

Universidade Federal Fluminense

PAULO EMANUEL SOARES VIANA

**Métodos de Simulação Estocástica Aplicados em
Problemas Não Lineares**

VOLTA REDONDA

2017

PAULO EMANUEL SOARES VIANA

Métodos de Simulação Estocástica Aplicados em Problemas Não Lineares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Orientador:

Thiago Jordem Pereira

Coorientadores:

Cleber de Almeida Corrêa Junior
Rosilene Abreu Portella Corrêa

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

VOLTA REDONDA

2017

Ficha catalográfica automática - SDC/BEM

V614m Viana, Paulo Emanuel Soares
Métodos de Simulação Estocástica Aplicados em Problemas
Não Lineares / Paulo Emanuel Soares Viana ; Thiago Jordem
Pereira, orientador ; Cleber de Almeida Corrêa Junior,
coorientador. Volta Redonda, 2017.
96 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Volta Redonda, 2017.

1. Otimização. 2. Metaheurística. 3. Modelagem
Computacional. 4. Produção intelectual. I. Título II.
Pereira, Thiago Jordem, orientador. III. Corrêa Junior, Cleber
de Almeida, coorientador. IV. Universidade Federal Fluminense.
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta
Redonda.

CDD -

Métodos de Simulação Estocástica Aplicados em Problemas Não Lineares

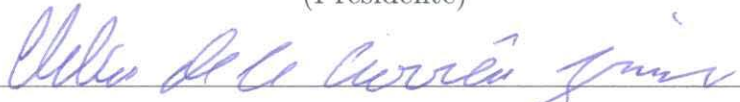
Paulo Emanuel Soares Viana

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada por:



Prof. Thiago Jordem Pereira, D.Sc. / INFES-UFF
(Presidente)



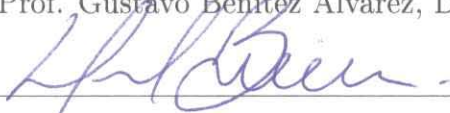
Prof. Cleber de Almeida Corrêa Junior, D.Sc. / INFES-UFF



Prof. Grazione de Souza Boy, D.Sc. / IPRJ-UERJ



Prof. Gustavo Benitez Alvarez, D.Sc. / MCCT-UFF



Prof. Nelson Machado Barbosa, D.Sc. / CCT-UENF



Prof. Tibério Borges Vale, D.Sc. / MCCT-UFF

Volta Redonda, 05 de outubro de 2017.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por essa importante etapa concluída.

Aos meus familiares pelo apoio em todos os momentos.

Aos meus pais, Ari e Arinéa, e as minhas irmãs pelo carinho e apoio nos momentos mais difíceis.

A minha querida esposa Deiviane pelo carinho e companheirismo nesta importante etapa dos meus estudos.

Ao meu querido filho Pedro Emanuel que ilumina minha vida.

Aos meus amigos do mestrado pelo companheirismo, descontração e apoio nesse período de estudo.

Aos professores de Pádua e Volta Redonda com os quais aprendi dentro e fora da sala de aula.

Aos meus orientadores Thiago Jordem, Cleber Corrêa e Rosilene Portella pelo apoio que tornou possível a conclusão deste trabalho. E especialmente, pela paciência infinita em relação aos meus atrasos.

Aos professores que aceitaram participar da minha banca de qualificação e da defesa desta dissertação.

À CAPES, pelo auxílio financeiro durante o curso de Mestrado.

A todos os funcionários da UFF que me apoiaram e contribuíram na conclusão dessa etapa dos meus estudos.

E a todos os demais que contribuíram, de alguma forma, para a realização deste trabalho.

Resumo

Problemas de otimização são frequentemente encontrados em diversas áreas da Ciência e Engenharias. Porém, devido a complexidade de algumas funções que modelam estes problemas, uma grande atenção tem sido dada aos estudos e desenvolvimentos de métodos numéricos eficientes e capazes de reproduzir realisticamente as soluções de cada problema de otimização. Por esse motivo, o objetivo deste trabalho é fazer um estudo numérico comparativo entre os métodos estocásticos Alcateia, Luus-Jaakola, *Particle Swarm Optimization* e *Simulated Annealing* para encontrar a melhor ordem de aproximação das soluções ótimas e localizar todas as soluções distintas dos problemas testes analisados. Os resultados numéricos foram obtidos e apresentados para dois grupos de problemas de otimização: sistemas de equações algébricas não lineares modelados como problemas de otimização não linear sem restrições e problemas de otimização não linear com restrições de desigualdades.

Abstract

Optimization problems are often found in many areas of science and engineering. However, due to the complexity of some functions that model these problems, great attention has been given to the studies and developments of efficient numerical methods capable of realistically reproducing the solutions of each optimization problem. For this reason, the objective of this work is to make a comparative numerical study between the stochastic methods Alcateia, Luus-Jaakola, Particle Swarm Optimization and Simulated Annealing to find the best order of approximation of the optimal solutions and locate all the different solutions of the test problems analyzed. The numerical results were obtained and presented for two groups of optimization problems: systems of nonlinear algebraic equations modeled as nonlinear optimization problems without constraints and nonlinear optimization problems with constraints of inequalities.

Palavras-chave

1. Otimização
2. Métodos Estocásticos
3. *Simulated Annealing*
4. *Particle Swarm Optimization*
5. Luus-Jaakola
6. Alcateia

Glossário

LJ	:	Luus-Jaakola
PCR	:	Problema cinemática robótica
PCSTR	:	Problema de estados estacionários CSTR não-isotérmicos
PDA	:	Problema de direção automotiva
PQLB	:	Problema quase-linear de Brown
PSO	:	<i>Particle Swarm Optimization</i> (Otimização por enxame de partículas)
PTE	:	Problema trigonométrico exponencial
PVP	:	Projeto do vaso de pressão
PVS	:	Projeto da viga soldada
SA	:	<i>Simulated Annealing</i> (Recozimento Simulado)
SNLs	:	Sistema de equações algébricas não lineares

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	17
2 Conceitos Fundamentais	20
2.1 Sistema de Equações Algébricas Não Lineares	20
2.2 Vetor Gradiente	21
2.3 Matriz Jacobiana	21
2.4 Matriz Hessiana	22
2.5 Norma L_p de Hölder	23
2.6 O Problema de Otimização	23
2.6.1 Formulação geral	23
2.6.2 Problema de minimização não linear sem restrições	25
2.6.3 Problema de minimização não linear com restrições de desigualdade	27
2.7 Sistema Não Linear Modelado Como Um Problema de Minimização	29
3 Problemas Testes de Otimização Global	32
3.1 Grupo 1	32
3.1.1 Problema trigonométrico exponencial (PTE)	32
3.1.2 Problema de estados estacionários CSTR não-isotérmicos (PCSTR)	33
3.1.3 Problema de direção automotiva (PDA)	34

3.1.4	Problema quase-linear de Brown (PQLB)	35
3.1.5	Problema de cinemática robótica (PCR)	36
3.2	Grupo 2	36
3.2.1	O projeto do vaso de pressão (PVP)	36
3.2.2	O projeto da viga soldada (PVS)	37
4	Métodos Estocásticos	39
4.1	O Método Alcateia	39
4.2	O Método Luus-Jaakola (LJ)	41
4.3	O Método <i>Particle Swarm Optimization</i> (PSO)	43
4.4	O Método <i>Simulated Annealing</i> (SA)	45
5	Experimentos Computacionais	48
5.1	Grupo 1	48
5.1.1	Parâmetros das simulações	49
5.1.2	Metodologia utilizada	50
5.1.2.1	Testes preliminares	51
5.1.3	Determinação das soluções distintas	58
5.1.3.1	Tolerância de 10^{-5} para a imagem da função objetivo $f(\mathbf{x})$	59
5.1.3.2	Tolerância de 10^{-10} para a imagem da função objetivo $f(\mathbf{x})$	65
5.1.4	Quantidade de soluções distintas	70
5.1.4.1	Tolerância de 10^{-5} para a imagem da função objetivo $f(\mathbf{x})$	70
5.1.4.2	Tolerância de 10^{-10} para a imagem da função objetivo $f(\mathbf{x})$	78
5.2	Grupo 2	85
5.2.1	O projeto do vaso de pressão (PVP)	86
5.2.2	O projeto da viga soldada (PVS)	88
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	90

Lista de Figuras

5.1	Representação gráfica do problema SNL 1	52
5.2	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 1, com tolerância de 10^{-5}	54
5.3	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 1, com tolerância de 10^{-10}	54
5.4	Representação gráfica do problema SNL 2	56
5.5	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 2, com tolerância de 10^{-5}	57
5.6	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 2, com tolerância de 10^{-10}	59
5.7	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PTE, com tolerância de 10^{-5}	71
5.8	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,935$ e tolerância de 10^{-5}	72
5.9	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,945$ e tolerância de 10^{-5}	73
5.10	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,950$ e tolerância de 10^{-5}	74

5.11	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,960$ e tolerância de 10^{-5}	74
5.12	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PDA, com tolerância de 10^{-5}	75
5.13	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PQLB, com tolerância de 10^{-5}	76
5.14	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCR, com tolerância de 10^{-5}	77
5.15	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PTE, com tolerância de 10^{-10}	79
5.16	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,935$ e tolerância de 10^{-10}	80
5.17	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,945$ e tolerância de 10^{-10}	80
5.18	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,950$ e tolerância de 10^{-10}	81
5.19	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,960$ e tolerância de 10^{-10}	82
5.20	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PDA, com tolerância de 10^{-10}	83

5.21	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PQLB, com tolerância de 10^{-10}	83
5.22	Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCR, com tolerância de 10^{-10}	84
5.23	Ilustração comparativa entre as quantidades de execuções em que os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA encontraram a solução do problema PVP, com todas as suas restrições.	87
5.24	Ilustração comparativa entre as quantidades de execuções em que os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA encontraram a solução do problema PVP, desconsiderando as restrições 3.12 e 3.13.	88
5.25	Ilustração comparativa entre as quantidades de execuções em que os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA encontraram a solução do problema PVS. . . .	89

Lista de Tabelas

3.1	Soluções distintas do problema PTE.	33
3.2	Valores para o parâmetro R	34
3.3	Soluções distintas do problema PCSTR.	34
3.4	Valores para os ângulos ψ_i e ϕ_i	35
3.5	Soluções distintas do problema PQLB.	36
5.1	Parâmetros das simulações para o método Alcateia.	49
5.2	Parâmetros das simulações para o método LJ.	49
5.3	Parâmetros das simulações para o método PSO.	50
5.4	Parâmetros das simulações para o método SA.	50
5.5	Quantidades de variáveis e soluções distintas existentes nos problemas testes PTE, PQLB, PCR, PCSTR e PDA.	50
5.6	Soluções analíticas para o problema SNL 1.	52
5.7	Soluções distintas para o problema SNL 1, com tolerância de 10^{-5}	53
5.8	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 1, com tolerância de 10^{-5}	53
5.9	Soluções distintas para o problema SNL 1, com tolerância de 10^{-10}	55
5.10	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 1, com tolerância de 10^{-10}	55
5.11	Soluções analíticas para o problema SNL 2.	56
5.12	Soluções distintas para o problema SNL 2, com tolerância de 10^{-5}	57
5.13	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 2, com tolerância de 10^{-5}	57
5.14	Soluções distintas para o problema SNL 2, com tolerância de 10^{-10}	58

5.15	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 2, com tolerância de 10^{-10}	58
5.16	Soluções distintas para o problema PTE, com tolerância de 10^{-5}	60
5.17	Solução para o problema PCSTR, com $R = 0,935$ e tolerância de 10^{-5} . . .	60
5.18	Soluções distintas para o problema PCSTR, com $R = 0,945$ e tolerância de 10^{-5}	61
5.19	Soluções distintas para o problema PCSTR, com $R = 0,950$ e tolerância de 10^{-5}	61
5.20	Soluções distintas para o problema PCSTR, com $R = 0,960$ e tolerância de 10^{-5}	62
5.21	Soluções distintas para o problema PDA, com tolerância de 10^{-5}	62
5.22	Soluções distintas para o problema PQLB, com tolerância de 10^{-5}	63
5.23	Soluções distintas para o problema PCR, com tolerância de 10^{-5}	64
5.24	Soluções distintas para o problema PTE, com tolerância de 10^{-10}	66
5.25	Solução para o problema PCSTR, com $R = 0,935$ e tolerância de 10^{-10} . . .	66
5.26	Soluções distintas para o problema PCSTR, com $R = 0,945$ e tolerância de 10^{-10}	66
5.27	Soluções distintas para o problema PCSTR, com $R = 0,950$ e tolerância de 10^{-10}	67
5.28	Soluções distintas para o problema PCSTR, com $R = 0,960$ e tolerância de 10^{-10}	67
5.29	Soluções distintas para o problema PDA, com tolerância de $= 10^{-10}$	68
5.30	Soluções distintas para o problema PQLB, com tolerância de 10^{-10}	68
5.31	Soluções distintas para o problema PCR, com tolerância de 10^{-10}	69
5.32	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PTE, com tolerância de 10^{-5}	71
5.33	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,935$ e tolerância de 10^{-5} . .	72

5.34	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,945$ e tolerância de 10^{-5}	72
5.35	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,950$ e tolerância de 10^{-5}	73
5.36	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,960$ e tolerância de 10^{-5}	73
5.37	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PDA, com tolerância de 10^{-5}	75
5.38	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PQLB, com tolerância de 10^{-5}	75
5.39	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCR, com tolerância de 10^{-5}	76
5.40	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PTE, com tolerância de 10^{-10}	79
5.41	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,935$ e tolerância de 10^{-10}	79
5.42	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,945$ e tolerância de 10^{-10}	79
5.43	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,950$ e tolerância de 10^{-10}	81
5.44	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,960$ e tolerância de 10^{-10}	81
5.45	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PDA, com tolerância de 10^{-10}	82
5.46	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PQLB, com tolerância de 10^{-10}	82
5.47	Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCR, com tolerância de 10^{-10}	84
5.48	Parâmetros das simulações para o método Alcateia.	85
5.49	Parâmetros das simulações para o método LJ.	85

5.50	Parâmetros das simulações para o método PSO.	85
5.51	Parâmetros das simulações para o método SA.	85
5.52	Quantidade de execuções em que os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA encontraram a solução do problema PVP, com todas as suas restrições. . . .	86
5.53	Valores encontrados para o problema PVP, desconsiderando as restrições 3.12 e 3.13.	87
5.54	Quantidade de execuções em que os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA encontraram a solução do problema PVP, desconsiderando as restrições 3.12 e 3.13.	88
5.55	Valores encontrados para o problema PVS.	89
5.56	Quantidade de execuções em que os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA encontraram a solução do problema PVS.	89

Capítulo 1

Introdução

Em diversas áreas relevantes como Ciências e Engenharias existe uma infinidade de situações práticas que podem ser modeladas como problemas de otimização como, por exemplo, a alocação de recursos orçamentários [14], a definição de rotas de veículos [7, 8], a elaboração de tabelas de campeonatos de futebol [5], o planejamento de produção [38], a utilização de recursos físicos disponíveis em uma rede de internet [6], o problema de despacho econômico [41], o problema quase-linear de Brown [44], o problema de cinemática robótica [23, 44], o problema de sistema de direção automotiva [23], o projeto do vaso de pressão [22, 37, 49], o projeto da viga soldada [4, 35], dentre outras. Tais problemas práticos podem ser modelados matematicamente por funções (funções objetivos) quase-lineares e não lineares com ou sem restrições, nas quais as soluções requerem a determinação de valores extremos (máximos ou/e mínimos absolutos). Desta forma, um problema de otimização é aquele que consiste em utilizar as técnicas de determinação de máximos e mínimos para encontrar a melhor solução possível (ou solução ótima) dentre todas as soluções encontradas em um dado espaço de busca (região n dimensional) [24, 25, 39, 51].

Alguns problemas típicos de otimização envolvem funções complexas e multidimensionais, de modo que suas soluções podem ser difíceis ou impossíveis de serem obtidas analiticamente. Consequentemente, surge a necessidade do desenvolvimento de técnicas numéricas eficientes e capazes de reproduzir realisticamente as soluções de cada problema de otimização. Assim, diversos estudos tem sido desenvolvidos com o objetivo de aplicar técnicas numéricas capazes de encontrar a melhor ordem de aproximação das soluções ótimas desses problemas [27, 42, 48].

Dentre as metodologias adotadas para a resolução dos problemas de otimização, pode-se destacar os métodos heurísticos ou aleatórios de otimização [34, 51]. Nestes métodos, admite-se que as escolhas das possíveis soluções ótimas dos problemas de otimização são

feitas com base em números aleatórios, que tem como objetivo o melhoramento da ordem de aproximação da variável de interesse e da estratégia de resolução. Esta metodologia tem sido utilizada com sucesso em diversos trabalhos, tais como os de [9, 12, 11, 15, 17, 29, 31, 43, 44].

Na literatura existem diversos métodos heurísticos ou estocásticos de otimização, tais como Alcateia [11], Luus-Jaakola (LJ) [17, 44], *Particle Swarm Optimization* (PSO) [9, 43] e o *Simulated Annealing* (SA) [12, 29]. O método Alcateia [11] baseia-se no comportamento de diversos lobos durante o seu processo de busca por uma presa (solução ótima). Neste método, cada alcatéia possui um casal de lobos líderes que escolhem a presa mais acessível para ser atacada. Desta forma, os demais lobos seguirão para a esta presa, que é a solução ótima do problema de otimização. Assim, a solução encontrada em cada iteração será refinada. A idéia básica do método Luus-Jaakola (LJ) [17, 44] são as buscas aleatórias dentro de uma determinada região (região de busca), onde o mesmo utiliza apenas informações da função objetivo. Com base em parâmetros específicos, este método reduz esta região de busca ao longo de cada iteração. No entanto, como utiliza-se apenas uma solução candidata a ser testada por vez, pode se ter um custo computacional elevado dependendo da dimensão do problema. Já o método PSO [9, 43] baseia-se em uma simulação de um modelo de interação social simplificado, permitindo que a tomada de decisão de cada indivíduo dependa tanto do seu desempenho no passado quanto do desempenho no passado dos outros membros da população. Neste método é possível utilizar parâmetros de ajustes para que o modelo valorize as experiências individuais durante o início da busca. Com isso, evita-se que o modelo convirja precocemente para um ponto de mínimo local. A ideia é que haja uma troca de experiência do grupo com o decorrer das iterações, fazendo com que mais indivíduos concentrem suas buscas nas regiões promissoras. Por fim, o método *Simulated Annealing* [12, 29] possui características específicas que permitem encontrar os mínimos globais do problema de otimização. Este método baseia-se na ideia da simulação de recozimento de metais, onde a convergência para uma solução ótima ocorre na medida que o valor da temperatura T é reduzido.

O principal objetivo desta dissertação é o estudo comparativo entre os métodos estocásticos Alcateia, Luus-Jaakola, *Particle Swarm Optimization* e *Simulated Annealing*. Para esta análise serão utilizados diversos problemas testes encontrados na literatura, tais como os problemas trigonométrico exponencial (PTE), quase-linear de Brown (PQLB), cinemática robótica (PCR), estados estacionários CSTR não-isotérmicos (PCSTR) e o de direção automotiva (PDA). Estes sistemas foram escolhidos por possuírem múltiplas soluções nas regiões de domínios consideradas. Além destes sistemas, também utiliza-se dois

problemas de minimização não linear com restrições de desigualdade: o projeto do vaso de pressão (PVP) e o projeto da viga soldada (PVS). Eles foram escolhidos por serem usados na literatura como problemas testes para a análise do desempenho de métodos estocásticos [47]. Para a realização destes estudos comparativos, os métodos serão analisados em relação a ordem de aproximação das soluções distintas, a quantidade de soluções distintas encontradas em cada sistema de equações algébricas não lineares e o tempo de execução necessário para a localização de cada uma dessas soluções. Para isso, em cada um dos sistemas não lineares, cada método será executado 100 vezes com o objetivo de analisar a quantidade de soluções distintas encontradas.

A seguir, descreve-se resumidamente como este trabalho está organizado. No Capítulo 2 define-se os conceitos fundamentais que serão utilizados no decorrer da dissertação. No Capítulo 3 apresenta-se os problemas testes nos quais os métodos estocásticos serão aplicados. Divide-se estes problemas em dois grupos distintos. No primeiro grupo encontram-se os sistemas não lineares que serão transformados em problemas de otimização. No segundo grupo apresenta-se os problemas de otimização do vaso de pressão e da viga soldada. No Capítulo 4 apresenta-se os métodos estocásticos Alcateia, Luus-Jaakola, *Particle Swarm Optimization* e *Simulated Annealing*, assim, como suas principais características e vantagens. No Capítulo 5 exibem-se os parâmetros das simulações e os resultados numéricos comparativos. E por fim, no Capítulo 6 apresenta-se as conclusões e as perspectivas de trabalhos futuros baseados nos resultados obtidos.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais

Neste capítulo, apresentam-se algumas definições básicas que serão necessárias no decorrer deste trabalho para um melhor entendimento dos métodos que serão utilizados na resolução de problemas de otimização. Também discute-se a formulação do problema geral de otimização, onde destaca-se os casos de minimização não linear sem e com restrições. Além disso, descreve-se a modelagem matemática de um sistema não linear como um problema de minimização não linear sem restrições.

2.1 Sistema de Equações Algébricas Não Lineares

Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ e $F(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função vetorial de várias variáveis, onde $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T$ e $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})$ são funções reais de várias variáveis, ou seja, $f_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ [40], com $i = 1, 2, \dots, m$. Tem-se como objetivo encontrar as soluções para $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, isto é,

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = 0, \\ f_2(\mathbf{x}) = 0, \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Pretende-se encontrar valores de \mathbf{x} que resolvam simultaneamente as equações do Sistema (2.1). Quando pelo menos uma função $f_i(\mathbf{x})$, com $i = 1, 2, \dots, m$, for não linear, tem-se um sistema de equações algébricas não lineares (ou sistema não linear).

Um sistema não linear (SNL) pode não ter solução, ter apenas uma ou possuir mais de uma solução, até mesmo infinitas. A quantidade de soluções não está relacionada com a

sua quantidade de incógnitas, isto é, com a quantidade de componentes do vetor \mathbf{x} . Além disso, nem sempre é possível encontrar as soluções exatas e, por isso, procura-se utilizar eficientes métodos numéricos capazes de encontrar uma solução aproximada satisfatória do SNL, como observa-se nos trabalhos de [1, 17, 27, 28, 44, 45, 46].

2.2 Vetor Gradiente

Seja $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de várias variáveis. O vetor

$$\nabla f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \quad (2.2)$$

é denominado vetor gradiente da função $f(\mathbf{x})$. Quando todas as derivadas parciais de primeira ordem forem contínuas em \mathbb{R}^n tem-se que $f(\mathbf{x})$ é uma função de classe C^1 e escreve-se que $f(\mathbf{x}) \in C^1$.

O vetor gradiente fornece o sentido e a direção de maior crescimento da função $f(\mathbf{x})$ [21]. Geometricamente, interpreta-se $\nabla f(\mathbf{x})$ como o vetor aplicado no ponto \mathbf{x} .

2.3 Matriz Jacobiana

Seja $F(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função vetorial de várias variáveis. Define-se a matriz jacobiana de $F(\mathbf{x})$, denotada por $J(F(\mathbf{x}))$, como a matriz que contém todas as derivadas parciais de primeira ordem da função vetorial $F(\mathbf{x})$, isto é,

$$J(F(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Ela é assim denominada em homenagem ao matemático alemão Carl Jacobi que fez o primeiro estudo aprofundado sobre a mudança de variáveis das integrais múltiplas em meados do século XIX [2]. O seu determinante, que só existe no caso particular em

que $m = n$ (matriz quadrada), é denominado Jacobiano e é de grande importância na mudança de variáveis em integrais múltiplas e no teorema da função inversa. A matriz jacobiana tem um grande número de aplicações em Análise Numérica, escoamento de fluidos, dentre outras [45] e geometricamente, ela representa a melhor aproximação linear de uma função diferenciável na vizinhança de um ponto.

2.4 Matriz Hessiana

Seja $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de várias variáveis que possui as derivadas parciais de primeira ordem. Define-se a matriz hessiana de $f(\mathbf{x})$, denotada por $H(f(\mathbf{x}))$, como a matriz que contém todas as derivadas parciais de segunda ordem da função $f(\mathbf{x})$, isto é,

$$H(f(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Se todas as derivadas parciais de segunda ordem forem contínuas em \mathbb{R}^n tem-se que $f(\mathbf{x})$ é uma função de classe C^2 e escreve-se que $f(\mathbf{x}) \in C^2$. O Teorema de Schwarz afirma que, se $f(\mathbf{x})$ é de classe C^2 , então a matriz hessiana de $f(\mathbf{x})$ é simétrica [30].

Como a matriz hessiana contém todas as derivadas parciais de segunda ordem, ela sempre será uma matriz quadrada de ordem n . O seu determinante é denominado hessiano da função $f(\mathbf{x})$ e descreverá a curvatura local de $f(\mathbf{x})$ [18].

A matriz hessiana do Sistema (2.1) será dada como [45]:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} H(f_1) \\ H(f_2) \\ \vdots \\ H(f_m) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

2.5 Norma L_p de Hölder

Seja \mathbf{x} um vetor de um espaço vetorial. Define-se norma como uma função que associa cada vetor \mathbf{x} a um número real não negativo. Geometricamente, a norma é interpretada como sendo o comprimento do vetor no espaço vetorial.

A norma L_p de Hölder é definida como [36]

$$L_p = \|\mathbf{x}\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right\}^{1/p}, \quad (2.6)$$

onde $p \in \mathbb{N}$ e n é a dimensão do espaço vetorial.

2.6 O Problema de Otimização

Nas seguintes subseções apresenta-se a formulação do problema geral de otimização, assim como os casos particulares dos problemas de minimização não linear sem e com restrições. Além disso, apresenta-se as definições necessárias que possibilitam a classificação de \mathbf{x}^* como minimizador local de $f_0(\mathbf{x})$.

2.6.1 Formulação geral

O problema geral de otimização pode ser formulado da seguinte forma [39]:

$$\text{Minimizar (ou maximizar) } f_0(\mathbf{x}), \text{ com } \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n \quad (2.7)$$

Sujeito as:

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (2.8)$$

$$h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad \text{e} \quad (2.9)$$

$$x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.10)$$

onde $f_0(\mathbf{x})$ é denominada função objetivo que corresponde à quantidade a ser otimizada, $g_j(\mathbf{x})$ e $h_k(\mathbf{x})$ são as restrições de desigualdade e de igualdade, respectivamente, que são conhecidas como as restrições funcionais e, $x_i^{(L)}$ e $x_i^{(U)}$ são as restrições laterais, também conhecidas como as restrições diretas [24].

Quando pelo menos uma das funções $f_0(\mathbf{x})$, $g_j(\mathbf{x})$ e $h_k(\mathbf{x})$ não for linear tem-se um problema de otimização não linear. Caso contrário, tem-se um problema de otimização linear [51]. Neste trabalho o assunto a ser explorado é o problema de minimização não linear. Desta forma, todas as definições de otimização aqui utilizadas terão esse assunto como foco.

Resolver o problema de minimização equivale a encontrar $\mathbf{x}^* \in D \subset \mathbb{R}^n$ que retorne o menor valor possível da função objetivo $f_0(\mathbf{x})$ respeitando as restrições diretas e/ou funcionais. Porém, cabe ressaltar que é possível transformar qualquer problema de maximização

$$\text{Maximizar } f_0(\mathbf{x}), \text{ com } \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n \quad (2.11)$$

em um problema de minimização equivalente [24]:

$$\text{Minimizar } -f_0(\mathbf{x}), \text{ com } \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.12)$$

As soluções locais e globais de ambos os problemas são as mesmas. Por isso, do ponto de vista matemático, não existe nenhuma diferença relevante entre os problemas de minimização e de maximização [24]. O ponto \mathbf{x}^* pode ser classificado como minimizador local [36] e minimizador global [33]. A seguir apresenta-se tais classificações, onde primeiro será definido o conceito fundamental de bola aberta [36].

Definição 2.1 *Chama-se bola aberta de centro a e raio ρ ao conjunto de pontos de \mathbb{R}^n :*

$$B_\rho(a) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \rho\}, \quad (2.13)$$

onde $\|\cdot\|$ designa a norma L_2 de Hölder.

Definição 2.2 *Seja $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}^* \in D \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que \mathbf{x}^* é um minimizador local de $f_0(\mathbf{x})$ se $\exists \rho > 0$:*

$$f_0(\mathbf{x}^*) \leq f_0(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in B_\rho(\mathbf{x}^*). \quad (2.14)$$

Definição 2.3 *Seja $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}^* \in D \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que \mathbf{x}^* é um minimizador global de $f_0(\mathbf{x})$ em D se $f_0(\mathbf{x}^*) \leq f_0(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in D$. Neste caso, $f_0(\mathbf{x}^*)$ é chamado de mínimo global de $f_0(\mathbf{x})$. O ponto \mathbf{x}^* também pode ser chamado de ótimo global.*

Nota-se que pela definição todo minimizador global também é um minimizador local, mas nem todo minimizador local é minimizador global. Além disso, uma função objetivo $f_0(\mathbf{x})$ pode admitir vários minimizadores globais, mas o valor do ótimo global sempre é o mesmo.

O conjunto que reúne todas as soluções possíveis do problema a ser minimizado é conhecido como região factível e é delimitado por todas as restrições diretas e funcionais, quando elas existirem. Esse conjunto pode ser definido da seguinte forma [4]:

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_j(\mathbf{x}) \leq 0, h_k(\mathbf{x}) = 0, x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}\}, \quad (2.15)$$

com $j = 1, 2, \dots, J$, $k = 1, 2, \dots, K$ e $i = 1, 2, \dots, n$.

2.6.2 Problema de minimização não linear sem restrições

Nesta subseção apresenta-se o problema de minimização não linear sem restrições e as condições necessárias e suficientes para que \mathbf{x}^* possa ser considerado um minimizador local de $f_0(\mathbf{x})$. Este problema ocorre quando não se tem nenhuma restrição funcional para as variáveis. Logo, ele pode ser formulado como:

$$\text{Minimizar } f_0(\mathbf{x}), \text{ com } \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.16)$$

Antes de serem apresentadas as condições de otimalidade defini-se os seguintes conceitos básicos: a matriz semidefinida positiva e a matriz definida positiva [3].

Definição 2.4 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que A é semidefinida positiva se $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.*

Definição 2.5 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que A é definida positiva se $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.*

As condições necessárias e suficientes para que \mathbf{x}^* possa ser considerado um minimizador local de $f_0(\mathbf{x})$ são obtidas assumindo que ele é um minimizador local e analisando os valores do vetor gradiente ($\nabla f_0(\mathbf{x})$) e da matriz hessiana ($H(f_0(\mathbf{x}))$) no ponto \mathbf{x}^* , ou seja, elas dependem apenas do comportamento das primeiras e segundas derivadas parciais de $f_0(\mathbf{x})$. Estas condições também são conhecidas como condições de otimalidade [19].

No Teorema 2.1 apresenta-se a condição necessária de otimalidade de primeira ordem que depende somente das primeiras derivadas parciais de $f_0(\mathbf{x})$. Já no Teorema 2.2, apresenta-se a condição necessária de otimalidade de segunda ordem que depende tanto das primeiras como das segundas derivadas parciais de $f_0(\mathbf{x})$.

Teorema 2.1 *Condição necessária de otimalidade de primeira ordem:* Seja $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0 \in C^1$ e $\mathbf{x}^* \in D \subset \mathbb{R}^n$. Se \mathbf{x}^* é minimizador local de f_0 , então

$$\nabla f_0(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \quad (2.17)$$

Teorema 2.2 *Condição necessária de otimalidade de segunda ordem:* Seja $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0 \in C^2$ e $\mathbf{x}^* \in D \subset \mathbb{R}^n$. Se \mathbf{x}^* é minimizador local de f_0 , então

$$H(f_0(\mathbf{x}^*)) \text{ é semidefinida positiva.} \quad (2.18)$$

Como abordado, os Teoremas 2.1 e 2.2 apresentam apenas as condições necessárias para a otimalidade. Na busca de um ponto ótimo para a função $f_0(\mathbf{x})$ precisa-se de uma condição que garanta a otimalidade. Tal condição é apresentada no Teorema 2.3.

Teorema 2.3 *Condição suficiente de otimalidade:* Seja $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0 \in C^2$ e $\mathbf{x}^* \in D \subset \mathbb{R}^n$. Se $\nabla f_0(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ e $H(f_0(\mathbf{x}^*))$ é definida positiva, então

$$\mathbf{x}^* \text{ é minimizador local de } f_0. \quad (2.19)$$

Para o leitor interessado nas demonstrações algébricas dos Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3 recomenda-se o trabalho de [19].

Como as derivadas parciais de uma função $f_0(\mathbf{x})$ em um ponto \mathbf{x}^* apenas realizam afirmações sobre o seu comportamento na vizinhança desse ponto, as condições de otimalidade limitam-se a somente reconhecer um minimizador local, não podendo afirmar nada sobre o ponto \mathbf{x}^* ser um minimizador global. Além disso, os minimizadores devem sempre satisfazer as condições necessárias de otimalidade enquanto que a condição suficiente, quando satisfeita, garante que o ponto \mathbf{x}^* é um minimizador local [51].

2.6.3 Problema de minimização não linear com restrições de desigualdade

Nesta subsecção apresenta-se o problema de minimização não linear com restrições de desigualdade e as condições necessárias e suficientes para que \mathbf{x}^* possa ser considerado um minimizador local de $f_0(\mathbf{x})$. Este problema ocorre quando tem-se apenas as restrições funcionais de desigualdade. Logo, ele pode ser formulado como:

$$\text{Minimizar } f_0(\mathbf{x}), \text{ com } \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.20)$$

Sujeito as:

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad \text{e} \quad (2.21)$$

$$x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.22)$$

Define-se a região factível do problema (2.20) como:

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_j(\mathbf{x}) \leq 0, x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}, \forall j, i\}. \quad (2.23)$$

Antes de serem apresentadas as condições de otimalidade para esse problema defini-se os seguintes conceitos básicos: o conjunto de restrições ativas e a regularidade de um ponto [51].

Definição 2.6 *Seja $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_j(\mathbf{x}) \leq 0, x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}, \forall j, i\}$ e $\mathbf{x}^* \in S$. Uma restrição $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$ com $g_j(\mathbf{x}^*) = 0$ se chama ativa em \mathbf{x}^* . O conjunto $A(\mathbf{x}^*) = \{j \in \{1, \dots, J\} \mid g_j(\mathbf{x}^*) = 0\}$ se chama conjunto de restrições ativas em \mathbf{x}^* .*

Definição 2.7 *Sejam $g_j(\mathbf{x})$ funções continuamente diferenciáveis. O ponto $\mathbf{x}^* \in S$ é regular se os vetores $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)$ com $j \in A(\mathbf{x}^*)$ formam um conjunto que é linearmente independente.*

As condições necessárias e suficientes para um problema de minimização com restrições de desigualdade são obtidas assumindo que o ponto \mathbf{x}^* é regular e analisando os valores do vetor gradiente da função objetivo ($\nabla f_0(\mathbf{x})$) e dos vetores gradientes das funções das restrições de desigualdades ($\nabla g_j(\mathbf{x})$).

No Teorema 2.4 apresenta-se a condição necessária de otimalidade que depende dos vetores gradientes das funções $f_0(\mathbf{x})$ e $g_j(\mathbf{x})$. As Definições 2.8 e 2.9 definem a Função Lagrangeana e um ponto de sela da Função Lagrangeana para o problema (2.20). O Teorema 2.5 explica a relação entre um ponto de sela da Função Lagrangeana e as condições de Karush-Kuhn-Tucker. Já o Teorema 2.6 apresenta a condição suficiente para um problema de minimização com restrições de desigualdade [51].

Teorema 2.4 Condições de Karush-Kuhn-Tucker: *Sejam $f_0(\mathbf{x}), g_j(\mathbf{x})$ funções continuamente diferenciáveis e seja \mathbf{x}^* um ponto de mínimo local de $f_0(\mathbf{x})$ em S . Se \mathbf{x}^* é regular, então existe um vetor $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_J^*)^T \in \mathbb{R}^J$ tal que*

$$\nabla f_0(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^J u_j^* \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \quad (2.24)$$

$$u_j^* g_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (2.25)$$

$$g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad e \quad (2.26)$$

$$u_j^* \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (2.27)$$

A condição (2.26) se chama viabilidade primal, as condições (2.24) e (2.27) se chamam viabilidade dual, e (2.25) é denominada complementaridade de folga. Os componentes u_1^*, \dots, u_J^* do vetor \mathbf{u}^* são chamados multiplicadores de Lagrange.

Definição 2.8 *A função $\Phi : \mathbb{R}^{n+J} \rightarrow \mathbb{R}$ com*

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (2.28)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^J$ se chama Função Lagrangeana do problema (2.20).

Definição 2.9 *Um ponto $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in \mathbb{R}^{n+J}$, onde $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_J^*)^T$, com $u_j^* \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, J$, chama-se um ponto de sela da Função Lagrangeana $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, se*

$$\Phi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}) \leq \Phi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \leq \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*) \quad (2.29)$$

é satisfeita $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^J$.

Teorema 2.5 *O ponto $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in \mathbb{R}^{n+J}$ é um ponto de sela da Função Lagrangeana $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*

$$\Phi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*), \quad (2.30)$$

$$g(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{u}^{*T} \cdot g(\mathbf{x}^*) = 0 \quad e \quad (2.32)$$

$$\forall \mathbf{u}^* \in \mathbb{R}_+^J. \quad (2.33)$$

Teorema 2.6 *Condição suficiente de otimalidade:* Se $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ for um ponto de sela da Função Lagrangeana $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, então \mathbf{x}^* é solução ótima local do problema (2.20).

Para o leitor interessado nas demonstrações algébricas dos Teoremas 2.4, 2.5 e 2.6 recomenda-se o trabalho de [51].

2.7 Sistema Não Linear Modelado Como Um Problema de Minimização

Para modelar um sistema não linear como um problema de minimização não linear sem restrições precisa-se definir a função objetivo $f_0(\mathbf{x})$ em termos das componentes da função vetorial $F(\mathbf{x})$ do Sistema (2.1). Com este propósito, na sua definição será utilizado o conceito da norma L_p de Hölder, resultando na seguinte definição [36]:

$$f_0(\mathbf{x}) \equiv L_p = \left\{ \sum_{i=1}^m |f_i(\mathbf{x})|^p \right\}^{1/p} \quad (2.34)$$

onde $p \in \mathbb{N}$ e m é a dimensão do espaço vetorial.

No estudo dos problemas de minimização, tem-se três casos especiais para a norma L_p de Hölder.

Se $p = 1$, tem-se

$$f_0(\mathbf{x}) \equiv L_1 = \sum_{i=1}^m |f_i(\mathbf{x})|. \quad (2.35)$$

Portanto, utilizando a norma L_1 para a função objetivo $f_0(\mathbf{x})$ minimiza-se a soma dos valores absolutos das componentes da função vetorial $F(\mathbf{x})$. Este problema é conhecido na literatura como problema L_1 [36].

Se $p = 2$, tem-se

$$f_0(\mathbf{x}) \equiv L_2 = \left\{ \sum_{i=1}^m |f_i(\mathbf{x})|^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.36)$$

Neste caso, minimiza-se a raiz quadrada da soma dos quadrados das componentes. Quando a raiz quadrada é omitida, minimiza-se a soma dos quadrados das componentes. O problema de minimizar a soma dos quadrados é conhecido na literatura como um problema de mínimos quadrados. A norma L_2 é a norma Euclidiana, ou seja, é a norma dos espaços vetoriais euclidianos.

Os problemas de mínimos quadrados não lineares formam a classe de problemas de otimização sem restrições que mais surge nas aplicações e podem ser considerados a fonte da maior parte dos problemas de otimização não linear sem restrições [36].

Se $p \rightarrow +\infty$, tem-se

$$f_0(\mathbf{x}) \equiv L_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{i=1}^m |f_i(\mathbf{x})|^p \right\}^{1/p}. \quad (2.37)$$

Supõe-se que o máximo de $|f_i(\mathbf{x})|$ seja único e indicando-o por G tal que

$$G = \max_{1 \leq i \leq m} |f_i(\mathbf{x})|, \quad (2.38)$$

logo, reescrevendo a Equação (2.37):

$$f_0(\mathbf{x}) \equiv L_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{i=1}^m |f_i(\mathbf{x})|^p \right\}^{1/p} = G \lim_{p \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{|f_i(\mathbf{x})|^p}{|G|^p} \right\}^{1/p}. \quad (2.39)$$

Como todos os componentes do somatório são menores que 1, exceto G , quando $p \rightarrow +\infty$ todas as potências p desses termos tenderão para zero. Então,

$$f_0(\mathbf{x}) = G \cdot 1 = \max_{1 \leq i \leq m} |f_i(\mathbf{x})|. \quad (2.40)$$

Portanto, quando toma-se a norma L_∞ deseja-se minimizar a componente de maior valor absoluto. Este problema é conhecido na literatura como um problema minimax [36].

Utilizando o conceito da norma euclidiana, o Sistema (2.1) pode ser transformado

em um problema de minimização não linear sem restrições [44]. Para isso, cada função componente da função vetorial $F(\mathbf{x})$ é elevada ao quadrado e convertida em uma parcela de uma soma, compondo uma função objetivo $f_0(\mathbf{x})$ não negativa, na forma:

$$f_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m |f_i(\mathbf{x})|^2 = (f_1(\mathbf{x}))^2 + (f_2(\mathbf{x}))^2 + \dots + (f_m(\mathbf{x}))^2. \quad (2.41)$$

Com isso, o Sistema (2.1) é transformado em um problema de minimização não linear sem restrições assumindo a forma geral:

$$\textit{Minimizar } f_0(\mathbf{x}), \text{ com } \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.42)$$

Capítulo 3

Problemas Testes de Otimização Global

Apresenta-se, neste capítulo, as formulações matemáticas dos problemas testes utilizados neste trabalho, juntamente com as suas condições de restrições. Para um melhor entendimento do leitor, divide-se estes problemas em dois grupos. No primeiro, concentra-se nos sistemas não lineares (SNLs) modelados como problemas de minimização não linear, tais como os problemas trigonométrico exponencial (PTE), quase-linear de Brown (PQLB), cinemática robótica (PCR), estados estacionários CSTR não-isotérmicos (PCSTR) e direção automotiva (PDA). Eles foram escolhidos por apresentarem várias soluções distintas e por serem usados na literatura para avaliação de métodos de otimização de SNLs [44]. Já no segundo grupo, encontram-se os problemas de otimização do projeto do vaso de pressão (PVP) e da viga soldada (PVS). Estes problemas foram selecionados por serem utilizados na literatura para a validação de métodos de minimização não linear com restrições [35].

3.1 Grupo 1

3.1.1 Problema trigonométrico exponencial (PTE)

O sistema não linear (3.1) descreve um problema trigonométrico exponencial (PTE) que foi proposto pelos pesquisadores C. D. Maranas e C. A. Floudas em 1995 [44]. Este problema possui 2 soluções distintas (veja a Tabela 3.1) na região do domínio considerada e é descrito, juntamente com suas restrições, por [44]:

$$\begin{cases} 0,5 \sin(x_1 x_2) - \frac{0,25x_2}{\pi} - 0,5x_1 = 0, \\ \left(1 - \frac{0,25}{\pi}\right) (e^{2x_1} - e) + \frac{ex_2}{\pi} - 2ex_1 = 0, \\ 0,25 < x_1 < 1,5, \\ 1,5 < x_2 < 2\pi, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde x_1 e x_2 são as variáveis do problema.

Tabela 3.1: Soluções distintas do problema PTE.

Solução	x_1	x_2
1	0,29944869	2,83692777
2	0,50000000	3,14159265

Fonte: MARANAS, 1995 [32].

3.1.2 Problema de estados estacionários CSTR não-isotérmicos (PCSTR)

O problema de estados estacionários CSTR não-isotérmicos (PCSTR), dado por (3.2), representa o modelo de dois reatores em série, estacionários, contínuos e não adiabáticos de um tanque de agitação. Esses reatores possuem um componente de reciclagem e neles ocorrem uma reação exotérmica irreversível de primeira ordem [23]. O modelo simplificado resulta em um SNL com 2 variáveis, que representam as temperaturas dos dois reatores. Além disso, estas variáveis possuem restrições de domínio, que estão limitadas em um intervalo unitário [23]:

$$\begin{cases} (1 - R) \left[\frac{D}{10(1 + \beta_1)} - \phi_1 \right] \exp \left(\frac{10\phi_1}{1 + \frac{10\phi_1}{\gamma}} \right) - \phi_1 = 0, \\ \phi_1 - (1 + \beta_2)\phi_2 + (1 - R) \left[\frac{D}{10} - \beta_1\phi_1 - (1 + \beta_2)\phi_2 \right] \exp \left(\frac{10\phi_2}{1 + \frac{10\phi_2}{\gamma}} \right) = 0, \\ 0 \leq \phi_1, \phi_2 \leq 1, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são as variáveis do problema. Os valores dos parâmetros γ , D , β_1 e β_2 utilizados neste problema são 1000, 22, 2 e 2, respectivamente [23].

Neste SNL, o número de soluções distintas varia em função do valor do parâmetro R [23]. Os valores para o parâmetro R utilizados neste trabalho estão descritos na Tabela 3.2, assim como o seu respectivo número de soluções. Eles foram selecionados para

possibilitar a resolução de SNLs com quantidades diferentes de soluções distintas. Na Tabela 3.3 estão apresentadas as soluções distintas relativa a cada valor do parâmetro R .

Tabela 3.2: Valores para o parâmetro R .

Valor para o parâmetro R	Quantidade de soluções
0,935	1
0,945	3
0,950	5
0,960	7

Fonte: HIRSCH, 2006 [23].

Tabela 3.3: Soluções distintas do problema PCSTR.

Valor do parâmetro R	Solução	ϕ_1	ϕ_2
0,935	1	0,724987	0,245241
	1	0,079754	0,664390
0,945	2	0,172234	0,591344
	3	0,723330	0,244990
	1	0,062799	0,103831
0,950	2	0,062799	0,195656
	3	0,062799	0,675510
	4	0,206004	0,557881
	5	0,722227	0,244797
	1	0,042125	0,061755
0,960	2	0,042125	0,268726
	3	0,042125	0,686930
	4	0,266590	0,178424
	5	0,266590	0,327276
	6	0,266590	0,461132
	7	0,719074	0,244164

Fonte: FLOUDAS, 2013 [16].

3.1.3 Problema de direção automotiva (PDA)

O sistema não linear (3.3) representa um mecanismo cinemático para a direção automotiva e foi proposto por Pramanik em 2002 [23]. Este SNL possui 2 soluções na região do domínio considerada, conforme descrito por [23]:

$$\begin{cases} G_i(\psi_i, \phi_i) = f_1(\psi_i, \phi_i) + f_2(\psi_i, \phi_i) - f_3(\psi_i, \phi_i) = 0, \text{ com } i = 1, 2, 3, \\ 0,06 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

com

$$\begin{aligned}
E_i &= x_2 (\cos(\phi_i) - \cos(\phi_0)) - x_2 x_3 (\sin(\phi_i) - \sin(\phi_0)) - (x_2 \sin(\phi_i) - x_3) x_1; \\
F_i &= -x_2 \cos(\psi_i) - x_2 x_3 \sin(\psi_i) + x_2 \cos(\psi_0) + x_1 x_3 + (x_3 - x_1) x_2 \sin(\psi_0); \\
f_1(\psi_i, \phi_i) &= [E_i (x_2 \sin(\psi_i) - x_3) - F_i (x_2 \sin(\phi_i) - x_3)]^2; \\
f_2(\psi_i, \phi_i) &= [F_i (1 + x_2 \cos(\phi_i)) - E_i (x_2 \cos(\psi_i) - 1)]^2; \\
f_3(\psi_i, \phi_i) &= [(1 + x_2 \cos(\phi_i)) (x_2 \sin(\psi_i) - x_3) x_1 - (x_2 \sin(\phi_i) - x_3) (x_2 \cos(\psi_i) - x_3) x_1]^2,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde x_1 , x_2 e x_3 são as variáveis do problema e $i = 1, 2, 3$.

Os ângulos que foram utilizados neste problema estão descritos na Tabela 3.4 e são expressos em radianos.

Tabela 3.4: Valores para os ângulos ψ_i e ϕ_i .

i	ψ_i	ϕ_i
0	1,3954170041747090114	1,7461756494150842271
1	1,7444828545735749268	2,0364691127919609051
2	2,0656234369405315689	2,2390977868265978920
3	2,4600678478912500533	2,4600678409809344550

Fonte: HIRSCH, 2006. [23]

3.1.4 Problema quase-linear de Brown (PQLB)

O sistema (3.5) é conhecido na literatura como problema quase-linear de Brown (PQLB), sendo composto por 4 equações lineares e 1 equação não linear. Este problema possui 5 variáveis com valores que podem ser compreendidos entre -10 e 10 . Além disso, o problema PQLB possui 3 soluções distintas (veja a Tabela 3.5) na região do domínio considerada, todas na forma (a, a, a, a, a^{-4}) , onde a é solução da equação $a^4(5a - 6) + 1 = 0$ [20]. Abaixo, descreve-se o problema PQLB [20, 44]:

$$\begin{cases}
2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 6 = 0, \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 6 = 0, \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - 6 = 0, \\
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 - 6 = 0, \\
x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 - 1 = 0, \\
-10 < x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 < 10,
\end{cases} \tag{3.5}$$

onde x_1 , x_2 , x_3 , x_4 e x_5 são as variáveis do problema.

Tabela 3.5: Soluções distintas do problema PQLB.

S	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0,91635458253385	0,91635458253385	0,91635458253385	0,91635458253385	1,41822708733080
2	1,00000000000000	1,00000000000000	1,00000000000000	1,00000000000000	1,00000000000000
3	-0,57904308849412	-0,57904308849412	-0,57904308849412	-0,57904308849412	8,89521544247060

Fonte: GROSAN, 1994 [20].

3.1.5 Problema de cinemática robótica (PCR)

Um outro problema que será utilizado neste trabalho é o de cinemática robótica, que é bastante utilizado em análises cinemáticas de manipuladores robóticos [23, 44]. Este problema possui 8 equações, 8 variáveis e 16 soluções distintas. Além disso, o PCR não possui restrições de domínio. Assim, descreve-se o PCR como [23, 44]:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,004731x_1x_3 - 0,3578x_2x_3 - 0,1238x_1 + x_7 - 0,001637x_2 - 0,9338x_4 - 0,3571 = 0, \\ 0,2238x_1x_3 + 0,7623x_2x_3 + 0,2638x_1 - x_7 - 0,07745x_2 - 0,6734x_4 - 0,6022 = 0, \\ x_6x_8 + 0,3578x_1 + 0,004731x_2 = 0, \\ -0,7623x_1 + 0,2238x_3 + 0,3461 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0, \\ x_5^2 + x_6^2 - 1 = 0, \\ x_7^2 + x_8^2 - 1 = 0, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

onde $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ e x_8 são as variáveis do problema.

3.2 Grupo 2

3.2.1 O projeto do vaso de pressão (PVP)

O objetivo desse projeto é minimizar o custo total da produção de um tanque de armazenamento de ar comprimido com uma pressão de trabalho de 3000 psi e um volume mínimo de 750 ft³. No custo total está incluído o custo do material, a modelagem e a soldagem do tanque, que é limitado em suas extremidades por cabeças hemisféricas. O projeto tem quatro variáveis: a espessura da casca (T_s), a espessura da cabeça (T_h), o raio interno (R) e o comprimento da seção cilíndrica (L). Estas variáveis estão sobre algumas restrições não lineares. O projeto do vaso de pressão pode ser formulado como [22, 37, 49]:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) = 0,6224T_sRL + 1,7781T_hR^2 + 3,1661T_s^2L + 19,84T_s^2R, \quad (3.7)$$

sujeito as seguintes condições de restrições

$$g_1(\mathbf{x}) = -T_s + 0,0193R \leq 0, \quad (3.8)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -T_h + 0,00954R \leq 0, \quad (3.9)$$

$$g_3(\mathbf{x}) = -\pi R^2L - \frac{4\pi}{3}R^3 + 1296000 \leq 0, \quad (3.10)$$

$$g_4(\mathbf{x}) = L - 240 \leq 0, \quad (3.11)$$

$$0,0625 \leq T_s, T_h \leq 99 \times 0,0625 \text{ e} \quad (3.12)$$

$$10,0 \leq R, L \leq 200. \quad (3.13)$$

As restrições (3.8) e (3.9) referem-se aos limites inferiores das razões $\left(\frac{T_s}{R}\right)$ e $\left(\frac{T_h}{R}\right)$, respectivamente. A restrição (3.10) corresponde ao limite inferior para o volume do vaso. A restrição (3.11) corresponde ao limite superior de altura para o componente cilíndrico. A restrição (3.12) refere-se ao fato de as variáveis T_s e T_h serem valores múltiplos de 0,0625 polegadas, pois essa é a espessura disponível na indústria para chapas de aço prensado [22]. Contudo, os valores para o raio interno (R) e para o comprimento da seção cilíndrica (L) são valores contínuos.

3.2.2 O projeto da viga soldada (PVS)

O objetivo desse projeto é minimizar o custo total de construção de uma viga soldada que está submetida a algumas restrições não lineares. A origem dessas restrições deve-se às tensões de cisalhamento, às tensões de dobramento na viga, o esforço de carga na barra e a reflexão final da viga. Ele tem quatro variáveis: espessura da solda (h); largura do feixe (t); espessura da viga (b) e comprimento da junta soldada (l). O projeto da viga soldada pode ser formulado como [4, 35]:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) = 1,10471h^2l + 0,04811tb(14 + l), \quad (3.14)$$

sujeito as seguintes condições de restrições

$$g_1(\mathbf{x}) = \tau(\mathbf{x}) - \tau_{\max} \leq 0, \quad (3.15)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) - \sigma_{\max} \leq 0, \quad (3.16)$$

$$g_3(\mathbf{x}) = h - b \leq 0 \quad (3.17)$$

$$g_4(\mathbf{x}) = 0,10471h^2 + 0,04811tb(14 + l) - 5 \leq 0, \quad (3.18)$$

$$g_5(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) - \delta_{\max} \leq 0, \quad (3.19)$$

$$g_6(\mathbf{x}) = P - P_c(\mathbf{x}) \leq 0, \quad (3.20)$$

$$0,125 \leq h \leq 2, \quad (3.21)$$

$$0,1 \leq l, t \leq 10 \text{ e} \quad (3.22)$$

$$0,1 \leq b \leq 2, \quad (3.23)$$

onde

$$\tau(\mathbf{x}) = \sqrt{(\tau')^2 + 2\tau'\tau''\frac{l}{2R(\mathbf{x})} + (\tau'')^2}, \quad (3.24)$$

$$\tau'(\mathbf{x}) = \frac{P}{\sqrt{2hl}}, \quad (3.25)$$

$$\tau''(\mathbf{x}) = \frac{M(\mathbf{x})R(\mathbf{x})}{J(\mathbf{x})}, \quad (3.26)$$

$$J(\mathbf{x}) = 2 \left\{ \sqrt{2}hl \left[\frac{l^2}{12} + \left(\frac{h+t}{2} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.27)$$

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{6PL}{bt^3}, \quad (3.28)$$

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{4PL^3}{Ebt^3}, \quad (3.29)$$

$$P_c(\mathbf{x}) = \frac{4,013E}{6L^2} \cdot \left(1 - \frac{t}{4L} \sqrt{\frac{E}{G}} \right), \quad (3.30)$$

$$M(\mathbf{x}) = P \left(L + \frac{l}{2} \right) \text{ e} \quad (3.31)$$

$$R(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{l^2 + (h+t)^2}}{2}, \quad (3.32)$$

com

$$P = 6000 \text{ libras}, L = 14 \text{ in}, E = 30 \times 10^6 \text{ psi}, G = 12 \times 10^6 \text{ psi},$$

$$\tau_{\max} = 12 \times 10^6 \text{ psi}, \sigma_{\max} = 30000 \text{ psi}, \delta_{\max} = 0,25 \text{ in.}$$

Capítulo 4

Métodos Estocásticos

Apresenta-se, neste capítulo, uma breve introdução de alguns métodos numéricos heurísticos baseados em simulação estocástica que serão utilizados na obtenção das soluções aproximadas de sistemas de equações algébricas não lineares (modelados como problemas de otimização não linear conforme apresentado no Capítulo 2), dos projetos do vaso de pressão e da viga soldada. Nesta introdução, inclui-se os métodos Alcateia, Luus-Jaakola, *Particle Swarm Optimization* e *Simulated Annealing*.

4.1 O Método Alcateia

O método Alcateia foi proposto por Correa Junior e Portela Correa [26] e tem como base o padrão comportamental dos lobos durante uma caçada. As alcateias possuem uma estrutura bem definida, existindo um casal de lobos líderes denominados de lobos alfas. Durante a caça o lobo alfa escolhe a presa a ser atacada e para esta escolha ele visa o animal mais velho ou o mais novo ou aquele que está adoentado, isto é, a presa ótima. Além disso, os lobos alfas são os primeiros a se alimentarem e os únicos que podem se reproduzir. Quando outros lobos pretendem tomar a posição do lobo alfa na alcateia, há uma batalha entre eles, sendo considerado o novo lobo alfa aquele que vence essa batalha [11].

Essas características comportamentais são a base do algoritmo Alcateia. A cada iteração do algoritmo, o lobo alfa será aquele que encontrar a presa mais acessível, ou seja, aquele que possuir a melhor solução daquela iteração. Além disso, todos os outros lobos tendem a atacar a presa escolhida pelo lobo alfa. Isto é caracterizado no algoritmo através do coeficiente de independência, que faz com que os outros lobos convirjam para a solução do problema, refinando a solução encontrada a cada iteração. Tal coeficiente é inserido

no algoritmo pela equação (4.1):

$$\mathbf{x}_0 = \frac{i_d \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{\text{alfa}}}{i_d + 1} \quad (4.1)$$

com \mathbf{x}_0 sendo um lobo qualquer e \mathbf{x}_{alfa} sendo o lobo alfa. O valor do coeficiente de independência, i_d , é definido no início da aplicação do método.

Com isso, a ideia básica do algoritmo Alcateia é que iniciando com uma ampla região de busca do domínio da função objetivo $f_0(\mathbf{x})$, várias possíveis soluções (os lobos) são selecionadas. Essa região de busca é reduzida a cada iteração fazendo com que essas possíveis soluções converjam para a solução ótima do problema.

Essa redução da região de busca é representada no algoritmo pela diminuição do número de laços internos conforme são executados os laços externos. No padrão comportamental dos lobos, os laços internos representam o posicionamento dos lobos no cerco da presa, enquanto que os laços externos representam os lobos indo em direção à presa.

A grande vantagem na utilização do algoritmo Alcateia é a sua capacidade de resolução de problemas com muitos mínimos locais, fato este encontrado na maioria dos problemas práticos de otimização. Este acontecimento faz com que grande parte dos algoritmos de otimização sejam excessivamente dependentes das condições iniciais para a garantia da sua convergência para o ótimo global [26].

No Algoritmo 1 é apresentado o pseudocódigo para o Alcateia utilizado neste trabalho, baseado em [11]. Para um melhor entendimento deste algoritmo, descreve-se a seguir os significados de algumas denominações:

- \mathbf{x} : posições dos lobos da população;
- L_e : número de laços externos;
- L_i : número de laços internos;
- N_{lobos} : quantidade de lobos;
- c : coeficiente de contração;
- δ : raio de busca;
- $g[k]$: melhor imagem da função objetivo $f_0(\mathbf{x})$ na iteração k .

Algoritmo 1 Algoritmo Alcateia

```

1: Dados  $\mathbf{x}_0$ ,  $L_e$ ,  $L_i$ ,  $N_{lobos}$ ,  $c$ ,  $i_d$ ,  $\delta$ ;
2: Para  $i = 1, 2, \dots, L_e$  faça
3:      $\mathbf{aux} = \mathbf{x}_0$ ;
4:     Para  $j = 1, 2, \dots, L_i$  faça
5:         Para  $k = 1, 2, \dots, N_{lobos}$  faça
6:              $\mathbf{x}[:, k] = \mathbf{x}_0[:, k] + \lambda_k * \delta[:, k]$ , onde  $\lambda_k$  é um vetor de números
7:             aleatórios entre  $-1$  e  $1$  e  $*$  é o produto termo-a-termo de vetores;
8:             Se ( $f(\mathbf{x}[:, k]) < f(\mathbf{x}_0[:, k])$ ) então
9:                  $\mathbf{x}_0[:, k] = \mathbf{x}[:, k]$ ;
10:                 $g[k] = f(\mathbf{x}[:, k])$ ;
11:            Fim Se;
12:        Fim Para;
13:    Fim Para;
14:     $[p, \mathbf{x}_p] = \min(g)$ , onde a função  $\min(g)$  retorna a componente de menor
15:    valor de  $g$ ,  $p$  e sua posição;
16:     $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_0[:, p]$ ;
17:     $L_i = L_i(1 - c)$ ;
18:    Para  $t = 1, 2, \dots, N_{lobos}$  faça
19:         $\mathbf{x}_0[:, t] = \frac{i_d \mathbf{x}_0[:, t] + \mathbf{x}_p}{i_d + 1}$ ;
20:         $\delta[:, t] = |\mathbf{x}_0[:, t] - \mathbf{x}_p|$ ;
21:    Fim Para;
22: Fim Para

```

4.2 O Método Luus-Jaakola (LJ)

O método estocástico Luus-Jaakola (LJ) foi inicialmente apresentado pelos autores Luus e Jaakola [44]. Este método baseia-se em buscas aleatórias que utilizam apenas as informações da função objetivo $f_0(\mathbf{x})$ a ser otimizada. O método LJ permite a utilização de problemas que possuem restrições tanto de igualdade quanto de desigualdade e domínio não-convexo [44]. Além disso, ele possui uma excelente eficiência computacional e encontra resultados de qualidade satisfatória. Por esses motivos, o método LJ vem sendo utilizado com sucesso em problemas de otimização não linear de pequenos e médios portes [17].

A ideia básica do método LJ é gerar soluções aleatórias dentro de uma região de busca que, por sua vez, é reduzida de tamanho ao longo das iterações. Para isso, o método LJ utiliza os parâmetros r (raio de busca), n_{in} (quantidade de laços internos), n_{out} (quantidade de laços externos) e ϵ (coeficiente de contração do raio de busca).

O método LJ inicia com uma solução inicial \mathbf{x}^0 e para cada iteração j do laço interno uma nova solução é dada por:

$$\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{R}_j r_i, \quad (4.2)$$

onde \mathbf{R}_j é um vetor de números aleatórios entre $-0,5$ e $0,5$. Se essa nova solução for melhor que a solução anterior, ela passará a ser a solução do problema proposto, ou seja:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(j)}. \quad (4.3)$$

Após a execução de todos os laços internos, o raio de busca do método é reduzido da seguinte forma:

$$r_{i+1} = (1 - \epsilon)r_i, \quad (4.4)$$

e a melhor solução encontrada neste laço interno passa a ser a solução inicial do próximo laço.

Neste trabalho a implementação utilizada difere do algoritmo proposto em [44] no seguinte aspecto: no momento que uma melhor solução \mathbf{x} é encontrada, o valor da função objetivo $f_0(\mathbf{x})$ é calculado nesta solução e o seu valor é comparado com uma tolerância desejada. Caso essa tolerância seja alcançada, o método é encerrado e este valor de \mathbf{x} é a solução para o problema proposto. Esta alteração foi implementada para possibilitar a utilização da imagem da função objetivo $f_0(\mathbf{x})$ como critério de parada do método.

No Algoritmo 2 é apresentado o pseudocódigo para o LJ utilizado neste trabalho, baseado em [44].

Algoritmo 2 Algoritmo Luus-Jaakola

```

1: Dados  $\mathbf{x}^0$ ,  $r$ ,  $n_{in}$ ,  $n_{out}$ ,  $\epsilon$ ,  $tol$ ;
2: Para  $i = 1, 2, \dots, n_{out}$  faça
3:     Para  $j = 1, 2, \dots, n_{in}$  faça
4:          $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{R}_j r_i$ , onde  $\mathbf{R}_j$  é um vetor de números aleatórios entre
5:          $-0,5$  e  $0,5$ ;
6:         Se ( $f(\mathbf{x}^{(j)}) < f(\mathbf{x}^{(0)})$ ) então
7:              $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(j)}$ ;
8:             Se ( $f(\mathbf{x}^{(0)}) < tol$ ) então Pare;
9:         Fim Se;
10:    Fim Para;
11:     $r_{i+1} = (1 - \epsilon)r_i$ ;
12: Fim Para
13: Solução encontrada  $\mathbf{x}^0$ ;

```

4.3 O Método *Particle Swarm Optimization* (PSO)

O método *Particle Swarm Optimization* (PSO), também conhecido como otimização por enxame de partículas, foi proposto por Kennedy e Eberhart [9]. Este método baseia-se na simulação de um modelo de interação social simplificado. De acordo com este modelo, cada indivíduo da população tem a capacidade de avaliar tanto a qualidade da sua própria experiência como a qualidade das experiências dos outros membros da população e utilizá-la na resolução de problemas propostos. Por isso a tomada de decisão de cada indivíduo dependerá tanto do seu desempenho no passado quanto do desempenho no passado dos outros membros da população. Essas experiências correspondem à aprendizagem individual (cognitiva) e à transmissão cultural (social) [43].

Segundo Kennedy et al. (2001) [43], a explicação deste processo de interação social pode ser dada pelos princípios de avaliação, comparação e imitação. Na avaliação, os indivíduos conseguem observar o ambiente em que estão inserindo e qualificar o seu conhecimento. Na comparação, eles utilizam a sua avaliação para comparar seu conhecimento com o conhecimento dos outros membros. E, na imitação, eles conseguem repetir o conhecimento dos outros membros caso estes conhecimentos sejam melhores.

Visando a utilização do modelo de interação social simplificado descrito anteriormente, a ideia básica do algoritmo PSO para a busca de uma solução é calcular a nova posição de

cada indivíduo $\mathbf{x}_i(\mathbf{t} + \mathbf{1})$ utilizando-se a sua posição atual $\mathbf{x}_i(\mathbf{t})$, adicionada a uma nova velocidade $\mathbf{v}_i(\mathbf{t} + \mathbf{1})$. Esta nova velocidade é calculada utilizando a própria experiência do indivíduo e as experiências dos outros membros da população. Com isso, a nova posição de cada indivíduo $\mathbf{x}_i(\mathbf{t} + \mathbf{1})$ é dada por [50]:

$$\mathbf{x}_i(\mathbf{t} + \mathbf{1}) = \mathbf{x}_i(\mathbf{t}) + \mathbf{v}_i(\mathbf{t} + \mathbf{1}), \quad (4.5)$$

onde $\mathbf{x}_i(\mathbf{t} + \mathbf{1})$ é a posição do i -ésimo indivíduo na iteração $t + 1$, $\mathbf{x}_i(\mathbf{t})$ é a posição do i -ésimo indivíduo na iteração t e $\mathbf{v}_i(\mathbf{t} + \mathbf{1})$ é a velocidade do i -ésimo indivíduo na iteração $t + 1$. A nova velocidade de cada indivíduo é dada por [50]:

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{t} + \mathbf{1}) = \omega(t)\mathbf{v}_i(\mathbf{t}) + c_1(t)rand() (p_i - \mathbf{x}_i(\mathbf{t})) + c_2(t)Rand() (p_g - \mathbf{x}_i(\mathbf{t})), \quad (4.6)$$

onde $\omega(t)$ é o parâmetro da inércia, $c_1(t)$ e $c_2(t)$ são os parâmetros cognitivo e social, respectivamente, p_i é a melhor posição que o indivíduo i visitou, p_g é a melhor posição de todas os indivíduos da população tenham visitado e, $rand()$ e $Rand()$ são valores aleatórios gerados por distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.

No método PSO, o parâmetro ω funciona da seguinte forma: quando estiver com um valor alto, o algoritmo privilegia uma exploração global, caso contrário, ele privilegia uma exploração local [9]. Para garantir um equilíbrio entre a exploração global e a exploração local, buscando escapar de ótimos locais, a variação do parâmetro da inércia ω é ajustada para iniciar com um valor alto e decrescer lentamente para um valor pequeno. Além disso, os parâmetros c_1 e c_2 controlam a troca de informação entre os indivíduos da população. Quando $c_1 > c_2$ o indivíduo confia mais na sua experiência individual. Quando $c_1 < c_2$ ele confia mais na experiência dos outros indivíduos da população [9]. Por isso, a escolha dos parâmetros influenciará na eficiência do PSO.

Neste trabalho será utilizado o algoritmo do PSO descrito por [50], o *Basic Particle Swarm Optimization* (BPSO), com o parâmetro de inércia $\omega(t)$ variando de forma linear dado pela equação (4.7):

$$\omega(t) = \omega_{inicial} - \frac{\omega_{inicial} - \omega_{final}}{K_{max}}t, \quad (4.7)$$

onde K_{max} é o número máximo de iterações do algoritmo.

No Algoritmo 3 é apresentado o pseudocódigo para o PSO utilizado neste trabalho, baseado em [46].

Algoritmo 3 *Particle Swarm Optimization* (PSO)

```

1: Dados  $\rho, \omega_{inicial}, \omega_{final}, c_1, c_2, K_{max}, t = 1, tol$ ;
2: Gere uma solução inicial  $\mathbf{x}(\mathbf{1})$  e uma velocidade inicial  $\mathbf{v}(\mathbf{1})$ ;
3:  $p_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{1})$  e  $p_g$  recebe  $x_i$  que gere o  $\min(f(\mathbf{x}_i))$ ;
4: Repita até  $((f(p_g) < tol)$  ou  $(t < K_{max}))$ 
5:     Para  $i = 1, 2, \dots, \rho$  faça
6:         Calcule  $\mathbf{x}_i(\mathbf{t} + \mathbf{1})$  e  $\mathbf{v}_i(\mathbf{t} + \mathbf{1})$  usando as equações (4.5) e (4.6);
7:         Se  $(f(\mathbf{x}_i) < f(p_i))$  então
8:              $p_i = \mathbf{x}_i$ ;
9:         Se  $(f(\mathbf{x}_i) < f(p_g))$  então
10:             $p_g = \mathbf{x}_i$ ;
11:        Fim Se;
12:    Fim Se;
13:    Atualize  $\omega(t)$  usando a equação (4.7);
14:    Fim Para;
15:     $t = t + 1$ ;
16: Fim Repita
17: Solução encontrada  $p_g$ ;

```

4.4 O Método *Simulated Annealing* (SA)

O método *Simulated Annealing* (SA), também conhecido como recozimento simulado, foi proposto por Kirkpatrick e Gellat e é baseado no processo de recozimento [12]. O termo recozimento refere-se ao processo de resfriamento térmico iniciado com a liquidificação de um cristal em alta temperatura e seguido de uma lenta diminuição da temperatura para a sua solidificação. Essa diminuição lenta de temperatura ocorre com o objetivo de que a solidificação seja alcançada apenas quando o sistema esteja no seu estado mínimo de energia. Estes estados mínimos de energia são caracterizados por uma perfeição estrutural do material utilizado no recozimento, a qual não seria alcançada se a diminuição de temperatura ocorresse de forma brusca [29].

A ideia básica do método SA é começar com uma solução inicial qualquer, considerada como a solução corrente do problema, e a cada nova iteração realizar uma variação aleatória na solução corrente. Se a nova solução gerada for melhor que a solução corrente, ou seja, possuir um valor menor para a função objetivo $f_0(\mathbf{x})$, ela será aceita como a nova solução corrente do problema. Caso contrário, a probabilidade dessa nova solução ser aceita é

$$e^{-\Delta/T}, \quad (4.8)$$

onde Δ é a diferença entre a solução corrente e a nova solução e, T é a temperatura corrente. Este procedimento é repetido até que uma solução seja encontrada, dada uma tolerância desejada. Esta é a principal vantagem do SA em relação a outros métodos de otimização e está baseada na utilização do critério de Metropolis para a aceitação dos deslocamentos [29].

A utilização do critério de Metropolis [29] possibilita que no início do algoritmo, quando a temperatura é elevada, soluções que aumentem o valor da função objetivo $f_0(\mathbf{x})$ sejam aceitas. Isso possibilita que ele escape de ótimos locais fazendo com que o algoritmo SA seja especialmente atrativo quando as funções a serem otimizadas apresentam múltiplos mínimos locais. A medida que a temperatura decresce, a possibilidade de que soluções que aumentem o valor da função objetivo $f_0(\mathbf{x})$ serem aceitas também diminui, até que em uma determinada temperatura, nenhuma destas soluções serão aceitas. Esta variação da temperatura deve ser suficientemente lenta para garantir a convergência do algoritmo e suficientemente rápida para não aumentar seu custo computacional. Por isso, a escolha do modelo de função que definirá a variação da temperatura é de suma importância para a execução do método.

Neste trabalho será utilizado o modelo geométrico para a variação da temperatura dado por [29]:

$$T_{k+1} = \alpha T_k, \quad (4.9)$$

onde α é o fator de resfriamento e, T_k e T_{k+1} representam, respectivamente, as temperaturas no instantes atual e futuro.

No Algoritmo 4 é apresentado o pseudocódigo para o SA utilizado neste trabalho, baseado em [29].

Algoritmo 4 *Simulated Annealing*

- 1: Gere uma solução inicial s_0 e defina uma temperatura inicial T_0 ;
 - 2: $s^* = s_0$; $x = s_0$; $T = T_0$;
 - 3: **Repita** até ($f(s^*) < \text{tol}$)
 - 4: **Para** $i = 1$ até IterMax **faça**
 - 5: $s =$ vizinho aleatório de x ;
 - 6: $\Delta = f(s) - f(x)$;
 - 7: **Se** ($\Delta < 0$) **então**
 - 8: $x = s$;
 - 9: **Se** ($f(s) < f(s^*)$) **então** $s^* = s$;
 - 10: **Senão**
 - 11: tome $u \in [0, 1]$;
 - 12: **Se** ($u < e^{-\frac{\Delta}{T}}$) **então** $x = s$;
 - 13: **Fim Se**;
 - 14: **Fim Para**;
 - 15: Atualize T;
 - 16: **Fim Repita**;
 - 17: Solução encontrada s^* ;
-

Capítulo 5

Experimentos Computacionais

Neste capítulo apresenta-se os principais estudos numéricos comparativos obtidos com os métodos estocásticos Alcateia, Luus-Jaakola (LJ), *Particle Swarm Optimization* (PSO) e *Simulated Annealing* (SA) para encontrar a melhor aproximação das soluções ótimas dos problemas testes apresentados no Capítulo 3. Na Seção 5.1, apresenta-se os estudos numéricos realizados para os problemas testes apresentados na Seção 3.1. Neste caso, os sistemas não lineares foram modelados como problemas de otimização não linear sem restrições através da abordagem apresentada na Seção 2.7, onde foram analisadas as determinações e quantidades de soluções distintas de cada problema teste. Por outro lado, na Seção 5.2, apresenta-se os estudos numéricos comparativos para os projetos do vaso de pressão (PVP) e da viga soldada (PVS). Todos os resultados foram obtidos num notebook com processador Intel Core i5-3210M CPU 2.50 GHz, com 3,8 Gb de memória RAM no sistema operacional Ubuntu 15.10 64-bit. E todos os métodos foram implementados no MatLab.

5.1 Grupo 1

Nesta seção, apresenta-se os estudos numéricos realizados para os problemas testes PTE, PQLB, PCR, PCSTR e PDA, utilizando os métodos estocásticos Alcateia, LJ, PSO e SA. Os parâmetros utilizados nas simulações numéricas são apresentados na Subseção 5.1.1. Na Subseção 5.1.2, apresenta-se a metodologia utilizada para a realização da seleção das soluções distintas no vetor das soluções. Os resultados numéricos foram analisados em relação as soluções distintas encontradas, a imagem da função objetivo e o tempo de execução do método (veja a Subseção 5.1.3). Além disso, avalia-se a eficácia na localização das múltiplas soluções dos problemas testes (veja a Subseção 5.1.4). Para

a realização destas análises foi necessário empregar uma metodologia específica (veja a Subseção 5.1.2). Em todas as avaliações, foram utilizadas duas tolerâncias da função objetivo $f(\mathbf{x})$, 10^{-5} e 10^{-10} .

5.1.1 Parâmetros das simulações

Nesta subseção apresenta-se todos os parâmetros utilizados nos estudos numéricos comparativos entre os métodos estocásticos para a resolução dos problemas testes do Grupo 1. Em todos estes testes foram empregados os mesmos conjuntos de parâmetros. Esta escolha teve como objetivo a realização da análise da eficiência dos métodos na resolução de variados problemas. Para o método Alcateia, os valores utilizados para os parâmetros como o coeficiente de contração, laços externos e constante de independência foram baseados em [11], enquanto que o valor dos laços internos foi definido de maneira empírica (veja a Tabela 5.1). No método LJ, a escolha de todos os valores foi realizada empiricamente com o objetivo de alcançar uma melhor configuração para todos os problemas testes abordados (veja a Tabela 5.2). Já no método PSO, os parâmetros da inércia inicial, inércia final, cognitivo e social tiveram como referência o trabalho de [50] (veja a Tabela 5.3). Para o método SA também foram realizados testes empíricos para a definição de praticamente todos os parâmetros. No caso do parâmetro referente ao fator de resfriamento, utilizou-se o trabalho de [29], em que $\alpha \in [0, 8; 0, 99]$ (veja a Tabela 5.4). Vale a pena ressaltar que os métodos Alcateia e PSO possuem uma característica populacional, desta forma foram utilizados os mesmos valores para os parâmetros referentes ao número de lobos e população (veja as Tabelas 5.1 e 5.3).

Tabela 5.1: Parâmetros das simulações para o método Alcateia.

Nome	Constante	Valor
Número de lobos	N_{Lobos}	100
Coefficiente de contração	c	0,01
Laços internos	L_i	500
Laços externos	L_e	100
Constante de independência	i_d	4

Tabela 5.2: Parâmetros das simulações para o método LJ.

Nome	Constante	Valor
Raio de busca	r	1
Laços internos	n_{in}	10000
Laços externos	n_{out}	200
Coefficiente de contração	ϵ	0,20

Em todos os métodos estocásticos utilizou-se como critério de parada o número máximo de iterações. Como as iterações de cada método podem envolver passos simples ou

Tabela 5.3: Parâmetros das simulações para o método PSO.

Nome	Constante	Valor
População	ρ	100
Parâmetro da inércia inicial	$\omega_{inicial}$	0,9
Parâmetro da inércia final	ω_{final}	0,4
Parâmetro cognitivo	c_1	2
Parâmetro social	c_2	2

Tabela 5.4: Parâmetros das simulações para o método SA.

Nome	Constante	Valor
Temperatura inicial	T_0	900
Fator de resfriamento	α	0,80
Número de iterações antes do decaimento da temperatura	$IterMax$	1000

complexos, os valores escolhidos para o número máximo de iterações foram distintos.

5.1.2 Metodologia utilizada

Para um melhor entendimento dos estudos que serão apresentados, mostra-se na Tabela 5.5 as quantidades de variáveis e de soluções distintas existentes em cada problema.

Tabela 5.5: Quantidades de variáveis e soluções distintas existentes nos problemas testes PTE, PQLB, PCR, PCSTR e PDA.

Problema teste	Variáveis	Soluções
PTE	2	2
PCSTR	2	1 ($R = 0,935$) 3 ($R = 0,945$) 5 ($R = 0,950$) 7 ($R = 0,960$)
PDA	3	2
PQLB	5	3
PCR	8	16

Fonte: O autor, 2017.

Todos os métodos estocásticos utilizados neste trabalho foram desenvolvidos para localizar, em cada execução do código, apenas uma solução de cada problema teste. Como visto na Tabela 5.5, praticamente todos os problemas possuem múltiplas soluções. Desta forma, para a realização da análise numérica proposta, escolheu-se acrescentar um *loop* externo na implementação de cada método, onde em cada iteração gera-se uma possível solução para o problema teste em questão, que é armazenada em um vetor de soluções. Após a execução de cada *loop* externo, realiza-se uma seleção no vetor de soluções objetivando selecionar as soluções distintas em cada problema teste. Neste trabalho, considera-se que NS é o número de execuções deste processo. Além disso, para todos os estudos que serão apresentados na Subseção 5.1.4 utilizou-se $NS = 100$ para cada método estocástico.

A metodologia escolhida para a realização da seleção das soluções distintas no vetor

de soluções baseia-se em [44], que consiste em fazer comparações entre as soluções armazenadas no vetor, de forma que valores próximos ou repetidos sejam excluídos. Para a realização destas comparações, utilizou-se a norma L_2 de Hölder que, como abordado na Seção 2.5, representa a distância entre dois pontos nos espaços vetoriais euclidianos. Com isso, quando compara-se duas soluções através da norma L_2 de Hölder, mede-se a distância entre estas soluções no espaço \mathbb{R}^n . Se o valor encontrado for menor do que um parâmetro pré-definido, considera-se que estas soluções são iguais, caso contrário, elas representam soluções distintas. A exceção dessa etapa foi para o problema PCSTR com o parâmetro $R = 0,935$, que possui apenas uma solução no intervalo considerado. Neste trabalho, o valor do parâmetro utilizado para determinar se duas soluções são distintas foi igual a 5×10^{-2} .

Após essa filtragem no vetor de soluções, os métodos foram analisados em relação a quantidade de soluções distintas encontradas em cada problema teste. Mas, devido a sua natureza aleatória, é frequente a variação dos resultados apresentados, podendo algumas vezes exibir a localização de mais ou menos soluções. Por isso, para uma melhor avaliação, escolheu-se utilizar uma amostragem maior para cada problema teste. Neste trabalho, o número de amostras definidas para cada método foi de cem execuções e os resultados foram apresentados na forma de tabelas e histogramas. A escolha de uma amostragem maior para a realização dos experimentos computacionais permitiu a utilização de sementes aleatórias diferentes em cada método estocástico, bem como valores iniciais distintos para cada problema teste.

5.1.2.1 Testes preliminares

Para exemplificar a metodologia adotada neste trabalho, utiliza-se dois SNLs que permitem a localização analítica de suas soluções, possibilitando assim comparações com os resultados numéricos encontrados pelos métodos estocásticos. Deste modo, objetiva-se avaliar a eficácia dos métodos na localização das soluções distintas dos problemas testes.

Sistema Não Linear 1 (SNL 1)

O sistema não linear (5.1) possui 4 soluções distintas e é descrito por [40]:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0, \\ x_1^2 - \frac{x_2^2}{9} - 1 = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde x_1 e x_2 são as variáveis do problema. Apresenta-se na Figura 5.1 os gráficos cor-

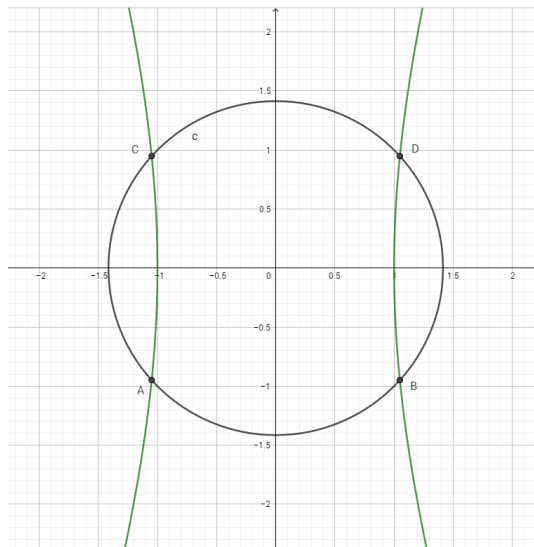


Figura 5.1: Representação gráfica do problema SNL 1. Fonte: O autor, 2017.

respondentes às equações não lineares do SNL 1 (5.1), onde destaca-se suas 4 soluções distintas. Além disso, encontra-se na Tabela 5.6, os valores destas soluções analíticas.

Tabela 5.6: Soluções analíticas para o problema SNL 1.

Solução	x_1	x_2
1	1,048809	0,948683
2	1,048809	-0,948683
3	-1,048809	0,948683
4	-1,048809	-0,948683

Fonte: O autor, 2017.

A primeira tabela destes estudos preliminares contém as soluções distintas encontradas para o problema SNL 1, Tabela 5.7. Além disso, encontra-se nesta tabela as imagens das soluções que foram utilizadas como critério de parada de cada método estocástico e os tempos de execução de cada método para a localização dessas soluções. Percebe-se que para a tolerância utilizada todos os métodos estocásticos localizaram as 4 soluções distintas do problema. Em relação ao tempo de execução de cada método pode-se observar que o método PSO obteve o melhor desempenho computacional em todos os casos.

Quando compara-se as quantidades de soluções distintas encontradas usando os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 1 (veja a Tabela 5.8), observa-se que todos os métodos estocásticos localizaram as 4 soluções distintas do problema em todas as execuções realizadas, com um número de execuções NS igual a 100. Para um melhor entendimento do leitor, apresenta-se na Figura 5.2 o gráfico de barras dos dados apresentado pela Tabela 5.8. Neste gráfico, cada agrupamento representa a quantidade de soluções distintas do problema teste que está sendo analisado. Além disso, a altura

de cada barra vertical representa o número de vezes em que cada solução distinta foi encontrada, para $NS = 100$. Essa análise tem como objetivo verificar a eficácia dos métodos estocásticos na localização das múltiplas soluções do problema citado.

Tabela 5.7: Soluções distintas para o problema SNL 1, com tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Solução	x_1	x_2	$f(\mathbf{x})$	Tempo (s)
Alcateia				
1	1,048667	0,948984	$2,0501 \times 10^{-7}$	0,583247
2	1,048811	-0,948681	$2,8934 \times 10^{-11}$	0,620838
3	-1,048814	0,948681	$1,2361 \times 10^{-10}$	0,627298
4	-1,048812	-0,948677	$6,4019 \times 10^{-9}$	0,568306
LJ				
1	1,049105	0,947663	$2,4257 \times 10^{-6}$	0,422061
2	1,048567	-0,950096	$5,3791 \times 10^{-6}$	0,341645
3	-1,049065	0,947274	$5,2529 \times 10^{-6}$	0,337674
4	-1,048405	-0,949604	$1,8943 \times 10^{-6}$	0,359978
PSO				
1	1,048369	0,949299	$1,1673 \times 10^{-6}$	0,212891
2	1,048031	-0,949239	$9,3653 \times 10^{-6}$	0,047096
3	-1,049782	0,948731	$3,3848 \times 10^{-6}$	0,074140
4	-1,049074	-0,949036	$1,7342 \times 10^{-6}$	0,188223
SA				
1	1,048570	0,947826	$4,6236 \times 10^{-6}$	3,629423
2	1,048069	-0,948565	$5,4883 \times 10^{-6}$	1,163030
3	-1,048357	0,949676	$2,2178 \times 10^{-6}$	2,666610
4	-1,048740	-0,948439	$3,7858 \times 10^{-7}$	4,416306

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.8: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 1, com tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	—	—	—	—
1	—	—	—	—
2	—	—	—	—
3	—	—	—	—
4	100	100	100	100
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

Agora, mostra-se na Tabela 5.9 as soluções distintas encontradas para o problema SNL 1, com a tolerância da imagem da função objetivo $f(\mathbf{x})$ de 10^{-10} . Nota-se que apenas o método SA não alcançou nenhuma solução do problema para a tolerância desejada. Pode-se observar na Tabela 5.9 que a única solução encontrada pelo método SA foi referente a uma imagem de $2,2891 \times 10^{-10}$. Em relação ao tempo de execução de cada método pode-se observar que o método PSO obteve o melhor desempenho computacional em todos os casos. A Tabela 5.10 e a Figura 5.3 são semelhantes as apresentadas para a tolerância de 10^{-5} . Desta forma, pode-se observar que apenas o método SA não conseguiu encontrar nenhuma solução do problema para a tolerância utilizada enquanto que os outros métodos identificaram todas as 4 soluções distintas do problema em todas as execuções realizadas.

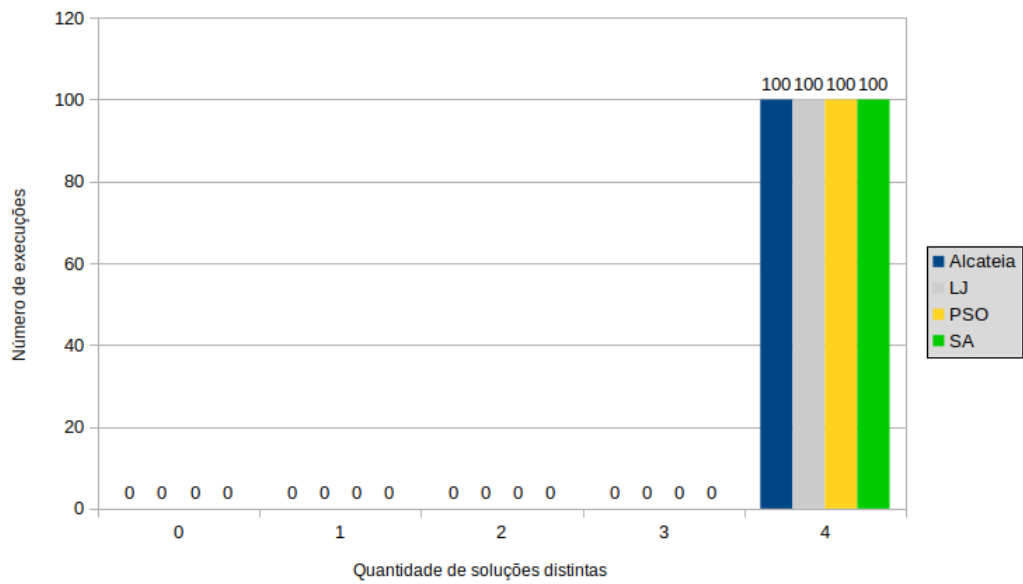


Figura 5.2: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 1, com tolerância de 10^{-5} . Fonte: O autor, 2017.

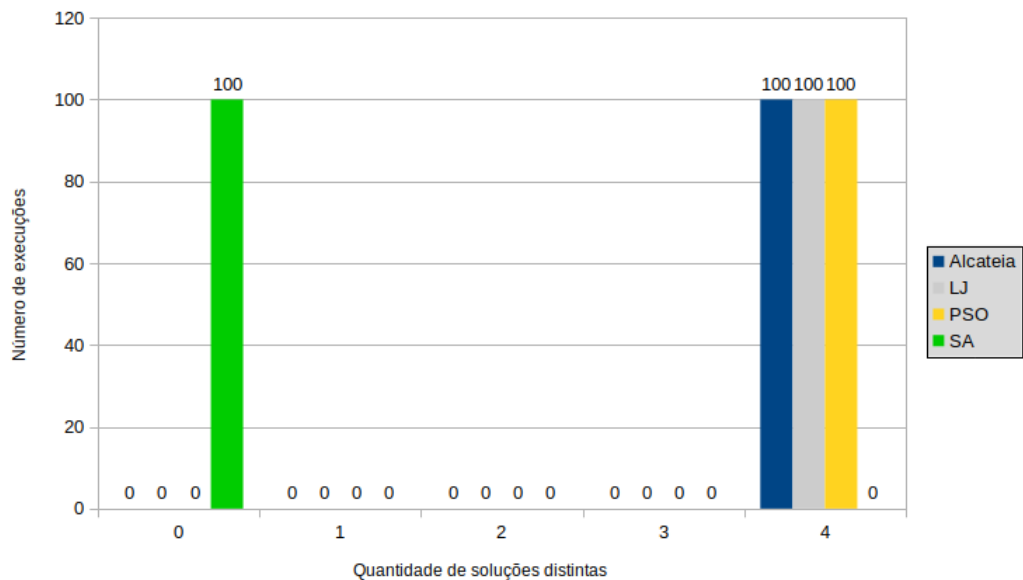


Figura 5.3: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 1, com tolerância de 10^{-10} . Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.9: Soluções distintas para o problema SNL 1, com tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Solução	x_1	x_2	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia				
1	1,048809	0,948683	$1,6205 \times 10^{-14}$	1,037300
2	1,048809	-0,948683	$2,2197 \times 10^{-14}$	0,986428
3	-1,048808	0,948683	$3,5027 \times 10^{-12}$	0,982653
4	-1,048809	-0,948683	$6,3845 \times 10^{-14}$	1,025164
LJ				
1	1,048812	0,948678	$6,9053 \times 10^{-11}$	1,725446
2	1,048810	-0,948683	$1,0398 \times 10^{-11}$	1,437811
3	-1,048805	0,948688	$9,6836 \times 10^{-11}$	1,703181
4	-1,048813	-0,948680	$7,8115 \times 10^{-11}$	1,778371
PSO				
1	1,048812	0,948679	$4,8677 \times 10^{-11}$	0,181171
2	1,048810	-0,948685	$2,8862 \times 10^{-11}$	0,191074
3	-1,048805	0,948682	$9,1358 \times 10^{-11}$	0,372632
4	-1,048809	-0,948684	$9,9372 \times 10^{-12}$	0,402136
SA				
3	-1,048810	0,948674	$2,2891 \times 10^{-10}$	23,279009

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.10: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 1, com tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	–	–	–	100
1	–	–	–	–
2	–	–	–	–
3	–	–	–	–
4	100	100	100	–
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

Sistema Não Linear 2 (SNL 2)

Agora, utiliza-se como problema teste o sistema não linear (5.2). Este sistema possui 2 soluções distintas (veja a Tabela 5.11 e a Figura 5.4) e é descrito por [13]:

$$\begin{cases} x_1 + x_2^3 - 5x_2^2 - 2x_2 = 10, \\ x_1 + x_2^3 + x_2^2 - 14x_2 = 29, \end{cases} \quad (5.2)$$

onde x_1 e x_2 são as variáveis do problema.

Tabela 5.11: Soluções analíticas para o problema SNL 2.

Solução	x_1	x_2
1	14,467333	-1,041241
2	34,199334	3,041241

Fonte: O autor, 2017.

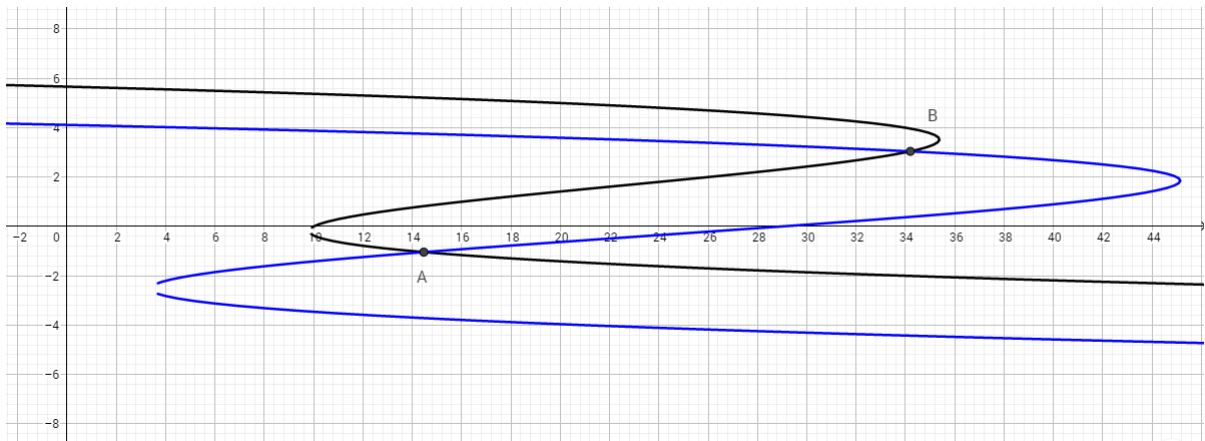


Figura 5.4: Representação gráfica do problema SNL 2. Fonte: O autor, 2017.

Na Tabela 5.12 são apresentadas as soluções distintas encontradas para o problema SNL 2, com a tolerância da imagem da função objetivo $f(\mathbf{x})$ de 10^{-5} . Neste caso, verifica-se que para esta tolerância os métodos estocásticos encontraram as 2 soluções distintas do problema. Ao analisar os tempos de execução de cada método, percebe-se que na solução de número 1 o método LJ obteve o melhor desempenho computacional enquanto que na solução de número 2 o melhor desempenho foi obtido pelo método PSO. É importante destacar também que o método SA necessitou de um tempo computacional elevado para a localização das soluções em relação aos tempos obtidos pelos os outros métodos. Analisando-se a quantidade de soluções distintas encontradas para o problema SNL 2 (veja a Tabela 5.13 e a Figura 5.5), onde adota-se uma tolerância de 10^{-5} , percebe-se que todos os métodos estocásticos localizaram as 2 soluções distintas do problema em todas

as suas execuções.

Tabela 5.12: Soluções distintas para o problema SNL 2, com tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Solução	x_1	x_2	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia				
1	14,467379	-1,041164	$1,7840 \times 10^{-6}$	1,009752
2	34,197337	3,041397	$8,6189 \times 10^{-6}$	0,823504
LJ				
1	14,465564	-1,041344	$8,9950 \times 10^{-6}$	0,218949
2	34,198883	3,041241	$4,1892 \times 10^{-7}$	0,685658
PSO				
1	14,467227	-1,041215	$2,4145 \times 10^{-7}$	0,228434
2	34,196856	3,041378	$9,7639 \times 10^{-6}$	0,206343
SA				
1	14,466589	-1,041073	$9,9504 \times 10^{-6}$	10,172289
2	34,200533	3,041312	$7,4923 \times 10^{-6}$	21,382219

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.13: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 2, com tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	—	—	—	—
1	—	—	—	—
2	100	100	100	100
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

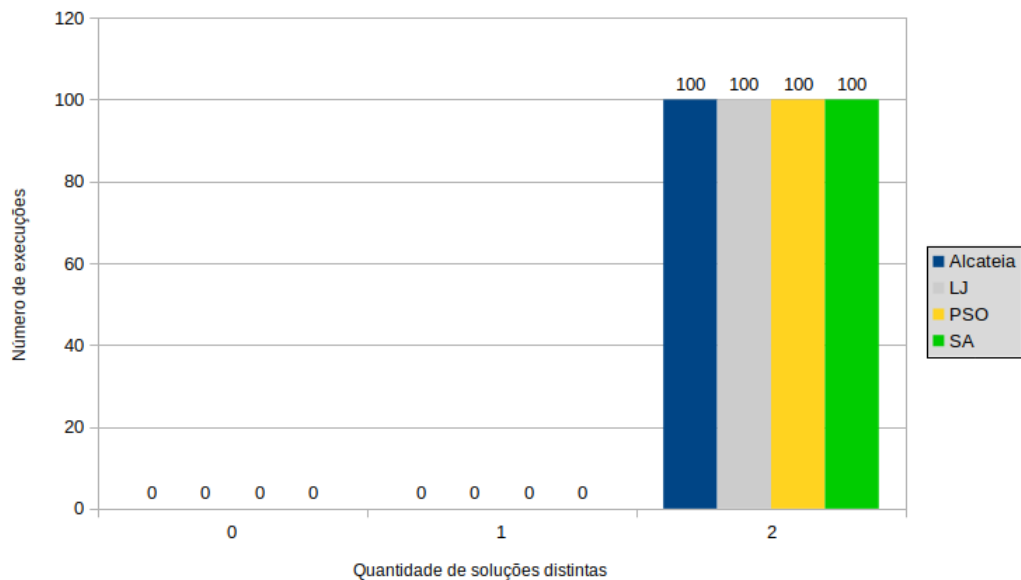


Figura 5.5: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 2, com tolerância de 10^{-5} . Fonte: O autor, 2017.

No intuito de verificar a eficácia dos métodos estocásticos para uma tolerância menor, compara-se agora as soluções distintas encontradas para o problema SNL 2, com uma tolerância da imagem da função objetivo igual a 10^{-10} . Pode-se observar na Tabela 5.14 que apenas o método SA não alcançou nenhuma solução do problema para a tolerância desejada, onde a melhor solução encontrada foi referente a uma imagem de $1,5467 \times 10^{-9}$. Conseqüentemente, o método SA não conseguiu encontrar nenhuma solução do problema, uma vez que os outros métodos identificaram todas as 2 soluções distintas do problema em todas as suas execuções (veja a Tabela 5.15 e a Figura 5.6). Em relação ao tempo de execução de cada método percebe-se, novamente, que o método PSO obteve o melhor desempenho computacional em todas as soluções.

Tabela 5.14: Soluções distintas para o problema SNL 2, com tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Solução	x_1	x_2	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia				
1	14,467334	-1,041242	$7,6219 \times 10^{-12}$	1,225330
2	34,199332	3,041242	$5,0796 \times 10^{-12}$	1,211437
LJ				
1	14,467337	-1,041242	$4,0702 \times 10^{-11}$	2,341062
2	34,199337	3,041241	$1,5524 \times 10^{-11}$	2,691680
PSO				
1	14,467335	-1,041241	$2,3781 \times 10^{-11}$	0,370024
2	34,199338	3,041242	$5,9851 \times 10^{-11}$	0,263733
SA				
2	34,199326	3,041240	$1,5467 \times 10^{-9}$	22,319894

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.15: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 2, com tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	–	–	–	100
1	–	–	–	–
2	100	100	100	–
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

5.1.3 Determinação das soluções distintas

O objetivo desta subseção é apresentar os estudos numéricos referentes a determinação das soluções distintas dos problemas testes PTE, PQLB, PCR, PCSTR e PDA. As quantidades de variáveis e de soluções distintas existentes em cada problema foram apresentadas na Tabela 5.5. Em cada problema teste escolhido, realizou-se um estudo comparativo entre os métodos estocásticos Alcateia, LJ, PSO e SA, onde analisou-se as

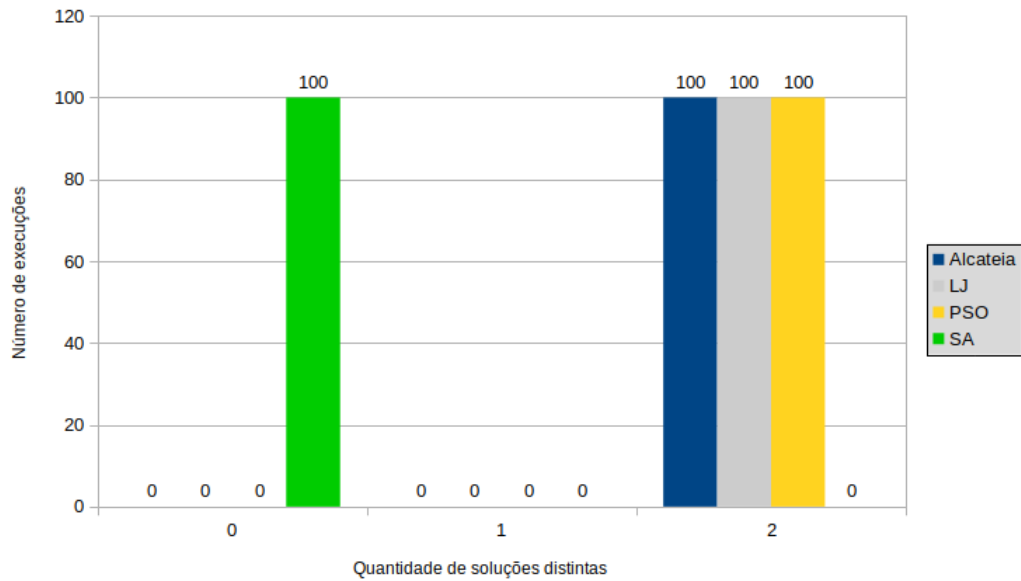


Figura 5.6: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema SNL 2, com tolerância de 10^{-10} . Fonte: O autor, 2017.

soluções distintas encontradas, a imagem da função objetivo e o tempo de execução do método. Foram utilizadas duas tolerâncias da função objetivo $f(\mathbf{x})$, 10^{-5} e 10^{-10} .

5.1.3.1 Tolerância de 10^{-5} para a imagem da função objetivo $f(\mathbf{x})$

As Tabelas 5.16 - 5.23 apresentam as soluções distintas encontradas para os problemas testes apresentados na Seção 3.1, com a tolerância da imagem da função objetivo $f(\mathbf{x})$ de 10^{-5} . Nestas tabelas apresenta-se também as imagens das soluções dos problemas testes, que foram utilizadas como critério de parada de cada método estocástico. Além disso, apresenta-se os tempos de execução de cada método para a localização dessas soluções.

Nota-se para a tolerância utilizada praticamente todos os métodos estocásticos localizaram as soluções dos problemas testes, com exceções do método LJ para o problema PCSTR ($R = 0,935$) (veja a Tabela 5.17) e, para o método SA para os problemas PQLB (veja a Tabela 5.22) e PCR (veja a Tabela 5.23). Para o problema PCSTR ($R = 0,935$) o método LJ não conseguiu localizar a solução do problema para uma tolerância de 10^{-5} da imagem da função objetivo. Pode-se observar na Tabela 5.17 que o melhor valor encontrado foi referente a uma imagem de $f(\mathbf{x})$ igual a $2,4687 \times 10^{-4}$. Já o método SA não conseguiu localizar nenhuma solução com tolerância de 10^{-5} para os problemas PQLB e PCR. No problema PQLB, percebe-se ao observar a Tabela 5.22 que o melhor valor

encontrado para a imagem foi de $2,0628 \times 10^{-4}$. Enquanto que no problema PCR, o melhor valor encontrado para a imagem foi de $1,067 \times 10^{-2}$ (veja a Tabela 5.23).

Desta forma, pode-se observar, em ambos os casos, que há uma diferença significativa das soluções dos problemas, quando comparadas com as demais soluções encontradas pelos métodos estocásticos. Acredita-se que os métodos Alcateia e PSO tiveram um melhor desempenho para encontrar as soluções dos problemas testes por serem métodos que possuem uma característica populacional, o que permite a cada método ter um conjunto de soluções candidatas que serão modificadas e avaliadas.

Em relação ao tempo de execução de cada método pode-se observar que o método PSO obteve o melhor desempenho computacional em praticamente todos os casos. O único caso em que o método PSO obteve uma desvantagem computacional mínima foi para o problema PDA (veja a Tabela 5.21). É importante salientar que o método SA, no problema PCSTR ($R = 0,935$ e $R = 0,945$) (veja as Tabelas 5.17 e 5.18), precisou de um tempo computacional elevado em relação aos outros métodos para a localização das soluções.

Tabela 5.16: Soluções distintas para o problema PTE, com tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Solução	x_1	x_2	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia				
1	0,295740	2,827544	$3,4337 \times 10^{-6}$	0,520500
2	0,499183	3,141708	$3,6672 \times 10^{-7}$	0,497242
LJ				
1	0,296015	2,825893	$8,5050 \times 10^{-6}$	0,071832
2	0,500747	3,140206	$2,3801 \times 10^{-6}$	0,215624
PSO				
1	0,294443	2,826637	$8,5049 \times 10^{-6}$	0,071505
2	0,502360	3,139981	$6,8313 \times 10^{-6}$	0,012510
SA				
1	0,300817	2,836809	$9,0611 \times 10^{-6}$	0,298468
2	0,497866	3,141780	$2,3117 \times 10^{-6}$	0,265929

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.17: Solução para o problema PCSTR, com $R = 0,935$ e tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Solução	x_1	x_2	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia				
1	0,724987	0,245252	$5,4236 \times 10^{-9}$	0,698714
LJ				
1	0,725058	0,242357	$2,4687 \times 10^{-4}$	14,9375
PSO				
1	0,725003	0,245787	$9,7753 \times 10^{-6}$	0,295285
SA				
1	0,724972	0,245184	$1,5743 \times 10^{-6}$	165,439587

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.18: Soluções distintas para o problema PCSTR, com $R = 0,945$ e tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Solução	x_1	x_2	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia				
1	0,089650	0,656873	$9,3910 \times 10^{-6}$	0,280032
2	0,164776	0,597515	$7,7773 \times 10^{-6}$	0,661383
3	0,723331	0,244100	$4,5113 \times 10^{-9}$	0,793536
LJ				
1	0,080053	0,664171	$7,2782 \times 10^{-7}$	0,766310
2	0,169130	0,593898	$2,2126 \times 10^{-6}$	0,232732
3	0,723317	0,245062	$8,2724 \times 10^{-7}$	1,430214
PSO				
1	0,085036	0,660379	$2,7152 \times 10^{-6}$	0,092256
2	0,174622	0,589371	$1,4611 \times 10^{-6}$	0,304374
3	0,723365	0,245229	$6,6392 \times 10^{-6}$	0,210464
SA				
1	0,080207	0,664075	$9,1367 \times 10^{-6}$	33,727693
2	0,176668	0,587618	$5,7514 \times 10^{-6}$	21,656403
3	0,723310	0,244846	$2,2644 \times 10^{-6}$	46,812610

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.19: Soluções distintas para o problema PCSTR, com $R = 0,950$ e tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Solução	x_1	x_2	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia				
1	0,062577	0,103268	$1,4957 \times 10^{-7}$	0,238038
2	0,062510	0,195831	$3,2473 \times 10^{-8}$	0,238039
3	0,062089	0,676048	$1,2611 \times 10^{-7}$	0,326856
4	0,208369	0,555680	$3,2895 \times 10^{-6}$	0,238003
5	0,722229	0,244545	$1,3538 \times 10^{-6}$	0,291582
LJ				
1	0,064553	0,105061	$6,6955 \times 10^{-7}$	0,070982
2	0,067504	0,195965	$7,6303 \times 10^{-6}$	0,063763
3	0,062029	0,676096	$1,5938 \times 10^{-7}$	0,795309
4	0,203835	0,559895	$3,0686 \times 10^{-6}$	0,001634
5	0,722217	0,244332	$4,8139 \times 10^{-6}$	2,069652
PSO				
1	0,066868	0,104646	$8,0845 \times 10^{-6}$	0,059137
2	0,065026	0,196797	$5,0104 \times 10^{-6}$	0,010155
3	0,060265	0,677457	$8,7746 \times 10^{-6}$	0,157534
4	0,208083	0,555971	$1,9737 \times 10^{-6}$	0,180496
5	0,722218	0,244828	$2,4760 \times 10^{-7}$	0,258041
SA				
1	0,057866	0,098420	$8,4768 \times 10^{-6}$	1,224891
2	0,062670	0,194112	$3,2439 \times 10^{-6}$	0,813097
3	0,059345	0,678119	$4,1062 \times 10^{-6}$	0,455164
4	0,208161	0,555835	$5,3109 \times 10^{-6}$	1,728011
5	0,722218	0,244956	$7,5235 \times 10^{-7}$	0,631024

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.20: Soluções distintas para o problema PCSTR, com $R = 0,960$ e tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Solução	x_1	x_2	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia				
1	0,040835	0,060984	$7,6604 \times 10^{-7}$	0,932806
2	0,041368	0,268596	$2,9513 \times 10^{-7}$	0,634542
3	0,042062	0,686975	$9,9729 \times 10^{-8}$	0,507956
4	0,266154	0,178377	$2,5259 \times 10^{-7}$	0,503722
5	0,267183	0,328163	$4,5949 \times 10^{-7}$	0,541696
6	0,266894	0,460643	$1,8143 \times 10^{-7}$	0,663514
7	0,719054	0,244016	$1,1604 \times 10^{-6}$	0,474275
LJ				
1	0,045897	0,063363	$5,8375 \times 10^{-6}$	0,036805
2	0,044261	0,267989	$7,7430 \times 10^{-6}$	0,205060
3	0,044793	0,684852	$2,9227 \times 10^{-6}$	0,236416
4	0,268093	0,180710	$5,1325 \times 10^{-6}$	0,074537
5	0,266236	0,324231	$6,7074 \times 10^{-6}$	0,136317
6	0,267713	0,459166	$1,6709 \times 10^{-6}$	0,217801
7	0,719096	0,243866	$2,5514 \times 10^{-6}$	1,786142
PSO				
1	0,042117	0,062649	$2,5816 \times 10^{-6}$	0,086923
2	0,044414	0,269052	$2,4156 \times 10^{-6}$	0,086390
3	0,042005	0,687017	$3,4457 \times 10^{-7}$	0,016170
4	0,265842	0,180875	$8,9610 \times 10^{-6}$	0,009471
5	0,266412	0,329910	$7,8537 \times 10^{-6}$	0,017756
6	0,265473	0,462742	$4,0296 \times 10^{-6}$	0,042116
7	0,719058	0,244191	$5,2137 \times 10^{-7}$	0,116298
SA				
1	0,043289	0,060979	$6,2496 \times 10^{-6}$	0,204809
2	0,042487	0,268342	$1,3726 \times 10^{-6}$	0,027134
3	0,042438	0,686706	$3,4632 \times 10^{-6}$	0,018736
4	0,266531	0,176705	$3,1229 \times 10^{-6}$	0,666910
5	0,269061	0,329311	$8,0180 \times 10^{-6}$	1,181857
6	0,264813	0,464485	$3,9728 \times 10^{-6}$	0,096527
7	0,719041	0,244374	$2,8418 \times 10^{-6}$	0,445517

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.21: Soluções distintas para o problema PDA, com tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}					
Solução	x_1	x_2	x_3	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia					
1	0,853455	0,605104	0,535349	$2,3970 \times 10^{-8}$	0,714342
2	0,902353	0,700475	0,653657	$5,2445 \times 10^{-9}$	0,718183
LJ					
1	0,865663	0,614983	0,538185	$7,9249 \times 10^{-6}$	0,000514
2	0,902175	0,704850	0,652047	$9,3331 \times 10^{-6}$	0,000614
PSO					
1	0,863274	0,620243	0,544404	$7,2272 \times 10^{-6}$	0,001412
2	0,908241	0,703481	0,654050	$3,8591 \times 10^{-6}$	0,001174
SA					
1	0,859217	0,601781	0,537214	$2,8671 \times 10^{-6}$	0,000415
2	0,912872	0,702754	0,660871	$1,4945 \times 10^{-6}$	0,000421

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.22: Soluções distintas para o problema PQLB, com tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}							
Solução	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia							
1	0,918485	0,916463	0,917529	0,917119	1,412870	$2,8178 \times 10^{-6}$	1,416407
2	0,998781	0,999293	0,999193	0,999643	1,003883	$9,9354 \times 10^{-7}$	1,227514
3	-0,578580	-0,579680	-0,578840	-0,579492	8,896441	$3,5260 \times 10^{-6}$	1,010180
LJ							
1	0,916030	0,917913	0,914098	0,917260	1,418067	$8,8782 \times 10^{-6}$	0,929778
2	0,997831	1,000161	0,999295	0,998083	1,004555	$9,6134 \times 10^{-6}$	1,165811
3	-0,579678	-0,577296	-0,579889	-0,578257	8,894235	$8,6932 \times 10^{-6}$	1,194205
PSO							
1	0,918042	0,918036	0,916877	0,914999	1,414165	$9,3742 \times 10^{-6}$	0,241079
2	0,997325	1,000613	1,000113	0,999981	1,002743	$7,4813 \times 10^{-6}$	0,287955
3	-0,580607	-0,579158	-0,576534	-0,579860	8,894822	$9,9920 \times 10^{-6}$	0,272694
SA							
2	0,996294	0,985714	1,005369	0,997391	1,018775	$2,0628 \times 10^{-4}$	85,590474

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.23: Soluções distintas para o problema PCR, com tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}										
S	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$f(x)$	T (s)
Alcateia										
1	0,6958	-0,7183	0,8226	-0,5686	-0,9662	0,2575	-0,3030	-0,9530	$3,901 \times 10^{-7}$	2,13486
2	0,2748	0,9616	-0,6108	-0,7920	0,9923	0,1243	-0,5564	-0,8312	$6,434 \times 10^{-7}$	1,86274
3	0,6964	-0,7172	0,8228	-0,5681	-0,9666	-0,2573	-0,3018	0,9536	$1,485 \times 10^{-6}$	2,19744
4	0,2754	0,9611	-0,6109	-0,7915	-0,9922	-0,1239	-0,5562	0,8310	$8,485 \times 10^{-7}$	1,53554
5	0,1761	-0,9845	-0,9469	-0,3223	-0,9978	-0,0647	0,4107	0,1217	$1,357 \times 10^{-6}$	1,57699
6	0,7332	0,6803	0,9524	-0,3043	-0,9572	0,2892	0,3937	-0,9194	$7,703 \times 10^{-7}$	1,88444
7	0,7327	0,6797	0,9521	-0,3034	0,9578	-0,2885	0,3938	0,9195	$6,974 \times 10^{-6}$	1,51691
8	0,1753	-0,9849	-0,9469	-0,3218	-0,9984	0,0637	0,4111	-0,9117	$1,778 \times 10^{-6}$	2,04561
9	0,7338	0,6799	0,9518	-0,3047	-0,9572	-0,2894	0,3937	0,9198	$4,283 \times 10^{-6}$	2,78141
10	0,1764	-0,9842	-0,9466	-0,3223	0,9978	0,0639	0,4105	-0,9118	$2,843 \times 10^{-7}$	2,15076
11	0,1768	-0,9842	-0,9470	-0,3220	0,9981	-0,0639	0,4110	0,9119	$1,241 \times 10^{-6}$	1,63751
12	0,6954	-0,7187	0,8233	-0,5682	0,9663	-0,2577	-0,3037	0,9527	$1,240 \times 10^{-6}$	2,25984
13	0,2759	0,9607	-0,6109	-0,7917	0,9925	-0,1235	-0,5565	0,8301	$4,976 \times 10^{-6}$	1,92813
14	0,7328	0,6787	0,9524	-0,3050	0,9575	0,2892	0,3919	-0,9204	$8,576 \times 10^{-6}$	2,04081
15	0,2745	0,9615	-0,6107	-0,7918	-0,9924	0,1235	-0,5562	-0,8310	$1,208 \times 10^{-7}$	2,55708
16	0,6997	-0,7138	0,8240	-0,5669	0,9656	0,2594	-0,3001	-0,9538	$9,478 \times 10^{-6}$	2,41465
LJ										
1	0,6956	-0,7179	0,8239	-0,5686	-0,9667	0,2560	-0,3024	-0,9533	$8,353 \times 10^{-6}$	1,26349
2	0,2745	0,9610	-0,6114	-0,7913	0,9923	0,1224	-0,5577	-0,8297	$8,287 \times 10^{-6}$	1,31072
3	0,6957	-0,7187	0,8213	-0,5699	-0,9659	-0,2579	-0,3035	0,9519	$9,160 \times 10^{-6}$	1,24690
4	0,2749	0,9611	-0,6105	-0,7925	-0,9927	-0,1227	-0,5562	0,8302	$5,188 \times 10^{-6}$	1,25416
5	0,1749	-0,9846	-0,9465	-0,3237	-0,9969	-0,0632	0,4105	0,9115	$9,651 \times 10^{-6}$	1,23913
6	0,7328	0,6798	0,9523	-0,3066	-0,9572	0,2889	0,3922	-0,9195	$9,942 \times 10^{-6}$	1,23147
7	0,7338	0,6784	0,9528	-0,3028	0,9574	-0,2885	0,3922	0,9189	$9,716 \times 10^{-6}$	1,32632
8	0,1751	-0,9855	-0,9459	-0,3220	-0,9977	0,0638	0,4101	-0,9127	$9,704 \times 10^{-6}$	1,20185
9	0,7321	0,6803	0,9528	-0,3030	-0,9578	-0,2871	0,3934	0,9195	$6,983 \times 10^{-6}$	1,27816
10	0,1751	-0,9839	-0,9472	-0,3211	0,9980	0,0634	0,4100	-0,9123	$5,027 \times 10^{-6}$	1,28683
11	0,1768	-0,9844	-0,9460	-0,3232	0,9973	-0,0642	0,4115	0,9104	$9,853 \times 10^{-6}$	1,28172
12	0,6963	-0,7173	0,8237	-0,5674	0,9647	-0,2585	-0,3017	0,9536	$9,669 \times 10^{-6}$	1,28974
13	0,2753	0,9619	-0,6126	-0,7911	0,9922	-0,1241	-0,5572	0,8295	$7,812 \times 10^{-6}$	1,32410
14	0,7360	0,6770	0,9527	-0,3032	0,9572	0,2902	0,3926	-0,9208	$9,241 \times 10^{-6}$	1,14253
15	0,2741	0,9619	-0,6115	-0,7910	-0,9930	0,1211	-0,5570	-0,8312	$8,496 \times 10^{-6}$	1,26809
16	0,6961	-0,7178	0,8227	-0,5675	0,9663	0,2563	-0,3007	-0,9535	$9,912 \times 10^{-6}$	1,28522
PSO										
1	0,6967	-0,7180	0,8235	-0,5664	-0,9660	0,2584	-0,3036	-0,9526	$9,644 \times 10^{-6}$	0,32133
2	0,2734	0,9612	-0,6094	-0,7918	0,9931	0,1228	-0,5558	-0,8307	$9,751 \times 10^{-6}$	0,43321
3	0,6941	-0,7199	0,8220	-0,5681	-0,9656	-0,2577	-0,3041	0,9522	$6,663 \times 10^{-6}$	0,29220
4	0,2737	0,9621	-0,6100	-0,7930	-0,9925	-0,1234	-0,5569	0,8293	$9,750 \times 10^{-6}$	0,27129
5	0,1751	-0,9849	-0,9457	-0,3231	-0,9983	-0,0646	0,4110	0,9112	$7,540 \times 10^{-6}$	0,24829
6	0,7338	0,6794	0,9525	-0,3037	-0,9580	0,2865	0,3937	-0,9196	$6,277 \times 10^{-6}$	0,26370
7	0,7337	0,6810	0,9522	-0,3055	0,9569	-0,2901	0,3930	0,9194	$9,511 \times 10^{-6}$	0,29309
8	0,1764	-0,9841	-0,9456	-0,3246	-0,9979	0,0650	0,4087	-0,9122	$8,295 \times 10^{-6}$	0,30111
9	0,7321	0,6818	0,9517	-0,3062	-0,9581	-0,2881	0,3931	0,9201	$8,573 \times 10^{-6}$	0,28993
10	0,1750	-0,9838	-0,9476	-0,3226	0,9976	0,0638	0,4115	-0,9112	$9,293 \times 10^{-6}$	0,24001
11	0,1752	-0,9843	-0,9463	-0,3223	0,9976	-0,0619	0,4108	0,9128	$9,316 \times 10^{-6}$	0,30518
12	0,6973	-0,7169	0,8243	-0,5663	0,9667	-0,2563	-0,3016	0,9530	$8,300 \times 10^{-6}$	0,32466
13	0,2760	0,9608	-0,6134	-0,7907	0,9922	-0,1249	-0,5571	0,8307	$9,641 \times 10^{-6}$	0,27614
14	0,7331	0,6822	0,9529	-0,3039	0,9573	0,2896	0,3944	-0,9189	$8,934 \times 10^{-6}$	0,30340
15	0,2736	0,9623	-0,6117	-0,7912	-0,9921	0,1231	-0,5556	-0,8321	$8,813 \times 10^{-6}$	0,27181
16	0,6989	-0,7152	0,8244	-0,5665	0,9668	0,2572	-0,3004	-0,9536	$9,415 \times 10^{-6}$	0,30768
SA										
7	0,7232	0,7369	0,9909	-0,2636	0,9730	-0,2689	0,4323	0,9266	$1,067 \times 10^{-2}$	15,39292

Fonte: O autor, 2017.

5.1.3.2 Tolerância de 10^{-10} para a imagem da função objetivo $f(\mathbf{x})$

As Tabelas 5.24 - 5.31 apresentam as soluções distintas encontradas para os problemas testes apresentados na Seção 3.1, com a tolerância da imagem da função objetivo $f(\mathbf{x})$ de 10^{-10} . Estas tabelas são semelhantes as apresentadas na Subseção 5.1.3.1, onde destaca-se as soluções obtidas por cada método juntamente com suas imagens e tempos de execução. O objetivo deste estudo numérico é verificar a eficácia dos métodos estocásticos mediante a utilização de uma menor tolerância para as imagens das funções objetivos.

Pode-se observar nos resultados apresentados que o único problema em que os métodos localizaram todas as soluções distintas foi PTE (veja a Tabela 5.24). Porém, alguns métodos estocásticos não mantiveram este desempenho em determinados problemas testes. Para o problema PCSTR, com $R = 0,935$, os métodos LJ e SA não foram capazes de encontrar a única solução do problema, mediante a tolerância utilizada (veja a Tabela 5.25). Para este mesmo problema, mas com $R = 0,950$, o método LJ encontrou todas as soluções distintas. Porém, o método Alcateia identificou somente 3 dentre as 5 soluções distintas (veja a Tabela 5.27). O método SA foi o que obteve o pior desempenho, pois, além do problema PCSTR com $R = 0,935$, também não conseguiu localizar todas as soluções distintas para os outros valores do parâmetro R do mesmo problema. Este fato também ocorreu para os problemas PDA, PQLB e PCR (veja as Tabelas 5.29 - 5.31). No problema PCR, destaca-se o desempenho do método SA, no qual não encontrou nenhuma solução dentre as 16 soluções distintas. Desta forma, conclui-se que a tolerância da imagem da função objetivo pode influenciar na determinação das soluções distintas do problema que está sendo analisado.

Em relação ao tempo de execução de cada método pode-se observar que o método PSO obteve o melhor desempenho computacional em todos os problemas testes. E, novamente, é importante ressaltar que o método SA precisou de um tempo computacional elevado em relação aos outros métodos na metade das vezes que localizou alguma solução para os problemas testes (veja as Tabelas 5.24, 5.28 e 5.29).

Tabela 5.24: Soluções distintas para o problema PTE, com tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Solução	x_1	x_2	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia				
1	0,299459	2,836952	$2,4350 \times 10^{-11}$	1,459680
2	0,499999	3,141598	$2,7759 \times 10^{-11}$	1,046276
LJ				
1	0,299468	2,836970	$9,4212 \times 10^{-11}$	1,972410
2	0,500011	3,141593	$5,3428 \times 10^{-11}$	1,218482
PSO				
1	0,299435	2,836895	$4,6330 \times 10^{-11}$	0,282352
2	0,500002	3,141596	$4,5152 \times 10^{-12}$	0,203106
SA				
1	0,299462	2,836959	$3,9395 \times 10^{-11}$	10,318117
2	0,500000	3,141584	$3,9487 \times 10^{-11}$	0,239856

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.25: Solução para o problema PCSTR, com $R = 0,935$ e tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Solução	x_1	x_2	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia				
1	0,724987	0,245241	$7,0516 \times 10^{-13}$	1,385064
PSO				
1	0,724987	0,245241	$8,6897 \times 10^{-12}$	0,277996
SA				
1	0,724966	0,245221	$2,8493 \times 10^{-6}$	31,594189

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.26: Soluções distintas para o problema PCSTR, com $R = 0,945$ e tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Solução	x_1	x_2	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia				
1	0,079769	0,664378	$4,2837 \times 10^{-11}$	2,741389
2	0,172244	0,591335	$1,9449 \times 10^{-11}$	2,242061
3	0,723330	0,244990	$2,1961 \times 10^{-11}$	1,043426
LJ				
1	0,079758	0,664386	$5,6705 \times 10^{-11}$	3,567620
2	0,172240	0,591338	$8,7174 \times 10^{-11}$	3,530130
3	0,723330	0,244989	$2,7289 \times 10^{-11}$	4,414978
PSO				
1	0,079773	0,664375	$4,2426 \times 10^{-11}$	0,306904
2	0,172252	0,591329	$5,3111 \times 10^{-11}$	0,272508
3	0,723330	0,244989	$1,2074 \times 10^{-11}$	0,293094
SA				
1	0,079742	0,664399	$3,9728 \times 10^{-9}$	91,543657

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.27: Soluções distintas para o problema PCSTR, com $R = 0,950$ e tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Solução	x_1	x_2	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia				
1	0,062783	0,103812	$9,3250 \times 10^{-11}$	0,899113
2	0,062792	0,195655	$1,8472 \times 10^{-11}$	1,236223
3	—	—	—	—
4	—	—	—	—
5	0,722226	0,244796	$4,6556 \times 10^{-12}$	1,056303
LJ				
1	0,062790	0,103814	$9,9813 \times 10^{-11}$	1,641755
2	0,062793	0,195662	$4,3001 \times 10^{-11}$	1,771147
3	0,062815	0,675498	$6,0552 \times 10^{-11}$	2,267224
4	0,206006	0,557878	$1,2735 \times 10^{-11}$	1,993600
5	0,722226	0,244795	$3,4163 \times 10^{-11}$	2,504658
PSO				
1	0,062799	0,103835	$1,5527 \times 10^{-11}$	0,186727
2	0,062791	0,195661	$3,2192 \times 10^{-11}$	0,159732
3	0,062797	0,675511	$4,2814 \times 10^{-11}$	0,223230
4	0,206013	0,557872	$3,8941 \times 10^{-11}$	0,210571
5	0,722226	0,244795	$5,0600 \times 10^{-11}$	0,338496
SA				
1	0,062812	0,103832	$1,0908 \times 10^{-10}$	46,166689

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.28: Soluções distintas para o problema PCSTR, com $R = 0,960$ e tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Solução	x_1	x_2	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia				
1	0,042125	0,061756	$2,5081 \times 10^{-12}$	1,169875
2	0,042124	0,268726	$3,3770 \times 10^{-14}$	1,356722
3	0,042119	0,686934	$2,6899 \times 10^{-11}$	1,837786
4	0,266588	0,178425	$6,4420 \times 10^{-12}$	0,749610
5	0,266589	0,327275	$1,7542 \times 10^{-13}$	0,939016
6	0,266596	0,461119	$6,2506 \times 10^{-11}$	0,728764
7	0,719074	0,244164	$1,1825 \times 10^{-11}$	1,190440
LJ				
1	0,042116	0,061747	$6,5974 \times 10^{-11}$	2,348210
2	0,042135	0,268726	$4,9792 \times 10^{-11}$	2,222888
3	0,042134	0,686922	$4,1098 \times 10^{-11}$	1,618505
4	0,266595	0,178432	$7,5382 \times 10^{-11}$	2,784019
5	0,266596	0,327280	$6,4812 \times 10^{-11}$	3,574114
6	0,266589	0,461135	$5,6642 \times 10^{-11}$	3,265871
7	0,719074	0,244163	$6,1917 \times 10^{-12}$	2,637799
PSO				
1	0,042121	0,061754	$9,4066 \times 10^{-12}$	0,255417
2	0,042119	0,268726	$1,5736 \times 10^{-11}$	0,208496
3	0,042132	0,686924	$2,6742 \times 10^{-11}$	0,250462
4	0,266586	0,178417	$3,8638 \times 10^{-11}$	0,233856
5	0,266584	0,327270	$3,7131 \times 10^{-11}$	0,288912
6	0,266597	0,461116	$9,9356 \times 10^{-11}$	0,222055
7	0,719074	0,244162	$5,9058 \times 10^{-11}$	0,221760
SA				
1	—	—	—	—
2	0,042117	0,268723	$5,8058 \times 10^{-11}$	1,215823
3	—	—	—	—
4	0,266582	0,178424	$8,6543 \times 10^{-11}$	1,899842
5	0,266594	0,327285	$9,9761 \times 10^{-11}$	32,002565
6	—	—	—	—
7	—	—	—	—

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.29: Soluções distintas para o problema PDA, com tolerância de $= 10^{-10}$.

Tolerância = 10^{-10}					
Solução	x_1	x_2	x_3	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia					
1	0,862037	0,617217	0,549697	$2,6154 \times 10^{-12}$	3,487854
2	0,904989	0,696735	0,649578	$9,7506 \times 10^{-11}$	2,997828
LJ					
1	0,861104	0,616983	0,549293	$7,6707 \times 10^{-11}$	2,109835
2	0,905107	0,698122	0,651289	$2,5008 \times 10^{-11}$	2,277972
PSO					
1	0,861104	0,617336	0,549722	$7,9774 \times 10^{-11}$	0,325325
2	0,905495	0,697641	0,650783	$7,9805 \times 10^{-11}$	0,422120
SA					
1	0,862999	0,615359	0,547725	$9,7077 \times 10^{-11}$	24,040750
2	–	–	–	–	–

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.30: Soluções distintas para o problema PQLB, com tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}							
Solução	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$f(x)$	Tempo (s)
Alcateia							
1	0,916360	0,916358	0,916354	0,916358	1,418212	$2,7037 \times 10^{-11}$	2,077031
2	1,000000	0,999995	0,999998	0,999998	41,000012	$4,3393 \times 10^{-11}$	2,708894
3	-0,579041	-0,579042	-0,579044	-0,579044	8,895212	$3,5573 \times 10^{-11}$	2,928558
LJ							
1	0,916366	0,916363	0,916358	0,916366	1,418181	$8,9300 \times 10^{-11}$	2,978103
2	1,000000	0,999996	0,999995	0,999999	1,000010	$8,7516 \times 10^{-11}$	3,005531
3	-0,579047	-0,579043	-0,579039	-0,579046	8,895214	$9,5091 \times 10^{-11}$	3,945581
PSO							
1	0,916359	0,916359	0,916351	0,916351	1,418224	$5,7781 \times 10^{-11}$	0,321439
2	0,999990	0,999997	0,999992	0,999992	1,000036	$8,7757 \times 10^{-11}$	0,482470
3	-0,579041	-0,579038	-0,579047	-0,579048	8,895216	$6,8214 \times 10^{-11}$	0,305922

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.31: Soluções distintas para o problema PCR, com tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}										
S	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$f(x)$	T (s)
Alcateia										
1	0,6956	-0,7184	0,8228	-0,5683	-0,9663	0,2576	-0,3029	-0,9530	$3,444 \times 10^{-11}$	3,26450
2	0,2747	0,9615	-0,6107	-0,7919	0,9923	0,1238	-0,5561	-0,8311	$1,118 \times 10^{-11}$	2,63771
3	0,6956	-0,7184	0,8228	-0,5683	-0,9663	-0,2576	-0,3029	0,9530	$1,682 \times 10^{-11}$	3,03223
4	0,2747	0,9615	-0,6107	-0,7919	-0,9923	-0,1237	-0,5561	0,8311	$2,412 \times 10^{-11}$	3,31601
5	0,1761	-0,9844	-0,9466	-0,3223	-0,9980	-0,0640	0,4106	0,9118	$6,950 \times 10^{-12}$	2,51677
6	0,7337	0,6795	0,9526	-0,3041	-0,9573	0,2890	0,3934	-0,9194	$9,087 \times 10^{-12}$	2,61669
7	0,7337	0,6795	0,9526	-0,3041	0,9573	-0,2890	0,3934	0,9194	$5,250 \times 10^{-11}$	4,03759
8	0,1761	-0,9844	-0,9466	-0,3223	-0,9980	0,0640	0,4106	-0,9118	$6,089 \times 10^{-11}$	2,83770
9	0,7337	0,6795	0,9526	-0,3041	-0,9573	-0,2890	0,3934	0,9194	$6,543 \times 10^{-11}$	2,82604
10	0,1761	-0,9844	-0,9466	-0,3223	0,9980	0,0640	0,4106	-0,9118	$8,181 \times 10^{-11}$	2,79022
11	0,1761	-0,9844	-0,9466	-0,3223	0,9980	-0,0640	0,4106	0,9118	$9,709 \times 10^{-11}$	2,26474
12	0,6956	-0,7185	0,8228	-0,5683	0,9663	-0,2576	-0,3029	0,9530	$7,771 \times 10^{-11}$	4,78837
13	0,2747	0,9615	-0,6107	-0,7919	0,9923	-0,1237	-0,5561	0,8311	$2,622 \times 10^{-11}$	2,47797
14	0,7337	0,6795	0,9526	-0,3041	0,9573	0,2890	0,3934	-0,9194	$5,118 \times 10^{-12}$	2,86897
15	0,2747	0,9615	-0,6107	-0,7919	-0,9923	0,1237	-0,5561	-0,8311	$1,661 \times 10^{-11}$	3,38541
16	0,6956	-0,7185	0,8228	-0,5683	0,9663	0,2576	-0,3029	-0,9530	$1,601 \times 10^{-11}$	3,79916
LJ										
1	0,6956	-0,7184	0,8228	-0,5683	-0,9663	0,2576	-0,3029	-0,9530	$9,793 \times 10^{-11}$	4,45293
2	0,2747	0,9615	-0,6107	-0,7919	0,9923	0,1237	-0,5561	-0,8311	$5,990 \times 10^{-11}$	4,28105
3	0,6956	-0,7184	0,8228	-0,5683	-0,9663	-0,2576	-0,3029	0,9530	$7,750 \times 10^{-11}$	3,20575
4	0,2747	0,9615	-0,6107	-0,7919	-0,9923	-0,1237	-0,5561	0,8311	$9,755 \times 10^{-11}$	4,43674
5	0,1761	-0,9844	-0,9466	-0,3223	-0,9980	-0,0640	0,4106	0,9118	$9,001 \times 10^{-11}$	4,63293
6	0,7337	0,6795	0,9526	-0,3041	-0,9573	0,2890	0,3934	-0,9194	$8,404 \times 10^{-11}$	5,88459
7	0,7337	0,6795	0,9526	-0,3041	0,9573	-0,2890	0,3934	0,9194	$9,945 \times 10^{-11}$	4,45094
8	0,1761	-0,9844	-0,9466	-0,3223	-0,9980	0,0640	0,4106	-0,9118	$7,533 \times 10^{-11}$	4,27501
9	0,7337	0,6795	0,9526	-0,3041	-0,9573	-0,2890	0,3934	0,9194	$8,090 \times 10^{-11}$	4,59247
10	0,1761	-0,9844	-0,9466	-0,3223	0,9980	0,0640	0,4106	-0,9118	$7,207 \times 10^{-11}$	4,66823
11	0,1761	-0,9844	-0,9466	-0,3223	0,9979	-0,0640	0,4106	0,9118	$7,782 \times 10^{-11}$	3,86786
12	0,6956	-0,7184	0,8228	-0,5683	0,9663	-0,2576	-0,3029	0,9530	$5,990 \times 10^{-11}$	2,86499
13	0,2747	0,9615	-0,6107	-0,7919	0,9923	-0,1238	-0,5561	0,8311	$9,725 \times 10^{-11}$	3,34716
14	0,7337	0,6795	0,9526	-0,3041	0,9573	0,2890	0,3934	-0,9194	$4,701 \times 10^{-11}$	4,09433
15	0,2747	0,9615	-0,6107	-0,7919	-0,9923	0,1237	-0,5561	-0,8311	$8,541 \times 10^{-11}$	3,23782
16	0,6956	-0,7184	0,8228	-0,5683	0,9663	0,2576	-0,3029	-0,9530	$9,718 \times 10^{-11}$	4,13707
PSO										
1	0,6956	-0,7184	0,8228	-0,5683	-0,9663	0,2576	-0,3029	-0,9530	$9,601 \times 10^{-11}$	0,31549
2	0,2747	0,9615	-0,6107	-0,7919	0,9923	0,1237	-0,5561	-0,8311	$8,195 \times 10^{-11}$	0,28847
3	0,6956	-0,7184	0,8228	-0,5683	-0,9663	-0,2576	-0,3029	0,9530	$9,485 \times 10^{-11}$	0,32101
4	0,2747	0,9615	-0,6107	-0,7919	-0,9923	-0,1237	-0,5561	0,8311	$9,002 \times 10^{-11}$	0,33397
5	0,1761	-0,9844	-0,9466	-0,3223	-0,9980	-0,0640	0,4106	0,9118	$9,585 \times 10^{-11}$	0,29634
6	0,7337	0,6795	0,9526	-0,3041	-0,9573	0,2890	0,3934	-0,9194	$9,259 \times 10^{-11}$	0,55548
7	0,7337	0,6795	0,9526	-0,3041	0,9573	-0,2890	0,3934	0,9194	$9,578 \times 10^{-11}$	0,32858
8	0,1761	-0,9844	-0,9466	-0,3223	-0,9980	0,0640	0,4106	-0,9118	$8,475 \times 10^{-11}$	0,32543
9	0,7337	0,6795	0,9526	-0,3041	-0,9573	-0,2890	0,3934	0,9194	$5,174 \times 10^{-11}$	0,28521
10	0,1761	-0,9844	-0,9466	-0,3223	0,9979	0,0640	0,4105	-0,9118	$9,136 \times 10^{-11}$	0,26229
11	0,1761	-0,9844	-0,9466	-0,3223	0,9980	-0,0640	0,4106	0,9118	$9,959 \times 10^{-11}$	0,33701
12	0,6956	-0,7184	0,8228	-0,5683	0,9663	-0,2576	-0,3029	0,9530	$9,616 \times 10^{-11}$	0,30899
13	0,2747	0,9615	-0,6107	-0,7919	0,9923	-0,1237	-0,5561	0,8311	$9,909 \times 10^{-11}$	0,34402
14	0,7337	0,6795	0,9526	-0,3041	0,9573	0,2890	0,3934	-0,9194	$9,642 \times 10^{-11}$	0,32250
15	0,2747	0,9615	-0,6107	-0,7919	-0,9923	0,1238	-0,5561	-0,8311	$8,542 \times 10^{-11}$	0,32947
16	0,6956	-0,7184	0,8228	-0,5683	0,9663	0,2576	-0,3029	-0,9530	$9,986 \times 10^{-11}$	0,45492

Fonte: O autor, 2017.

5.1.4 Quantidade de soluções distintas

Como visto na Tabela 5.5, praticamente todos os problemas testes escolhidos neste trabalho possuem múltiplas soluções. Desta forma, o objetivo desta subseção é analisar a eficácia dos métodos estocásticos Alcateia, LJ, PSO e SA na localização destas múltiplas soluções. Para isso, em cada problema teste, foi utilizado a metodologia apresentada na Subseção 5.1.2. Novamente, para a realização destes estudos numéricos foram utilizadas duas tolerâncias para a função objetivo $f(\mathbf{x})$, 10^{-5} e 10^{-10} .

5.1.4.1 Tolerância de 10^{-5} para a imagem da função objetivo $f(\mathbf{x})$

Com o objetivo de verificar a determinação das soluções múltiplas em cada problema teste, usando os métodos estocásticos Alcateia, LJ, PSO e SA, realiza-se um estudo numérico comparativo da quantidade de soluções distintas. Em todos os casos utilizou-se uma tolerância de 10^{-5} para a imagem da função objetivo $f(\mathbf{x})$.

As Tabelas 5.32-5.39 apresentam os resultados dos estudos comparativos das quantidades de soluções distintas encontradas usando os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para cada problema teste. Nas primeiras colunas destas tabelas lista-se as quantidades de soluções distintas de cada problema. Já nas demais colunas destas tabelas estão listadas as quantidades de vezes que cada solução foi encontrada, com um número de execuções NS igual a 100. As Figuras 5.7-5.14 são os gráficos de barras verticais agrupadas (ou simplesmente gráficos de barras) dos dados apresentados pelas Tabelas 5.32-5.39.

Pode-se observar nas 100 execuções de cada método estocástico que todas as soluções distintas (2 soluções) foram encontradas somente para o problema PTE (veja a Tabela 5.32). Este fato praticamente se repete quando se compara a determinação de todas as soluções distintas dos problemas PQLB (veja a Tabela 5.38) e PCR (veja a Tabela 5.39). Nestes casos, pode-se observar que o método SA não encontrou nenhuma solução distinta em um total de 100 execuções. De fato, conforme os resultados apresentados na Seção 5.1.3, o método SA se aproxima de algumas soluções dos problemas PQLB e PCR, porém não atinge as tolerâncias desejadas. Diante disso, suspeita-se que a temperatura inicial utilizada pode ter influenciado no desempenho do método para alcançar o mínimo global destes problemas. Percebe-se também que para o problema PCSTR, com $R = 0,935$ (veja a Tabela 5.33), todos os métodos tiveram dificuldades em localizar a única solução do problema, sendo que o método LJ não localizou esta solução em nenhuma execução. Porém, para os outros valores do parâmetro R , esta dificuldade não é

observada novamente (veja as Tabela 5.34 - 5.36). Este fato pode estar ligado ao número de soluções existentes no espaço de busca, isto é, quanto maior o número de soluções existentes neste espaço de busca, mais fácil será em localizá-las.

Nota-se claramente nos resultados apresentados, que os métodos Alcateia, LJ e PSO foram os que localizaram um maior número de soluções distintas em praticamente todos os problemas testes. Além disso, a superioridade destes métodos em relação ao método SA permanece, mesmo nos problemas complexos. Nos casos dos métodos Alcateia e PSO, acredita-se que este fato está relacionado com as suas características populacionais, que permitem uma eficiente localização das soluções dos problemas testes. De fato, se a troca de experiências dos grupos de lobos (método Alcateia) ou população (método PSO) ocorre durante cada iteração dos métodos, isso faz com que uma maior quantidade de indivíduos concentrem suas buscas nas regiões promissoras.

Tabela 5.32: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PTE, com tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	–	–	–	–
1	–	–	–	–
2	100	100	100	100
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

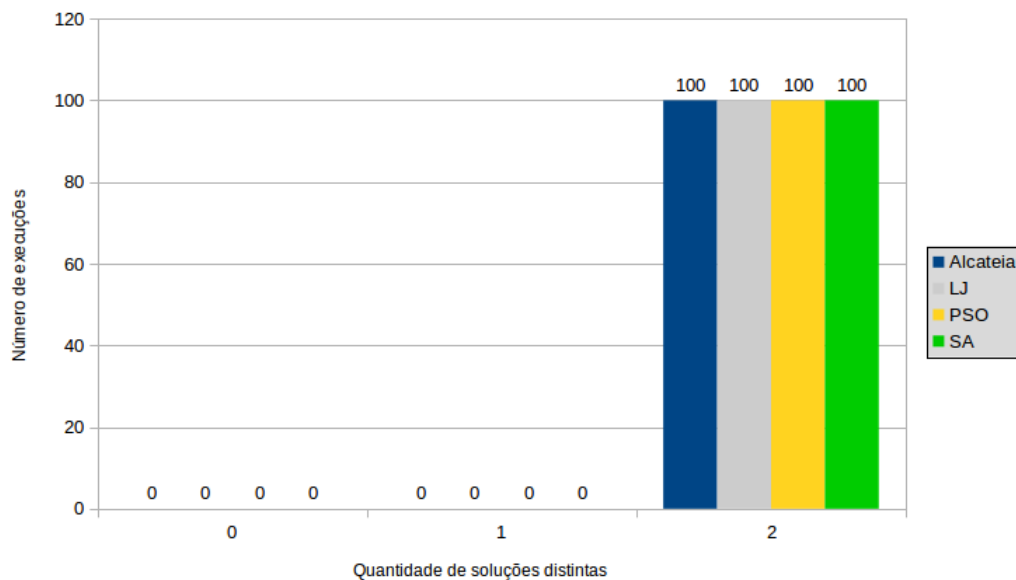


Figura 5.7: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PTE, com tolerância de 10^{-5} . Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.33: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,935$ e tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	72	100	98	74
1	28	–	2	26
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

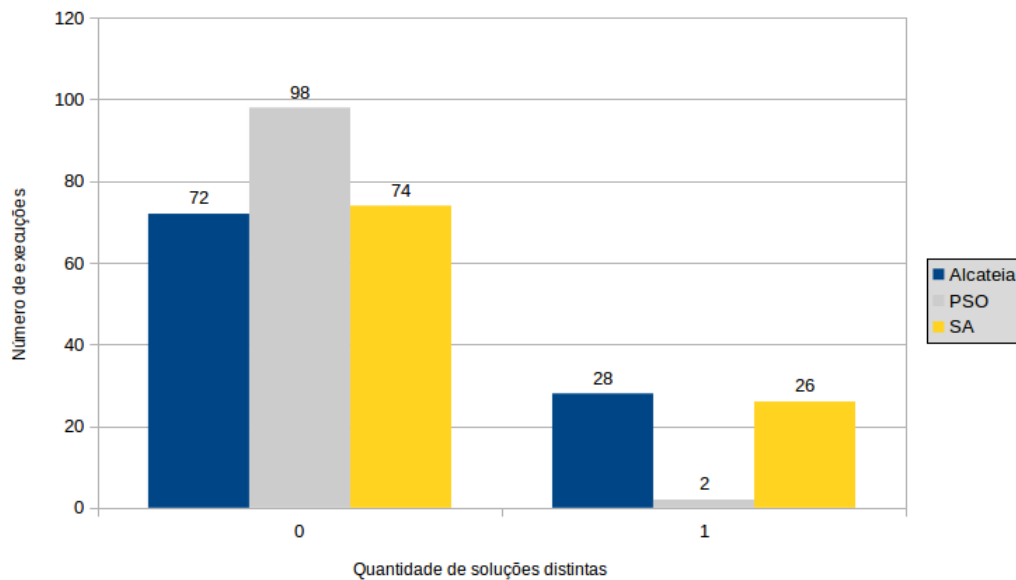


Figura 5.8: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,935$ e tolerância de 10^{-5} . Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.34: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,945$ e tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	–	–	–	–
1	–	–	1	–
2	–	90	83	–
3	100	10	16	100
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

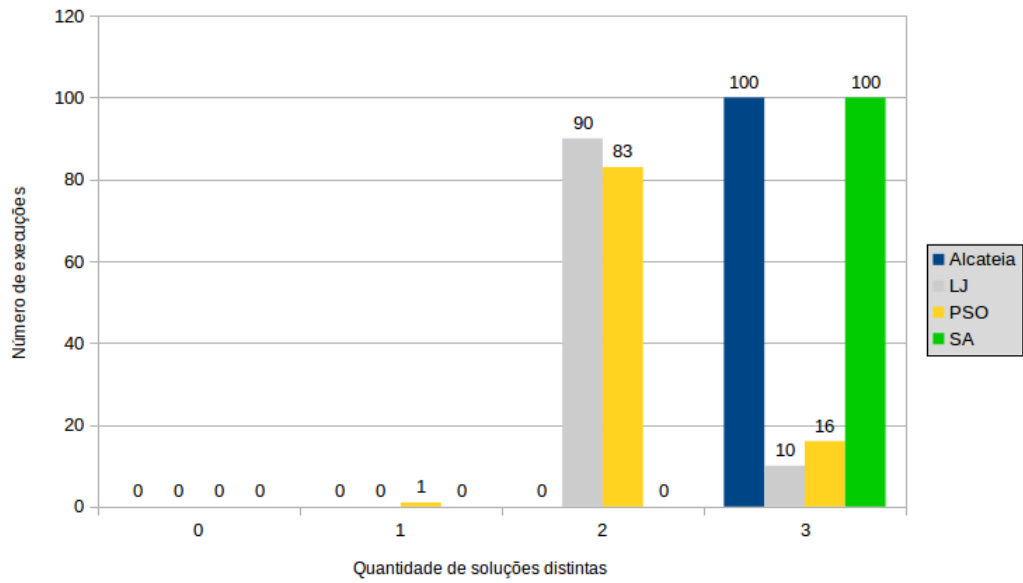


Figura 5.9: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,945$ e tolerância de 10^{-5} . Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.35: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,950$ e tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	–	–	–	–
1	–	–	–	1
2	40	26	67	15
3	52	58	32	55
4	8	16	1	27
5	–	–	–	2
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.36: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,960$ e tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	–	–	–	–
1	–	–	–	–
2	–	–	–	–
3	–	–	–	–
4	–	–	2	–
5	75	71	88	50
6	23	28	10	46
7	2	1	–	4
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

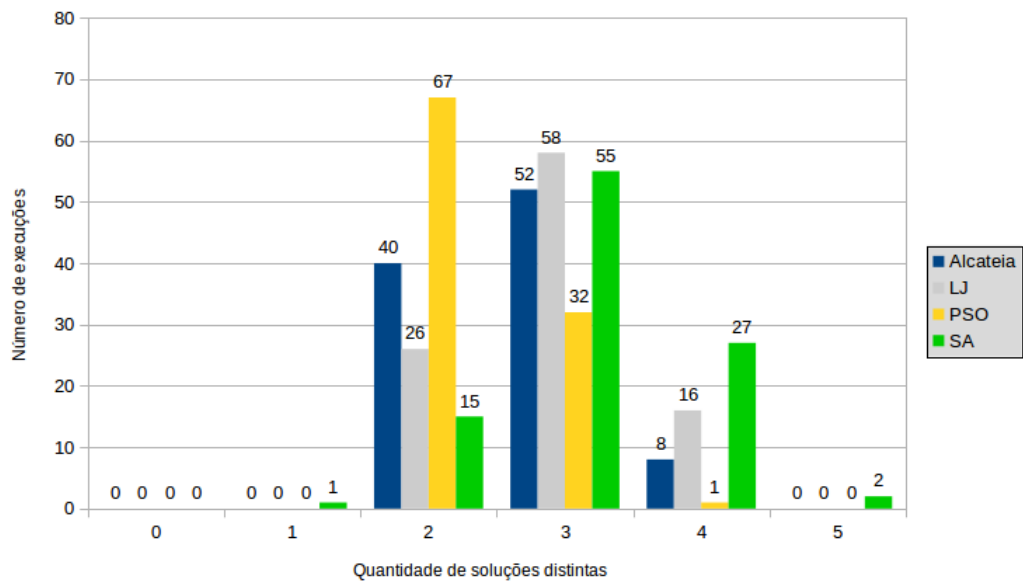


Figura 5.10: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,950$ e tolerância de 10^{-5} . Fonte: O autor, 2017.

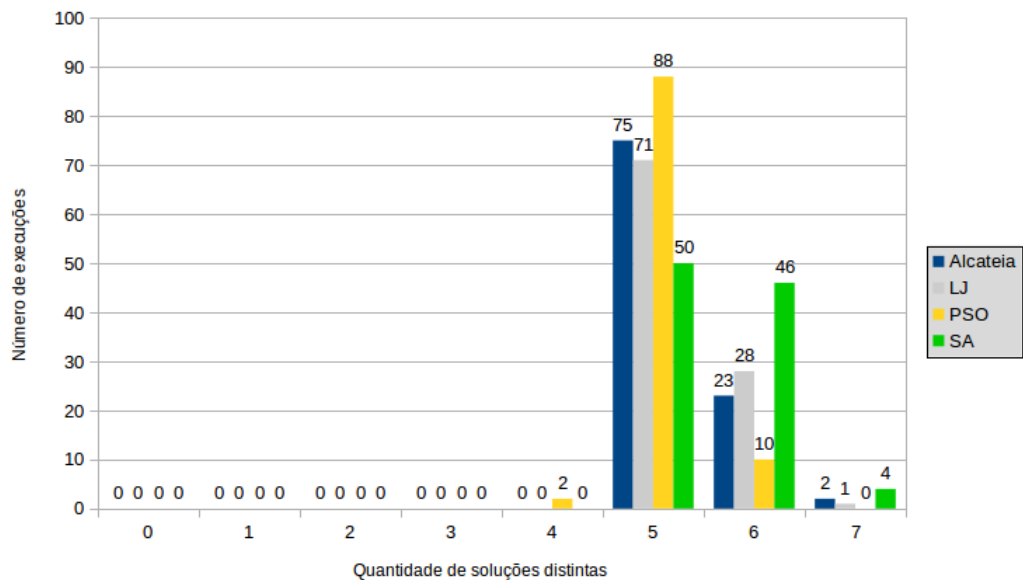


Figura 5.11: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,960$ e tolerância de 10^{-5} . Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.37: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PDA, com tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	–	–	–	–
1	–	34	97	53
2	100	66	3	47
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

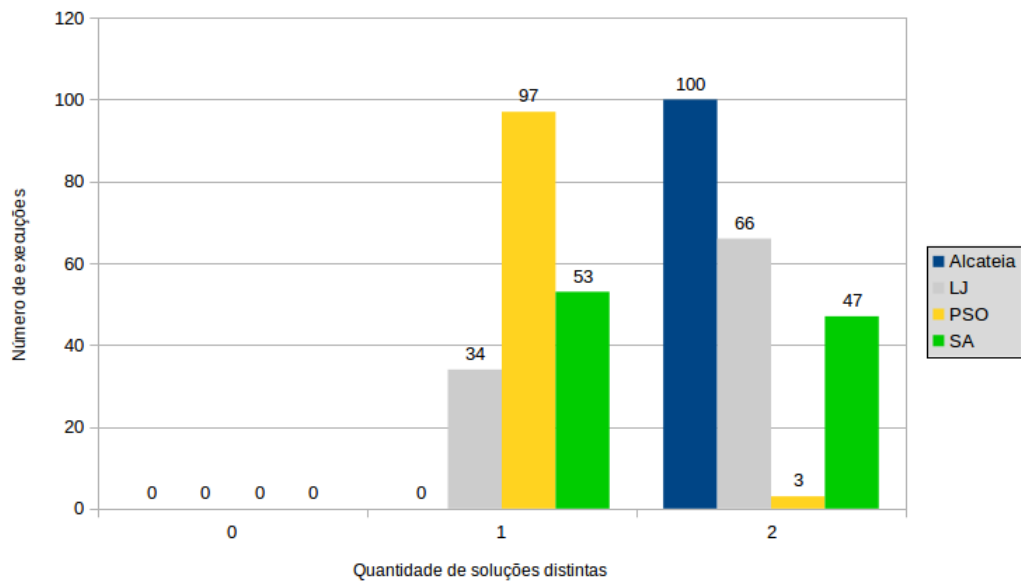


Figura 5.12: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PDA, com tolerância de 10^{-5} . Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.38: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PQLB, com tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	–	–	–	100
1	–	–	–	–
2	–	–	–	–
3	100	100	100	–
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

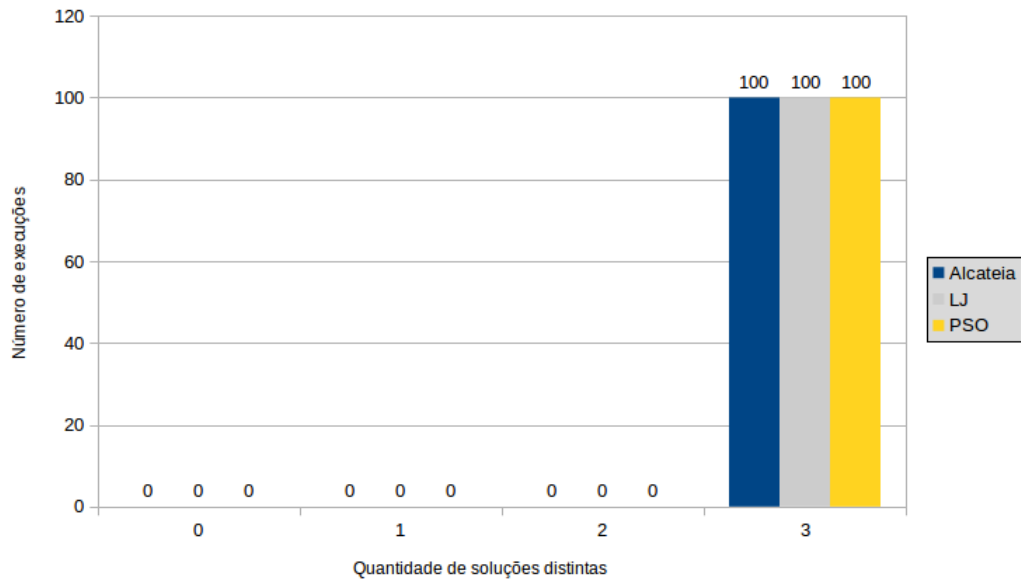


Figura 5.13: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PQLB, com tolerância de 10^{-5} . Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.39: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCR, com tolerância de 10^{-5} .

Tolerância = 10^{-5}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	—	—	—	100
1	—	—	—	—
2	—	—	—	—
3	—	—	—	—
4	—	—	—	—
5	—	—	—	—
6	—	—	—	—
7	—	—	—	—
8	—	—	—	—
9	—	—	—	—
10	—	—	—	—
11	—	—	—	—
12	—	—	—	—
13	—	—	—	—
14	—	—	—	—
15	5	4	3	—
16	95	96	97	—
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

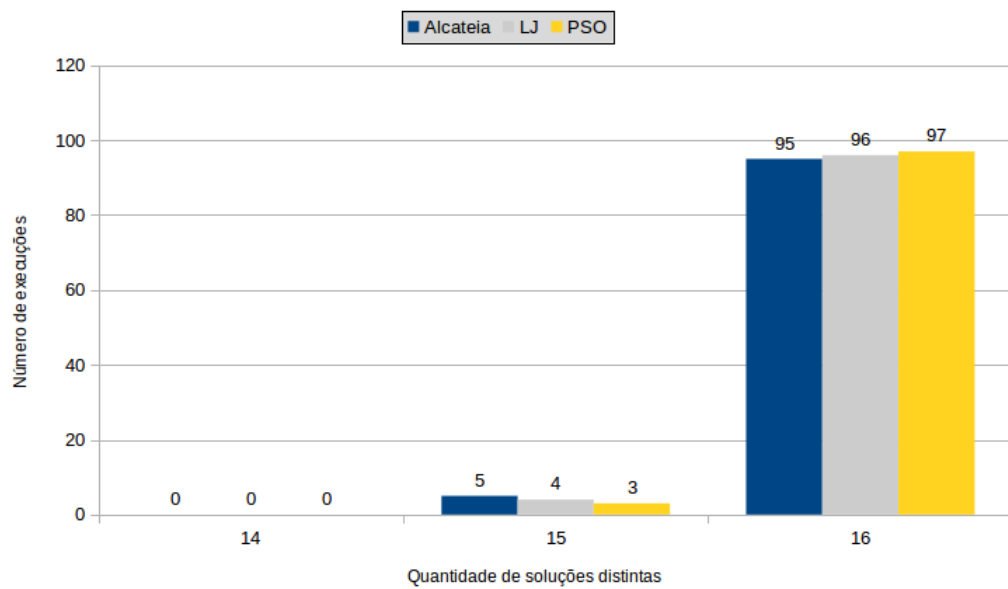


Figura 5.14: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCR, com tolerância de 10^{-5} . Fonte: O autor, 2017.

5.1.4.2 Tolerância de 10^{-10} para a imagem da função objetivo $f(\mathbf{x})$

Nesta subseção, realiza-se estudos numéricos comparativos entre os métodos estocásticos Alcateia, LJ, PSO e SA para a determinação das soluções múltiplas em cada problema teste, com uma tolerância de 10^{-10} para a imagem da função objetivo $f(\mathbf{x})$.

As Tabelas 5.40-5.47 apresentam os resultados numéricos comparativos das quantidades de soluções distintas encontradas usando os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para cada problema teste. Os dados destas tabelas estão apresentados graficamente nas Figuras 5.15-5.22. Os resultados das tabelas e figuras, aqui apresentados, são semelhantes aos apresentados na Subseção 5.1.4.1. A diferença está na tolerância da imagem da função objetivo.

Nos resultados apresentados na Subseção 5.1.4.1, todos os métodos estocásticos localizaram as 2 soluções distintas do problema PTE nas 100 execuções propostas. Porém, quando aumenta-se a tolerância da imagem da função objetivo, o método SA não apresentou um bom desempenho. Neste caso, em 95 execuções o método não conseguiu localizar nenhuma solução e em 5 execuções o método conseguiu localizar somente 1 solução dentre um total de 2 soluções distintas do problema. O método SA também não conseguiu localizar nenhuma solução dos problemas testes PCSTR ($R = 0,935$), PCSTR ($R = 0,945$), PCSTR ($R = 0,950$), PQLB e PCR.

Os métodos Alcateia, LJ e PSO foram os que conseguiram localizar uma maior quantidade de soluções distintas nos problemas testes. Para os problemas testes PTE e PQLB os métodos localizaram todas as soluções distintas nas 100 execuções propostas. O único caso em que o método LJ não conseguiu localizar nenhuma solução distinta foi PCSTR, com $R = 0,935$. Além disso, os problemas em que os métodos Alcateia e PSO não localizaram todas as soluções distintas foram o PCSTR ($R = 0,950$) e PCSTR ($R = 0,960$). Para o problema PCSTR ($R = 0,950$), em um total de 7 soluções distintas, o método Alcateia determinou 2 e 3 soluções em 99 e 1 execuções, respectivamente. Já o método PSO, obteve 2, 3 e 4 soluções distintas em 74, 23 e 14 execuções, respectivamente. Vale a pena ressaltar o desempenho do método Alcateia para a resolução do problema PCSTR ($R = 0,945$), onde o método conseguiu determinar as 3 soluções distintas em todas as suas 100 execuções. Além disso, o método Alcateia determinou, em 96 execuções as 16 soluções distintas do problema PCR. Nas demais execuções, o método conseguiu determinar 15 soluções.

Tabela 5.40: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PTE, com tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	–	–	–	95
1	–	–	–	5
2	100	100	100	–
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

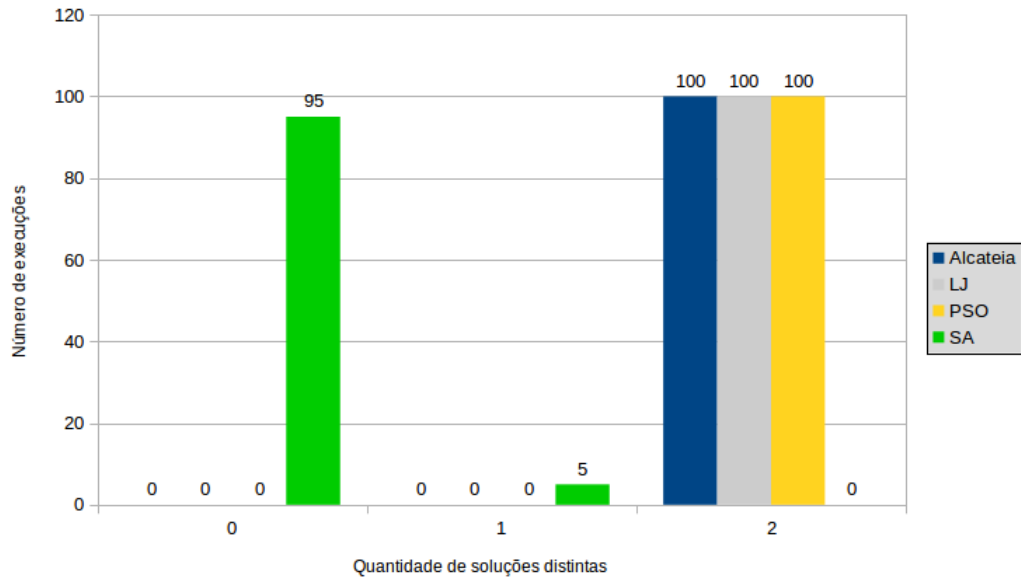


Figura 5.15: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PTE, com tolerância de 10^{-10} . Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.41: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,935$ e tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	69	100	94	100
1	31	–	6	–
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.42: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,945$ e tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	–	–	–	100
1	–	–	1	–
2	–	90	72	–
3	100	10	27	–
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

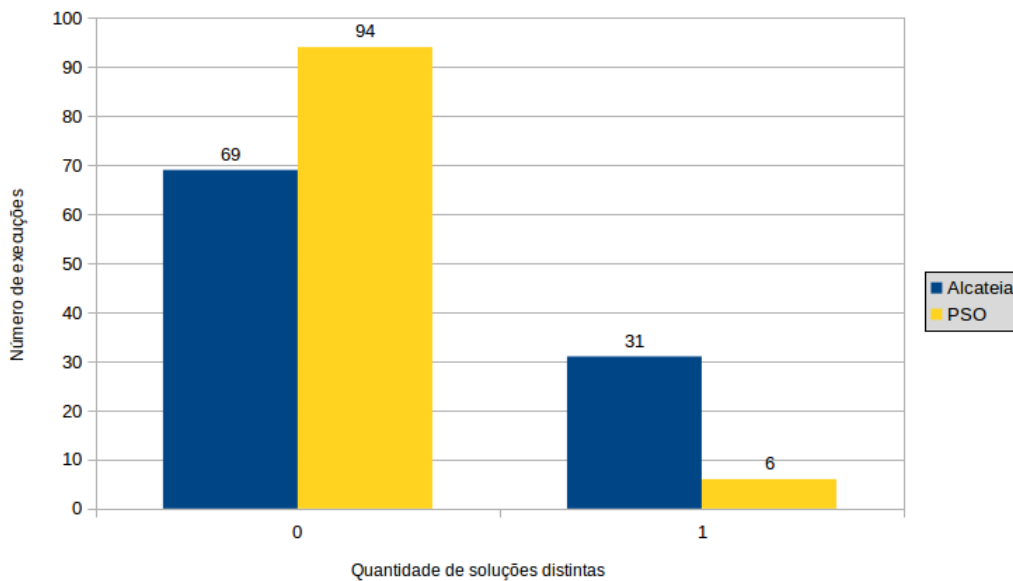


Figura 5.16: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,935$ e tolerância de 10^{-10} . Fonte: O autor, 2017.

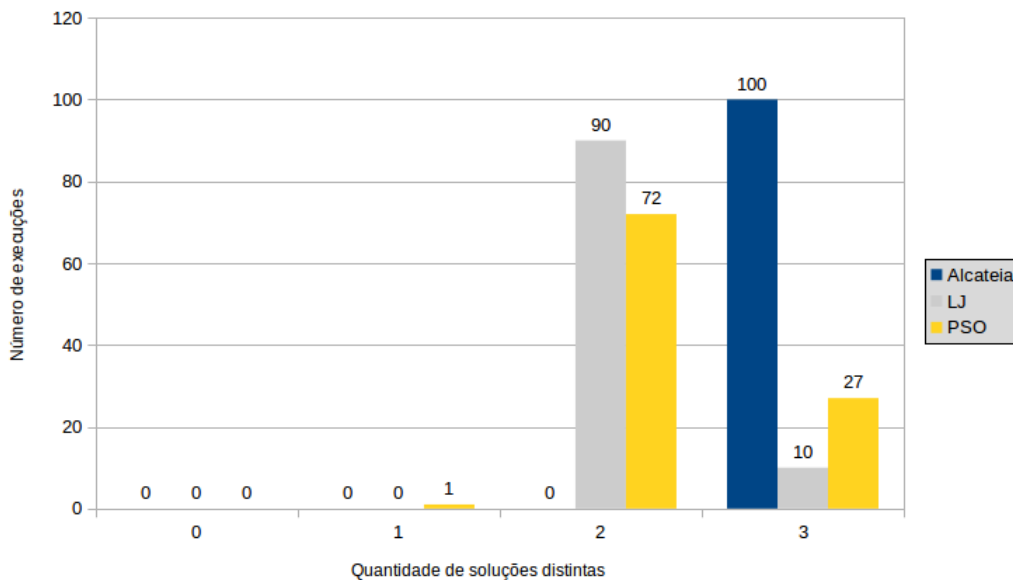


Figura 5.17: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,945$ e tolerância de 10^{-10} . Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.43: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,950$ e tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	–	–	–	100
1	–	–	–	–
2	99	26	76	–
3	1	64	23	–
4	–	8	1	–
5	–	2	–	–
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

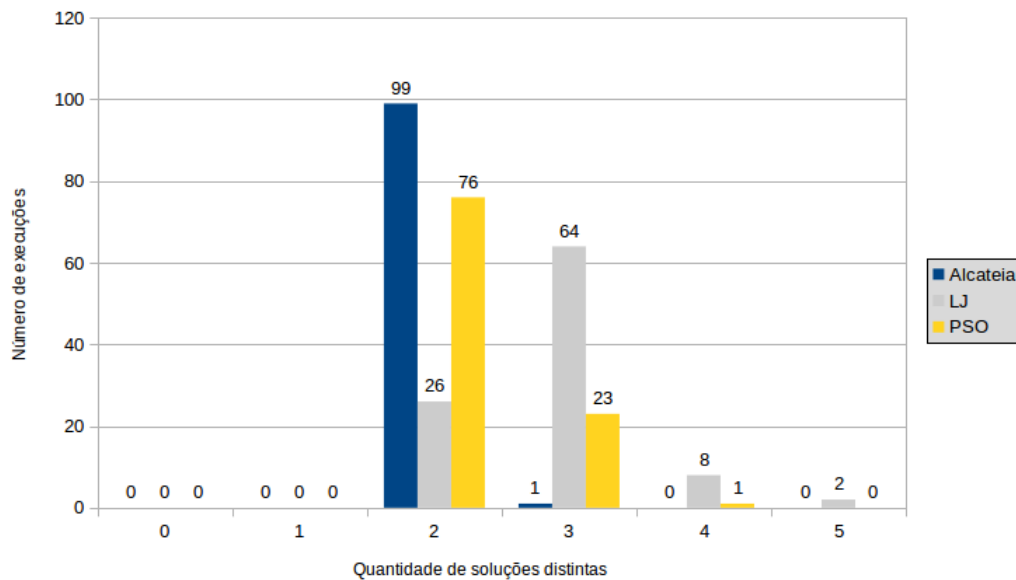


Figura 5.18: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,950$ e tolerância de 10^{-10} . Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.44: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,960$ e tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	–	–	–	96
1	–	–	–	4
2	–	–	–	–
3	–	–	–	–
4	26	–	9	–
5	72	64	85	–
6	2	33	6	–
7	–	3	–	–
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

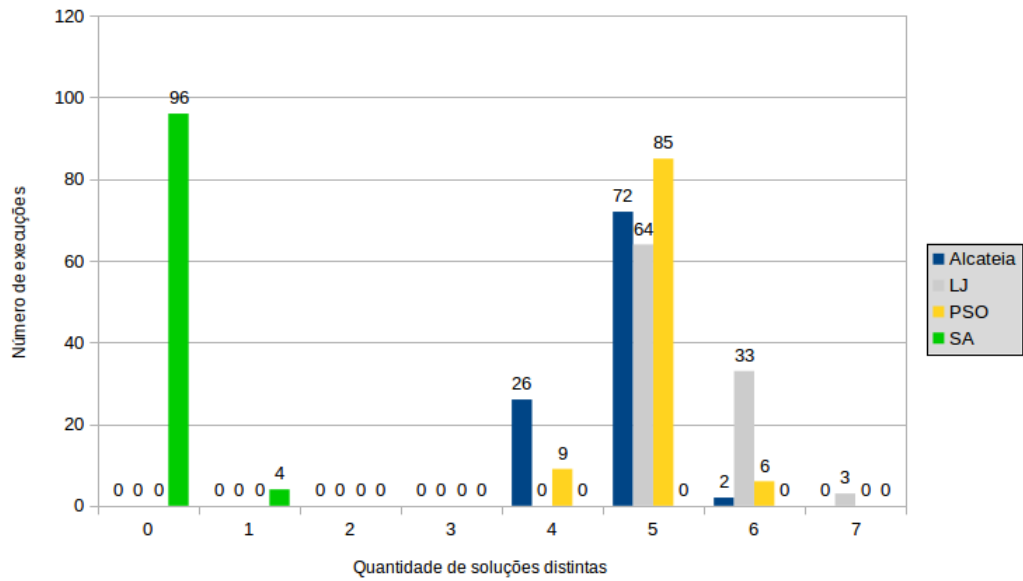


Figura 5.19: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCSTR, com $R = 0,960$ e tolerância de 10^{-10} . Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.45: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PDA, com tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	–	85	86	98
1	2	15	13	2
2	98	–	1	–
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.46: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PQLB, com tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	–	–	–	100
1	–	–	–	–
2	–	–	–	–
3	100	100	100	–
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

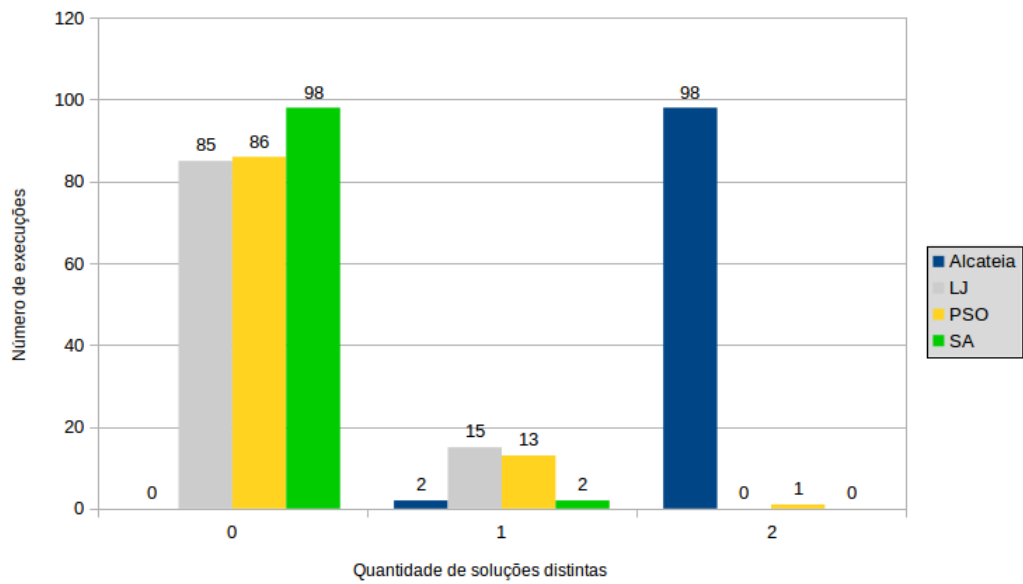


Figura 5.20: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PDA, com tolerância de 10^{-10} . Fonte: O autor, 2017.

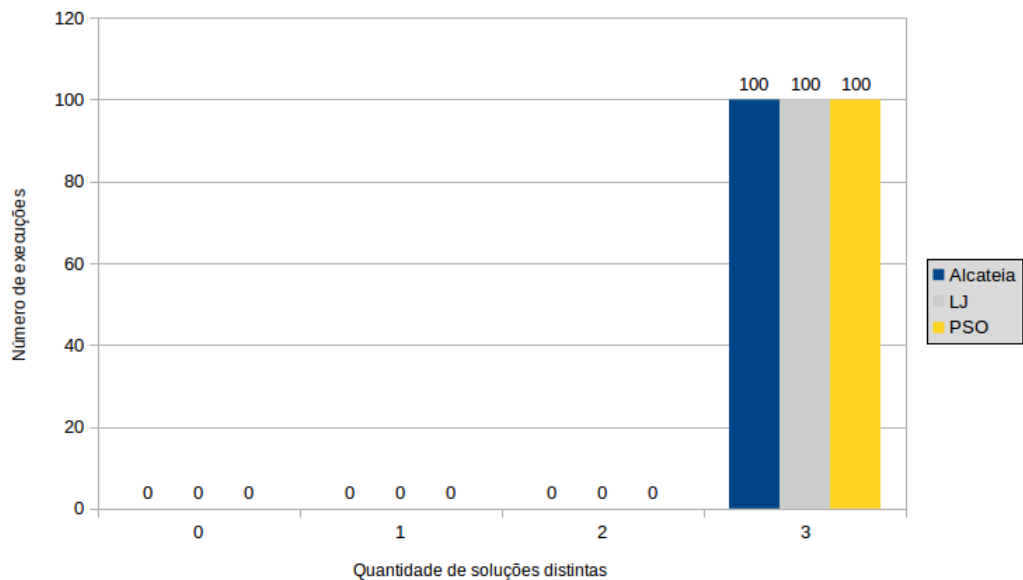


Figura 5.21: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PQLB, com tolerância de 10^{-10} . Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.47: Quantidade de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCR, com tolerância de 10^{-10} .

Tolerância = 10^{-10}				
Quantidade de soluções distintas	Alcateia	LJ	PSO	SA
0	–	–	–	100
1	–	–	–	–
2	–	–	–	–
3	–	–	–	–
4	–	–	–	–
5	–	–	–	–
6	–	–	–	–
7	–	–	–	–
8	–	–	–	–
9	–	–	–	–
10	–	–	–	–
11	–	–	–	–
12	–	–	–	–
13	–	–	–	–
14	–	–	–	–
15	4	2	3	–
16	96	98	97	–
Número de execuções	100	100	100	100

Fonte: O autor, 2017.

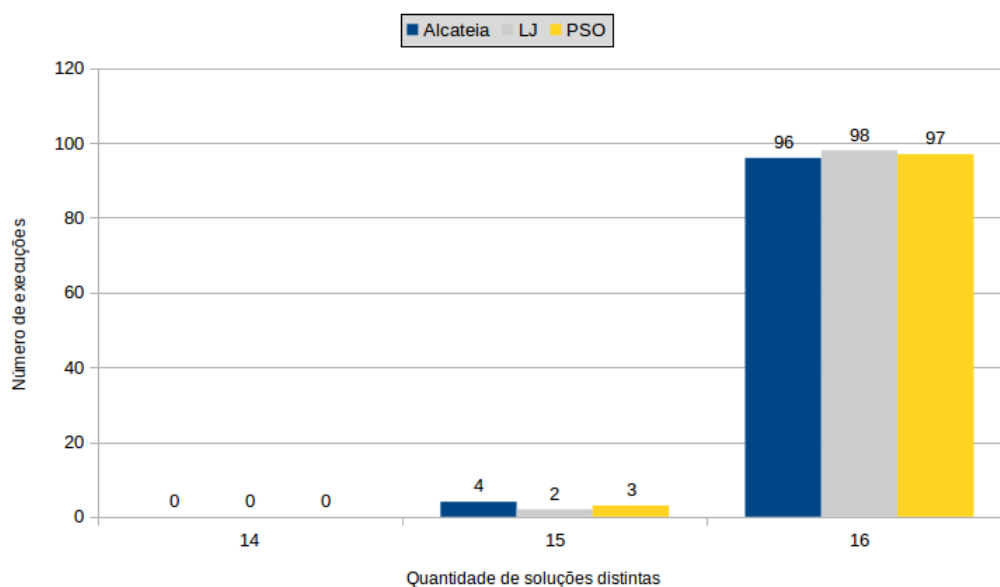


Figura 5.22: Comparações entre as quantidades de soluções distintas encontradas pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema PCR, com tolerância de 10^{-10} . Fonte: O autor, 2017.

5.2 Grupo 2

Nesta seção, apresenta-se os estudos numéricos referentes a resolução do problemas de otimização dos projetos do vaso de pressão (PVP) e da viga soldada (PVS) utilizando os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA. As formulações destes problemas já foram apresentadas no Capítulo 3 na Seção 3.2.

De forma análoga aos problemas testes do Grupo 1, os conjuntos de parâmetros utilizados nos métodos estocásticos foram os mesmos nos dois problemas. Esta escolha foi definida com o objetivo de analisar a eficiência dos métodos na resolução destes problemas de otimização. As Tabelas 5.48, 5.49, 5.50 e 5.51 apresentam os valores dos parâmetros utilizados neste trabalho.

Tabela 5.48: Parâmetros das simulações para o método Alcateia.

Nome	Constante	Valor
Número de lobos	N_{Lobos}	100
Coefficiente de contração	c	0,001
Laços internos	L_i	3000
Laços externos	L_e	100
Constante de independência	i_d	4

Tabela 5.49: Parâmetros das simulações para o método LJ.

Nome	Constante	Valor
Raio de busca	r	1
Laços internos	n_{in}	10000
Laços externos	n_{out}	–
Coefficiente de contração	ϵ	0,20

Tabela 5.50: Parâmetros das simulações para o método PSO.

Nome	Constante	Valor
População	ρ	100
Parâmetro da inércia inicial	$\omega_{inicial}$	0,9
Parâmetro da inércia final	ω_{final}	0,4
Parâmetro cognitivo	c_1	2
Parâmetro social	c_2	2

Tabela 5.51: Parâmetros das simulações para o método SA.

Nome	Constante	Valor
Temperatura inicial	T_0	900
Fator de resfriamento	α	0,80
Número de iterações antes do decaimento da temperatura	$IterMax$	1000

Em todos os métodos, utilizou-se como critério de parada o número máximo de iterações e o valor do funcional. No caso do valor funcional, se ele não apresentar melhora em execuções consecutivas, então pode-se encerrar o método. Além destes critérios, utiliza-se

como critério de parada no método Alcateia a maior distância entre os lobos da alcateia. Já no método LJ, utiliza-se o tamanho do raio de busca.

Os métodos foram analisados em relação a eficácia na obtenção da solução dos problemas de otimização, mas devido a sua natureza aleatória, foi necessária a utilização de uma amostragem maior de execução. Desta forma, também se utilizou $NS = 100$. Novamente, a escolha de uma amostragem maior possibilitou a utilização de sementes aleatórias diferentes em cada método estocástico, bem como valores iniciais distintos para os problemas de otimização.

5.2.1 O projeto do vaso de pressão (PVP)

Nesta subseção apresentam-se os resultados numéricos obtidos para a resolução do problema do vaso de pressão utilizando os métodos estocásticos Alcateia, LJ, PSO e SA.

De acordo com [49], quando são respeitadas todas as restrições deste problema, ele apresenta como valor ótimo $f(\mathbf{x}) = 6059,714$ para o seu funcional. E ainda, segundo [49], os autores Cagnina et al. (2008), Gandomi et al. (2013), He et al. (2004), Santos Coelho (2010) e Yang and Gandomi (2012) encontraram esse valor ótimo.

A Tabela 5.52 apresenta as comparações entre as quantidades de execuções necessárias para os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA encontrarem a solução do problema PVP, com todas as suas restrições. A Figura 5.23 mostra os gráficos de barras agrupadas dos dados apresentados na Tabela 5.52. Nota-se que o método Alcateia obteve o valor ótimo em 94 execuções, o método LJ obteve em 3 execuções, o método PSO em 70 execuções e o método SA não obteve o valor ótimo em nenhuma execução. Estes resultados mostram a eficácia dos métodos Alcateia e PSO na resolução deste problema de otimização.

Tabela 5.52: Quantidade de execuções em que os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA encontraram a solução do problema PVP, com todas as suas restrições.

Métodos	Quantidade de execuções
Alcateia	94
LJ	3
PSO	70
SA	0

Fonte: O autor, 2017.

No trabalho de [37], propõe-se a resolução do problema de PVP utilizando o método *Geometric Programming*, onde desconsidera-se as restrições 3.12 e 3.13. Nele, o autor compara o resultado encontrado pelo *Geometric Programming*, que foi 5807,390, com os resultados encontrados por outros autores, mencionando que este é o melhor resultado

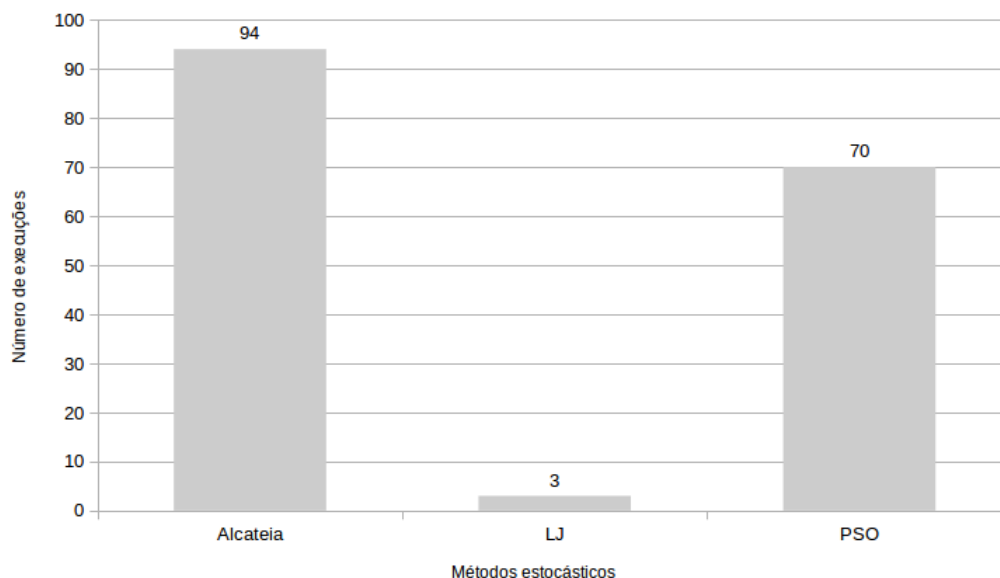


Figura 5.23: Ilustração comparativa entre as quantidades de execuções em que os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA encontraram a solução do problema PVP, com todas as suas restrições. Fonte: O autor, 2017.

encontrado até o momento da publicação do seu trabalho (veja a Tabela 5.53).

Tabela 5.53: Valores encontrados para o problema PVP, desconsiderando as restrições 3.12 e 3.13.

Autores	$f(\mathbf{x})$
M. Mahdavi	5849,7617
Deb and Gene	6410,3811
Kannan and Kramer	7198,0428
Coello	6069,3267
Nasseri	5807,390

Fonte: NASSERI, 2012 [37].

Neste trabalho, utiliza-se os métodos estocásticos Alcateia, LJ, PSO e SA para a resolução do problema PVP, desconsiderando as restrições 3.12 e 3.13. O melhor valor encontrado para o funcional pelo método Alcateia e PSO foi de $f(\mathbf{x}) = 5804,376$. A Tabela 5.54 apresenta a quantidade de vezes em que este resultado foi encontrado por cada método estocástico. Nota-se que o método Alcateia encontrou o valor em todas as execuções. O método PSO obteve o valor em 81 execuções. Já os métodos LJ e SA não obtiveram o valor em nenhuma execução. Estes resultados mostram a eficácia dos métodos Alcateia e PSO na resolução deste problema de otimização.

Tabela 5.54: Quantidade de execuções em que os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA encontraram a solução do problema PVP, desconsiderando as restrições 3.12 e 3.13.

Métodos	Quantidade de execuções
Alcateia	100
LJ	0
PSO	81
SA	0

Fonte: O autor, 2017.

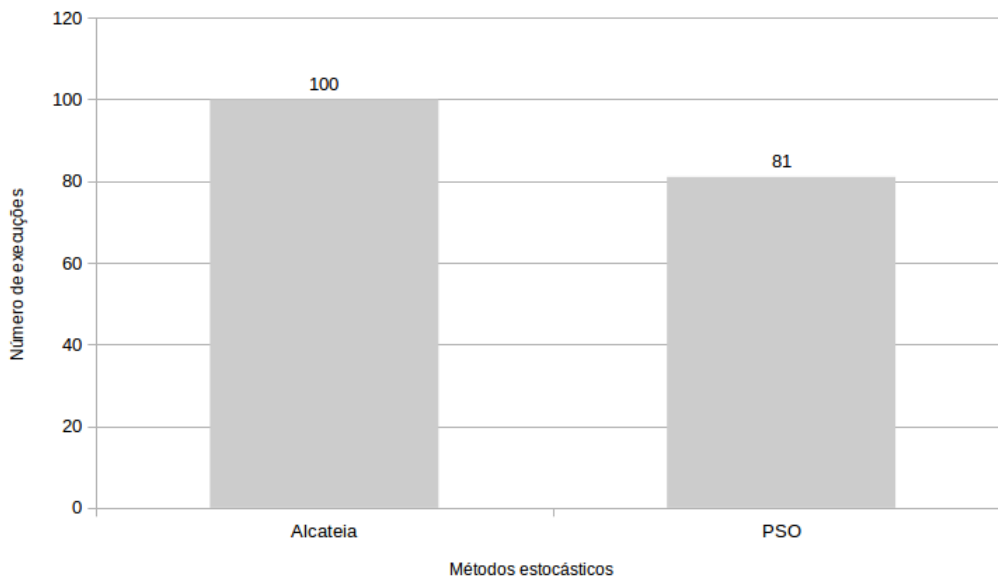


Figura 5.24: Ilustração comparativa entre as quantidades de execuções em que os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA encontraram a solução do problema PVP, desconsiderando as restrições 3.12 e 3.13. Fonte: O autor, 2017.

5.2.2 O projeto da viga soldada (PVS)

Nesta subseção apresenta-se os resultados obtidos pelos métodos Alcateia, LJ, PSO e SA para o problema da viga soldada. A Tabela 5.55 apresenta os resultados encontrados em diversos trabalhos para o problema PVS.

Com base no valor de referência da função objetivo ($f(\mathbf{x}) = 1,724$), nota-se que o melhor valor encontrado foi de 1,7248508, por [35]. A Tabela 5.56 apresenta os resultados encontrados pelos métodos estocásticos para o problema PVS. Ilustra-se graficamente os resultados da Tabela 5.56 na Figura 5.25. Nota-se que o método Alcateia obteve o melhor desempenho, onde o valor foi encontrado em todas as 100 execuções. Os métodos LJ e PSO obtiveram esse valor para função objetivo em 2 e 41 execuções, respectivamente. Enquanto que o método SA não obteve esse valor em nenhuma execução. Mais uma vez, os resultados mostram uma excelente eficácia do método Alcateia para a resolução deste

problema de otimização.

Tabela 5.55: Valores encontrados para o problema PVS.

Autores	$f(x)$
Moedinger [35]	1,7248508
Bernardino [4]	2,38144
Carvalho [10]	2,38110

Fonte: O autor, 2017.

Tabela 5.56: Quantidade de execuções em que os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA encontraram a solução do problema PVS.

Métodos	Quantidade de execuções
Alcateia	100
LJ	2
PSO	41
SA	0

Fonte: O autor, 2017.

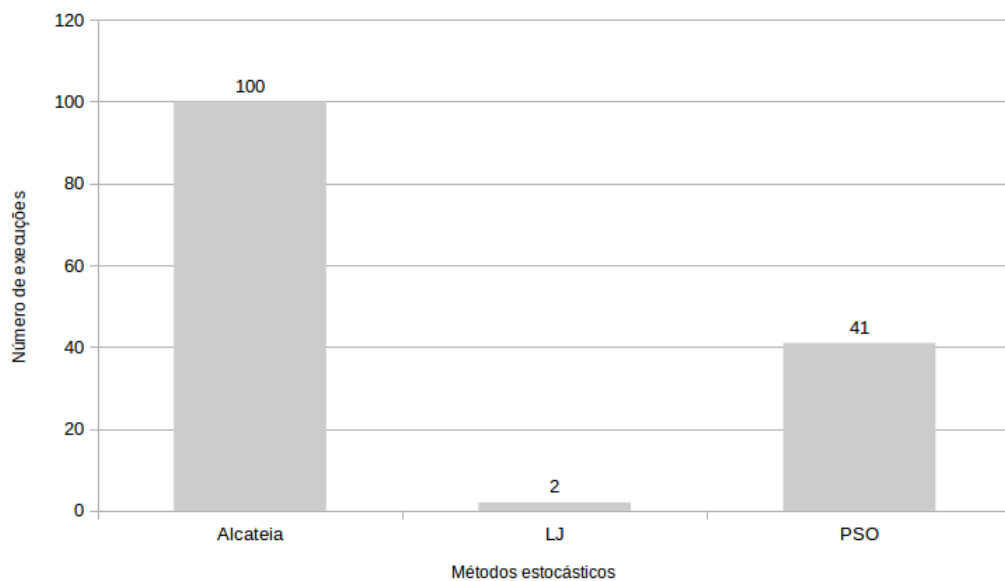


Figura 5.25: Ilustração comparativa entre as quantidades de execuções em que os métodos Alcateia, LJ, PSO e SA encontraram a solução do problema PVS. Fonte: O autor, 2017.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

No presente trabalho realizou-se um estudo numérico comparativo entre alguns métodos heurísticos (ou estocásticos) utilizados na resolução de problemas de otimização não lineares. Os métodos estocásticos escolhidos foram: Alcateia, Luus-Jaakola (LJ), *Particle Swarm Optimization* (PSO) e *Simulated Annealing* (SA). Eles foram aplicados em problemas testes para a obtenção das suas soluções e os resultados foram analisados em relação ao erro de aproximação e na eficácia da localização das soluções distintas dos problemas.

Para a realização destes estudos numéricos, iniciou-se este trabalho explicando conceitos matemáticos básicos que posteriormente foram empregados na definição do problema geral de otimização e na modelagem de sistemas de equações não lineares em problemas de otimização não lineares. Também definiu-se alguns casos particulares do problema geral de otimização: os problemas de minimização não linear sem restrições e com restrições de desigualdade.

Para a obtenção dos resultados, os métodos estocásticos foram aplicados na resolução de dois grupos distintos de problemas testes de otimização. O primeiro grupo foi composto por sistemas de equações algébricas não lineares que após uma modelagem são transformados em problemas de minimização não linear sem restrições. Os SNLs abordados foram: os problemas trigonométrico exponencial (PTE), quase-linear de Brown (PQLB), cinemática robótica (PCR), estados estacionários CSTR não-isotérmicos (PCSTR) e direção automotiva (PDA). Eles foram escolhidos por apresentarem várias soluções distintas nos espaços de busca considerados e por serem usados na literatura para avaliação de métodos de otimização de SNLs. O segundo grupo foi composto por problemas de minimização não linear com restrições de desigualdade. Os problemas selecionados para compor esse grupo foram: os projetos do vaso de pressão (PVP) e da viga soldada (PVS). Os resultados obtidos foram apresentados em tabelas e gráficos visando facilitar a comparação entre

os métodos estocásticos abordados. É importante ressaltar que neste trabalho preferiu-se não analisar os métodos estocásticos pelo número de avaliações da função objetivo, devido as suas diferentes características, optando-se, assim, por se concentrar na localização das soluções dos problemas. Todas estas implementações foram realizadas no software matemático MatLab. A seguir apresenta-se as principais conclusões obtidas.

Os resultados numéricos mostram que os tempos computacionais apresentados pelo método PSO foram os melhores em quase todos os SNLs utilizados. Em relação a quantidade de soluções distintas localizadas, os métodos Alcateia e PSO exibiram os melhores resultados em quase todos os SNLs. Porém, cabe destaca aqui, que a excelente performance do PSO não se reiterou na resolução dos problemas de minimização, no qual o método apresentou algumas dificuldades. Já o método Alcateia ratificou o seu desempenho localizando as soluções dos problemas de minimização em todas as suas execuções. O método LJ conseguiu encontrar as soluções distintas em quase todos os SNLs propostos, a única exceção foi para o problema de estados estacionários CSTR não-isotérmicos (PCSTR) com o parâmetro $R = 0,935$, onde o método não localizou nenhuma vez a solução. Porém, nos problemas de minimização, ele não apresentou resultados significativos. Enquanto que o método SA teve dificuldade para localizar as soluções dos problemas testes referentes aos SNLs, mediante as tolerâncias propostas. E, também, não localizou nenhuma solução para os problemas de minimização.

Portanto, com base nos testes numéricos efetuados e com as configurações dos parâmetros dos métodos usados neste trabalho, percebe-se que o método Alcateia apresentou um melhor desempenho computacional, localizando a maioria das soluções distintas nos SNLs e alcançado as soluções nos problemas de minimização com restrições de desigualdade.

No decorrer da realização deste trabalho, observou-se alguns pontos que podem ser objetos de estudos para trabalhos futuros, tais como:

- Análise numérica de outros conjuntos de parâmetros para os métodos LJ e SA;
- Hibridizações dos métodos LJ e SA;
- A comparação dos métodos Alcateia e PSO em outras aplicações práticas de engenharia e ciências exatas;
- Implementação dos métodos Alcateia e PSO para localizar todas as soluções distintas de forma simultânea.

Referências

- [1] AGUIAR, A. A. *Análise semi-local do método de Gauss-Newton sob uma condição majorante*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.
- [2] ANTON, H., BIVENS, I., DAVIS, S. *Cálculo: Volume II*, 8 ed. Bookman, 2007.
- [3] ANTON, H., RORRES, C. *Álgebra linear com aplicações*, vol. 8. Bookman, 2001.
- [4] BERNARDINO, H. S. *Hibridização de algoritmos genéticos e sistemas imunológicos artificiais para problemas de otimização com restrições em engenharia*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2008.
- [5] BIAJOLI, F. L., MINE, O. M., CHAVES, A. A., SOUZA, M. J. F. Escala de jogos de torneios esportivos: uma abordagem via simulated annealing. *XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (2003), 1295–1306.
- [6] BURIOL, L., FRANÇA, P. M., RESENDE, M. G., RIBEIRO, C. C. Otimizando o roteamento do tráfego na internet. *XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (2003), 1722–1732.
- [7] CAMPOS, V. B. G., DA SILVA, R. O., SONCIM, S. P. Algoritmo de fluxo a custo mínimo no processo de tomada de decisão no transporte carga. *XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (2003), 869–880.
- [8] CARMO, E. D., GOMES, H. D. S., NETO, J. F. B. Roteamento de veículos no transporte rodoviário de cargas: uma aplicação para a distribuição de jornais. *XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional—SBPO 4*.
- [9] CARRILLO, O. J. B. *Algoritmo híbrido para avaliação da integridade estrutural: uma abordagem heurística*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2007.
- [10] CARVALHO, É. C., LEMONGE, A. C., BERNARDINO, H. S., HALLAK, P. H. Um método de penalização adaptativa (apm) para problemas de otimização com restrições aplicado a problemas de engenharia. *XI Simpósio de Mecânica Computacional / II Encontro Mineiro de Modelagem Computacional* (2014).
- [11] CORRÊA, R. A. P., JUNIOR, C. A. C. Uma aplicação prática do método alcatéia em um problema de identificação de danos em uma viga. Em *"Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics"* (2017).
- [12] CORRÊA, R. A. P. *Identificação de danos em estruturas bi-dimensionais via matriz de flexibilidade baseada em um modelo de dano contínuo*. 129 f. Tese de Doutorado, Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2013.

- [13] CUNHA, M. C. C. *Métodos numéricos*. Editora da UNICAMP, 2000.
- [14] DE MARCHI, M. M., PINTO, M. J., DOS SANTOS, C. L. R., MEDEIROS, F. L. L. Métodos de otimização aplicados à distribuição de recursos. *Apresentado no XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Natal, RN, de 4* (2003).
- [15] FERREIRA, F. D. S. *Uma abordagem numérico-experimental para a identificação de dano estrutural utilizando o método Simulated Annealing*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.
- [16] FLOUDAS, C. A., PARDALOS, P. M., ADJIMAN, C., ESPOSITO, W. R., GÜMÜS, Z. H., HARDING, S. T., KLEPEIS, J. L., MEYER, C. A., SCHWEIGER, C. A. *Handbook of test problems in local and global optimization*, vol. 33. Springer Science & Business Media, 2013.
- [17] GALEANO, J. G. D. *Aspectos numéricos do problema de cálculo de fenômenos de vaporização retrógrada dupla*. Dissertação de Mestrado, Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2007.
- [18] GONÇALVES, M. B., FLEMMING, D. M. *Cálculo B: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície*, 2 ed. Pearson Prentice Hall, 2007.
- [19] GONZAGA, C. C. *Um curso de programação não linear*. UFSC, 2004.
- [20] GROSAN, C., ABRAHAM, A. A new approach for solving nonlinear equations systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans* 38, 3 (2008), 698–714.
- [21] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo, vol 2*, 5 ed. LTC, 2001.
- [22] GUO, C.-X., HU, J.-S., YE, B., CAO, Y.-J. Swarm intelligence for mixed-variable design optimization. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A* 5, 7 (2004), 851–860.
- [23] HIRSCH, M. J. *GRASP-based heuristics for continuous global optimization problems*. Tese de Doutorado, University of Florida, 2006.
- [24] IZMAILOV, A., SOLODOV, M. *Otimização, volume 1: condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade*. IMPA, 2005.
- [25] IZMAILOV, A., SOLODOV, M. *Otimização, volume 2: métodos computacionais*. IMPA, 2007.
- [26] JUNIOR, C. A. C., CORRÊA, R. A. P. Alcateia - um novo algoritmo para otimização. Em *"Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics"* (2016).
- [27] KAVISKI, E., PRADO, A. L., CUMIN, L. M. G. Solução de sistemas de equações não-lineares pelo método do recozimento simulado. *XXXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional* (2008), 370–375.

- [28] KOZAKEVICH, D. N. *Sistemas não-lineares da física e da engenharia. 94 f.* Tese de Doutorado, Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.
- [29] LARA HERRERA, C. N. *Algoritmo de tomografia por impedância elétrica baseado em Simulated Annealing.* Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.
- [30] LIMA, E. L. *Análise real, volume 2: funções de n variáveis.* Impa, 2013.
- [31] LIMA JR, C. A. S., COSTA, J. S., SACCO, W. F. Comparação entre os algoritmos luus-jaakola e particle swarm optimization (pso) em dois problemas de otimização global. *XXXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional* (2009), 873–879.
- [32] MARANAS, C. D., FLOUDAS, C. A. Finding all solutions of nonlinearly constrained systems of equations. *Journal of Global Optimization* 7, 2 (1995), 143–182.
- [33] MARTINEZ, J. M., SANTOS, S. A. Métodos computacionais de otimização. *Colóquio Brasileiro de Matemática, Apostilas 20* (1995).
- [34] MARTINS, S. V. Melhor horário para o sistema cefet campos: Um aplicativo para automatizar a elaboração de horários das aulas. *Vértices* 6, 1 (2010), 9–26.
- [35] MOEDINGER, L. H. *Algoritmos Evolutivos e Inteligência Coletiva Aplicados a problemas de otimização não-linear com restrições: Fundamentos e Estudo Comparativo.* Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2005.
- [36] MONTEIRO, A. J. T. Otimização não linear de mínimos quadrados. Dissertação de Mestrado, 2013.
- [37] NASSERI, S., ALIZADEH, Z., TALESHEAN, F. Optimized solution of pressure vessel design using geometric programming. *The Journal of Mathematics and Computer Science* 4, 3 (2012), 344–349.
- [38] POLDI, K. C., ARENALES, M. N. O problema de corte de estoque unidimensional inteiro com restrições de estoque. *XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (2003), 1498–1509.
- [39] PRADO, J. R. D., SARAMAGO, S. F. P. Otimização por colônia de partículas. *FAMAT em Revista* (2005), 87.
- [40] RUGGIERO, M. A. G., LOPES, V. L. R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.* Makron Books do Brasil, 1997.
- [41] SAMED, M. M. A., RAVAGNANI, M. A. D. S. S., GOMES, R., BENTO, F. G., BAPTISTA, E. C. Um algoritmo genético híbrido para resolver o problema do despacho econômico de energia elétrica. *XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (2003), 2258–2265.
- [42] SARAMAGO, S. F. P. Métodos de otimização randômica: algoritmos genéticos e simulated annealing. *Notas em Matemática Aplicada* 6 (2003).

-
- [43] SERAPIÃO, A. B. S. Fundamentos de otimização por inteligência de enxames: uma visão geral. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática* 20, 3 (2009), 271–304.
- [44] SILVA, M. R. *Um novo método híbrido aplicado à solução de sistemas não lineares com raízes múltiplas*. Tese de Doutorado, Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2009.
- [45] SOUZA, E. A. *Métodos iterativos para problemas não lineares*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia Industrial Metalúrgica de Volta Redonda, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2008.
- [46] SOUZA, J. S. *Análise global da estabilidade termodinâmica de misturas: um estudo com o método do conjunto gerado*. 141 f. Tese de Doutorado, Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2010.
- [47] TEIXEIRA, O. N., LOBATO, W., YANAGUIBASHI, H. S., CAVALCANTE, R. V., SILVA, D., OLIVEIRA, R. Algoritmo genético com interação social na resolução de problemas de otimização global com restrições. *Editora OMNIPAX* (2011), 197–223.
- [48] TELLES, W. R., RODRIGUES, P. P. G. W., SILVA NETO, A. J. D. Automatic calibration of a simulator applied to a mountain river employing experimental data of rainfall and level–case study: D’antas stream, rj. *RBRH* 21, 1 (2016), 143–151.
- [49] YANG, X.-S., HUYCK, C., KARAMANOGLU, M., KHAN, N. True global optimality of the pressure vessel design problem: a benchmark for bio-inspired optimisation algorithms. *International Journal of Bio-Inspired Computation* 5, 6 (2013), 329–335.
- [50] ZHANG, Y., XIONG, X., ZHANG, Q. An improved self-adaptive pso algorithm with detection function for multimodal function optimization problems. *Mathematical Problems in Engineering* 2013 (2013).
- [51] ZÖRNIG, P. Introdução à programação não linear. *Brasília: UNB* (2011).