda.

- Componente Radial do Campo Magnético  $B_r$

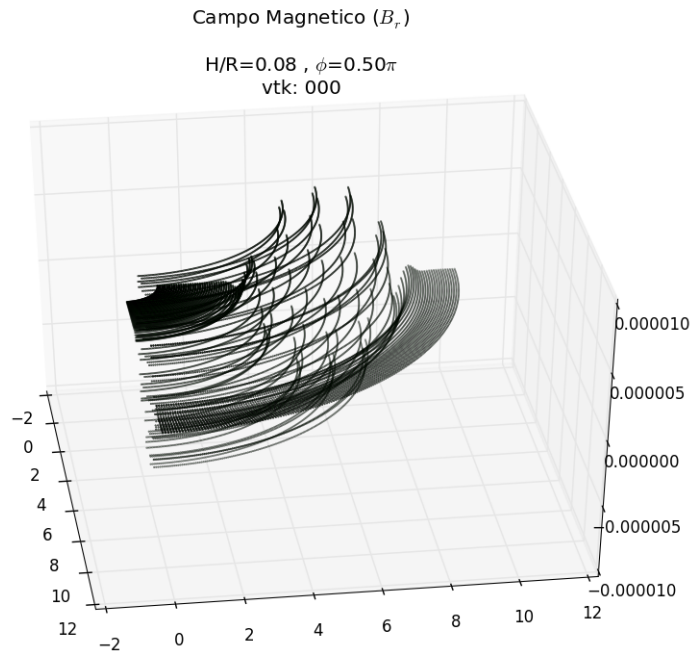


Figura B.11: Comportamento da Componente Radial do Campo Magnético  $B_r$  durante a evolução temporal.

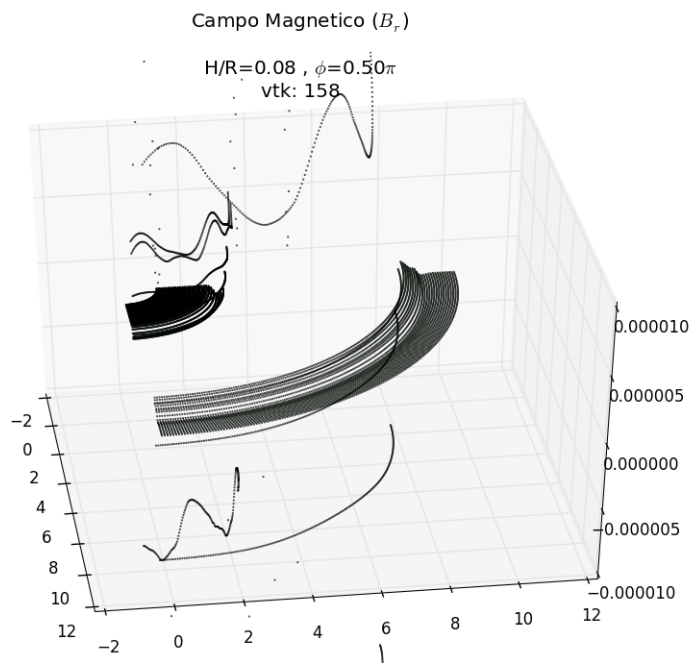


Figura B.12: Comportamento da Componente Radial do Campo Magnético  $B_r$  durante a evolução temporal.

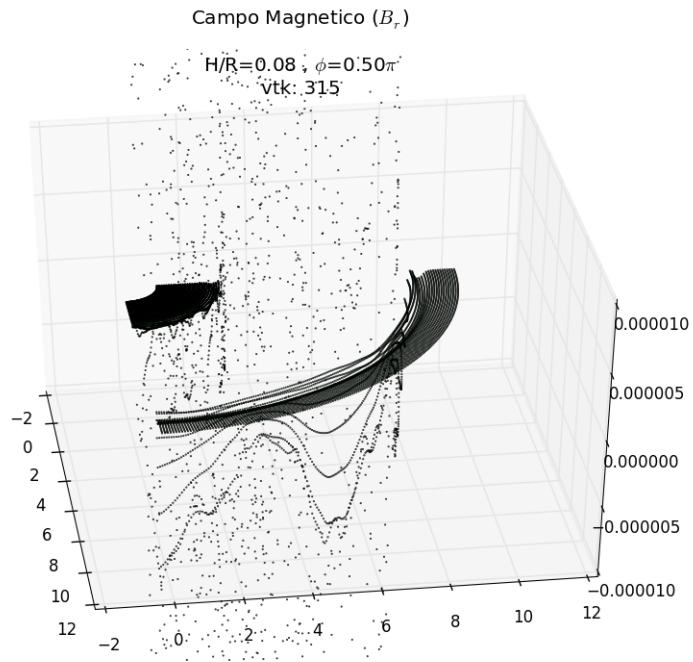


Figura B.13: Comportamento da Componente Radial do Campo Magnético  $B_r$  durante a evolução temporal.

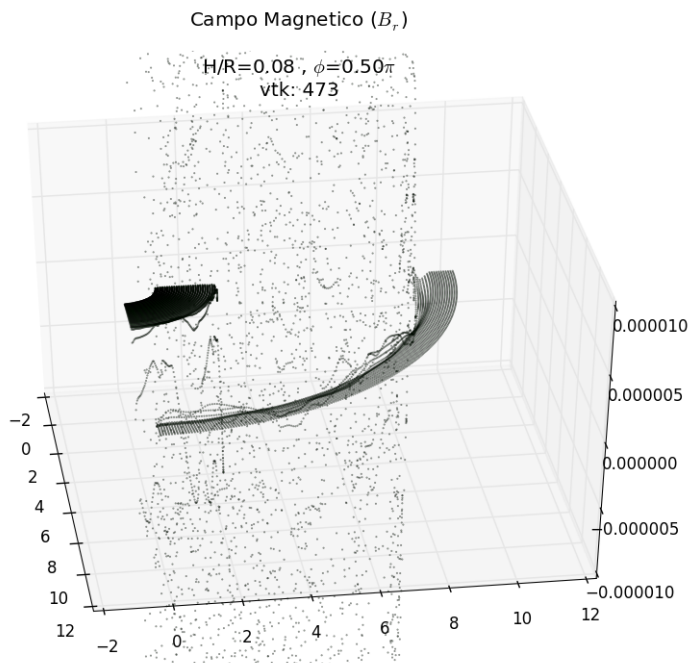


Figura B.14: Comportamento da Componente Radial do Campo Magnético  $B_r$  durante a evolução temporal.

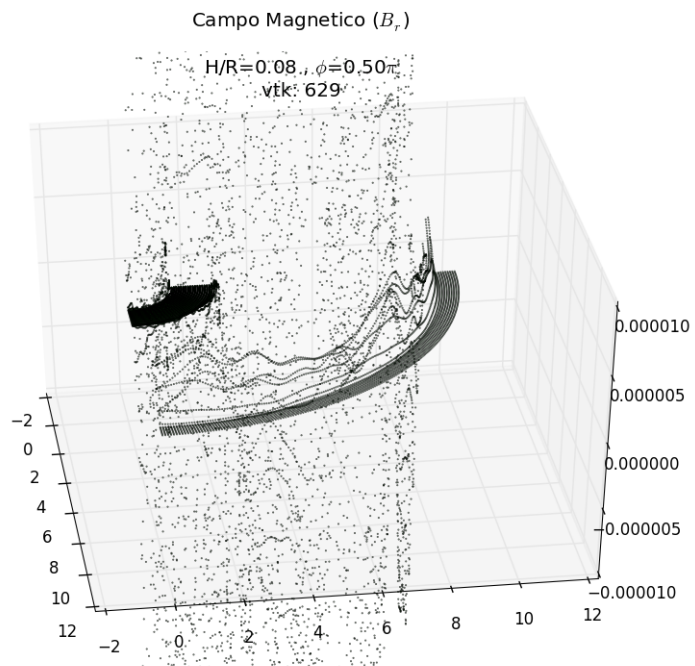


Figura B.15: Comportamento da Componente Radial do Campo Magnético  $B_r$  durante a evolução temporal.

- Componente no plano do disco do Campo Magnético  $B_\phi$

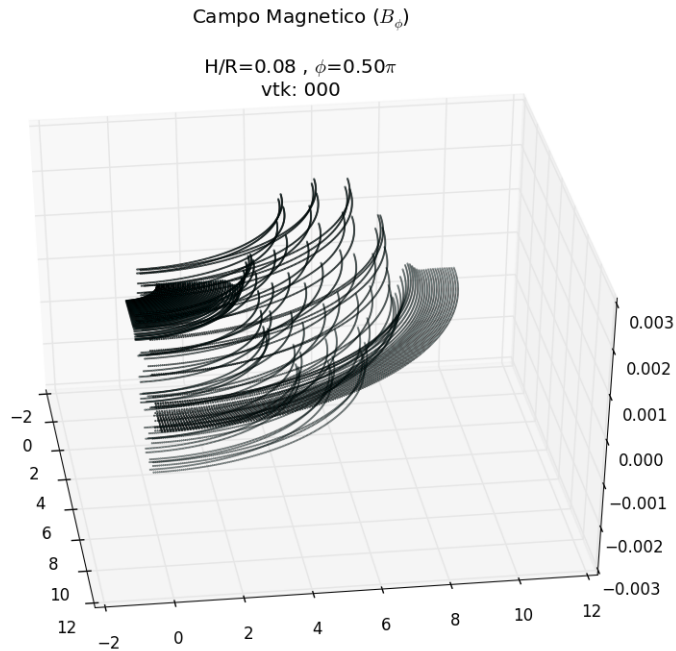


Figura B.16: Comportamento da Componente no plano do disco do Campo Magnético  $B_\phi$  durante a evolução temporal.

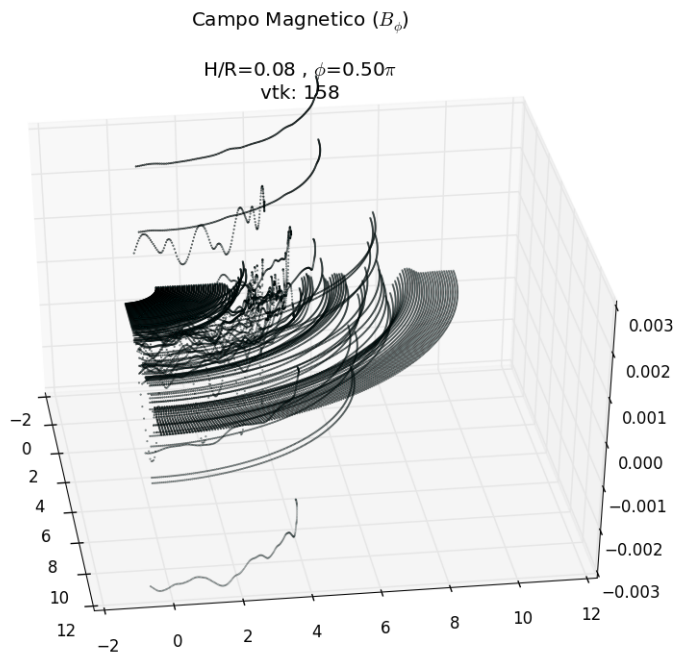


Figura B.17: Comportamento da Componente no plano do disco do Campo Magnético  $B_\phi$  durante a evolução temporal.

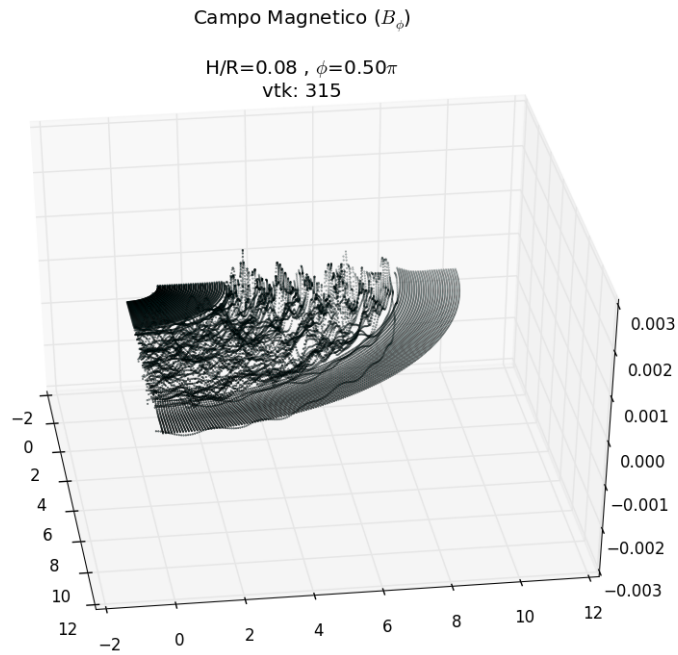


Figura B.18: Comportamento da Componente no plano do disco do Campo Magnético  $B_\phi$  durante a evolução temporal.

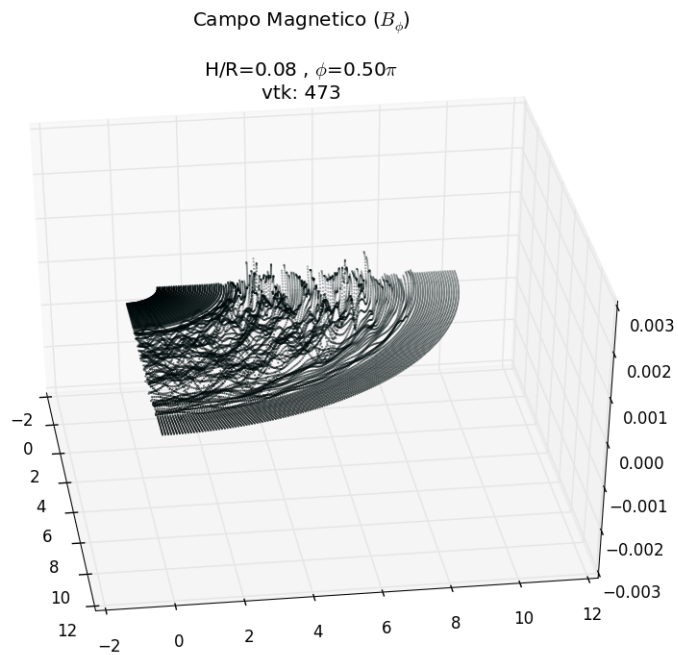


Figura B.19: Comportamento da Componente no plano do disco do Campo Magnético  $B_\phi$  durante a evolução temporal.

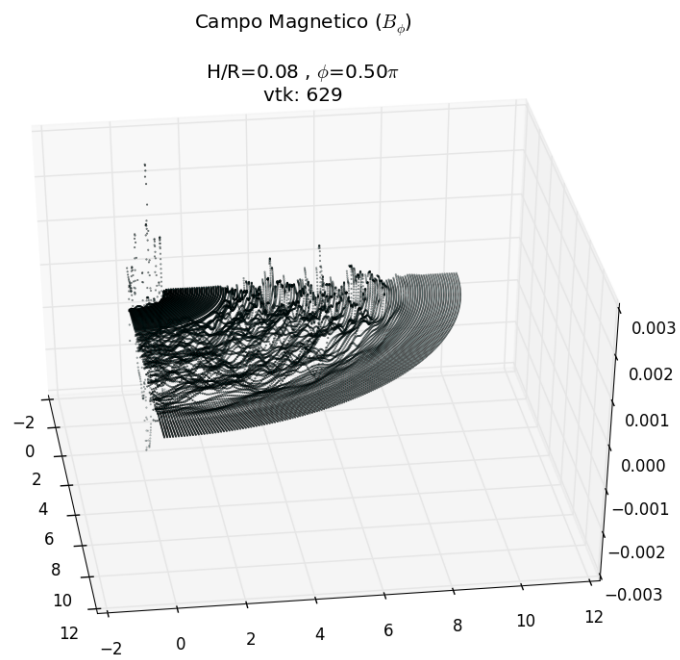


Figura B.20: Comportamento da Componente no plano do disco do Campo Magnético  $B_\phi$  durante a evolução temporal.

- Componente angular no plano do Campo Magnético  $B_\theta$

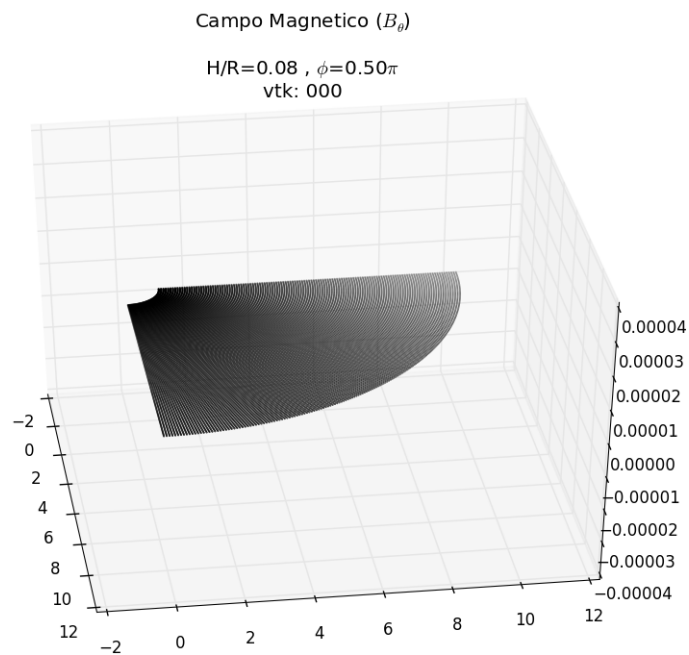


Figura B.21: Comportamento da Componente angular no plano do Campo Magnético  $B_\theta$  durante a evolução temporal.

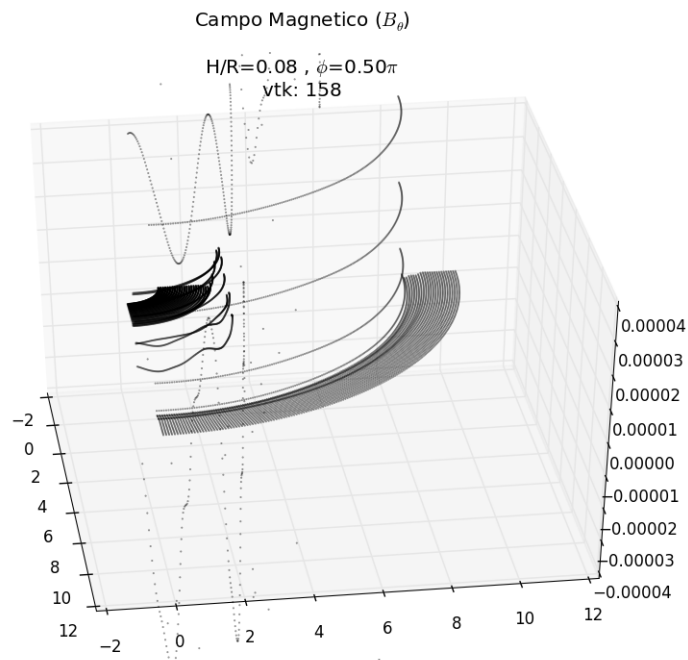


Figura B.22: Comportamento da Componente angular no plano do Campo Magnético  $B_\theta$  durante a evolução temporal.

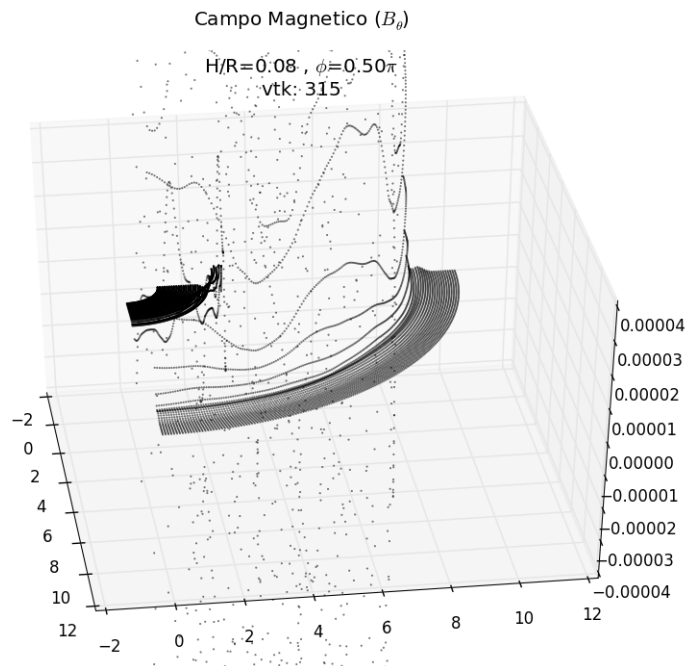


Figura B.23: Comportamento da Componente angular no plano do Campo Magnético  $B_\theta$  durante a evolução temporal.

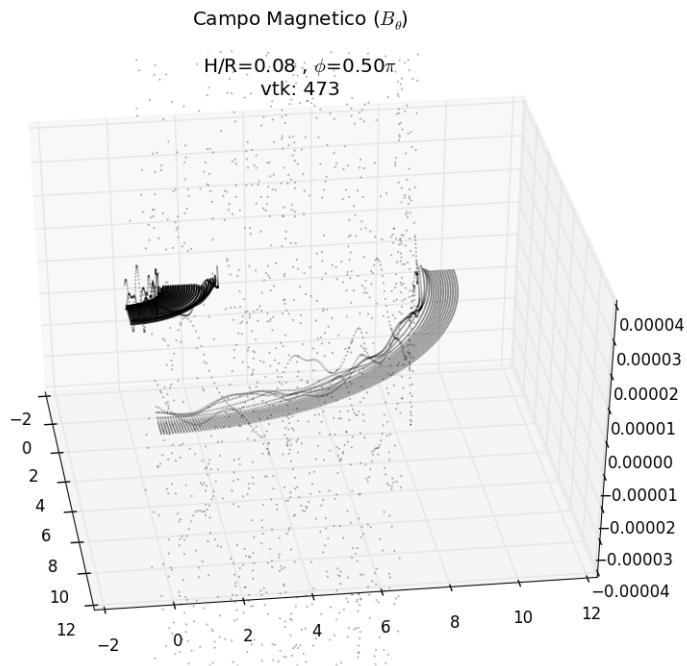


Figura B.24: Comportamento da Componente angular no plano do Campo Magnético  $B_\theta$  durante a evolução temporal.

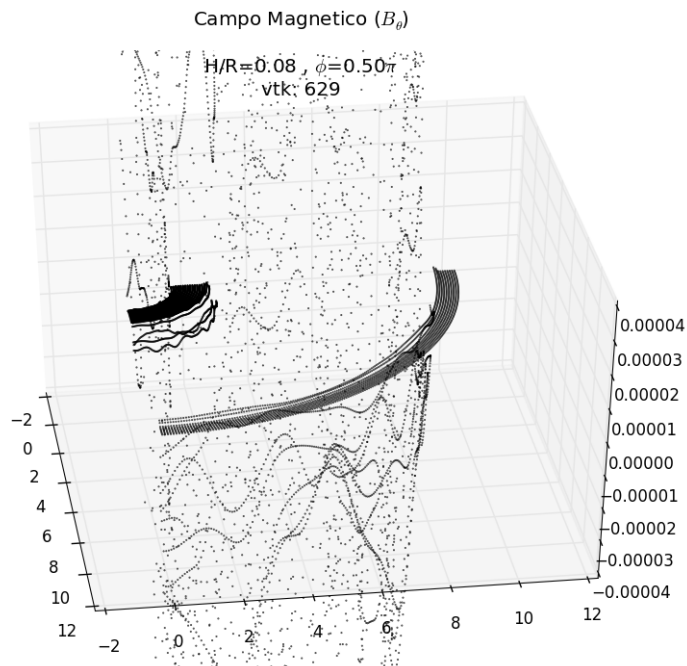


Figura B.25: Comportamento da Componente angular no plano do Campo Magnético  $B_\theta$  durante a evolução temporal.

- Taxa de Acreção

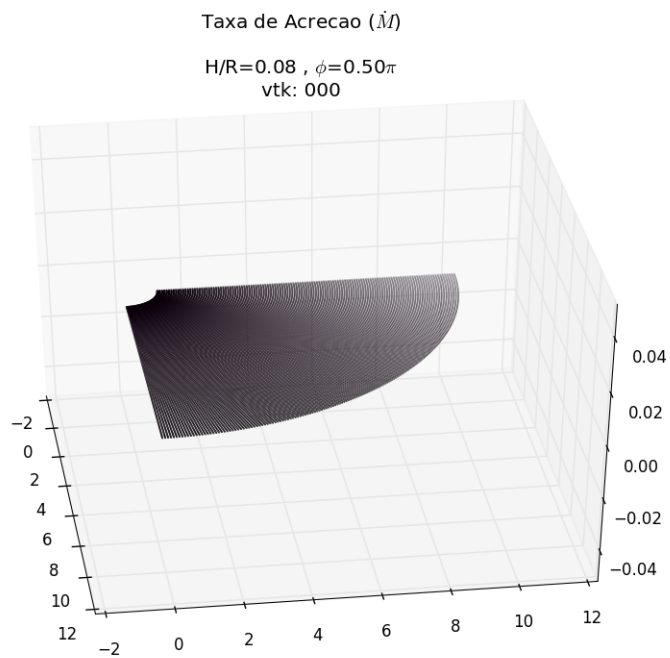


Figura B.26: Comportamento da Taxa de Acreção durante a evolução temporal.

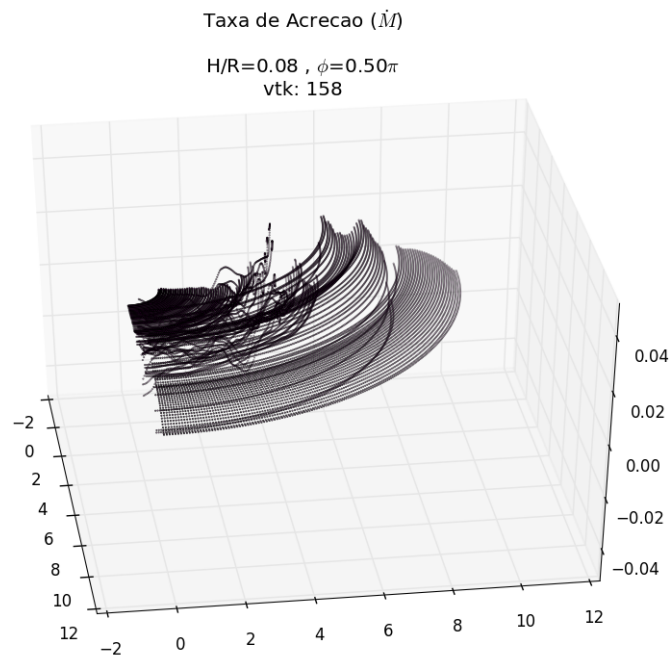


Figura B.27: Comportamento da Taxa de Acreção durante a evolução temporal.

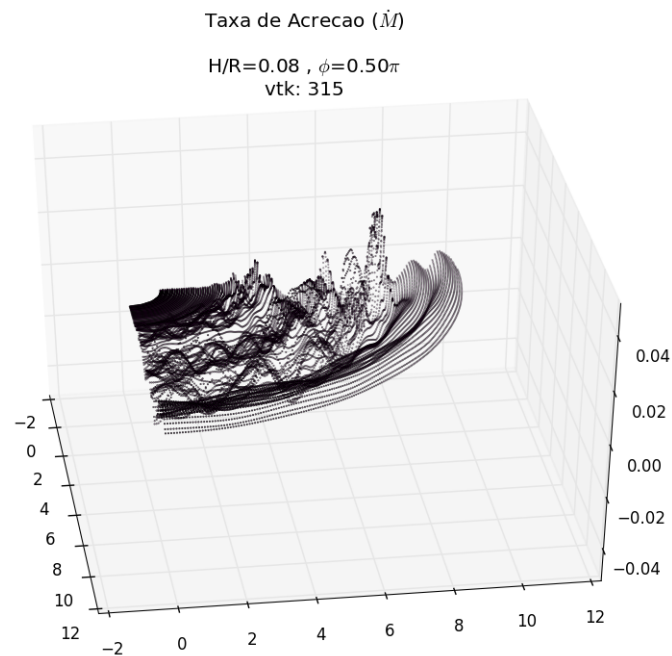


Figura B.28: Comportamento da Taxa de Acreção durante a evolução temporal.

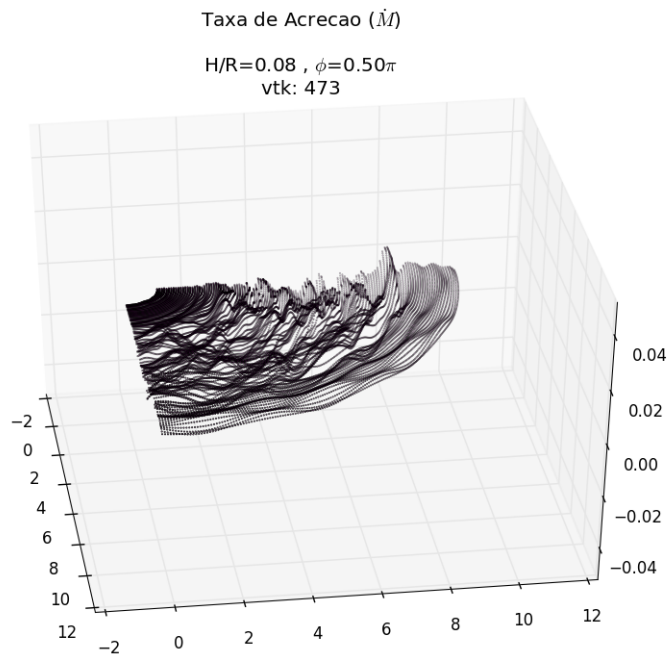


Figura B.29: Comportamento da Taxa de Acreção durante a evolução temporal.

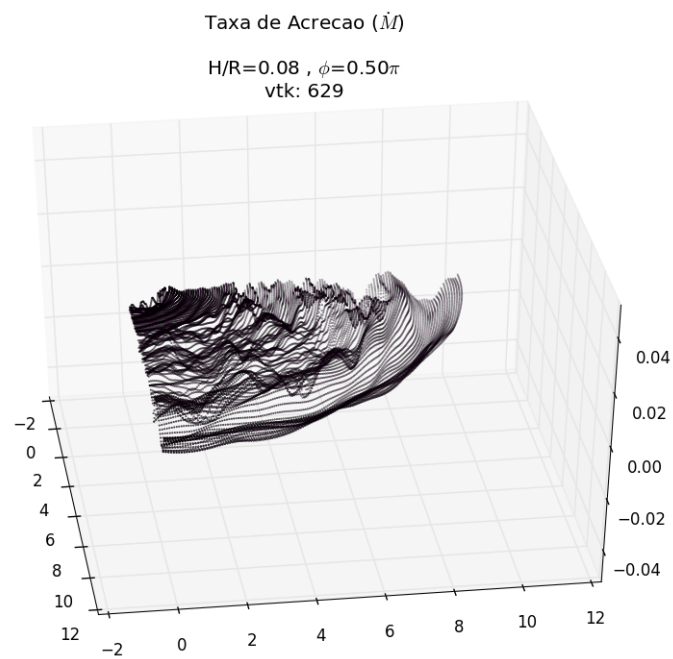


Figura B.30: Comportamento da Taxa de Acreção durante a evolução temporal.

# Referências

- [1] Astro - UFL. <https://www.astro.ufl.edu/guzman/>. Acessado em 01/2017.
- [2] Astro - UFRGS. <https://http://astro.if.ufrgs.br/>. Acessado em 01/2017.
- [3] RyanOurSun. <https://ryanoursun.wikispaces.com/>. Acessado em 01/2017.
- [4] W.H. Freeman & Company. <https://www.whfreeman.com>. Acessado em 01/2017.
- [5] BALBUS, S., HAWLEY, J. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks: I linear analysis, ii nonlinear evolution. *The Astrophysical Journal* 376 (1991), 214–233.
- [6] BEDOGNI, R., WOODWARD, P. R. Shock wave interactions with interstellar clouds. 231 (maio de 1990), 481–498.
- [7] CORRÊA, C. Método de diferenças finitas e volumes finitos para problemas convectivos difusos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense, Brasil, 2013.
- [8] DA SILVA JUNIOR, A. F. Método dos volumes finitos para equação de convecção e difusão em uma dimensão espacial. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense, Brasil, 2012.
- [9] DAI, W., WOODWARD, P. R. Interactions between magnetohydrodynamical shocks and denser clouds. 436 (dezembro de 1994), 776–783.
- [10] DAI, W., WOODWARD, P. R. A simple finite difference scheme for multidimensional magnetohydrodynamical equations. *Journal of Computational Physics* 142, 2 (1998), 331 – 369.
- [11] DE FÁTIMA OLIVEIRA SARAIVA, M., DE SOUZA OLIVEIRA FILHO, K., MÜLLER, A. M. Formação e evolução estelar, 2012.
- [12] DE FÁTIMA OLIVEIRA SARAIVA, M., DE SOUZA OLIVEIRA FILHO, K., MÜLLER, A. M. Teoria da radiação, 2012.
- [13] DE MELO, K. J. M. Aplicação do método de diferenças finitas explícito na solução da equação de calor para o caso transiente e unidimensional, 2011.
- [14] DE SOUZA, R. M. O método de elementos finitos aplicado ao problema de condução de calor, 2003.
- [15] DE SOUZA OLIVEIRA FILHO, K., DE FÁTIMA OLIVEIRA SARAIVA, M. *Astronomia e Astrofísica*, 1 ed. UFRGS, 2000.

- [16] F. MOUKALLED, L. MANGANI, M. D. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics - An Advanced Introduction with OpenFoam and Matlab*, 1 ed. Springer, 2016.
- [17] FLOCK, M., DZYURKEVICH, N., KLAHR, H., TURNER, N. J., HENNING, T. Turbulence and Steady Flows in Three-dimensional Global Stratified Magnetohydrodynamic Simulations of Accretion Disks. *735* (julho de 2011), 122.
- [18] FRANCO, N. B. *Cálculo Numérico*, 1 ed. Pearson, 2006.
- [19] FRANK, J., KING, A., RAINE, D. *Accretion Power in Astrophysics*, 3 ed. Cambridge University Press, 2002.
- [20] GIACCHINI, B. L. Uma breve introdução ao método dos elementos finitos, 2012.
- [21] GODUNOV, S. K. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik* (1959).
- [22] GONÇALVES, N. D. F. Método dos volumes finitos em malhas não-estruturadas. Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto, Brasil, 2007.
- [23] HAWLEY, J. F. Global Magnetohydrodynamical Simulations of Accretion Tori. *528* (janeiro de 2000), 462–479.
- [24] KLASSEN, M., PUDRITZ, R. E., KUIPER, R., PETERS, T., BANERJEE, R. Simulating the Formation of Massive Protostars. I. Radiative Feedback and Accretion Disks. *823* (maio de 2016), 28.
- [25] KLEIN, R. I., MCKEE, C. F., COLELLA, P. Turbulent stripping of interstellar clouds by interaction with supernova remnants. Em *The Evolution of the Interstellar Medium* (1990), L. Blitz, Ed., vol. 12 em *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, p. 117–136.
- [26] MAGALHÃES, E. R. S. O. Soluções numéricas de discos de acreção. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Santa Cruz, Brasil, 2013.
- [27] MCKEE, C. F., COWIE, L. L. The interaction between the blast wave of a supernova remnant and interstellar clouds. *195* (fevereiro de 1975), 715–725.
- [28] MIGNONE, A., BODO, G., MASSAGLIA, S., MATSAKOS, T., TESILEANU, O., ZANNI, C., FERRARI, A. PLUTO: A Numerical Code for Computational Astrophysics. *170* (maio de 2007), 228–242.
- [29] MIGNONE, A., FLOCK, M., STUTE, M., KOLB, S. M., MUSCIANISI, G. A conservative orbital advection scheme for simulations of magnetized shear flows with the PLUTO code. *545* (setembro de 2012), A152.
- [30] MIGNONE, A., UGLIANO, M., BODO, G. A five-wave Harten-Lax-van Leer Riemann solver for relativistic magnetohydrodynamics. *393* (março de 2009), 1141–1156.

- [31] MIGNONE, A., ZANNI, C. Adaptive Mesh Computations with the PLUTO Code for Astrophysical Fluid Dynamics. Em *Numerical Modeling of Space Plasma Slows (ASTRONUM 2011)* (julho de 2012), N. V. Pogorelov, J. A. Font, E. Audit, and G. P. Zank, Eds., vol. 459 em *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, p. 346.
- [32] NADALIN, I., SION, E. M. The Accretion Disk and White Dwarf in the Short-Period Dwarf Novae TY Piscium and V436 Centauri during Quiescence. *113* (julho de 2001), 829–834.
- [33] NARAYAN, R., YI, I. Advection-dominated accretion: A self-similar solution. *428* (junho de 1994), L13–L16.
- [34] NITTMANN, J., FALLE, S. A. E. G., GASKELL, P. H. The dynamical destruction of shocked gas clouds. *201* (dezembro de 1982), 833–847.
- [35] ROZYCZKA, M., TENORIO-TAGLE, G. The hydrodynamics of clouds overtaken by supernova remnants. II - Attrition shocks, condensation and ejection of clouds. *176* (abril de 1987), 329–337.
- [36] RUGGIERO, M. A. G., LOPES, V. L. R. *Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais*, 2 ed. Pearson, 1996.
- [37] SGRO, A. G. The collision of a strong shock with a gas cloud - A model for Cassiopeia A. *197* (maio de 1975), 621–634.
- [38] SHAKURA, N., SUNYAEV, R. Black holes in binary systems. observational appearance. *Astron. Astrophys.* *24* (1973), 337–355.
- [39] SHAPIRO, S. L., TEUKOLSKY, S. A. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*, 1 ed. Wiley, 2004.
- [40] SORATHIA, K. A., REYNOLDS, C. S., STONE, J. M., BECKWITH, K. Global Simulations of Accretion Disks. I. Convergence and Comparisons with Local Models. *749* (abril de 2012), 189.
- [41] SPRUIT, H. C. Accretion disks. *ArXiv e-prints* (maio de 2010).
- [42] STONE, J. M., NORMAN, M. L. The three-dimensional interaction of a supernova remnant with an interstellar cloud. *390* (maio de 1992), L17–L19.
- [43] TENORIO-TAGLE, G., ROZYCZKA, M. The hydrodynamics of clouds overtaken by supernova remnants. I - Cloud crushing phenomena. *155* (janeiro de 1986), 120–128.
- [44] TORO, E. F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*, 1 ed. Springer Science & Business Media, 2013.
- [45] TORO, E. F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*, 1 ed. Springer Science & Business Media, 2013.
- [46] TORRES, M. L. G. Simulações hidrodinâmicas de discos de acreção quentes. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, Brasil, 2017.

- 
- [47] TÓTH, G. The  $\nabla B=0$  Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes. *Journal of Computational Physics* 161 (julho de 2000), 605–652.
- [48] VIEIRA, R. S. S. *Aspectos dinâmicos de sistemas astrofísicos discoidais*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, 2015.
- [49] WOODWARD, P. R. Shock-driven implosion of interstellar gas clouds and star formation. *207* (julho de 1976), 484–501.
- [50] YUAN, F., BU, D., WU, M. Numerical Simulation of Hot Accretion Flows. II. Nature, Origin, and Properties of Outflows and their Possible Observational Applications. *761* (dezembro de 2012), 130.
- [51] YUAN, F., WU, M., BU, D. Numerical Simulation of Hot Accretion Flows. I. A Large Radial Dynamical Range and the Density Profile of Accretion Flow. *761* (dezembro de 2012), 129.
- [52] ZIEGLER, U. A central-constrained transport scheme for ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.* 196, 2 (maio de 2004), 393–416.