

**Universidade Federal Fluminense**

**RAFAEL MARTINS DE OLIVEIRA E SILVA**

**Simulação de Escoamentos via Método TVD**

**VOLTA REDONDA**

**2018**

RAFAEL MARTINS DE OLIVEIRA E SILVA

## Simulação de Escoamentos via Método TVD

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional

Orientador:

Prof. Diomar Cesar Lobão, Ph.D.

Coorientadores:

Prof. Panters Rodríguez Bermúdez, D.Sc.

Prof. Gustavo Benitez Alvarez, D.Sc.

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

VOLTA REDONDA

2018

Ficha catalográfica automática - SDC/BEM

s de Oliveira e Silva, Rafael Martins  
Simulação de Escoamentos via Método TVD / Rafael Martins  
de Oliveira e Silva ; Diomar Cesar Lobão, orientador ;  
Panthers Rodríguez Bermudez, coorientador. Volta Redonda, 2018.  
270 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,  
Volta Redonda, 2018.

1. Dinâmica dos Fluidos Computacional. 2. Equações de  
Euler. 3. Coordenadas Generalizadas. 4. Método da Variação  
Total Decrescente (TVD). 5. Produção intelectual. I. Título  
II. Lobão, Diomar Cesar, orientador. III. Bermudez, Panthers  
Rodríguez, coorientador. IV. Universidade Federal Fluminense.  
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta  
Redonda.

CDD -

# Simulação de Escoamentos via Método TVD

Rafael Martins de Oliveira e Silva

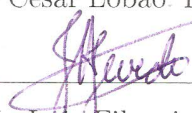
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem computacional.

Aprovada por:



---

Prof. Diomar Cesar Lobão. Ph.D. / MCCT-UFF(Presidente)



---

Prof. João Luiz Filgueiras de Azevedo, Ph.D. / ITA



---

Prof. Valmir Pereira. D Sc. / CNEN

Volta Redonda, 24 de Abril de 2018.

*Dedicatória. Ao meu Pai Nylton de Oliveira e Silva, a minha tia Nicéa de Oliveira e Silva e ao meu tio Antônio Carlos de Moraes, (In Memoriam).*

# Agradecimentos

À Deus, pela minha vida, pela minha família e por permitir que eu chegasse até aqui.

À Nossa Senhora da Conceição Aparecida, pelas muitas graças recebidas ao longo de minha vida.

À minha Mãe Denise e ao meu Pai Nylton (*In Memoriam*), pelo amor, carinho, dedicação e apoio em todas as etapas da minha vida.

À minha esposa Larissa, pelo amor, pela compreensão com as minhas ausências durante o curso, por sempre me apoiar e incentivar e por estar ao meu lado em todos os momentos.

Ao Professor Diomar Cesar Lobão, por ter sido muito mais do que um orientador durante todo o tempo em que trabalhamos juntos. Sua amizade, orientação, apoio e disponibilidade foram fundamentais para a execução deste trabalho e me ajudaram a crescer como pessoa e profissional.

Aos Professores Panters Rodriguez Bermudez e Gustavo Benitez Alvarez pelo orientação, apoio e disponibilidade ao longo do trabalho.

À todos os colegas, professores e funcionários do programa de mestrado em modelagem computacional em ciência e tecnologia com os quais tive o privilégio de conviver.

À todos os meus familiares, em especial ao meu tio Nivaldo de Oliveira e Silva, pelo seu apoio aos meus estudos durante a minha vida escolar.

À Universidade Federal Fluminense, em especial ao programa de mestrado em ciência e tecnologia.

Ao Povo Brasileiro.

"Conheço as tuas obras; eis que diante de ti pus uma porta aberta, e ninguém a pode fechar; tendo pouca força, guardaste a minha palavra, e não negaste o meu nome." Ap 3:8

"Como colaboradores de Cristo, nós vos exortamos a não receberdes em vão a graça de Deus, pois ele diz: "No momento favorável, eu te ouvi e no dia da salvação, eu te socorri". É agora o momento favorável, é agora o dia da salvação." 2 Coríntios 6:1,2

# Resumo

As equações de Navier-Stokes foram as primeiras descrições matemáticas do comportamento dos fluidos a serem formalmente estabelecidas por princípios físicos de conservação. Posteriormente, foram estudadas situações onde se considerava a viscosidade do fluido nula, surgindo assim as chamadas equações de Euler.

Como soluções exatas no contínuo para estas equações são possíveis somente com o uso de hipóteses simplificadoras para casos especiais, faz-se necessário que sejam utilizados métodos numéricos para que o modelo matemático possa ser resolvido em domínio discreto de forma a produzir resultados coerentes com o estabelecido pela física do problema estudado.

Devido aos efeitos da compressibilidade dos fluidos, podem existir situações em que ocorrerá a formação de ondas de choque, o que faz com que nem todos os métodos numéricos sejam adequados para tratar estas equações discretas.

Desta maneira, o objetivo principal deste trabalho é resolver numericamente as equações de Euler em geometrias quase 1D e 2D, utilizando diferenças finitas para discretização em coordenadas generalizadas e o método numérico discreto TVD (Total Variation Diminishing) para garantir uma resolução satisfatória na captura e posicionamento da onda de choque quando essa se faz presente no fenômeno estudado.

As soluções serão validadas com relação à casos clássicos disponíveis na literatura que serão apresentados no decorrer deste trabalho.

# Abstract

The Navier-Stokes equations were the first mathematical descriptions of fluid behavior to be formally established by the physical principles of conservation. Subsequently, it was studied situations where the fluid viscosity were considered null, resulting in the so-called Euler equations.

As exact solutions in the continuum for these equations are possible only with the use of simplifying hypotheses for special cases, it is necessary the use of numerical methods so that the mathematical model can be solved in the discrete domain in order to produce results consistent with the established by the physics of the studied problem.

Due to the effects of fluid compressibility, there may be situations where shock waves will form, which means that not all numerical methods are adequate to treat these discrete equations.

In this way, the main objective of this work is to numerically solve the Euler equations in 1D and 2D geometries, using the generalized coordinate and finite difference discretization and the discrete numerical method TVD (Total Variation Diminishing) to guarantee a satisfactory resolution in the capture and positioning of the shock wave when this is present in the phenomenon studied.

The solution will be validated according to the classic cases available in the literature that will be presented in the course of this work.

# Palavras-chave

1. Dinâmica dos Fluidos Computacional
2. Escoamento Insentrópico
3. Choque Normal
4. Equações de Euler
5. Discretização
6. Variação Total Decrescente
7. Método TVD
8. Coordenadas generalizadas
9. Canal
10. Cilindro
11. Aerofólio

# Glossário

|        |                                                                 |
|--------|-----------------------------------------------------------------|
| CFD    | : <i>Computational Fluid Dynamics</i>                           |
| CFL    | : <i>Número de Courant–Friedrichs–Lewy</i>                      |
| EDO    | : <i>Equação Diferencial Ordinária</i>                          |
| EDP    | : <i>Equação Diferencial Parcial</i>                            |
| FTCS   | : <i>Forward Time Centered Space</i>                            |
| IBM    | : <i>International Business Machines</i>                        |
| LCI    | : <i>Linearized Conservative Implicit</i>                       |
| LNI    | : <i>Linearized Nonconservative Implicit</i>                    |
| MDF    | : <i>Método das Diferenças Finitas</i>                          |
| MEF    | : <i>Método dos Elementos Finitos</i>                           |
| MUSCL  | : <i>Monotone Upstream-centred Scheme for Conservation Laws</i> |
| MVF    | : <i>Método dos Volumes Finitos</i>                             |
| NASA   | : <i>National Aeronautics and Space Administration</i>          |
| PVI    | : <i>Problema de Valor Inicial</i>                              |
| TV     | : <i>Total Variation</i>                                        |
| TVD    | : <i>Total Variation Diminishing</i>                            |
| UNIVAC | : <i>UNIVersal Automatic Computer</i>                           |

# Sumário

|                                                   |             |
|---------------------------------------------------|-------------|
| <b>Lista de Figuras</b>                           | <b>xvi</b>  |
| <b>Lista de Tabelas</b>                           | <b>xxi</b>  |
| <b>Lista de Símbolos</b>                          | <b>xxii</b> |
| <b>1 Introdução</b>                               | <b>26</b>   |
| 1.1 Referências Históricas . . . . .              | 26          |
| 1.2 Técnicas de Solução . . . . .                 | 29          |
| 1.3 Justificativa . . . . .                       | 30          |
| 1.4 Objetivo do Trabalho . . . . .                | 31          |
| 1.5 Estrutura da Dissertação . . . . .            | 31          |
| <b>2 Fundamentação Teórica</b>                    | <b>33</b>   |
| 2.1 Leis de Conservação Hiperbólicas . . . . .    | 33          |
| 2.1.1 Formulação Integral e Diferencial . . . . . | 34          |
| 2.1.1.1 Formulação Integral . . . . .             | 34          |
| 2.1.1.2 Formulação Diferencial . . . . .          | 36          |
| 2.2 Leis de Conservação Escalares . . . . .       | 36          |
| 2.2.1 Equação de Advecção Linear . . . . .        | 36          |
| 2.2.2 Equação de Burgers . . . . .                | 38          |
| 2.2.2.1 Formação da Descontinuidade . . . . .     | 38          |
| 2.3 Problema de Riemann . . . . .                 | 40          |

|          |                                                                                           |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.4      | Solução Fraca . . . . .                                                                   | 41        |
| 2.5      | Velocidade de Propagação da Onda . . . . .                                                | 42        |
| 2.6      | Condição de Entropia . . . . .                                                            | 43        |
| 2.7      | Introdução ao Método da Variação Total Decrescente . . . . .                              | 43        |
| 2.8      | Equações de Navier-Stokes e de Euler . . . . .                                            | 44        |
| 2.9      | Forma Adimensionalizada das Equações . . . . .                                            | 48        |
| 2.10     | Número de Mach . . . . .                                                                  | 49        |
| 2.11     | Escoamento Isentrópico Estacionário em Duto de Área Variável . . . . .                    | 50        |
| 2.12     | Relações do Escoamento Isentrópico Estacionário . . . . .                                 | 51        |
| 2.13     | Choque Normal Estacionário . . . . .                                                      | 51        |
| 2.14     | Coefficiente de Pressão . . . . .                                                         | 53        |
| <b>3</b> | <b>Bocal Quase-Unidimensional</b>                                                         | <b>54</b> |
| 3.1      | Algoritmos . . . . .                                                                      | 54        |
| 3.1.1    | Escoamento sem Onda de Choque . . . . .                                                   | 54        |
| 3.1.2    | Escoamento com Onda de Choque . . . . .                                                   | 55        |
| 3.2      | Bocal Divergente . . . . .                                                                | 57        |
| 3.2.1    | Caso 1: Bocal Divergente: Entrada e Saída Supersônica . . . . .                           | 57        |
| 3.2.2    | Caso 2: Bocal Divergente - Entrada Supersônica e Saída Subsônica                          | 59        |
| 3.3      | Bocal Convergente-Divergente Simétrico . . . . .                                          | 61        |
| 3.3.1    | Caso 3: Bocal Convergente/Divergente Simétrico - Entrada e Saída<br>Supersônica . . . . . | 61        |
| 3.3.2    | Caso 4: Bocal Convergente/Divergente Simétrico - Entrada e saída<br>subsônica . . . . .   | 63        |
| 3.4      | Bocal Convergente/Divergente Assimétrico . . . . .                                        | 65        |
| 3.4.1    | Caso 5: Bocal Convergente/Divergente Assimétrico - Entrada e<br>saída subsônica . . . . . | 65        |

|          |                                                                                                    |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4</b> | <b>Métodos Numéricos para Leis de Conservação</b>                                                  | <b>68</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .                                                                               | 68        |
| 4.2      | Estabilidade Numérica . . . . .                                                                    | 68        |
| 4.2.1    | CrITÉrio de Estabilidade de von Neumann . . . . .                                                  | 69        |
| 4.2.1.1  | Exemplo 1: Equação da Advecção Linear - Discretização<br>FTCS . . . . .                            | 69        |
| 4.2.1.2  | Exemplo 2: Equação da Advecção Linear - Discretização<br>FTCS Estabilizada . . . . .               | 71        |
| 4.3      | Viscosidade Artificial - Dissipação e Dispersão Numérica . . . . .                                 | 72        |
| 4.4      | Leis de Conservação não Lineares . . . . .                                                         | 74        |
| 4.4.1    | Abordagem MUSCL . . . . .                                                                          | 76        |
| 4.4.2    | Esquemas de Primeira Ordem de Lax-Friedrichs . . . . .                                             | 78        |
| 4.4.3    | Esquemas de Segunda Ordem de Lax-Wendroff . . . . .                                                | 79        |
| 4.5      | Esquemas TVD . . . . .                                                                             | 80        |
| 4.5.1    | Limitadores de Fluxo . . . . .                                                                     | 82        |
| 4.5.2    | Esquema TVD Implícito e sua Formulação de Segunda Ordem . . .                                      | 85        |
| 4.5.3    | Linearização do Esquema Implícito . . . . .                                                        | 86        |
| 4.5.3.1  | Forma Linearizada Implícita Não Conservativa - LNI . . .                                           | 87        |
| 4.5.3.2  | Forma Linearizada Implícita Conservativa - LCI . . . . .                                           | 87        |
| 4.6      | ResÍduo Numérico . . . . .                                                                         | 89        |
| <b>5</b> | <b>Esquema TVD para Sistema de Leis de Conservação Hiperbólicas Quase 1D</b>                       | <b>91</b> |
| 5.1      | Equação de Euler na Forma Quase 1D . . . . .                                                       | 91        |
| 5.2      | Generalização do Esquema TVD para um Sistema de Leis de Conservação<br>Hiperbólicas . . . . .      | 92        |
| 5.2.1    | Linearização do Esquema Implícito para um Sistema de Leis de<br>Conservação Hiperbólicas . . . . . | 96        |
| 5.3      | Condições de Contorno . . . . .                                                                    | 98        |

|          |                                                                                        |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.4      | Implementação Numérica . . . . .                                                       | 100        |
| 5.4.1    | Algoritmo - Método TVD Quase 1D . . . . .                                              | 100        |
| 5.4.2    | Estrutura de Dados e Implementação do Caso Quase 1D . . . . .                          | 102        |
| <b>6</b> | <b>Resultados - Escoamento Quase 1D</b>                                                | <b>106</b> |
| 6.1      | Caso 1: Bocal Divergente - Entrada e Saída Supersônica . . . . .                       | 106        |
| 6.2      | Caso 2: Bocal Divergente - Entrada Supersônica e Saída Subsônica . . . . .             | 111        |
| 6.3      | Caso 3: Bocal Convergente/Divergente Simétrico - Entrada e Saída Supersônica . . . . . | 116        |
| 6.4      | Caso 4: Bocal Convergente/Divergente Simétrico - Entrada e Saída Subsônica             | 121        |
| 6.5      | Caso 5: Bocal Convergente/Divergente Assimétrico - Entrada e Saída Subsônica . . . . . | 126        |
| 6.6      | Desempenho Computacional - Casos Quase 1D . . . . .                                    | 131        |
| <b>7</b> | <b>Esquema TVD para Sistema de Leis de Conservação Hiperbólicas 2D</b>                 | <b>133</b> |
| 7.1      | Equações de Euler Bidimensional em Coordenadas Generalizadas . . . . .                 | 133        |
| 7.2      | Abordagem MUSCL . . . . .                                                              | 136        |
| 7.2.1    | Método da Direção Alternada Implícita . . . . .                                        | 138        |
| 7.2.2    | Fatoração LU . . . . .                                                                 | 139        |
| 7.3      | Condições de Contorno . . . . .                                                        | 150        |
| 7.4      | Implementação Numérica - Caso Bidimensional . . . . .                                  | 153        |
| 7.4.1    | Algoritmo - Método TVD - Fatoração LU . . . . .                                        | 153        |
| 7.4.2    | Estrutura de Dados e Implementação do Caso 2D . . . . .                                | 156        |
| <b>8</b> | <b>Geração de Malhas</b>                                                               | <b>159</b> |
| 8.1      | Introdução . . . . .                                                                   | 159        |
| 8.2      | Transformação de Coordenadas . . . . .                                                 | 159        |
| 8.2.1    | Geometria Simplesmente Conexa . . . . .                                                | 161        |

|           |                                                                                          |            |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.2.2     | Geometria Multiplamente Conexa . . . . .                                                 | 161        |
| 8.3       | Geração de Malha no Sistema de Coordenadas Generalizadas . . . . .                       | 163        |
| 8.3.1     | Resolução das Equações Geradoras Através do Método das Diferen-<br>ças Finitas . . . . . | 164        |
| 8.3.2     | Condições de Contorno . . . . .                                                          | 165        |
| <b>9</b>  | <b>Resultados - Escoamento 2D</b>                                                        | <b>167</b> |
| 9.1       | Introdução . . . . .                                                                     | 167        |
| 9.2       | Canal com Arco Circular . . . . .                                                        | 167        |
| 9.2.1     | Canal com Arco Circular de 10% - Escoamento Subsônico . . . . .                          | 169        |
| 9.2.2     | Canal com Arco Circular de 10% - Escoamento Transônico . . . . .                         | 171        |
| 9.2.3     | Canal com Arco Circular de 4% - Escoamento Supersônico . . . . .                         | 172        |
| 9.2.4     | Conclusões - Canal com Arco Circular . . . . .                                           | 174        |
| 9.3       | Cilindro . . . . .                                                                       | 174        |
| 9.3.1     | Conclusões - Cilindro . . . . .                                                          | 181        |
| 9.4       | Influência da Malha no Resultado de um Meio-Cilindro . . . . .                           | 181        |
| 9.5       | Aerofólio NACA 0012 . . . . .                                                            | 185        |
| 9.6       | Aerofólio NACA 0012 sem Ângulo de Ataque . . . . .                                       | 187        |
| 9.6.1     | Resultados para Malha do Tipo O . . . . .                                                | 187        |
| 9.6.2     | Resultados para Malha do Tipo C . . . . .                                                | 190        |
| 9.7       | Aerofólio NACA 0012 com Ângulo de Ataque de $1,25^\circ$ . . . . .                       | 195        |
| 9.7.1     | Resultados para Malha do Tipo O . . . . .                                                | 195        |
| 9.7.2     | Resultados para Malha do Tipo C . . . . .                                                | 198        |
| <b>10</b> | <b>Conclusões</b>                                                                        | <b>203</b> |
| 10.1      | Conclusões . . . . .                                                                     | 203        |
| 10.2      | Sugestões para Futuros Trabalhos . . . . .                                               | 204        |

---

|                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Apêndice A - Bocal Convergente/Divergente - Entrada e Saída Subsônica                              | 206 |
| Apêndice B - Equação Modificada da Equação da Advecção - Esquema FTCS estabilizado                 | 213 |
| Apêndice C - Formulação Implícita do Esquema TVD para Leis de Conservação Escalares                | 216 |
| Apêndice D - Linearização do Esquema Implícito para um Sistema de Leis de Conservação Hiperbólicas | 220 |
| Apêndice E - Equação de Euler em Coordenadas Generalizadas                                         | 225 |
| Apêndice F - Autovalores da Equação de Euler em Coordenadas Generalizadas                          | 234 |
| Apêndice G - Demonstração da Abordagem do Pseudo Volume Finito                                     | 245 |
| Apêndice H - Construção do Método de Fatoração LU                                                  | 256 |
| Apêndice I - Cálculo da Pressão na Superfície do Corpo                                             | 258 |
| Apêndice J - Geração de Malha no Sistema de Coordenadas Generalizadas                              | 260 |
| Referências                                                                                        | 267 |

# Lista de Figuras

|      |                                                                                            |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | IBM 7094s . . . . .                                                                        | 27 |
| 1.2  | Grupo de mulheres trabalhando como computadores humanos . . . . .                          | 27 |
| 1.3  | CFD nos dias atuais . . . . .                                                              | 28 |
| 2.1  | Volume de controle arbitrário para uma Lei de conservação . . . . .                        | 33 |
| 2.2  | Características e translação da solução ao longo do tempo . . . . .                        | 37 |
| 2.3  | Solução da equação de Burgers para um intervalo de tempo pequeno . . . .                   | 39 |
| 2.4  | Posicionamento da descontinuidade através do método das áreas . . . . .                    | 39 |
| 2.5  | Formação da descontinuidade na equação de Burgers . . . . .                                | 39 |
| 2.6  | Condição inicial do problema de Riemann . . . . .                                          | 40 |
| 2.7  | Solução do problema de Riemann no plano x-t para a equação de advecção<br>linear . . . . . | 40 |
| 2.8  | Função com suporte compacto . . . . .                                                      | 42 |
| 2.9  | Esquema de um escoamento em duto de área variável . . . . .                                | 50 |
| 2.10 | Valores das variáveis do escoamento antes e depois do choque normal . . .                  | 52 |
| 3.1  | Bocal Divergente Quase-Unidimensional . . . . .                                            | 57 |
| 3.2  | Solução Analítica Discreta - Caso 1 . . . . .                                              | 58 |
| 3.3  | Solução Analítica Discreta - Caso 2 . . . . .                                              | 60 |
| 3.4  | Bocal Convergente-Divergente Quasi-Unidimensional . . . . .                                | 61 |
| 3.5  | Solução Analítica Discreta - Caso 3 . . . . .                                              | 62 |
| 3.6  | Solução Analítica Discreta - Caso 4 . . . . .                                              | 64 |
| 3.7  | Bocal Convergente-Divergente Quasi-Unidimensional Assimétrico . . . . .                    | 65 |
| 3.8  | Solução Analítica Discreta - Caso 5 . . . . .                                              | 67 |

|      |                                                                                                                             |     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1  | <i>Stencil</i> do esquema de Lax-Friedrichs . . . . .                                                                       | 71  |
| 4.2  | Efeito da dissipação numérica. (a) Onda inicial em $t = 0$ . (b) Onda em $t > 0$ afetada pela dissipação numérica . . . . . | 73  |
| 4.3  | Efeito da dispersão numérica. (a) Onda inicial em $t = 0$ . (b) Onda em $t > 0$ afetada pela dispersão numérica . . . . .   | 74  |
| 4.4  | Volume de controle unidimensional para uma Lei de conservação não linear                                                    | 75  |
| 4.5  | Definição de um valor constante $u_i^n$ através da média da integral no passo de tempo $n$ . . . . .                        | 76  |
| 4.6  | Reconstrução <i>MUSCL</i> linear por partes em único volume de controle . . .                                               | 77  |
| 4.7  | Reconstrução <i>MUSCL</i> linear por partes em três volumes de controle consecutivos . . . . .                              | 78  |
| 4.8  | Região TVD . . . . .                                                                                                        | 83  |
| 4.9  | Limitadores de fluxo . . . . .                                                                                              | 84  |
| 6.1  | Condições iniciais - Caso 1 . . . . .                                                                                       | 107 |
| 6.2  | Solução Analítica x Solução TVD - Caso 1 - Sem limitador . . . . .                                                          | 108 |
| 6.3  | Solução Analítica x Solução TVD - Caso 1 - Limitador Yee Eq.(??) . . . .                                                    | 109 |
| 6.4  | Solução Analítica x Solução TVD - Caso 1 - Limitador Superbee Eq.(??) .                                                     | 110 |
| 6.5  | Condições Iniciais - Caso 2 . . . . .                                                                                       | 112 |
| 6.6  | Solução Analítica x Solução TVD - Caso 2 - Sem limitador . . . . .                                                          | 113 |
| 6.7  | Solução Analítica x Solução TVD - Caso 2 - Limitador Yee Eq.(??) . . . .                                                    | 114 |
| 6.8  | Solução Analítica x Solução TVD - Caso 2 - Limitador Superbee Eq.(??) .                                                     | 115 |
| 6.9  | Condições Iniciais - Caso 3 . . . . .                                                                                       | 117 |
| 6.10 | Solução Analítica x Solução TVD - Caso 3 - Sem limitador . . . . .                                                          | 118 |
| 6.11 | Solução Analítica x Solução TVD - Caso 3 - Limitador Yee Eq. (??) . . . .                                                   | 119 |
| 6.12 | Solução Analítica x Solução TVD - Caso 3 - Limitador Superbee Eq. (??)                                                      | 120 |
| 6.13 | Condições Iniciais - Caso 4 . . . . .                                                                                       | 122 |
| 6.14 | Solução Analítica x Solução TVD - Caso 4 - Sem limitador . . . . .                                                          | 123 |

|      |                                                                               |     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.15 | Solução Analítica x Solução TVD - Caso 4 - Limitador Yee Eq. (??)             | 124 |
| 6.16 | Solução Analítica x Solução TVD - Caso 4 - Limitador Superbee Eq. (??)        | 125 |
| 6.17 | Condições iniciais - Caso 5                                                   | 127 |
| 6.18 | Solução Analítica x Solução TVD - Caso 5 - Sem limitador                      | 128 |
| 6.19 | Solução Analítica x Solução TVD - Caso 5 - Limitador Yee Eq. (??)             | 129 |
| 6.20 | Solução Analítica x Solução TVD - Caso 5 - Limitador Superbee Eq. (??)        | 130 |
| 7.1  | Método ADI                                                                    | 139 |
| 7.2  | Derivada Direcional                                                           | 152 |
| 7.3  | Mapeamento bidimensional                                                      | 156 |
| 8.1  | Malha cartesiana para um aerofólio                                            | 159 |
| 8.2  | Malha coincidente com a fronteira - Domínio Físico                            | 160 |
| 8.3  | Malha coincidente com a fronteira - Domínio Generalizado                      | 160 |
| 8.4  | Geometria simplesmente conexa - Exemplo 1                                     | 161 |
| 8.5  | Geometria simplesmente conexa - Exemplo 2                                     | 161 |
| 8.6  | Geometria multiplamente conexa - Malha do tipo $O$                            | 162 |
| 8.7  | Geometria multiplamente conexa - Malha do tipo $C$                            | 162 |
| 8.8  | Mapeamento para geração de malha elíptica                                     | 165 |
| 9.1  | Canal interno com arco circular                                               | 168 |
| 9.2  | Malha do canal interno com arco circular de 10% de espessura                  | 168 |
| 9.3  | Malha do canal interno com arco circular de 4% de espessura                   | 169 |
| 9.4  | Solução TVD - Caso Subsônico                                                  | 170 |
| 9.5  | Solução TVD - Caso Transônico                                                 | 172 |
| 9.6  | Solução TVD - Caso Supersônico                                                | 173 |
| 9.7  | Fronteira sólida e seções de entrada e saída                                  | 175 |
| 9.8  | Discretização do domínio para simulação de escoamento em torno de um cilindro | 175 |

|      |                                                                   |     |
|------|-------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.9  | Campo de Velocidade em todo o domínio . . . . .                   | 176 |
| 9.10 | Campo de Velocidade com foco na região do cilindro . . . . .      | 176 |
| 9.11 | Número de Mach em todo o domínio . . . . .                        | 177 |
| 9.12 | Número de Mach com foco na região do cilindro . . . . .           | 177 |
| 9.13 | Número de Mach com foco na região após o cilindro . . . . .       | 178 |
| 9.14 | Massa específica em todo o domínio . . . . .                      | 178 |
| 9.15 | Massa específica com foco na região do cilindro . . . . .         | 179 |
| 9.16 | Pressão em todo o domínio . . . . .                               | 179 |
| 9.17 | Pressão com foco na região do cilindro . . . . .                  | 180 |
| 9.18 | Resíduo . . . . .                                                 | 180 |
| 9.19 | Validação da solução numérica . . . . .                           | 181 |
| 9.20 | Malha com fronteira circular . . . . .                            | 182 |
| 9.21 | Malha com fronteira hiperbólica . . . . .                         | 182 |
| 9.22 | Malha com fronteira parabólica . . . . .                          | 183 |
| 9.23 | Representação da distância de <i>standoff</i> . . . . .           | 184 |
| 9.24 | Comparação das curvas do coeficiente de pressão . . . . .         | 185 |
| 9.25 | Malha do tipo O . . . . .                                         | 186 |
| 9.26 | Malha do tipo C . . . . .                                         | 186 |
| 9.27 | Campo de velocidade - Malha O - Sem ângulo de ataque . . . . .    | 187 |
| 9.28 | Número de Mach - Malha O - Sem ângulo de ataque . . . . .         | 188 |
| 9.29 | Massa específica - Malha O - Sem ângulo de ataque . . . . .       | 188 |
| 9.30 | Pressão - Malha O - Sem ângulo de ataque . . . . .                | 189 |
| 9.31 | Resíduo L2 - Malha O - Sem ângulo de ataque . . . . .             | 189 |
| 9.32 | Coeficiente de pressão - Malha O - Sem ângulo de ataque . . . . . | 190 |
| 9.33 | Campo de velocidade - Malha C - Sem ângulo de ataque . . . . .    | 191 |
| 9.34 | Número de Mach - Malha C - Sem ângulo de ataque . . . . .         | 191 |

|      |                                                                                |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.35 | Ampliação do número de Mach - Malha C - Sem ângulo de ataque . . . . .         | 192 |
| 9.36 | Massa específica - Malha C - Sem ângulo de ataque . . . . .                    | 192 |
| 9.37 | Pressão - Malha C - Sem ângulo de ataque . . . . .                             | 193 |
| 9.38 | Ampliação da pressão - Malha C - Sem ângulo de ataque . . . . .                | 193 |
| 9.39 | Resíduo L2 - Malha C - Sem ângulo de ataque . . . . .                          | 194 |
| 9.40 | Coeficiente de pressão - Malha C - Sem ângulo de ataque . . . . .              | 194 |
| 9.41 | Campo de velocidade - Malha O - Ângulo de ataque de $1,25^\circ$ . . . . .     | 195 |
| 9.42 | Número de Mach - Malha O - Ângulo de ataque de $1,25^\circ$ . . . . .          | 196 |
| 9.43 | Massa específica - Malha O - Ângulo de ataque de $1,25^\circ$ . . . . .        | 196 |
| 9.44 | Pressão - Malha O - Ângulo de ataque de $1,25^\circ$ . . . . .                 | 197 |
| 9.45 | Resíduo L2 - Malha O - Ângulo de ataque de $1,25^\circ$ . . . . .              | 197 |
| 9.46 | Coeficiente de pressão - Malha O - Ângulo de ataque de $1,25^\circ$ . . . . .  | 198 |
| 9.47 | Velocidade - Malha C - Ângulo de ataque de $1,25^\circ$ . . . . .              | 199 |
| 9.48 | Ampliação da velocidade - Malha C - Ângulo de ataque de $1,25^\circ$ . . . . . | 199 |
| 9.49 | Número de Mach - Malha C - Ângulo de ataque de $1,25^\circ$ . . . . .          | 200 |
| 9.50 | Massa específica - Malha C - Ângulo de ataque de $1,25^\circ$ . . . . .        | 200 |
| 9.51 | Pressão - Malha C - Ângulo de ataque de $1,25^\circ$ . . . . .                 | 201 |
| 9.52 | Resíduo - Malha C - Ângulo de ataque de $1,25^\circ$ . . . . .                 | 201 |
| 9.53 | Coeficiente de pressão - Malha C - Ângulo de ataque de $1,25^\circ$ . . . . .  | 202 |

# Lista de Tabelas

|     |                                                                             |     |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.1 | Evolução dos computadores . . . . .                                         | 28  |
| 1.2 | Comparação entre as três técnicas de solução . . . . .                      | 29  |
| 3.1 | Resultado analítico nas seções de entrada e de saída - Caso 1 . . . . .     | 59  |
| 3.2 | Resultado analítico nas seções antes do choque - Caso 2 . . . . .           | 59  |
| 3.3 | Resultado analítico nas seções após o choque - Caso 2 . . . . .             | 60  |
| 3.4 | Resultado nas seções de entrada e de saída - Caso 3 . . . . .               | 63  |
| 3.5 | Resultado nas seções antes do choque - Caso 4 . . . . .                     | 63  |
| 3.6 | Resultado nas seções após o choque - Caso 4 . . . . .                       | 64  |
| 3.7 | Resultado nas seções antes do choque - Caso 5 . . . . .                     | 66  |
| 3.8 | Resultado nas seções após o choque - Caso 5 . . . . .                       | 66  |
| 5.1 | Condições de contorno nas seções de entrada e de saída . . . . .            | 98  |
| 6.1 | Condições iniciais nas seções de entrada e de saída - Caso 1 . . . . .      | 106 |
| 6.2 | Condições iniciais nas seções de entrada e de saída - Caso 2 . . . . .      | 111 |
| 6.3 | Condições iniciais nas seções de entrada e de saída - Caso 3 . . . . .      | 116 |
| 6.4 | Condições iniciais nas seções de entrada e de saída - Caso 4 . . . . .      | 121 |
| 6.5 | Condições iniciais nas seções de entrada e de saída - Caso 5 . . . . .      | 126 |
| 6.6 | Tempo de processamento em segundos - Casos quase 1D . . . . .               | 131 |
| 7.1 | Condições de contorno nas seções de entrada e de saída - Caso bidimensional | 150 |
| 7.2 | Resultado do mapeamento . . . . .                                           | 157 |

# Lista de Símbolos

## Símbolos latinos

|                        |                                                                         |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $a$                    | : Velocidade para o caso escalar                                        |
| $A$                    | : Área do bocal                                                         |
| $A$                    | : Matriz jacobiana                                                      |
| $A^*$                  | : Área crítica do bocal                                                 |
| $A_2^*$                | : Segunda área crítica do bocal                                         |
| $A_{ac}$               | : Área da seção imediatamente antes do choque                           |
| $A_{en}$               | : Área da seção de entrada                                              |
| $A_s$                  | : Área da seção de saída                                                |
| $B$                    | : Matriz jacobiana do vetor de forçamento                               |
| $c$                    | : Velocidade do som                                                     |
| $C_0^1$                | : Conjunto de funções continuamente diferenciáveis com suporte compacto |
| $C_P$                  | : Calor específico à pressão constante                                  |
| $C_V$                  | : Calor específico à volume constante                                   |
| $d$                    | : Forma delta para o caso escalar                                       |
| $dS$                   | : Diferencial da superfície de controle                                 |
| $e$                    | : Energia total por unidade de volume                                   |
| $F$                    | : Vetor de fluxo das variáveis conservadas                              |
| $f$                    | : Função de fluxo para o caso escalar                                   |
| $F, G, H$              | : Vetores de fluxo nas direções $x, y, z$ respectivamente               |
| $\tilde{f}$            | : Função de fluxo numérico escalar                                      |
| $\tilde{F}, \tilde{G}$ | : Vetor das funções de fluxo numérico                                   |
| $f_x$                  | : Força atuando na partícula de fluido na direção $x$                   |
| $f_y$                  | : Força atuando na partícula de fluido na direção $y$                   |
| $f_z$                  | : Força atuando na partícula de fluido na direção $z$                   |
| $G$                    | : Taxa de crescimento                                                   |
| $g$                    | : Função limitadora de fluxo                                            |
| $H$                    | : Vetor de forçamento na equação de Euler quase unidimensional          |

---

|          |                                                                 |
|----------|-----------------------------------------------------------------|
| $i$      | : <i>Unidade imaginária</i>                                     |
| $I$      | : <i>Matriz identidade</i>                                      |
| $J$      | : <i>Jacobiano da transformação</i>                             |
| $L$      | : <i>Comprimento de referência</i>                              |
| $M$      | : <i>Número de Mach</i>                                         |
| $M_{ac}$ | : <i>Número de Mach na seção imediatamente antes do choque</i>  |
| $M_{dc}$ | : <i>Número de Mach na seção imediatamente depois do choque</i> |
| $M_{en}$ | : <i>Número de Mach na seção de entrada</i>                     |
| $M_s$    | : <i>Número de Mach na seção de saída</i>                       |
| $Nx$     | : <i>Números de nós em <math>x</math></i>                       |
| $Ny$     | : <i>Números de nós em <math>y</math></i>                       |
| $P$      | : <i>Pressão</i>                                                |
| $P_0$    | : <i>Pressão de estagnação</i>                                  |
| $P_{01}$ | : <i>Pressão de estagnação antes do choque</i>                  |
| $P_{02}$ | : <i>Pressão de estagnação depois do choque</i>                 |
| $P_{ac}$ | : <i>Pressão na seção imediatamente antes do choque</i>         |
| $P_{dc}$ | : <i>Pressão na seção imediatamente depois do choque</i>        |
| $P_{en}$ | : <i>Pressão na seção de entrada</i>                            |
| $P_s$    | : <i>Pressão na seção de saída</i>                              |
| $Q$      | : <i>Vetor das variáveis conservadas</i>                        |
| $Q$      | : <i>Adição externa de calor por unidade de volume</i>          |
| $q_x$    | : <i>Troca térmica na direção <math>x</math></i>                |
| $q_y$    | : <i>Troca térmica na direção <math>y</math></i>                |
| $q_z$    | : <i>Troca térmica na direção <math>z</math></i>                |
| $R$      | : <i>Constante universal do gases</i>                           |
| $R$      | : <i>Matriz dos autovetores</i>                                 |
| $r$      | : <i>Relação dos gradientes consecutivos</i>                    |
| $R_S$    | : <i>Fonte de superfície</i>                                    |
| $R_V$    | : <i>Fonte de volume</i>                                        |
| $S$      | : <i>Superfície de controle</i>                                 |
| $s$      | : <i>Entropia</i>                                               |
| $t$      | : <i>Tempo</i>                                                  |
| $T$      | : <i>Temperatura</i>                                            |
| $t_0$    | : <i>Tempo inicial</i>                                          |
| $T_0$    | : <i>Temperatura de estagnação</i>                              |

|           |                                                                           |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------|
| $u$       | : Variável conservada para o caso escalar                                 |
| $U, V$    | : Velocidades contravariantes                                             |
| $u, v, w$ | : Componentes cartesianas da velocidade                                   |
| $u_0$     | : Condição inicial da variável conservada para o caso escalar             |
| $u_L$     | : Variável conservada para o caso escalar, à esquerda do choque           |
| $u_R$     | : Variável conservada para o caso escalar, à direita do choque            |
| $V$       | : Vetor velocidade                                                        |
| $V_{ac}$  | : Velocidade na seção imediatamente antes do choque                       |
| $V_{dc}$  | : Velocidade na seção imediatamente depois do choque                      |
| $V_{en}$  | : Velocidade na seção de entrada                                          |
| $V_s$     | : Velocidade na seção de saída                                            |
| $W$       | : Conjunto de variáveis características em relação ao vetor de estado $Q$ |
| $x, y, z$ | : Coordenadas cartesianas                                                 |
| $x_0$     | : Posição inicial                                                         |
| $z$       | : Velocidade característica                                               |

## Símbolos gregos

|               |                                                                                    |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| $\alpha$      | : Média das características locais                                                 |
| $\gamma$      | : Correção de segunda ordem da velocidade característica                           |
| $\gamma$      | : Relação dos calores específicos                                                  |
| $\delta$      | : Parâmetro de correção de entropia                                                |
| $\delta$      | : Distância de standoff                                                            |
| $\delta_0$    | : Parâmetro de correção de entropia inicial para o caso variável                   |
| $\varepsilon$ | : Energia interna por unidade de massa                                             |
| $\theta$      | : Parâmetro que define a característica explícita ou implícita do esquema numérico |
| $\mu$         | : Viscosidade                                                                      |
| $\xi, \eta$   | : Coordenadas generalizadas                                                        |
| $\rho$        | : Massa específica                                                                 |
| $\rho_0$      | : Massa específica de estagnação                                                   |
| $\rho_{ac}$   | : Massa específica na seção imediatamente antes do choque                          |
| $\rho_{dc}$   | : Massa específica na seção imediatamente depois do choque                         |
| $\rho_{en}$   | : Massa específica na seção de entrada                                             |
| $\rho_s$      | : Massa específica na seção de saída                                               |
| $\Phi$        | : Função limitadora de fluxo                                                       |

- $\phi$  : *Função teste*  
 $\phi$  : *Ângulo de fase*

## Subscritos

- 0 : *Valor inicial*  
0 : *Valor de estagnação*  
 $ac$  : *Antes do choque*  
 $dc$  : *Depois do choque*  
 $en$  : *Entrada*  
 $i$  : *Índice discreto espacial para a direção  $x$*   
 $j$  : *Índice discreto espacial para a direção  $y$*   
 $L$  : *Posicionado à esquerda*  
 $P$  : *Pressão*  
 $R$  : *Posicionado à direita*  
 $S$  : *Superfície*  
 $s$  : *Saída*  
 $t$  : *Derivada no tempo*  
 $V$  : *Volume*  
 $x$  : *Derivada no espaço na direção  $x$*   
 $x,y,z$  : *Coordenadas cartesianas*

## Superescritos

- $-1$  : *Matriz inversa*  
 $*$  : *Variável adimensional*  
 $*$  : *Área crítica*  
 $l$  : *Contador*  
 $LF$  : *Lax-Friedrichs*  
 $LW$  : *Lax-Wendroff*  
 $n$  : *Passo temporal*  
 $\xi, \eta$  : *Coordenadas generalizadas*  
 $\infty$  : *Escoamento de corrente livre*

# Capítulo 1

## Introdução

O ramo da ciência conhecido como CFD (*Computational Fluid Dynamics*), ou seja, a Dinâmica dos Fluidos Computacional, que trata da resolução numérica das equações que modelam o comportamento dos fluidos está presente em larga escala tanto na área acadêmica como na industrial. Com o constante aumento da capacidade de cálculo dos computadores, foi possível a substituição de grande parte dos ensaios experimentais por análises numéricas que possibilitaram a redução dos custos e prazos de desenvolvimento de projetos de engenharia, e a democratização para pessoas que não dispunham de acesso aos recursos experimentais de grandes institutos de pesquisa.

### 1.1 Referências Históricas

O CFD como é conhecido atualmente se originou entre o fim da década de 50 e o início da década de 60 do século XX, quando surgiram os primeiros computadores capazes de realizar a quantidade de operações matemáticas necessárias para a resolução de problemas reais de engenharia tendo o escoamento de fluido como foco. De acordo com o trecho compilado de [?], pode-se ter uma idéia de como eram os computadores em 1958.

*"Quando a NASA foi criada em 1958, o estereótipo do computador era o "UNIVAC", que consistia em uma coleção de unidades de fita giratória, impressoras barulhentas, e caixas descaracterizadas que ocupavam uma sala do tamanho de uma casa. Caros para comprar e operar, o computador gigante necessitava de um pequeno exército de técnicos em acompanhamento constante para mantê-lo funcionando."*

Um exemplo deste tipo de computador é o IBM 7094s que foi utilizado pela NASA na década de 1960, mostrado na Fig. ??,



Figura 1.1: IBM 7094s

Fonte: ([?], p. 249)

Porém, antes do surgimento dos computadores, os cálculos de CFD eram feitos à mão por "*computadores humanos*", que utilizavam apenas régua de cálculo e máquinas de calcular, conforme pode ser visto na Fig. ??, veja [?] e [?].



Figura 1.2: Grupo de mulheres trabalhando como computadores humanos

Fonte: ([?])

Atualmente, com a fabricação de computadores cada vez poderosos, é possível a simulação de modelos com grandes dimensões, de acordo com a Fig. ??.

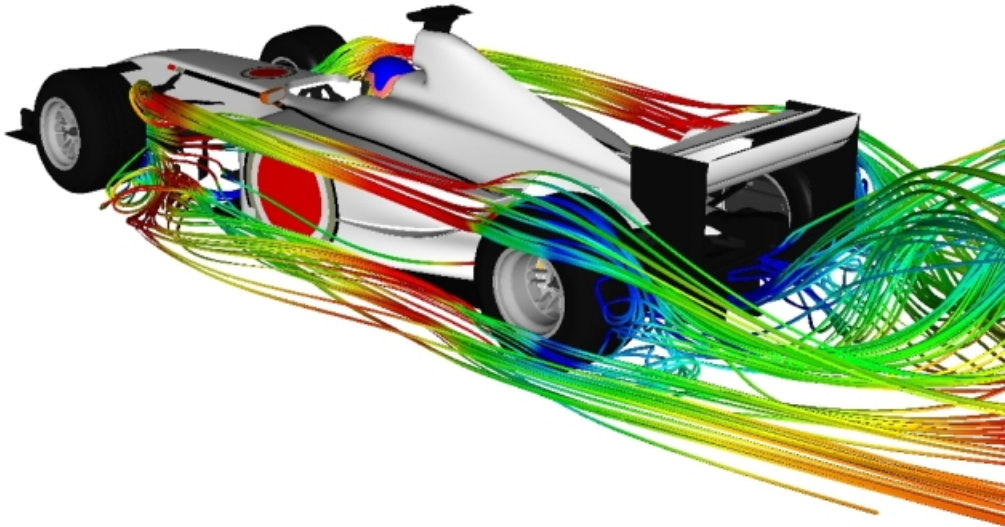


Figura 1.3: CFD nos dias atuais  
Fonte: ([?], p. 147)

Esta evolução é mostrada com clareza na Tab. ??, ao se comparar a quantidade de operações por segundo executadas por cada uma das gerações de computadores que foram construídas desde o início da sua utilização na década de 1940.

| Geração | Datas Aproximadas | Tecnologia                           | Operações por segundo |
|---------|-------------------|--------------------------------------|-----------------------|
| 1       | 1946-1957         | Tubo de vácuo                        | 40.000                |
| 2       | 1958-1964         | Transistor                           | 200.000               |
| 3       | 1965-1971         | Integração de pequena e média escala | 1.000.000             |
| 4       | 1972-1977         | Integração de larga escala           | 10.000.000            |
| 5       | 1978-1991         | Integração de grande larga escala    | 100.000.000           |
| 6       | 1991-             | Integração de ultra larga escala     | 1.000.000.000         |

Tabela 1.1: Evolução dos computadores  
Fonte: ([?], p. 25)

## 1.2 Técnicas de Solução

As equações que modelam o comportamento dos fluidos, tais como as equações de Navier-Stokes e de Euler podem ser abordadas através de três técnicas que se complementam entre si e que possuem as suas vantagens e desvantagens, conforme mostrado na Tab. ??, compilada de [?].

| Técnica      | Vantagens                                                                                                                                                                 | Desvantagens                                                                                                                                                           |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Experimental | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Mais realista</li> </ul>                                                                                                         | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Equipamento exigido</li> <li>• Problemas de escala</li> <li>• Dificuldades de medição</li> <li>• Custo operacional</li> </ul> |
| Teórica      | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Mais geral</li> <li>• Fórmula fechada</li> </ul>                                                                                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Restrita a geometrias e processos físicos simples</li> <li>• Geralmente restrita a problemas lineares</li> </ul>              |
| Numérica     | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Não há restrição à linearidade</li> <li>• Geometrias e processos complicados</li> <li>• Evolução temporal do processo</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Erros de truncamento</li> <li>• Prescrição das condições de fronteira apropriadas</li> <li>• Custos computacionais</li> </ul> |

Tabela 1.2: Comparação entre as três técnicas de solução  
Fonte: ([?], p. 26)

Os métodos mais utilizados para resolver problemas através do uso da dinâmica dos fluidos computacional e problemas de engenharia em geral são os métodos das diferenças finitas (MDF), volumes finitos (MVF) e elementos finitos (MEF). De acordo com o trecho compilado de [?], cada um dos métodos citados acima podem ser descritos da seguinte maneira.

*"Método das Diferenças Finitas: Após a definição da malha, as soluções são aproximadas por séries de Taylor e as derivadas, no tempo e no espaço, substituídas por fórmulas de*

*diferenças. A solução consistirá nos valores das variáveis em cada nó da malha.*

*Método dos Elementos Finitos: O domínio é discretizado por elementos de forma e tamanhos arbitrários. Nesses elementos são definidos pontos nodais (nos vértices ou interior de cada elemento) onde os valores da solução serão obtidos. A solução é aproximada em cada nó por uma função de forma, geralmente funções polinomiais de ordem arbitrária permitindo a avaliação das quantidades conservadas em pontos internos ao elemento.*

*Métodos dos Volumes Finitos: Pode ser descrito como um caso particular do Método dos Elementos Finitos onde a solução é constante no interior do elemento e os fluxos nas interfaces são conservados. Essa garantia de conservação adiciona robustez e eficiência a custo reduzido."*

## 1.3 Justificativa

As equações de Euler são equações diferenciais parciais que apresentam comportamento hiperbólico, e esta classe de equações modela fenômenos em que ocorre o deslocamento de ondas e/ou transporte por advecção.

Normalmente, o transporte por advecção e o movimento da onda estão acoplados. Por exemplo, a velocidade do som de um determinado gás depende dos valores da pressão e da massa específica, fazendo com que este acoplamento resulte na não linearidade das equações. Pelo fato das equações de Euler serem não lineares e freqüentemente possuírem ondas de choque na sua solução, isso ocasiona várias dificuldades teóricas e computacionais [?].

Essas dificuldades surgem do fato de que a existência de choques na solução não satisfaz as equações diferenciais parciais no sentido clássico em todos os pontos do domínio, pois as derivadas não são definidas nas discontinuidades. Isto conduz à forma integral da Lei de conservação, pois esta formulação exige uma menor regularidade da solução, expandindo assim a classe de soluções possíveis que permitem soluções descontínuas, introduzindo assim o conceito de solução fraca, [?] e [?], que será descrito no próximo capítulo. Uma formulação matemática mais rigorosa pode ser encontrada em [?].

Como a solução fraca não atende a todos os requisitos da solução clássica, pode existir mais de uma solução para a mesma condição inicial, fazendo com que seja necessária a utilização do conceito de solução entrópica, isto é, a solução que está de acordo com os princípios físicos do problema. Existem diversas maneiras de se abordar este tipo de

problema utilizando técnica de volumes finitos e elementos finitos descontínuos. Neste trabalho, será utilizado o método TVD (*Total Variation Diminishing*) juntamente com a abordagem do pseudo volume finito (*MUSCL*), pois a mesma produz resultados com alta definição na captura e posicionamento da descontinuidade (choque), [?].

## 1.4 Objetivo do Trabalho

O principal objetivo deste trabalho é utilizar as equações de Euler para simular casos de escoamento compressível, invíscido ao redor de corpos com geometrias complexas, utilizando a metodologia TVD aplicada em domínios bidimensionais em coordenadas generalizadas que tem o objetivo de facilitar a aplicação numérica das condições de contorno. Para atingir este objetivo, será utilizada uma metodologia construtiva onde serão seguidas cada uma das etapas listadas abaixo:

- Cálculo analítico do escoamento quase-unidimensional para casos com e sem choque em bocais divergente e convergente-divergente.
- Construção de algoritmo para o cálculo numérico do escoamento quase-unidimensional utilizando diversos limitadores de fluxo em bocais divergente e convergente-divergente.
- Validar os códigos computacionais para a geometria quase-unidimensional através da comparação com os resultados analíticos.
- Construção do algoritmo para o cálculo numérico de um escoamento bidimensional em torno de um cilindro.
- Construção do algoritmo para o cálculo numérico de um escoamento bidimensional em torno de um aerofólio.
- Validar o código computacional para as geometrias bidimensionais através da comparação com os resultados disponíveis na literatura.

## 1.5 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está dividida em 10 capítulos e 10 apêndices que contém demonstrações completas dos tópicos mais importantes do trabalho e que não são encontradas na literatura.

No capítulo 2 será feita uma revisão bibliográfica dos conceitos da matemática e da física que serão necessários para o desenvolvimento do trabalho. Será apresentado o conceito de Lei de conservação nas formulações integral e diferencial, para que seja feita a apresentação da equação de Burgers, de modo que sejam tratados temas como formação de onda de choque, problema de Riemann, solução fraca, condições de Rankine-Hugoniot e condição de entropia. Na seção ?? será apresentado o método TVD e, na sequência, serão mostrados os tópicos referentes à física do problema. Em seguida, serão mostradas as equações de Navier-Stokes e de Euler e sua forma adimensionalizada, número de Mach, escoamento isentrópico em duto de área variável, relações de escoamento isentrópico, choque normal e coeficiente de pressão.

No capítulo 3 será desenvolvido um algoritmo para o cálculo da solução analítica discreta em bocais quase-unidimensionais em escoamento com e sem choque, e serão apresentados resultados para bocais divergente e convergente-divergente, sendo que estes resultados serão utilizados mais à frente para a validação do método numérico.

O capítulo 4 é destinado à descrição de métodos numéricos que são utilizados para análise de Leis de conservação, tal qual a abordagem MUSCL (*Monotone Upstream-centred Scheme for Conservation Laws*) e serão descritos os conceitos necessários para a construção do método, como, viscosidade artificial, funções de fluxo numérico, esquemas de primeira e segunda ordem, dentre outros.

No capítulo 5 será discutida a extensão da metodologia TVD para o caso quase-unidimensional e será apresentado o algoritmo para a solução numérica juntamente com a estrutura de dados utilizada, e na sequência, no capítulo 6, serão mostrados os resultados numéricos utilizando o método TVD para os mesmos casos que foram tratados no capítulo 3.

À partir deste ponto, serão abordados os casos em duas dimensões espaciais. No capítulo 7, será mostrada a extensão da teoria para casos bidimensionais, o algoritmo numérico para a solução desses casos e a descrição da estrutura de dados. No capítulo 8, serão apresentados o conceito de transformação de coordenadas e o procedimento para geração de malha no sistema de coordenadas generalizadas, e por fim, no capítulo 9, serão discutidos os resultados obtidos para os casos com escoamento 2D.

As conclusões e propostas para trabalhos futuros serão apresentadas no capítulo 10. Os cálculos para o escoamento isentrópico em um bocal quase unidimensional e as demonstrações das equações mais importantes utilizadas no trabalho serão mostradas nos apêndices de A a J.

# Capítulo 2

## Fundamentação Teórica

Neste capítulo será feita uma breve descrição dos conceitos teóricos da matemática e da física que são necessários para o desenvolvimento do trabalho.

### 2.1 Leis de Conservação Hiperbólicas

Uma Lei de conservação pode ser definida de acordo com a Fig. ?? e o trecho compilado de [?].

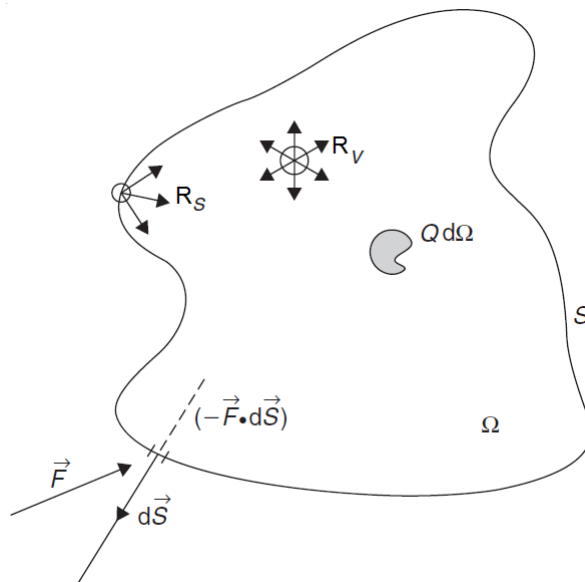


Figura 2.1: Volume de controle arbitrário para uma Lei de conservação

Fonte: Modificada de ([?], p. 30)

*"A variação do montante total de uma quantidade  $Q$  dentro de um dado domínio é igual ao balanço entre o montante da quantidade entrando e saindo do domínio considerado,*

*acrescido das contribuições de eventuais fontes gerando a quantidade."*

## 2.1.1 Formulação Integral e Diferencial

### 2.1.1.1 Formulação Integral

Considerando a definição de uma Lei de conservação, mostrada na Seção ??, é possível construir a formulação integral item por item, conforme descrito em [?]. A primeira quantidade que deve ser descrita é a que define a quantidade da variável que está sendo estudada que se encontra presente dentro do volume de controle, e esta quantidade é dada por

$$\int_{\Omega} Q d\Omega$$

e ao se considerar a variação no tempo da quantidade dentro volume de controle, escreve-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q d\Omega$$

O próximo termo que deve ser considerado, é o fluxo que pode ser definido conforme o seguinte trecho compilado de [?].

*"O fluxo é uma quantidade fundamental associada à variável conservada  $Q$  no escoamento, e é definida como **a quantidade de  $Q$  que está cruzando uma unidade de superfície por unidade de tempo**. É portando uma quantidade direcional, com direção e amplitude, de modo que possa ser representada por um vetor. Se este vetor for localmente paralelo à superfície, então nada entrará no domínio. Consequentemente, apenas a componente do fluxo na direção da normal da superfície entrará no domínio e contribuirá para a taxa de mudança de  $Q$ . Desta maneira, a quantidade de  $Q$  cruzando a superfície elementar  $d\vec{S}$  por unidade de tempo é definida pelo produto escalar do fluxo com o elemento de superfície local,  $F_n dS = \vec{F} \cdot d\vec{S}$ , com o vetor do elemento de superfície  $d\vec{S}$  apontando no sentido ao longo da normal para fora."*

A contribuição do fluxo em toda a superfície do volume de controle é dada por

$$- \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

sendo que o sinal negativo é necessário para garantir que o fluxo seja positivo ao entrar

no volume de controle, pois como os vetores do fluxo e da normal tem sentidos opostos, a ausência desta sinal faria com que o fluxo que entra no domínio fosse negativo.

Por fim, deve-se considerar as contribuições de fontes na superfície e dentro do volume de controle.

$$\int_{\Omega} R_V d\Omega + \oint_S \vec{R}_S \cdot d\vec{S}$$

Sendo assim, a Lei de conservação em sua formulação integral é escrita da seguinte maneira.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q d\Omega = - \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_{\Omega} R_V d\Omega + \oint_S \vec{R}_S \cdot d\vec{S}$$

e, após a reorganização dos termos, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q d\Omega + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} R_V d\Omega + \oint_S \vec{R}_S \cdot d\vec{S} \quad (2.1)$$

onde cada uma das parcelas da Eq. (2.1) pode ser definida como:

$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q d\Omega$  = Taxa líquida da variação de qualquer propriedade extensiva<sup>1</sup> dentro do volume de controle ao longo do tempo,

$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$  = Taxa líquida de fluxo da propriedade extensiva através da superfície de controle,

$\int_{\Omega} R_V d\Omega$  = Taxa líquida da contribuição de qualquer fonte dentro do volume de controle,

$\oint_S \vec{R}_S \cdot d\vec{S}$  = Taxa líquida da contribuição de qualquer fonte na superfície de controle.

Essa formulação possui algumas propriedades, tais como:

- A variação interna de Q, na ausência de fontes dentro do volume de controle, depende apenas das contribuições do fluxo através da superfície S e não dos valores do fluxo dentro do volume  $\Omega$ .

---

<sup>1</sup>Propriedade extensiva é aquela que depende do tamanho ou extensão do sistema [?].

- Os fluxos não são representados na forma de derivada ou operador gradiente, podendo assim serem descontínuos, o que ocorrerá quando existir uma onda de choque.

### 2.1.1.2 Formulação Diferencial

Para obter a Lei de conservação em sua formulação diferencial é dada pela equação à seguir, basta aplicar o teorema de Gauss nos termos que possuem integral de superfície, conforme descrito em [?], obtendo-se assim:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = R_V + \vec{\nabla} \cdot \vec{R}_S \quad (2.2)$$

Esta formulação possui algumas propriedades, tais como:

- Os fluxos aparecem apenas sob a forma do operador gradiente, que é o único termo com derivada espacial.
- A forma diferencial é mais restritiva do que a forma integral, pois exige que todos os fluxos sejam diferenciáveis, sendo, no mínimo, uma função de classe  $C^1$ , o que não ocorre na presença de ondas de choque, que deverão ser tratadas através da teoria de solução fraca que será apresentada na Seção ??.

## 2.2 Leis de Conservação Escalares

As Leis de conservação escalares unidimensionais são modeladas pela seguinte equação [?]

$$\partial_t u + \partial_x [f(u)] = 0 \quad \text{para } t \geq 0 \text{ e } x \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

onde  $f(u)$  é chamada de função de fluxo, e nas seções seguintes serão analisadas para os casos linear e não linear.

### 2.2.1 Equação de Advecção Linear

Conforme dado por [?], para o caso da advecção linear, a Eq. (??) pode ser escrita como

$$u_t + au_x = 0 \quad (2.4)$$

onde, neste caso, a função de fluxo é  $f(u) = au$ , com  $a$  constante, e sendo o problema de Cauchy (ou problema de valor inicial) definido no domínio  $-\infty < x < \infty$ ,  $t \geq 0$  juntamente com a condição inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.5)$$

e a solução do PVI (Problema de Valor Inicial) é dada por

$$u(x, t) = u_0(x - at) \quad (2.6)$$

para  $t \geq 0$ . Com o passar do tempo, o valor inicial simplesmente se desloca de maneira inalterada para a esquerda se ( $a < 0$ ) ou para a direita de ( $a > 0$ ) com velocidade  $a$ . A solução  $u(x, t)$  é constante ao longo de cada uma das linhas  $x_0 = x - at$  que são conhecidas como curvas características da equação, conforme mostrado na Fig. ??.

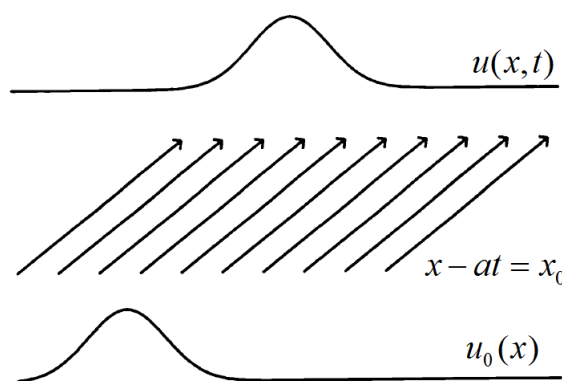


Figura 2.2: Características e translação da solução ao longo do tempo

Fonte: Modificado de ([?], p. 21)

As características são linhas no plano  $x-t$  ao longo das quais a EDP (Equação Diferencial Parcial) se torna uma EDO (Equação Diferencial Ordinária).

Diferenciando  $u(x, t)$  ao longo de cada uma das características, têm-se:

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t)x'(t) = u_t + au_x = 0 \quad (2.7)$$

provando-se que  $u$  é constante ao longo das características para vários valores de  $x_0$ .

### 2.2.2 Equação de Burgers

Na natureza a grande maioria dos fenômenos são não lineares, sendo assim, deve-se substituir o valor de “ $a$ ” para o caso da advecção linear por uma função dependente da variável que representa a grandeza conservada, que será o *fluxo*.

A equação de Burgers, na qual  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ , é o caso mais simples de uma equação de conservação não linear [?].

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x \left[ \frac{u^2(x, t)}{2} \right] = 0, \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (2.8)$$

com a mesma condição inicial dada pela Eq. (??).

Neste caso, deve-se assumir que  $f(u)$  pertence ao conjunto das funções de classe  $C^2$  e  $u_0$  pertence às funções de classe  $C^1$  de modo que exista um tempo  $t_0 > 0$  para que as Eqs. (??) e (??) sejam válidas do ponto de vista clássico.

#### 2.2.2.1 Formação da Descontinuidade

Considerando que a Eq. (??), com uma função de fluxo não linear, tenha uma solução inicial suave, isto é, as linhas características não se cruzam em nenhum ponto do domínio, para um intervalo de tempo “pequeno”, porém, para intervalos de tempo maiores, as linhas características se cruzarão, o que fará com que neste ponto a solução  $u(x, t)$  não tenha uma tangente definida, isto é, não sendo diferenciável neste ponto, provocando assim a formação de uma descontinuidade, fisicamente chamada de onda de choque.

Nestes casos, conforme será visto adiante nas Seções ?? e ?? a solução perderá a unicidade para uma mesma condição inicial, e utiliza-se o regra das áreas iguais para posicionar a descontinuidade na posição correta. As etapas de formação da descontinuidade podem ser vistas nas Figs. ??, ?? e ??, onde  $t_1 < t_2$ .

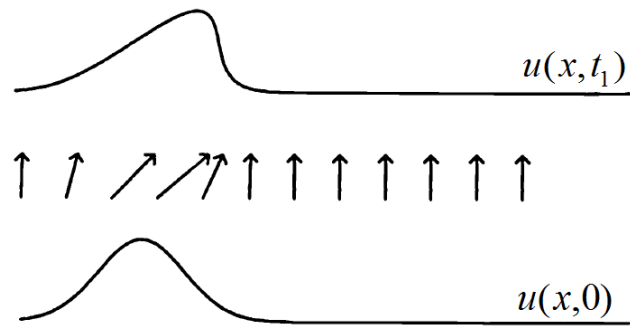


Figura 2.3: Solução da equação de Burgers para um intervalo de tempo pequeno

Fonte: (Modificada de [?], p. 24)

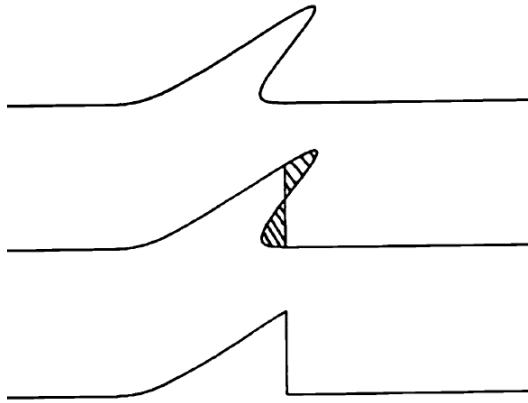


Figura 2.4: Posicionamento da descontinuidade através do método das áreas

Fonte: ([?], p. 35)

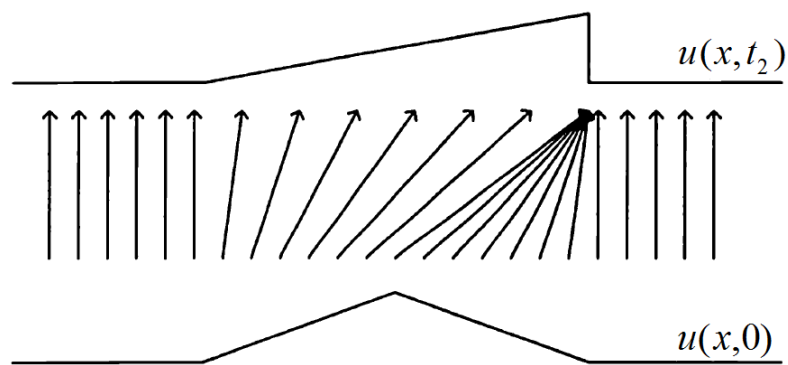


Figura 2.5: Formação da descontinuidade na equação de Burgers

Fonte: (Modificada de [?], p. 25)

## 2.3 Problema de Riemann

Quando uma Lei de conservação possui uma condição inicial onde  $u_L$  (valor à esquerda) e  $u_R$  (valor à direita) são dois valores constantes, chama-se esta condição de problema de Riemann, que é dado pela Eq. (??) junto com o PVI abaixo,

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L, & \text{se } x < 0 \\ u_R, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

cujo gráfico é ilustrado na Fig. ??

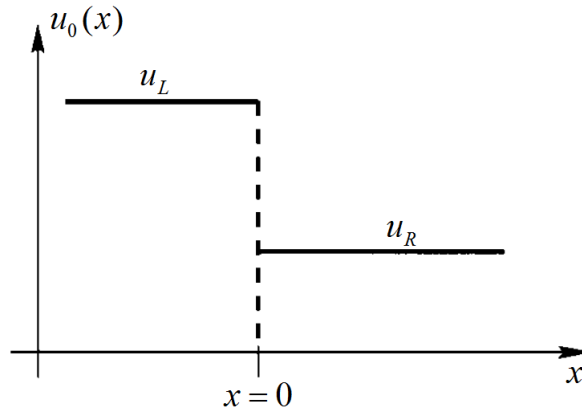


Figura 2.6: Condição inicial do problema de Riemann

Fonte: ([?], p. 49)

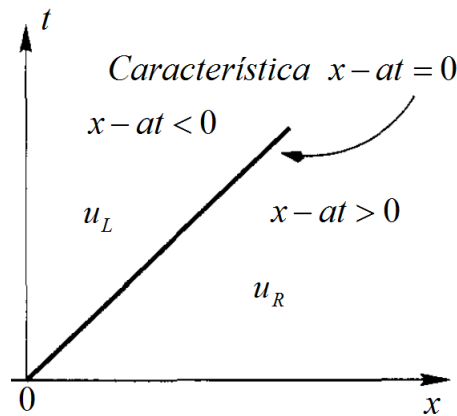


Figura 2.7: Solução do problema de Riemann no plano  $x-t$  para a equação de advecção linear

Fonte: ([?], p. 50)

Voltando à equação de advecção linear, a solução do problema de Riemann dado pelas Eqs. (??) e (??), usando o método das características, é escrita da seguinte maneira

$$u(x, t) = u_0(x - at) = \begin{cases} u_L, & \text{se } x - at < 0 \\ u_R, & \text{se } x - at > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

sendo mostrado pela Fig. ???. Desta maneira, a descontinuidade mostrada pela Fig. ?? se moverá com velocidade constante “ $a$ ”.

## 2.4 Solução Fraca

Note que uma solução descontínua, conforme mostrado pela Eqs. (??) e (??), não satisfaz a EDO de acordo com a maneira clássica nos pontos próximos da descontinuidade. Por este motivo, é necessária a utilização de uma abordagem mais geral para estes casos.

Considerando novamente o caso da equação de advecção linear, a solução dada pela Eq. (??) não satisfaz a equação diferencial dada pela Eq. (??), pois sobre a reta  $x = at$  não é possível definir a derivada, sendo assim, a solução não é válida sobre todo o domínio, sendo chamada de solução fraca. Quando uma solução é válida sobre todo o domínio, é chamada de solução clássica.

Uma maneira de se definir uma solução que não necessita de diferenciabilidade, é através da utilização da formulação integral da Lei de conservação, onde a equação diferencial parcial será multiplicada por uma função teste  $\phi(x, t)$ , que é uma função suave que pode ser derivada infinitas vezes. Após isso, será realizada um processo de integração por partes de modo que as derivadas atuem sobre a função teste e não sobre a solução “ $u$ ”. Desta maneira, será obtida uma equação onde menos derivadas atuam em “ $u$ ”, o que conseqüentemente requer uma menor suavidade, isto é, quanto menor for a quantidade de vezes que uma função puder ser derivada, menor será a sua suavidade.

Neste caso, o conjunto das funções teste a ser utilizado é dado por um conjunto de funções continuamente diferenciáveis  $C_0^1$  com suporte compacto. Isto significa que  $\phi(x, t)$  é igual a zero fora de um determinado conjunto fechado, e, portanto o suporte da função se encontra em um conjunto compacto conforme pode ser visto na Fig. ?? abaixo [?].

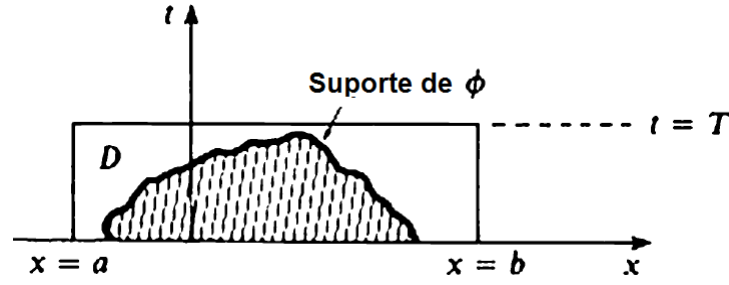


Figura 2.8: Função com suporte compacto

Fonte: (Smoller, 1994, p. 246)

Multiplicando a Eq. (??) e integrando no espaço e no tempo, obtêm-se:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} [\phi u_t + \phi f(u)_x] dx dt = 0 \quad (2.11)$$

Realizando a integração por partes e desconsiderando os termos referentes às fronteiras  $x = a$ ,  $x = b$  e  $t = T$ , devido ao fato de  $\phi$  possuir suporte compacto, têm-se:

$$\int_0^T \int_a^b [\phi_t u + \phi_x f(x)] dx dt + \int_a^b \phi(x, 0) u(x, 0) dx = 0 \quad (2.12)$$

Se  $u(x, t)$  satisfaz a Eq. (??) para  $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ ,  $u(x, t)$  será uma solução fraca para a Lei de conservação. Maiores detalhes podem ser encontrados em [?], [?], [?] e [?].

Uma consequência do uso de solução fraca é a perda da unicidade da solução para uma mesma condição inicial, para que possa ser determinada a solução correta sob o ponto-de-vista físico deverá ser utilizada uma condição de entropia que será apresentada adiante.

## 2.5 Velocidade de Propagação da Onda

A velocidade de propagação do choque, dada pela Eq. (??), é calculada ao se relacionar os valores da variável conservada antes e depois do choque com uma função de fluxo  $f(u)$ .

$$s = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R} \quad (2.13)$$

Como pode existir mais de uma solução fraca para a mesma condição inicial, conforme

descrito na Seção ??, a velocidade de propagação da onda pode ser satisfeita por soluções fracas que não são fisicamente possíveis. Maiores detalhes à respeito da Eq. (??) podem ser encontrados em [?].

## 2.6 Condição de Entropia

Como a solução fraca não é necessariamente única, deve-se encontrar algum critério que garanta que a solução “fisicamente consistente” seja selecionada entre todas as soluções fracas. Este critério chama-se condição de entropia [?]. Existem diversos critérios de entropia, que não são necessariamente equivalentes entre si. Na seqüência, serão mostrados os critérios de Lax e Oleinik que são muito utilizados para equações escalares.

Uma descontinuidade se propagando com velocidade  $s$  dada pela Eq. (??) satisfaz **a condição de entropia de Lax**, em sua forma escalar, se atende ao critério,

$$f'(u_L) > s > f'(u_R) \quad (2.14)$$

e a condição de **entropia de Oleinik** de acordo com

$$\frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u_R)}{u - u_R} \quad (2.15)$$

Deve-se ter em mente que a condição de Oleinik implica na condição de Lax, mas a recíproca não é verdadeira, porém se  $f(u)$  é estritamente convexa <sup>2</sup> com  $f''(u) > 0$ , ou estritamente côncava <sup>3</sup> se  $f''(u) < 0$ , então a condição de Lax será equivalente à condição de Oleinik.

## 2.7 Introdução ao Método da Variação Total Decrescente

Considerando a Eq. (??), pode-se definir a variação total da variável  $u$  como sendo

$$TV(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx \quad (2.16)$$

<sup>2</sup>Conforme compilado de [?], se  $I$  é um intervalo  $\mathbb{R}$ , diz-se que  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se  $\forall a, b \in I$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $\varphi(ta + (1-t)b) \leq t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)$ , que é a expressão analítica de “o gráfico de  $\varphi$  fica abaixo do segmento que une quaisquer de seus pontos”.

<sup>3</sup>De maneira análoga, a função côncava é dada por  $\varphi(ta + (1-t)b) \geq t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)$ .

que na forma discreta é escrito como

$$TV(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n| \quad (2.17)$$

diz-se que o método numérico possui variação total decrescente (Total Variation Diminishing, em inglês) se

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (2.18)$$

Conforme mostrado por [?], a classe dos esquemas TVD inclui os esquemas monótonos e os esquemas com precisão de segunda ordem. Ao contrário dos esquemas monótonos, os esquemas TVD não são automaticamente consistentes com a desigualdade de entropia, o que faz necessário o uso de limitadores de fluxo para garantir que o método forneça uma solução fisicamente coerente. Em geral, um esquema monótono é TVD, Eq. (??), e um esquema TVD preserva a monotonicidade. Maiores detalhes serão apresentados no capítulo 5 deste trabalho.

## 2.8 Equações de Navier-Stokes e de Euler

A equação vetorial de Navier-Stokes representa um conjunto de equações diferenciais que modelam um escoamento transiente, compressível, viscoso e tridimensional de fluidos compressíveis e incompressíveis, turbulentos e laminares e representam matematicamente os fenômenos físicos da conservação de massa, da quantidade de movimento e de energia, veja [?], [?] e [?]. As seguintes equações compõem a equação de Navier-Stokes, escritas em coordenadas cartesianas,

- Equação da conservação de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.19)$$

- Equação da conservação da quantidade de movimento na direção x

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

- Equação da conservação da quantidade de movimento na direção y

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

- Equação da conservação da quantidade de movimento na direção z

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

- Equação da conservação de energia

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} - \rho (f_x u + f_y v + f_z w) + \frac{\partial}{\partial x} \left( e u + P u - u \left[ \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right. \\ \left. - v \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - w \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + q_x \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( e v + P v - u \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - v \left[ \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right. \\ \left. - w \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q_y \right] \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( e w + P w - u \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \right. \\ \left. - v \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] - w \left[ \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + q_z \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Este sistema de equações possui solução analítica somente para casos com hipóteses simplificadoras. A hipótese simplificadora mais importante é a descoberta de Prandtl de

que para números de Reynolds <sup>4</sup> suficientemente grandes, o efeitos da viscosidade do fluido se concentram em fina camada-limite que se encontra próxima a superfície do corpo em torno do qual o escoamento está acontecendo, [?]. Longe desta camada, considerando-se que o escoamento é invíscido, não existem forças de corpo produzindo trabalho no volume de controle e que não há transferência de calor no escoamento, a equação de Navier-Stokes passa a se chamar equações de Euler que é dada pelo seguinte conjunto de equações,

- Equação da conservação de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.24)$$

- Equação da conservação da quantidade de movimento na direção x

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.25)$$

- Equação da conservação da quantidade de movimento na direção y

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.26)$$

- Equação da conservação da quantidade de momento na direção z

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.27)$$

- Equação da conservação de energia

---

<sup>4</sup>O número de Reynolds expressa a razão entre a intensidade dos efeitos inerciais (devido à viscosidade do fluido) e a intensidade dos efeitos viscosos em um escoamento, [?].

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (eu + Pu) + \frac{\partial}{\partial y} (ev + Pv) + \frac{\partial}{\partial z} (ew + Pw) = 0 \quad (2.28)$$

Este conjunto de equações pode ser escrito na forma vetorial da seguinte maneira,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (2.29)$$

onde Q é o vetor das variáveis conservadas e F,G,H são os vetores de fluxo nas direções x,y,z respectivamente.

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e + P) u \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ \rho vw \\ (e + P) v \end{bmatrix}; H = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + P \\ (e + P) w \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

onde, considerando as seguintes equações da dinâmica dos gases [?],

$$P = \rho RT \quad (2.31)$$

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (2.32)$$

$$\varepsilon = C_V T \quad (2.33)$$

sendo a Eq. (??) uma equação de estado para gases perfeitos,  $R$  a constante universal dos gases,  $C_p$  o calor específico à pressão constante,  $C_v$  o calor específico à volume constante e  $\gamma$  a relação dos calores específicos, e para o ar atmosférico, essas constantes possuem os valores mostrados abaixo

$$R = 287 \frac{N \cdot m}{kg \cdot K} ; C_P = 1004 \frac{N \cdot m}{kg \cdot K} ; C_V = 717 \frac{N \cdot m}{kg \cdot K} ; \gamma = 1,4$$

tem-se que a pressão é dada por

$$P = \rho\varepsilon(\gamma - 1) \quad (2.34)$$

e sendo a energia total por unidade de volume dada por [?],

$$e = \rho \left( \varepsilon + \frac{V^2}{2} + \text{energia potencial} + \text{outras formas de energia} \right) \quad (2.35)$$

e considerando apenas a energia interna e cinética na equação, têm-se:

$$e = \rho\varepsilon + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \quad (2.36)$$

Sendo assim, inserindo a Eq. (??) na Eq. (??), têm-se

$$P = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \right] \quad (2.37)$$

sendo

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (2.38)$$

As Eqs. (??), (??), (??), (??) e (??) resultam em sistema com 6 incógnitas e 5 equações, o que faz com que seja necessário utilizar uma equação de estado, Eq. (??), para realizar o fechamento matemático do sistema formado pelas equações de Euler.

## 2.9 Forma Adimensionalizada das Equações

Para que as equações de Navier-Stokes e de Euler possam ser solucionadas numericamente, é conveniente realizar a adimensionalização de todas as variáveis do problema, fazendo com que os seus respectivos valores encontrem-se dentro de limites prescritos. Este procedimento é realizado dividindo todos os comprimentos por um comprimento de referência  $L$  e cada uma das variáveis por seus valores de corrente livre, que são identificados pelo símbolo  $\infty$  subscrito, conforme mostrado abaixo, [?].

$$x^* = \frac{x}{L} \quad ; \quad y^* = \frac{y}{L} \quad ; \quad z^* = \frac{z}{L} \quad ; \quad t^* = \frac{t}{L/V_\infty} \quad (2.39)$$

$$u^* = \frac{u}{V_\infty} \quad ; \quad v^* = \frac{v}{V_\infty} \quad ; \quad w^* = \frac{w}{V_\infty} \quad ; \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty} \quad (2.40)$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty} \quad ; \quad P^* = \frac{P}{\rho_\infty V_\infty^2} \quad ; \quad T^* = \frac{T}{T_\infty} \quad ; \quad e^* = \frac{e}{V_\infty} \quad (2.41)$$

Ao introduzir as novas variáveis com asterisco, as equações são idênticas, exceto pelo asterisco, isto é, por conveniência as equações adimensionalizadas serão escritas sem o asterisco [?].

## 2.10 Número de Mach

O número de Mach é um parâmetro na teoria do escoamento compressível, que relaciona a velocidade do som local com a velocidade do escoamento [?]. Sendo a velocidade do som dada pela Eq. (??),

$$c^2 = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma RT \quad (2.42)$$

pode-se calcular o número de Mach, que é apenas uma relação adimensional entre a velocidade local e a velocidade do som calculada pela Eq. (??), conforme mostrado abaixo

$$M = \frac{u}{c} \quad (2.43)$$

De maneira ilustrativa, pode-se ter uma idéia de faixas para o número de Mach dada de acordo com o trecho compilado de [?], o escoamento pode ser classificado das seguintes maneiras.

*$M < 0,3$ : Escoamento incompressível, onde os efeitos da viscosidade podem ser negligenciados.*

*$0,3 < M < 0,8$ : Escoamento subsônico, onde os efeitos da viscosidade devem ser considerados, mas não há a formação de ondas de choque.*

*$0,8 < M < 1,2$ : Escoamento transônico, região onde aparecem as primeiras ondas de choque, dividindo o escoamento em regiões subsônicas e supersônicas.*

$1,2 < M < 3,0$ : *Escoamento supersônico, existem ondas de choque mas não há região de escoamento subsônico.*

$3,0 < M$ : *Escoamento hipersônico, região onde as ondas de choque e outras mudanças no escoamento são especialmente fortes.*

Estes valores numéricos servem apenas para fornecer uma idéia inicial à respeito do escoamento e são apropriados para escoamentos externos, no caso de escoamentos internos, é importante apenas saber se o escoamento é subsônico ( $M < 1$ ) ou supersônico ( $M > 1$ ).

## 2.11 Escoamento Isentrópico Estacionário em Duto de Área Variável

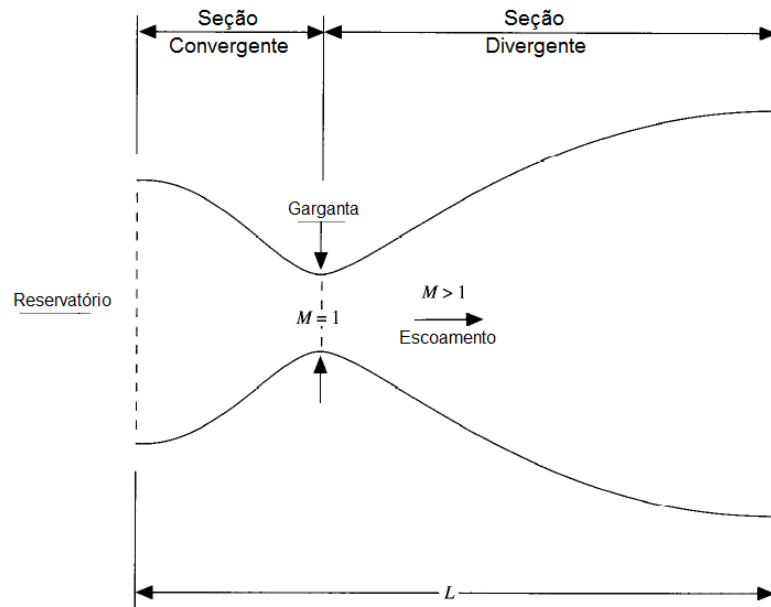


Figura 2.9: Esquema de um escoamento em duto de área variável

Fonte: (Adaptada de [?], p. 285)

Em escoamentos internos em dutos com área variável, o cálculo da velocidade do escoamento em cada um dos pontos do domínio discreto pode ser determinado através da relação entre uma área qualquer do duto e a área da garganta, com o uso de técnicas para o cálculo da raiz numérica, como por exemplo o método de Newton.

Esta relação é dada por [?],

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \quad (2.44)$$

Na Fig. ??, mostra-se um bocal convergente/divergente, e pode-se observar que na região da área crítica, que usualmente pode coincidir com a garganta do bocal, o número de Mach será igual a 1.

## 2.12 Relações do Escoamento Isentrópico Estacionário

Considerando um escoamento modelado pelas equações de Euler, o mesmo será classificado como escoamento isentrópico no caso em que não ocorram trocas térmicas (adiabático) e os efeitos viscosos possam ser desconsiderados, desta maneira não haverá alteração na entropia do escoamento.

As relações isentrópicas para um gás perfeito são dadas por:

$$\frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.45)$$

e podem ser utilizadas para determinar o número de Mach conforme mostrado abaixo.

$$\frac{P_0}{P} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.46)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2.47)$$

$$\frac{T_0}{T} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right] \quad (2.48)$$

Maiores detalhes podem ser encontrados em [?].

## 2.13 Choque Normal Estacionário

Uma onda de choque normal estacionária ocorre de maneira perpendicular ao escoamento e provoca mudanças abruptas nos valores das variáveis do escoamento.

Os valores antes e depois da onda de choque são dados pelas relações de choque normal que também, neste caso, podem ser chamadas de relações de Rankine-Hugoniot, veja [?].

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1) M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad (2.49)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} \quad (2.50)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \quad (2.51)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left\{ \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)] [2 + (\gamma - 1) M_1^2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \right\} \quad (2.52)$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left\{ \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{M_1^2}{\left(1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M_1^2\right)} \right\}^{\frac{\gamma}{(\gamma - 1)}} \left\{ \left( \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) M_1^2 - \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \right\}^{\frac{-1}{(\gamma + 1)}} \quad (2.53)$$

Após o choque deve-se considerar um novo valor para a relação de área da garganta que é dado pela equação a seguir, conforme mostrado em [?]:

$$\frac{A_{2g}^*}{A_g^*} = \frac{P_{01}}{P_{02}} \quad (2.54)$$

Os valores antes e depois do choque normal são representados pela Fig. ??.

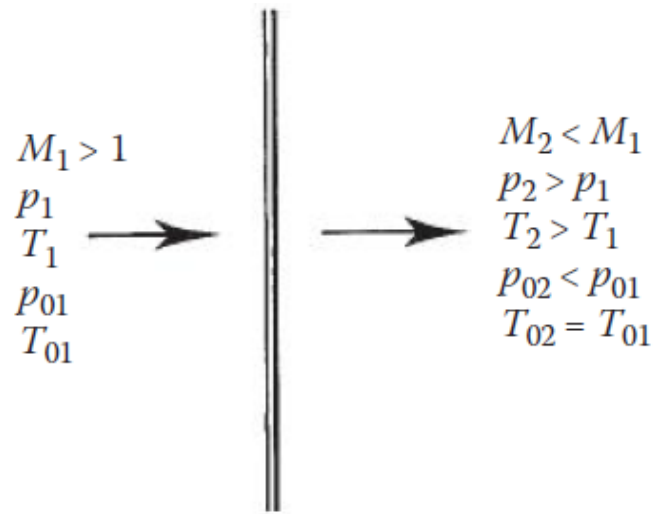


Figura 2.10: Valores das variáveis do escoamento antes e depois do choque normal

Fonte: ([?], p. 108)

## 2.14 Coeficiente de Pressão

Ao se utilizar dados teóricos e experimentais, para análise de resultados de testes aerodinâmicos, é conveniente a utilização de coeficientes adimensionais que levem em conta apenas a configuração da geometria e o ângulo de ataque, e o coeficiente de pressão é um parâmetro muito utilizado para a comparação de resultados e é dado pela Eq. (2.55),

$$C_P = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \frac{P - P_\infty}{P_\infty} \quad (2.55)$$

O coeficiente de pressão pode ser entendido como a relação entre as forças de pressão e inércia, [2] e [3].

# Capítulo 3

## Bocal Quase-Unidimensional

Neste capítulo, serão utilizadas as equações que modelam o escoamento isentrópico estacionário e o choque normal estacionário de modo a descrever o escoamento compressível dentro de bocais quase-unidimensionais, mostrando as diversas situações, com e sem a existência de onda de choque, que podem ocorrer de acordo com a velocidade na seção de entrada do bocal.

Sendo assim, utilizando as equações citadas anteriormente, serão mostrados à seguir algoritmos para o cálculo das soluções analíticas para situações com e sem onda de choque como solução, onde serão calculados os valores da velocidade, número de Mach, massa específica e pressão que serão utilizados para comparação com as soluções numéricas que serão mostradas no Cap. ???. Será considerado como solução analítica os resultados fornecidos pelas relações de escoamento isentrópico estacionário e choque normal estacionário, obtidos através do número de Mach que será calculado por meio do método de Newton na Eq. (??).

### 3.1 Algoritmos

#### 3.1.1 Escoamento sem Onda de Choque

Neste algoritmo será calculado os valores referentes ao número de Mach, velocidade, pressão e massa específica para um escoamento sem onda de choque como solução.

1. Dados de entrada;
  - Posição inicial

- Posição final
  - Número de nós
  - Relação dos calores específicos do fluido considerado
  - Aproximação inicial do número de Mach na entrada do bocal
  - Aproximação inicial da posição da garganta no bocal
  - Massa específica de estagnação
  - Pressão de estagnação
  - Número máximo de iterações a ser realizado durante a execução do método de Newton para o cálculo do número de Mach na Eq. (??) e da posição da garganta do bocal
  - Equação da relação de área que define a geometria do bocal
2. Calcular o valor da área do bocal desde  $i = 1$  até  $i = nx$ ;
  3. Definição do valor da área da garganta (Área de menor valor do bocal);
  4. Cálculo da posição da garganta no bocal através do método de Newton para cálculo de raízes;
  5. Localização do índice discreto  $i$  onde se encontra a garganta;
  6. Cálculo do número de Mach através da utilização do método de Newton para cálculo de raízes na Eq. (??);
  7. Cálculo dos valores da pressão Eq. (??), massa específica Eq. (??) e velocidade Eqs. (??) e (??);
  8. Saída: Gráficos de pressão, massa específica, e velocidade.

### 3.1.2 Escoamento com Onda de Choque

Neste algoritmo será calculado os valores referentes ao número de Mach, velocidade, pressão e massa específica para um escoamento com onda de choque como solução.

1. Dados de entrada;

- Posição inicial
  - Posição final
  - Número de nós
  - Relação dos calores específicos do fluido considerado
  - Aproximação inicial do número de Mach na entrada do bocal
  - Aproximação inicial da posição da garganta no bocal
  - Massa específica de estagnação
  - Pressão de estagnação
  - Posição do choque
  - Número máximo de iterações a ser realizado durante a execução do método de Newton para o cálculo do número de Mach na Eq. (??) e da posição da garganta do bocal.
  - Equação da relação de área que define a geometria do bocal
2. Calcular do valor da área desde  $i = 1$  até  $i = nx$ ;
  3. Definição do valor da área da primeira garganta (Área de menor valor do bocal);
  4. Cálculo da posição da garganta no bocal através do método de Newton para cálculo de raízes;
  5. Localização do índice discreto  $i$  onde se encontra a garganta;
  6. Localização do índice discreto  $i$  onde se encontra o choque;
  7. Cálculo do número de Mach antes do choque através da utilização do método de Newton para cálculo de raízes na Eq. (??);
  8. Cálculo da relação das pressões de estagnação antes e depois do choque através da Eq. (??);
  9. Cálculo do valor da área da segunda garganta (após o choque) através da Eq. (??);
  10. Cálculo do número de Mach após o choque através da utilização do método de Newton para cálculo de raízes na Eq. (??). Neste passo deverá ser utilizado o valor da segunda garganta, calculado no passo 7;

11. Cálculo dos valores da pressão Eq. (??), massa específica Eq. (??) e velocidade Eqs. (??) e (??);
12. Saída: Gráficos de pressão, massa específica e velocidade.

## 3.2 Bocal Divergente

Considerando o bocal divergente dado por [?] e modelado pela Eq. (??),

$$A(x) = 1,398 + 0,347 \cdot \tanh(0,8x - 4) \quad 0 \leq x \leq 10 \quad (3.1)$$

que é representado pela Fig. ??,

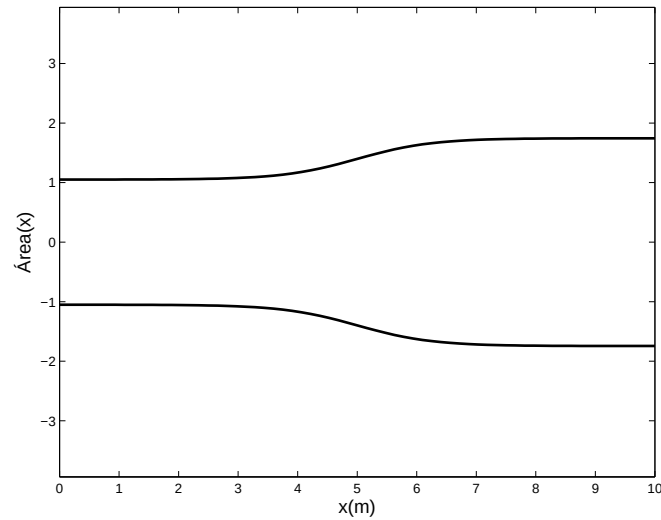


Figura 3.1: Bocal Divergente Quase-Unidimensional

e percebendo-se, que para esta geometria a entrada do bocal coincide com a garganta, ou seja, em todos os casos a entrada terá velocidade supersônica, variando apenas a velocidade na saída de acordo com a existência ou não de onda de choque e a sua respectiva posição. A seguir, tem-se os seguintes casos para o bocal divergente.

### 3.2.1 Caso 1: Bocal Divergente: Entrada e Saída Supersônica

Neste caso, como a velocidade na saída do bocal é supersônica, não existirá onda de choque devido à combinação dos valores da velocidade, pressão e massa específica nas seções de entrada e saída do bocal.

Considerando-se a Eq. (??) e os seguintes dados do problema:

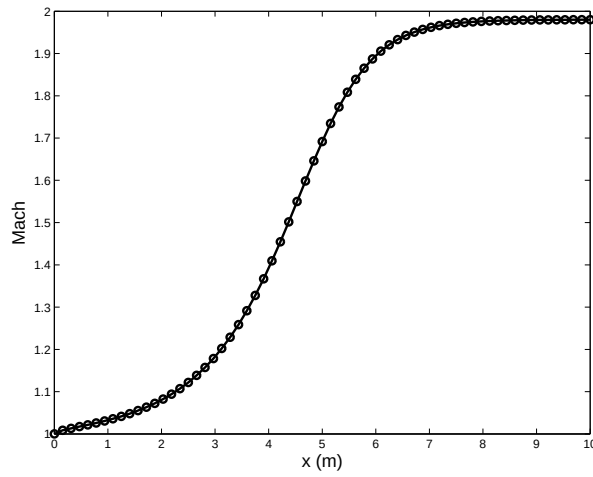
Número de nós = 65

Aproximação inicial do Número de Mach = 2,4000

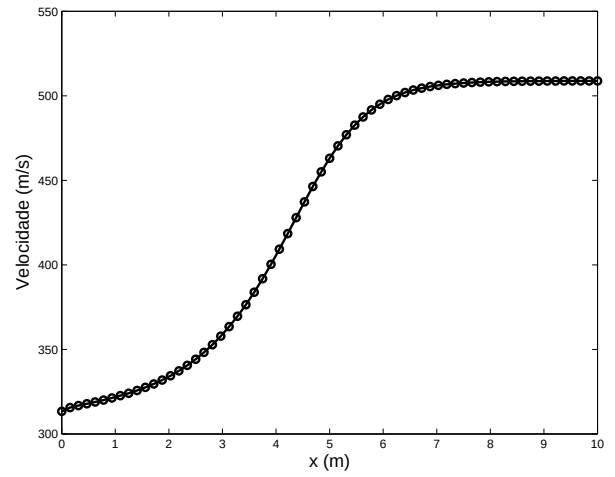
Aproximação inicial da posição da garganta = 0,3000 m

$P_0 = 101,3250 \text{ kPa}$ ;  $\rho_0 = 1,2040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ;  $\gamma = 1,4$

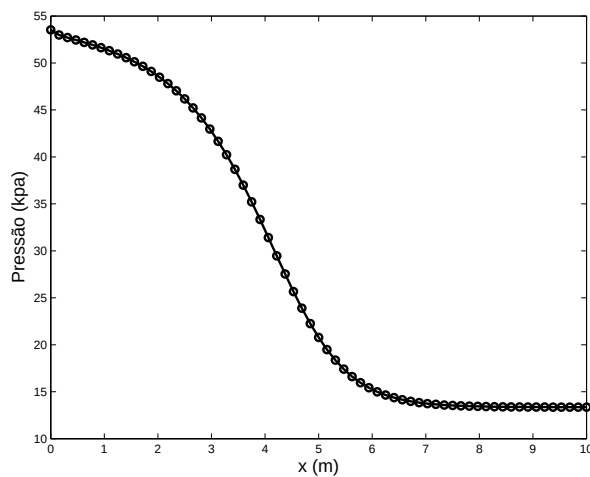
pode-se obter a solução computacional discreta que pode ser vista nos gráficos da Fig. ?? através do algoritmo mostrado no item ??.



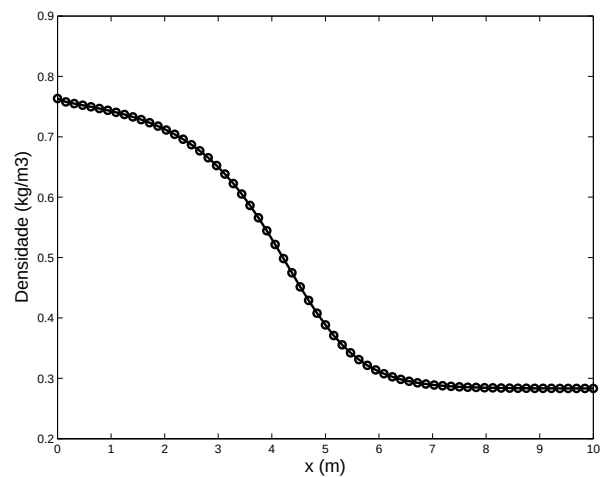
(a) Número de Mach



(b) Velocidade



(c) Pressão



(d) Massa específica

Figura 3.2: Solução Analítica Discreta - Caso 1

e também é possível calcular analiticamente os seguintes valores das variáveis primiti-

vas nas seções de entrada e saída do bocal que foram obtidos através cálculos manuais utilizando a tabela de escoamento isentrópico, e são dados pela tabela 3.1.

| Seção de Entrada                                      | Seção de Saída                                     |
|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $\frac{A_{en}}{A^*} = \frac{1,0512}{1,0512} = 1,0000$ | $\frac{A_s}{A^*} = \frac{1,7448}{1,0512} = 1,6547$ |
| $M_{en} = 1,0000 \text{ Mach}$                        | $M_s = 1,9800 \text{ Mach}$                        |
| $P_{en} = 53.5282 \text{ kPa}$                        | $P_s = 13,3585 \text{ kPa}$                        |
| $\rho_{en} = 0.7630 \text{ kg/m}^3$                   | $\rho_s = 0.2832 \text{ kg/m}^3$                   |

Tabela 3.1: Resultado analítico nas seções de entrada e de saída - Caso 1

### 3.2.2 Caso 2: Bocal Divergente - Entrada Supersônica e Saída Subsônica

Neste caso, como a velocidade na saída do bocal é subsônica, existirá uma onda de choque devido à combinação dos valores da velocidade, pressão e massa específica na entrada e na saída do bocal.

Considerando-se a Eq. (??) e os seguintes dados do problema:

$$\text{Número de nós} = 65$$

$$\text{Posição do choque} = 4,6875 \text{ m}$$

$$\text{Aproximação inicial do número de Mach} = 2,4000$$

$$\text{Aproximação inicial da posição da garganta} = 0,3000 \text{ m}$$

$$P_0 = 101,3250 \text{ kPa}; \rho_0 = 1,2040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \gamma = 1,4$$

pode-se calcular analiticamente os seguintes valores das variáveis primitivas nas seções de entrada, imediatamente antes e após o choque e saída do bocal e que foram obtidos através pelo mesmo procedimento da Seção ??, e são dados pelas tabelas 3.2 e 3.3.

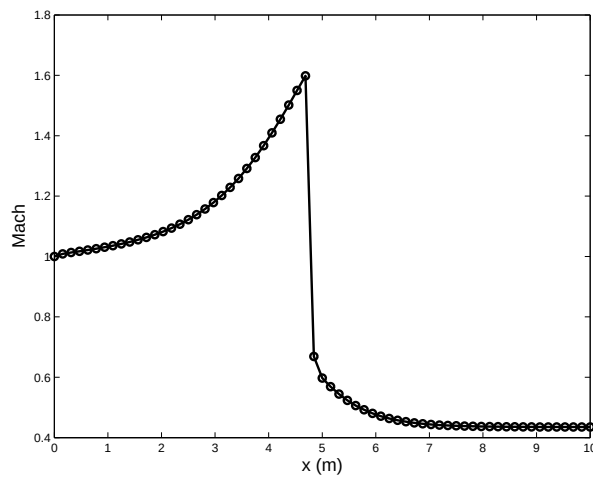
| Seção de Entrada                                      | Seção imediatamente antes do choque                   |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\frac{A_{en}}{A^*} = \frac{1,0512}{1,0512} = 1,0000$ | $\frac{A_{ac}}{A^*} = \frac{1,3130}{1,0512} = 1,2490$ |
| $M_{en} = 1,0000 \text{ Mach}$                        | $M_{ac} = 1,5985 \text{ Mach}$                        |
| $P_{en} = 53.5282 \text{ kPa}$                        | $P_{ac} = 23,8921 \text{ kPa}$                        |
| $\rho_{en} = 0,7630 \text{ kg/m}^3$                   | $\rho_{ac} = 0,4290 \text{ kg/m}^3$                   |

Tabela 3.2: Resultado analítico nas seções antes do choque - Caso 2

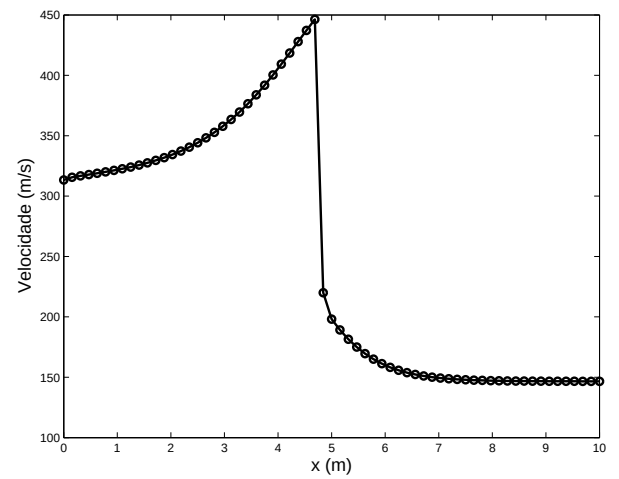
| Seção imediatamente após o choque              | Seção de saída                                       |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| Não se calcula relação de área para esta seção | $\frac{A_s}{A_2^*} = \frac{1,3130}{1,0512} = 1,2490$ |
| $M_{dc} = 0,6689 \text{ Mach}$                 | $M_s = 0,4352 \text{ Mach}$                          |
| $P_{dc} = 67,2414 \text{ kPa}$                 | $P_s = 79,6895 \text{ kPa}$                          |
| $\rho_{dc} = 0,8706 \text{ kg/m}^3$            | $\rho_s = 0,09829 \text{ kg/m}^3$                    |

Tabela 3.3: Resultado analítico nas seções após o choque - Caso 2

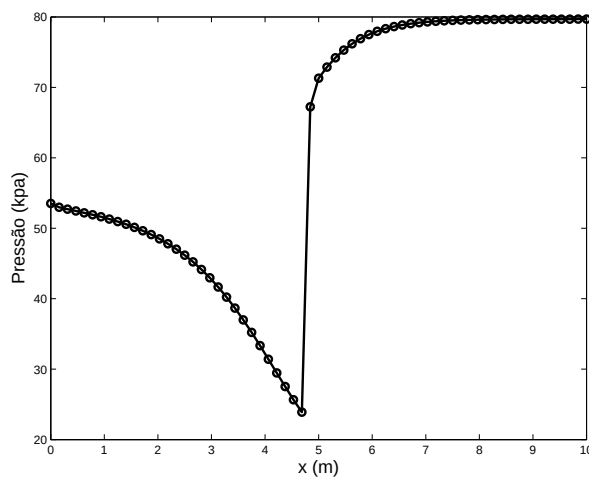
A solução computacional discreta mostrada na Fig. ?? foi obtida através do algoritmo que se encontra na Seção ??.



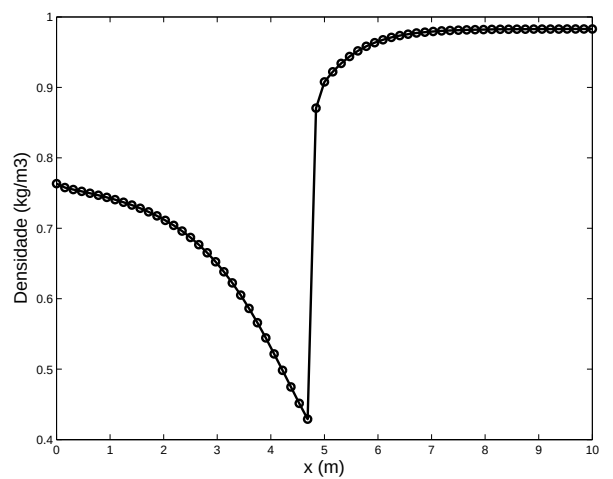
(a) Número de Mach



(b) Velocidade



(c) Pressão



(d) Massa específica

Figura 3.3: Solução Analítica Discreta - Caso 2

### 3.3 Bocal Convergente-Divergente Simétrico

Considerando o bocal convergente-divergente dado por [?] e modelado pela Eq. (??),

$$A(x) = 1 - 0,8 \cdot x \cdot (1 - x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.2)$$

que é representado pela Fig. ??

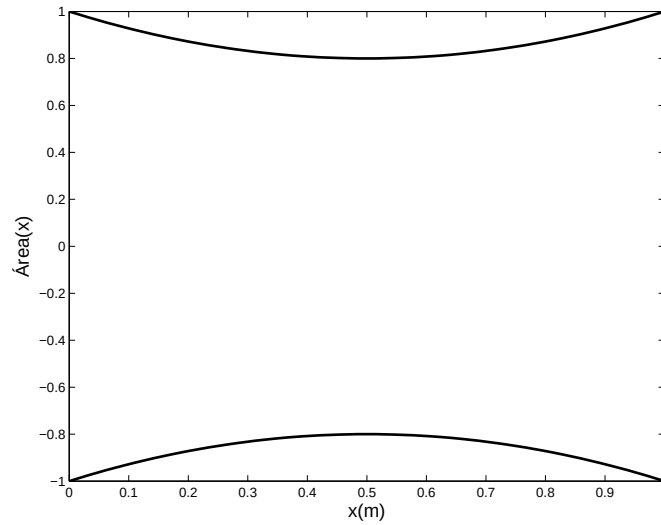


Figura 3.4: Bocal Convergente-Divergente Quasi-Unidimensional

Para esta geometria, a garganta fica na metade do bocal, o que permite a ocorrência de quatro tipos de escoamento de acordo com as velocidades na entrada e na saída do bocal, sendo eles, subsônico/supersônico sem choque, subsônico/supersônico com choque, subsônico/subsônico sem choque e supersônico/supersônico sem choque, que também serão calculados através dos algoritmos apresentados nas Seções ?? e ??. Serão apresentados à seguir dois dos casos mencionados acima.

#### 3.3.1 Caso 3: Bocal Convergente/Divergente Simétrico - Entrada e Saída Supersônica

Neste caso, como a velocidade na saída do bocal é supersônica, não existirá uma onda de choque devido à combinação dos valores da velocidade, pressão e massa específica nas seções de entrada e saída do bocal.

Considerando-se a Eq. (??) e os seguintes dados do problema:

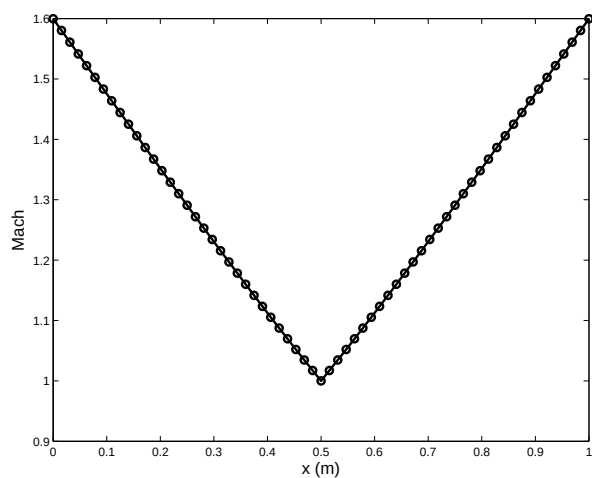
Número de nós = 65

Aproximação inicial do Número de Mach = 2,0000

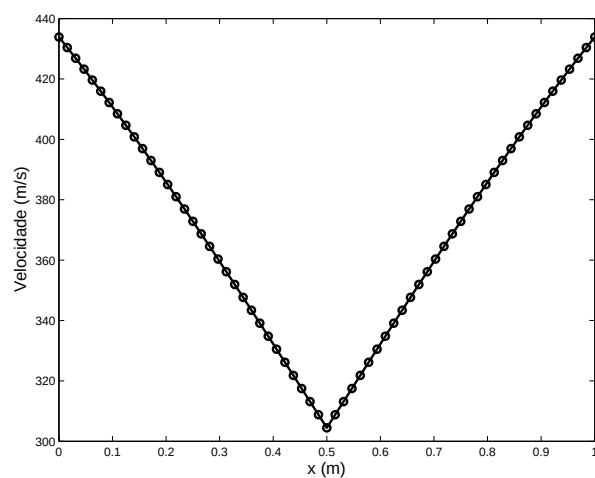
Aproximação inicial da posição da garganta = 0,3000 m

$$P_0 = 101,3250 \text{ kPa}; \rho_0 = 1,2040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \gamma = 1,4$$

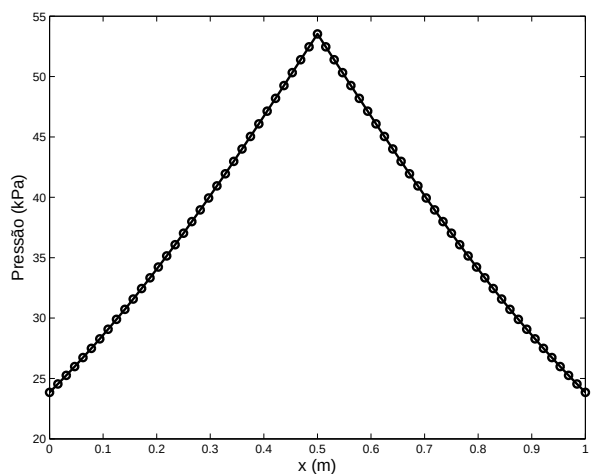
pode-se obter a solução computacional discreta que pode ser vista nos gráficos da Fig. ?? através do algoritmo mostrado no item ??,



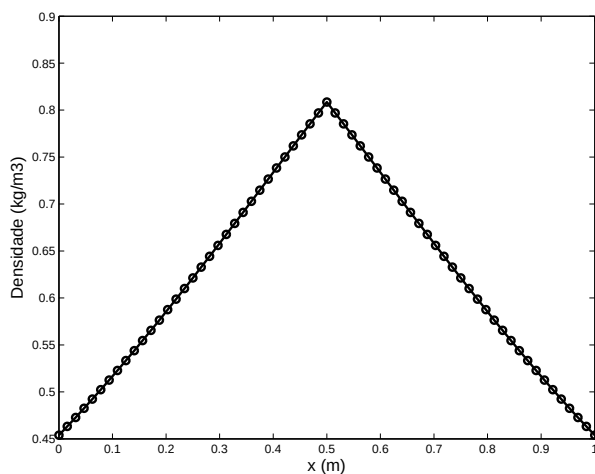
(a) Número de Mach



(b) Velocidade



(c) Pressão



(d) Massa específica

Figura 3.5: Solução Analítica Discreta - Caso 3

e também pode-se calcular analiticamente os seguintes valores das variáveis primitivas nas seções de entrada e saída do bocal que foram obtidos através de cálculos manuais utilizando a tabela de escoamento isentrópico, e são dados pela tabela 3.4.

| Seção de Entrada                                      | Seção de Saída                                     |
|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $\frac{A_{en}}{A^*} = \frac{1,0000}{0,8000} = 1,2500$ | $\frac{A_s}{A^*} = \frac{1,0000}{0,8000} = 1,2500$ |
| $M_{en} = 1,5997 \text{ Mach}$                        | $M_s = 1,5997 \text{ Mach}$                        |
| $P_{en} = 23,8492 \text{ kPa}$                        | $P_s = 23,8492 \text{ kPa}$                        |
| $\rho_{en} = 0,4285 \text{ kg/m}^3$                   | $\rho_s = 0,4285 \text{ kg/m}^3$                   |

Tabela 3.4: Resultado nas seções de entrada e de saída - Caso 3

### 3.3.2 Caso 4: Bocal Convergente/Divergente Simétrico - Entrada e saída subsônica

Neste caso, como as velocidades na entrada e saída do bocal são subsônicas, existirá uma onda de choque devido à combinação dos valores da velocidade, pressão, massa específica e temperatura nas seções de entrada e saída do bocal.

Considerando-se a Eq. (??) e os seguintes dados do problema:

Número de nós = 65

Posição do choque = 0,7500 m

Aproximação inicial do número de Mach = 0,2500

Aproximação inicial da posição da garganta = 0,3000 m

$P_0 = 101,3250 \text{ kPa}$ ;  $\rho_0 = 1,2040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ;  $\gamma = 1,4$

Pode-se calcular analiticamente os seguintes valores das variáveis primitivas nas seções de entrada, imediatamente antes e depois do choque e saída do bocal, que foram obtidos através de cálculos manuais utilizando as tabelas de escoamento isentrópico e choque normal, e são dados pelas tabelas 3.5 e 3.6.

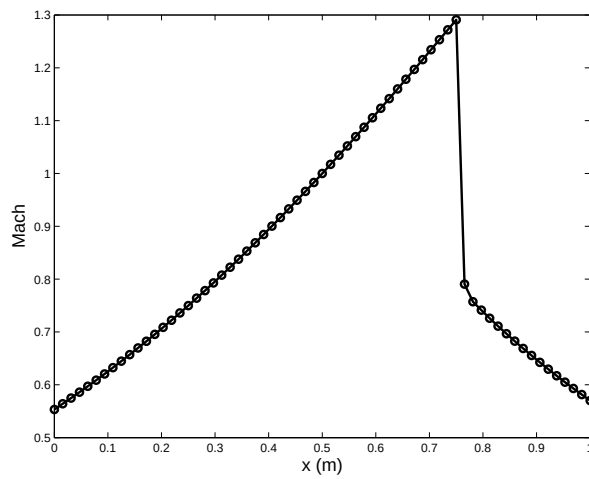
| Seção de Entrada                                      | Seção imediatamente antes do choque                   |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\frac{A_{en}}{A^*} = \frac{1,0000}{0,8000} = 1,2500$ | $\frac{A_{ac}}{A^*} = \frac{0,8500}{0,8000} = 1,0625$ |
| $M_{en} = 0,5533 \text{ Mach}$                        | $M_{ac} = 1,2967 \text{ Mach}$                        |
| $P_{en} = 82,3780 \text{ kPa}$                        | $P_{ac} = 37,0923 \text{ kPa}$                        |
| $\rho_{en} = 1,0379 \text{ kg/m}^3$                   | $\rho_{ac} = 0,5877 \text{ kg/m}^3$                   |

Tabela 3.5: Resultado nas seções antes do choque - Caso 4

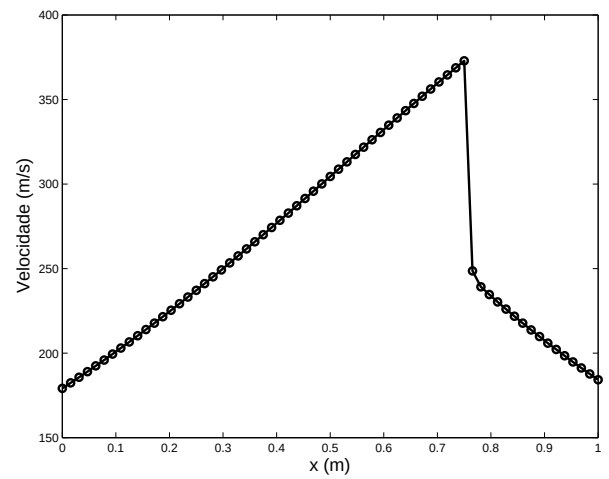
| Seção imediatamente após o choque              | Seção de saída                                       |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| Não se calcula relação de área para esta seção | $\frac{A_s}{A_2^*} = \frac{1,0000}{0,8156} = 1,2262$ |
| $M_{dc} = 0,7900 \text{ Mach}$                 | $M_s = 0,5714 \text{ Mach}$                          |
| $P_{dc} = 67,0405 \text{ kPa}$                 | $P_s = 81,3594 \text{ kPa}$                          |
| $\rho_{dc} = 0,8979 \text{ kg/m}^3$            | $\rho_s = 1,0304 \text{ kg/m}^3$                     |

Tabela 3.6: Resultado nas seções após o choque - Caso 4

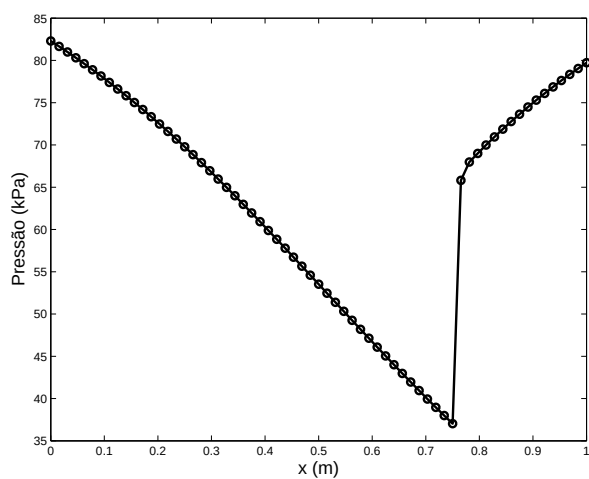
A solução computacional obtida através do algoritmo mostrado na Seção ?? pode ser vista nos gráficos da Fig. ??.



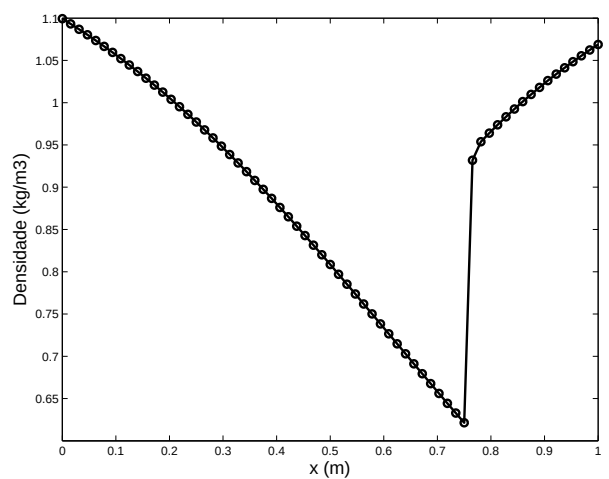
(a) Número de Mach



(b) Velocidade



(c) Pressão



(d) Massa específica

Figura 3.6: Solução Analítica Discreta - Caso 4

### 3.4 Bocal Convergente/Divergente Assimétrico

O bocal convergente-divergente assimétrico é modelado pela seguinte equação,

$$A(x) = \begin{cases} 1 + 1,5 \cdot \left(1 - \frac{x}{5}\right)^2 & x \leq 5 \\ 1 + 0,008 \cdot (x - 5)^2 & x > 5 \end{cases} ; \quad 0 \leq x \leq 10 \quad (3.3)$$

que é representada na Fig. ??

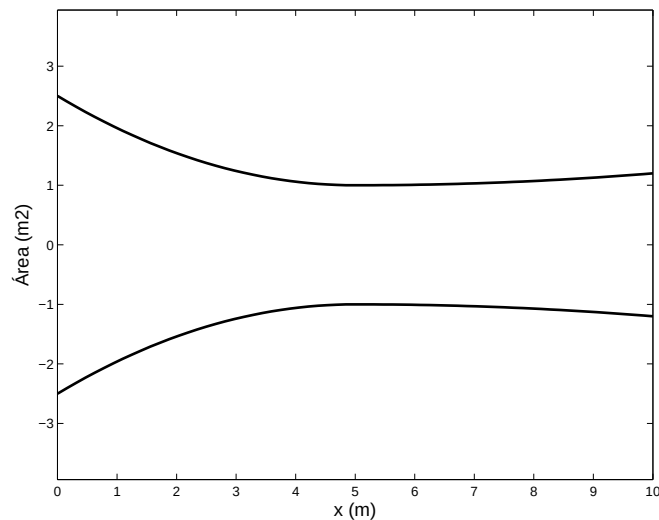


Figura 3.7: Bocal Convergente-Divergente Quasi-Unidimensional Assimétrico

Para esta geometria, pode-se reparar que a garganta se localiza na metade do comprimento total do bocal sendo que a seção convergente possui uma variação de área maior do que a seção divergente. Da mesma maneira que para o bocal convergente/divergente simétrico, poderão existir as seguintes condições de escoamento nas seções de entrada e de saída do bocal, sendo elas, subsônico/supersônico sem choque, subsônico/supersônico com choque, subsônico/subsônico sem choque e supersônico/supersônico sem choque.

#### 3.4.1 Caso 5: Bocal Convergente/Divergente Assimétrico - Entrada e saída subsônica

Considerando-se a Eq. (??) e os seguintes dados do problema:

Número de nós = 65

Aproximação inicial do Número de Mach = 0,3000

Aproximação inicial da posição da garganta na seção convergente = 3,0000 m

Aproximação inicial da posição da garganta na seção divergente = 7,0000 m

$$P_0 = 101,3250 \text{ kPa}; \rho_0 = 1,2040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \gamma = 1,4$$

utilizando o algoritmo mostrado na Seção ??, é possível obter os seguintes valores das variáveis do escoamento nas seções de entrada, imediatamente antes e depois do choque e saída, conforme é mostrado nas Tabs. 3.7 e 3.8.

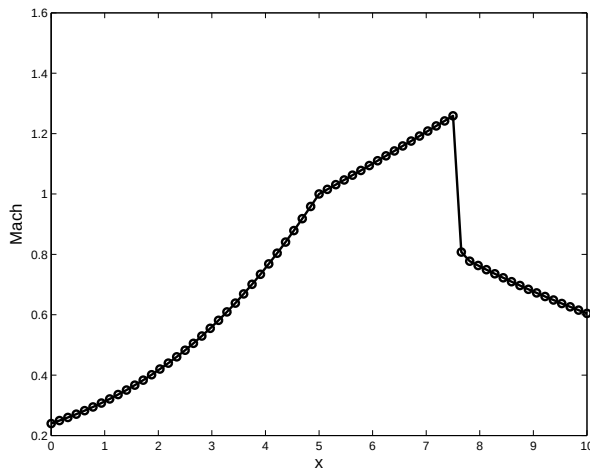
| Seção de Entrada                                      | Seção imediatamente antes do choque                   |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\frac{A_{en}}{A^*} = \frac{2,5000}{1,0000} = 2,5000$ | $\frac{A_{ac}}{A^*} = \frac{1,0500}{0,8000} = 1,3125$ |
| $M_{en} = 0,2395 \text{ Mach}$                        | $M_{ac} = 1,2589 \text{ Mach}$                        |
| $P_{en} = 97,3580 \text{ kPa}$                        | $P_{ac} = 38,6548 \text{ kPa}$                        |
| $\rho_{en} = 1,2395 \text{ kg/m}^3$                   | $\rho_{ac} = 0,6408 \text{ kg/m}^3$                   |

Tabela 3.7: Resultado nas seções antes do choque - Caso 5

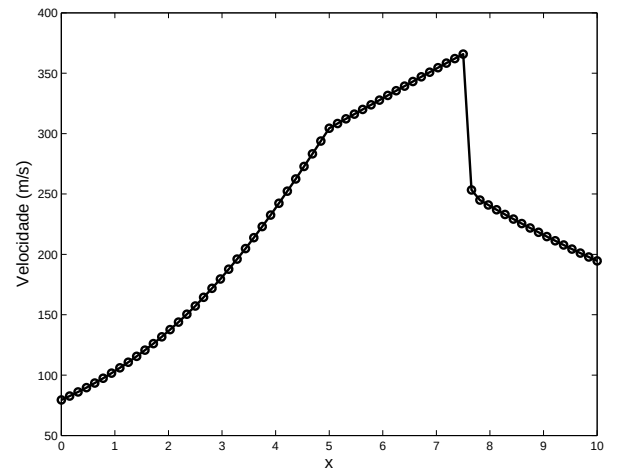
| Seção imediatamente após o choque              | Seção de saída                                       |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| Não se calcula relação de área para esta seção | $\frac{A_s}{A_2^*} = \frac{1,2000}{1,0144} = 1,1830$ |
| $M_{dc} = 0,8077 \text{ Mach}$                 | $M_s = 0,6044 \text{ Mach}$                          |
| $P_{dc} = 65,0295 \text{ kPa}$                 | $P_s = 78,0405 \text{ kPa}$                          |
| $\rho_{dc} = 0,9253 \text{ kg/m}^3$            | $\rho_s = 1,0541 \text{ kg/m}^3$                     |

Tabela 3.8: Resultado nas seções após o choque - Caso 5

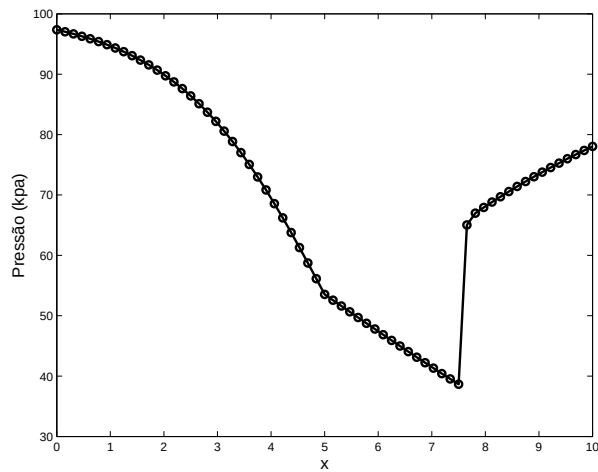
e valores das variáveis primitivas do escoamento em todo o domínio podem ser vistos à seguir.



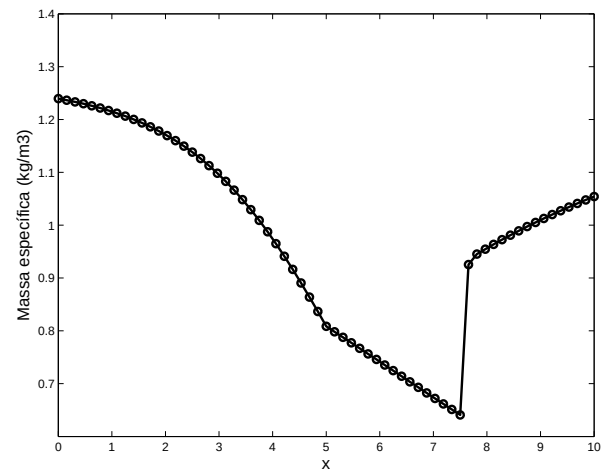
(a) Número de Mach



(b) Velocidade



(c) Pressão



(d) Massa específica

Figura 3.8: Solução Analítica Discreta - Caso 5

Os resultados obtidos para todos os casos estão de acordo com os resultados dos cálculos manuais realizados através do procedimento mostrado no apêndice A.

# Capítulo 4

## Métodos Numéricos para Leis de Conservação

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, serão mostrados alguns métodos numéricos utilizados para a resolução de problemas que envolvem Leis de conservação hiperbólicas. Serão mostrados os conceitos de critério de estabilidade, viscosidade artificial, equação modificada e método TVD.

### 4.2 Estabilidade Numérica

A estabilidade de um método numérico é definida de acordo com o texto compilado de [?]: *"Estabilidade é uma condição da solução numérica, que diz que todos os erros, como por exemplo erros de aproximação (devido a aritmética finita do computador) devem permanecer limitados conforme o processo iterativo avança. Isto é, para valores finitos de  $\Delta x$  e  $\Delta t$ , o erro (definido com a diferença entre a solução numérica e a solução exata do esquema numérico) deve permanecer limitada, quando o número de passos temporais  $n$  tende para o infinito."*

A estabilidade de um método numérico pode ser determinada através do critério de estabilidade de von Neumann, conforme mostrado adiante. Nesta seção, excepcionalmente, será utilizado o índice discreto  $j$  para a direção  $x$ , para evitar o uso do símbolo  $i$  que será utilizado para representar a unidade imaginária.

### 4.2.1 Critério de Estabilidade de von Neumann

Considerando que os erros de uma função  $u$  podem ser escritos na forma de uma série de Fourier dada por

$$u(x, t) = \sum_m \hat{u}_m(t) e^{i \cdot \omega \cdot x} \quad (4.1)$$

onde  $\hat{u}_m$  corresponde a amplitude do  $m$ -ésimo harmônico da solução e  $\omega$  é o número de onda. Tomando um termo da expansão

$$u(x, t) = \hat{u}_m(t) e^{i \cdot \omega \cdot x} \quad (4.2)$$

para ser avaliado em  $(x_j, t^n)$  obtêm-se

$$u(x, t) = \hat{u}_m(t^n) e^{i \cdot \omega \cdot j \cdot \Delta x} = \hat{u}_m(t^n) e^{i \cdot j \cdot \phi} \quad (4.3)$$

onde o espaço é discretizado pelo índice  $j$  e  $\omega \cdot \Delta x$  corresponde ao ângulo de fase  $\phi$ . Portanto a taxa de crescimento  $G$  é dada por

$$G = \left| \frac{\hat{u}_m^{n+1}}{\hat{u}_m^n} \right| \leq 1 \quad (4.4)$$

para que o esquema seja estável. Para maiores detalhes, veja [?] e [?].

#### 4.2.1.1 Exemplo 1: Equação da Advecção Linear - Discretização FTCS

Esquemas que utilizam aproximação por diferenças finitas centradas no espaço, em geral, são *incondicionalmente instáveis*. Essa instabilidade será comprovada através da utilização da análise de estabilidade mostrada na Seção ?? aplicada à equação de advecção linear que é dada por

$$u_t + au_x = 0 \quad (2.4)$$

executando os seguintes passos.

**Passo 1:** Discretizar a Eq. (??) utilizando o método das diferenças finitas através do critério *FTCS* (Forward Time Centered Space), que significa “avante no tempo e centrado

no espaço”

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (4.5)$$

**Passo 2:** Substituir a Eq. (??) na Eq. (??)

$$\frac{\hat{u}^{n+1} e^{i \cdot j \cdot \phi} - \hat{u}^n e^{i \cdot j \cdot \phi}}{\Delta t} + \frac{\hat{u}^n e^{i \cdot (j+1) \cdot \phi} - \hat{u}^n e^{i \cdot (j-1) \cdot \phi}}{2\Delta x} = 0$$

**Passo 3:** Dividir a equação resultante por  $\hat{u}^n e^{i \cdot j \cdot \phi}$  e reorganizar os termos

$$\frac{\frac{\hat{u}^{n+1}}{\hat{u}^n} - 1}{\Delta t} + a \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2\Delta x} = 0$$

$$\frac{\hat{u}^{n+1}}{\hat{u}^n} = -\frac{a\Delta t}{2\Delta x} (e^{i\phi} - e^{-i\phi}) + 1$$

**Passo 4:** Escrever a equação da taxa de crescimento em termo de funções trigonométricas

Utilizando a seguinte relação de Euler

$$e^{i\phi} - e^{-i\phi} = 2 \cdot i \cdot \sin \phi$$

têm-se

$$G = 1 - i \cdot \left( a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \cdot \sin \phi \quad (4.6)$$

**Passo 5:** Multiplicar a Eq. (??) pelo seu conjugado

$$|G|^2 = G \cdot G^* = 1 + \left( a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \phi \geq 1 \quad (4.7)$$

A Eq. (??) não atende o critério definido pela Eq. (??), ou seja, esse método é incondicionalmente instável. Maiores detalhes podem ser encontrados em [?].

#### 4.2.1.2 Exemplo 2: Equação da Advecção Linear - Discretização FTCS Estabilizada

O método de discretização utilizando o método das diferenças finitas com diferenças avanço no tempo e centradas no espaço, também conhecido FTCS, dado pela Eq. (??), pode ser estabilizado substituindo o termo  $u_j^n$  da equação pela média  $(u_{j+1} + u_{j-1})/2$ , obtendo-se assim o esquema de Lax-Friedrichs cujo *Stencil*<sup>1</sup> é dado pela Fig. ??, e que será avaliado através do critério de estabilidade de Von-Neumann.

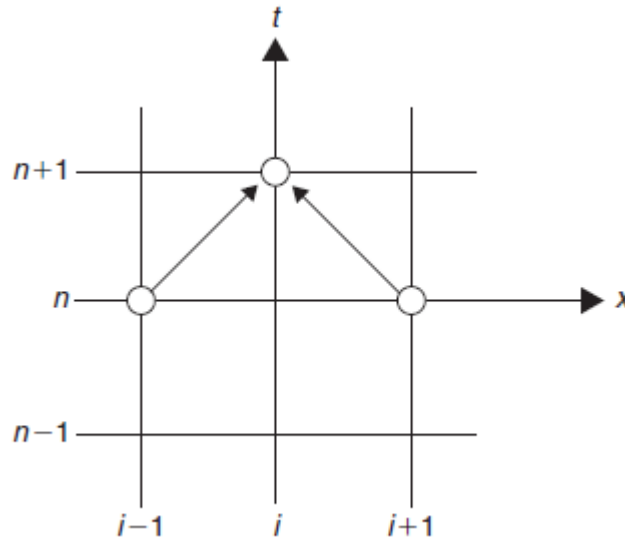


Figura 4.1: *Stencil* do esquema de Lax-Friedrichs

Fonte: ([?], p. 306)

**Passo 1:** Escrever o esquema de Lax-Friedrichs através da modificação da Eq. (??)

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \left( a \frac{\Delta t}{2\Delta x} \right) (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (4.8)$$

**Passo 2:** Substituir a Eq. (??) na Eq. (??)

$$\hat{u}^{n+1} e^{i \cdot j \cdot \phi} = \frac{\hat{u}^n e^{i \cdot (j+1) \cdot \phi} + \hat{u}^n e^{i \cdot (j-1) \cdot \phi}}{2} - \left( a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \left( \frac{\hat{u}^n e^{i \cdot (j+1) \cdot \phi} - \hat{u}^n e^{i \cdot (j-1) \cdot \phi}}{2} \right)$$

**Passo 3:** Dividir a equação resultante por  $\hat{u}^n e^{i \cdot j \cdot \phi}$  e rearranjar os termos

<sup>1</sup>*Stencil*: Molécula discreta no domínio computacional

$$\frac{\hat{u}^{n+1}}{\hat{u}^n} = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} - \left(a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \left(\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2}\right)$$

**Passo 4:** Escrever a equação da taxa de crescimento em termo de funções trigonométricas

Utilizando as seguintes relações de número complexo de Euler

$$e^{i\phi} - e^{-i\phi} = 2 \cdot i \cdot \sin \phi$$

$$e^{i\phi} + e^{-i\phi} = 2 \cos \phi$$

têm-se

$$G = \cos \phi - i \cdot \left(a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \cdot \sin \phi \quad (4.9)$$

**Passo 5:** Multiplicar a Eq. (??) pelo seu conjugado

$$|G|^2 = G \cdot G^* = \cos^2 \phi + \left(a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 \phi \leq 1; \quad \forall \quad \left(a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \leq 1 \quad (4.10)$$

A análise de von Neumann não se aplica para métodos não-lineares, porém, é possível linearizar localmente a equação como uma maneira para que seja possível realizar a análise de estabilidade. Para maiores detalhes, ver [?].

## 4.3 Viscosidade Artificial - Dissipação e Dispersão Numérica

Considerando novamente a equação de advecção linear dada pela Eq. (??) e também a discretização FTCS estabilizada (Esquema de Lax-Friedrichs) dada pela Eq. (??)

$$u_t + au_x = 0 \quad (2.4)$$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \left(a \frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (4.8)$$

A Eq. (??) é uma solução aproximada da equação diferencial parcial hiperbólica original dada pela Eq. (??), porém, ao substituir os termos da Eq. (??) por suas expansões em séries de Taylor e realizar as manipulações necessárias, a equação obtida não será idêntica à Eq. (??), o que significa que a Eq. (??) é uma solução exata de uma outra equação que será chamada de *equação modificada* e que fornece importantes indicações à respeito do comportamento da solução numérica.

A equação modificada que resolve a Eq. (??) é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a\Delta x}{2} \left( \frac{\Delta x}{a\Delta t} - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a(\Delta x)^2}{3} \left( 1 - \left( a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \quad (4.11)$$

onde os termos com derivadas de ordem *par* representam o aspecto dissipativo da viscosidade física do escoamento, porém como os termos dissipativos presentes na equação modificada são uma consequência da discretização, esses termos são chamados “dissipação numérica” ou “viscosidade artificial” e atuam reduzindo os gradientes da solução.

De maneira análoga, as derivadas de ordem *ímpar* representam os efeitos da “dispersão numérica”, que provoca distorções (*wiggles*, em inglês) nas regiões imediatamente antes e depois da onda ou descontinuidade. Esses efeitos podem ser vistos nas figs. ?? e ??.

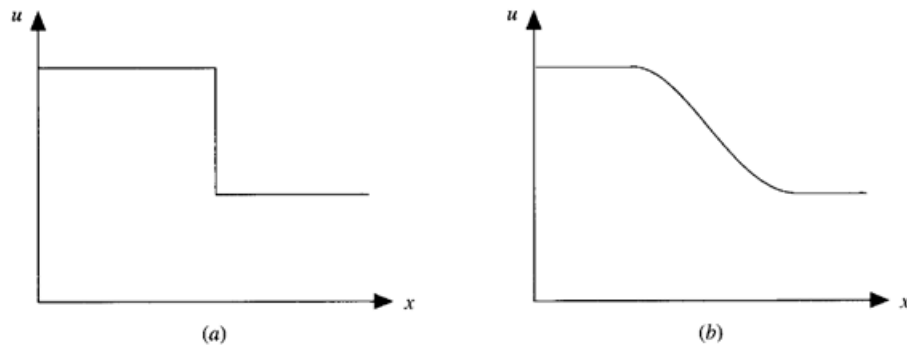


Figura 4.2: Efeito da dissipação numérica. (a) Onda inicial em  $t = 0$ . (b) Onda em  $t > 0$  afetada pela dissipação numérica

Fonte: ([?], p. 236)

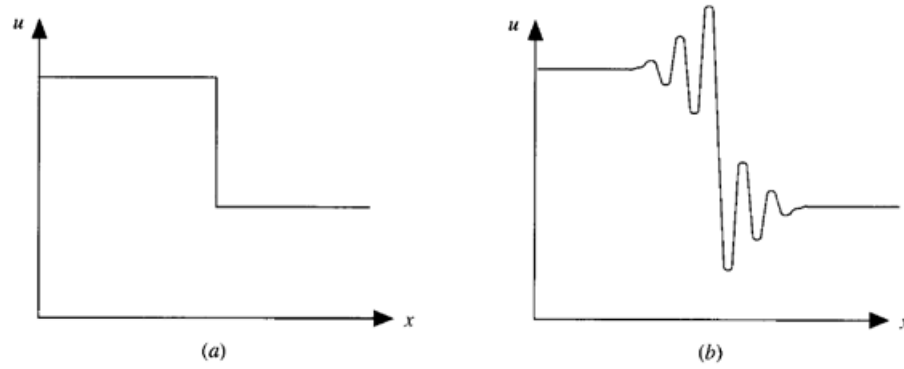


Figura 4.3: Efeito da dispersão numérica. (a) Onda inicial em  $t = 0$ . (b) Onda em  $t > 0$  afetada pela dispersão numérica

Fonte: ([?], p. 237)

A viscosidade artificial, apesar de causar distorções na solução numérica, e quanto maior for o seu uso, a solução provavelmente será menos precisa, porém, paradoxalmente, também é uma ferramenta importante para a estabilização da solução de um esquema numérico, sendo assim, a viscosidade artificial, quando utilizada na medida certa, leva na maioria das vezes à soluções com uma precisão satisfatória.

O cálculo da Eq. (??) pode ser encontrado no apêndice B, e maiores detalhes à respeito da viscosidade artificial estão disponíveis em [?], [?] e [?].

## 4.4 Leis de Conservação não Lineares

Considerando a Eq. (??) que modela as Leis de conservação escalares, será utilizada a formulação integral para as Leis de conservação mostrada pela Eq. (??) para determinar a forma geral da discretização conservativa para formulações não lineares.

$$\partial_t u + \partial_x [f(u)] = 0 \quad \text{para } t \geq 0 \text{ e } x \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

O domínio unidimensional é mostrado pela Fig. ??.

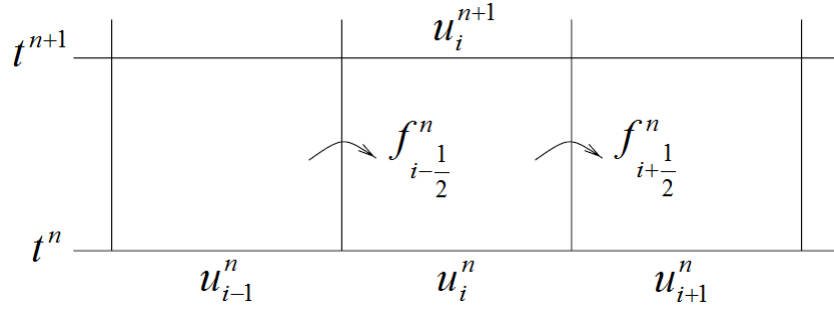


Figura 4.4: Volume de controle unidimensional para uma Lei de conservação não linear  
 Fonte: Modificada de ([?], p. 65)

onde  $f_{i+\frac{1}{2}}$  e  $f_{i-\frac{1}{2}}$  representam o fluxo através da fronteira do célula ou volume finito.

O valor de  $u_i^n$  será aproximado pela média sobre o  $i$ -ésimo intervalo no passo de tempo  $t^n$ , sendo assim

$$u_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx \quad (4.12)$$

Considerando o primeiro e o segundo termo da Eq. (??) e realizando a integração de acordo com o teorema de Green [?],

$$\oint (u dx - f dt) = 0 \quad (4.13)$$

entre o intervalo espacial  $x_{i+\frac{1}{2}}$  e  $x_{i-\frac{1}{2}}$  e temporal  $t^n$  e  $t^{n+1}$ , têm-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t^{n+1}) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx - \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

e conforme mostrado em [?], deve-se encontrar uma função  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de maneira que  $u_i^{n+1}$ ,  $u_i^n$ ,  $\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$  e  $\tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}^n$  sejam aproximações para os seguintes termos da Eq. (??),

$$u_i^{n+1} \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t^{n+1}) dx \quad (4.15)$$

$$u_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx \quad (4.16)$$

$$\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^n = \tilde{f}(u_j^n, u_{i+1}^n) \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt \quad (4.17)$$

$$\tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}^n = \tilde{f}(u_{i-1}^n, u_i^n) \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \quad (4.18)$$

desta maneira tornando possível que a Eq. (??) seja escrita da seguinte maneira

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (4.19)$$

onde  $\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$  e  $\tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}^n$  são as funções de fluxo numérico e correspondem ao valor do fluxo que atravessa as fronteiras do volume finito.

#### 4.4.1 Abordagem MUSCL

Na resolução de sistemas não lineares de Leis de conservação, ao se utilizar o método de primeira ordem de Godunov, [?], assume-se que as variáveis de estado são constantes nos volumes de controle, conforme mostrado pela Eq. (??) e que pode ser visualizada através da Fig. ??,

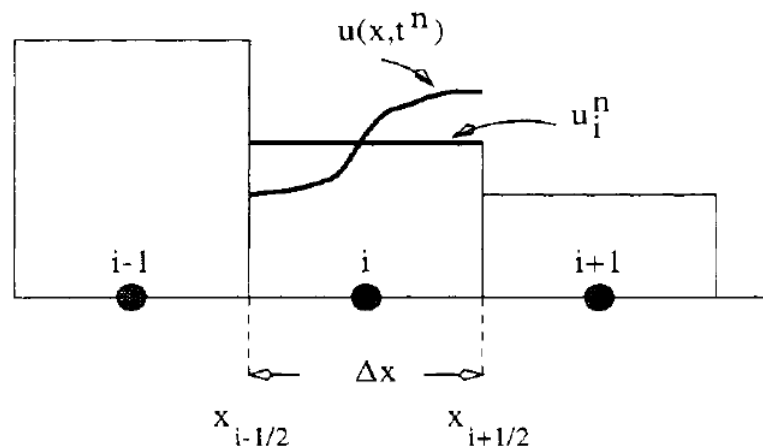


Figura 4.5: Definição de um valor constante  $u_i^n$  através da média da integral no passo de tempo  $n$

Fonte: ([?], p. 416)

Para a construção de metodologias de ordem mais alta, que produzem uma melhor

resolução espacial, foi desenvolvida a metodologia *MUSCL* (Monotone Upstream-centred Scheme for Conservation Laws) [?]. Conforme explicado em [?], para o método *MUSCL*, as variáveis de estado podem apresentar variação em seus valores ao serem extrapoladas para as fronteiras de cada um dos volumes de controle, sendo que os valores da média calculados pela Eq. (??) são utilizados para fazer a reconstrução da variação em cada volume de controle.

Conforme mostrado em [?], pode-se modificar os dados constantes por partes  $u_i^n$  ao se substituir os valores  $u_i^n$  por funções lineares por partes  $u_i(x)$ . Sendo assim, a reconstrução local por partes de  $u_i^n$  é dada por

$$u_i(x) = u_i^n + \frac{x - x_i}{\Delta x} \Delta i, \quad x \in [0, \Delta x] \quad (4.20)$$

onde  $\frac{\Delta i}{\Delta x}$  é chamada de inclinação de  $u_i(x)$  dentro do volume de controle. A reconstrução realizada pela Eq. (??) pode ser vista nas Figs. ?? e ??.

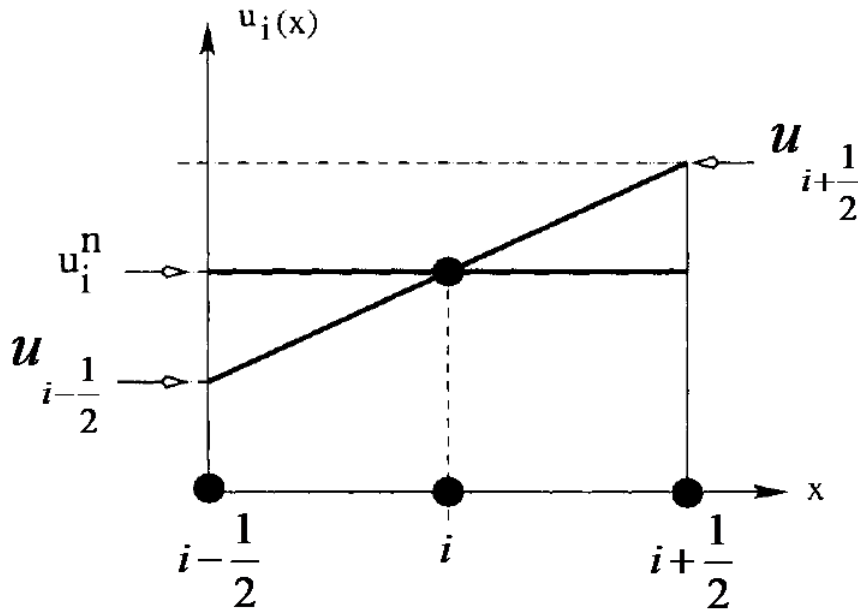


Figura 4.6: Reconstrução *MUSCL* linear por partes em único volume de controle

Fonte: Modificada de ([?], p. 423)

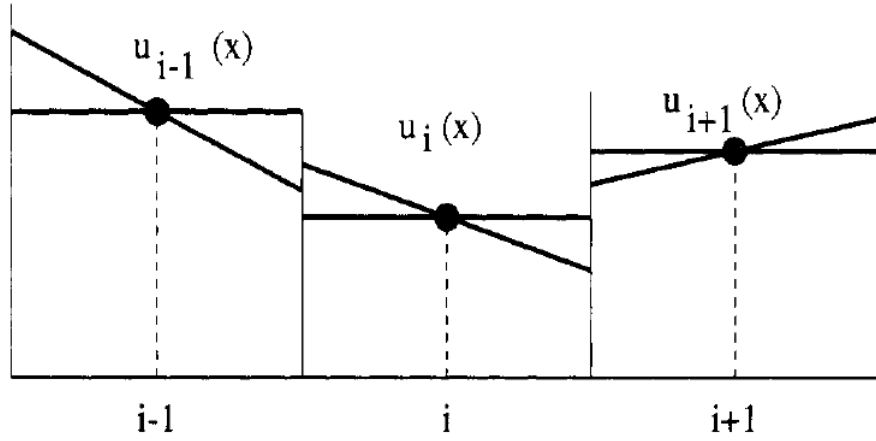


Figura 4.7: Reconstrução *MUSCL* linear por partes em três volumes de controle consecutivos

Fonte: Modificada de ([?], p. 423)

A escolha da função de fluxo numérico na Eq. (??) determina qual esquema numérico que será utilizado para solucionar a Eq. (??).

#### 4.4.2 Esquemas de Primeira Ordem de Lax-Friedrichs

Os esquemas de primeira ordem, conhecidos como esquemas de Lax ou Lax-Friedrichs, foram as primeiras técnicas de resolução aplicadas para equações não lineares e que mostraram os efeitos da dissipação na solução, porém, sua utilização é restrita devido à baixa resolução de um esquema de primeira ordem.

Aproximando os termos da Eq. (??) através do esquema de diferenças finitas *FTCS*, obtêm-se

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2} \right) \quad (4.21)$$

substituindo o termo  $u_i^n$  da Eq. (??) pela média  $(u_{i+1} + u_{i-1})/2$  para a estabilização do esquema numérico resulta em

$$u_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2} \right) \quad (4.22)$$

e para que a forma geral do esquemas conservativos dada pela Eq. (??) corresponda ao esquema de Lax-Friedrichs, as funções de fluxo numérico são dadas por

$$\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ f_i + f_{i+1} - \frac{\Delta x}{\Delta t} (u_{i+1} - u_i) \right] \quad (4.23)$$

$$\tilde{f}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ f_{i-1} + f_i - \frac{\Delta x}{\Delta t} (u_i - u_{i-1}) \right] \quad (4.24)$$

#### 4.4.3 Esquemas de Segunda Ordem de Lax-Wendroff

O esquema de Lax-Wendroff foi o primeiro método de segunda ordem no tempo e no espaço a ser desenvolvido. A ideia básica do método é manter a derivada de segunda ordem na discretização, e substituir todas as derivadas temporais por suas equivalências no espaço.

Considerando a forma geral da Lei de conservação escalar dada pela Eq. (??)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

deve-se considerar a seguinte série de Taylor

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t)^3$$

e utilizando a técnica de Cauchy-Kowalewski [?], têm-se as seguintes etapas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = -A \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

e realizando a substituição na série de Taylor, têm-se

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) - \Delta t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \dots$$

e utilizando a discretização por diferenças finitas centradas no espaço, têm-se

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[ a_{i+\frac{1}{2}} (f_{i+1} - f_i) + a_{i-\frac{1}{2}} (f_i - f_{i-1}) \right] \quad (4.25)$$

onde

$$a_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{f(u_{i+1}) - f(u_i)}{u_{i+1} - u_i} & \text{se } u_{i+1} \neq u_i \\ a(u_i) & \text{se } u_{i+1} = u_i \end{cases} \quad (4.26)$$

e considerando as eqs. (??) e (??), têm-se a função de fluxo numérico para o esquema de Lax-Wendroff, veja [?] e [?].

$$\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( f_{i+1} + f_i - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \left( a_{i+\frac{1}{2}} \right)^2 (u_{i+1} - u_i) \right) \quad (4.27)$$

$$\tilde{f}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( f_i + f_{i-1} - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \left( a_{i-\frac{1}{2}} \right)^2 (u_i - u_{i-1}) \right) \quad (4.28)$$

## 4.5 Esquemas TVD

De acordo com o trecho compilado de [?], pode-se listar as seguintes características dos métodos TVD.

1. *Pode-se mostrar que todos os esquemas monótonos são esquemas TVD de primeira ordem, isto é, os esquemas monótonos são um subconjunto dos esquemas TVD.*
2. *Uma formulação geral explícita para a equação da onda pode ser expressa como*

$$u_i^{n+1} = u_i^n + A_{i+\frac{1}{2}} \Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n - B_{i-\frac{1}{2}} \Delta u_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (4.29)$$

onde

$$\Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n = u_{i+1} - u_i \quad (4.30)$$

$$\Delta u_{i-\frac{1}{2}}^n = u_i - u_{i-1} \quad (4.31)$$

e os coeficientes  $A$  e  $B$  são determinados para um esquema específico. O esquema é TVD se as seguintes condições suficientes forem satisfeitas:

$$A_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \quad (4.32)$$

$$B_{i-\frac{1}{2}} \geq 0 \quad (4.33)$$

$$0 \leq A_{i+\frac{1}{2}} + B_{i-\frac{1}{2}} \leq 1 \quad (4.34)$$

3. A propriedade TVD é válida apenas para equações de conservação hiperbólicas escalares homogêneas. A extensão para equações hiperbólicas não homogêneas é limitada a casos especiais.
4. Esquemas TVD de segunda ordem podem ser desenvolvidos com o uso de limitadores de fluxo. Em tais esquemas, a formulação é de segunda ordem nas regiões suaves do domínio e muda para primeira ordem nas regiões de grandes gradientes para evitar oscilações.
5. Como em qualquer outro esquema, a implementação de condições de contorno pode criar alguma dificuldade. Geralmente é difícil provar a propriedade TVD de maneira combinada para as formulações do interior do domínio e das condições de contorno.
6. A extensão formal da propriedade TVD para sistemas de equações não lineares e sistemas multidimensionais ainda não foi estabelecida. Entretanto, experimentos numéricos para estes sistemas mostraram que a propriedade TVD pode ser preservada. Assim sendo, esquemas TVD para sistemas multidimensionais são comumente utilizados.
7. Esquemas TVD possuem propriedades desejáveis para a computação de domínios com descontinuidades. Entretanto, estes são mais custosos em comparação com esquemas que empregam termos simples com dissipação linear.
8. Esquemas TVD eliminam as oscilações dentro do domínio enquanto os “borrões” ou difusão no choque são reduzidos.

9. *Esquemas TVD que se baseiam em aproximações por diferenças finitas centradas dos termos convectivos e dos limitadores de fluxo são comumente chamados de esquemas TVD simétricos. De maneira similar, esquemas TVD que empregam diferenças unilaterais são chamados de esquemas TVD “upwind”<sup>2</sup>.*

### 4.5.1 Limitadores de Fluxo

Conforme mostrado em [?], ao se subtrair o fluxo numérico do esquema de Lax-Friedrichs do fluxo numérico do esquema de Lax-Wendroff, têm-se:

$$\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^{LW} - \tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^{LF} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{2} \right) \left[ 1 - \left( a_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] \quad (4.35)$$

que é a correção que pode ser adicionada a um método de primeira ordem para que o mesmo se torne um método de segunda ordem. Fazendo isto, nas regiões em que existir a ocorrência de choques, a ordem do esquema pode ser reduzida de modo que não existam oscilações nas regiões próximas das discontinuidades. Este controle é realizado através da utilização de limitadores de fluxo, que podem ser adicionados da seguinte maneira em uma função de fluxo numérico que combine funções de primeira e segunda ordem.

$$\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ f_i + f_{i+1} - \frac{\Delta x}{\Delta t} (u_{i+1} - u_i) \right] + \Phi(r) \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{2} \right) \left[ 1 - \left( a_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] \right\} \quad (4.36)$$

A função  $\Phi(r)$  pode ser escrita de diversas formas com o objetivo de conter os efeitos dos termos de segunda ordem, sendo que  $r$  corresponde a uma relação dos gradientes consecutivos, ou em outras palavras, como uma medida da suavidade da solução [?], é e dado por

$$r_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i} \quad (4.37)$$

Na literatura, existem diversos limitadores de fluxo, tais quais:

- Minmod

---

<sup>2</sup>*Upwind*: O esquema *upwind* simula a propagação da informação na direção definida pelo sinal da velocidade característica.

$$\Phi(r) = \max[0, \min(1, r)] \quad (4.38)$$

- Superbee

$$\Phi(r) = \max[0, \min(1, 2r), \min(2, r)] \quad (4.39)$$

- Chakravarthy e Osher

$$\Phi(r) = \max[0, \min(r, \beta)] \quad (1 \leq \beta \leq 2) \quad (4.40)$$

- Van Leer

$$\Phi(r) = \frac{r + |r|}{1 + |r|} \quad (4.41)$$

Graficamente, a região de TVD de primeira e de segunda ordem pode ser mostrada através do gráfico de Sweby que pode ser vista na Fig. ??.

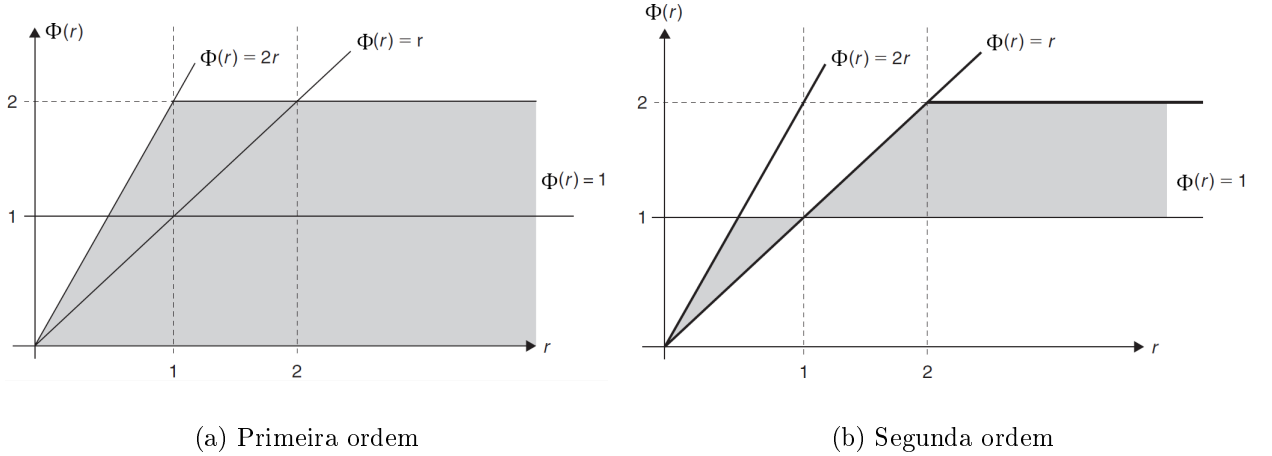


Figura 4.8: Região TVD  
Fonte: (Adaptado de [?], p.377 e 380)

E os limitadores de fluxo mostrados nas eqs.(??), (??), (??) e (??) se encaixam da seguinte maneira no gráfico de Sweby, de acordo com a Figs. ??.

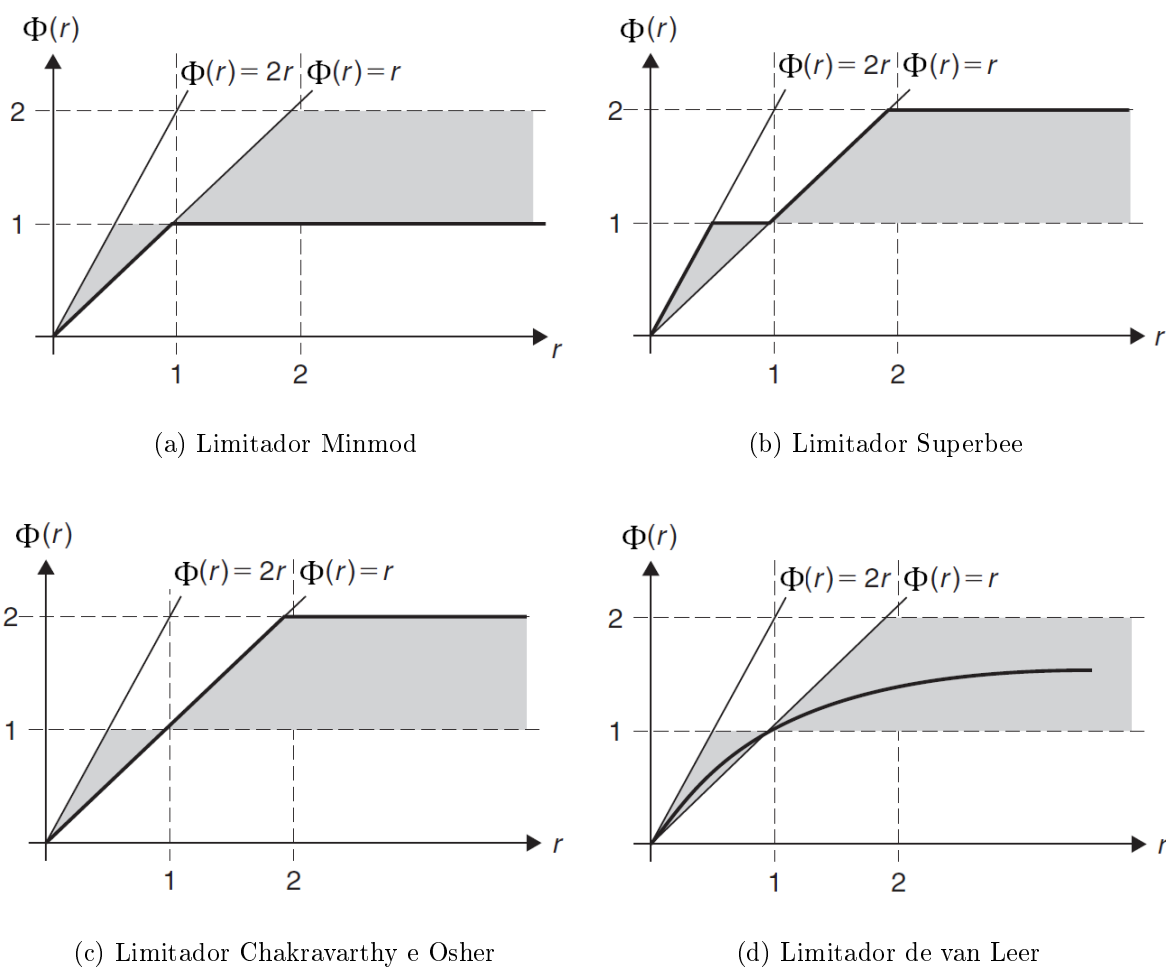


Figura 4.9: Limitadores de fluxo

Fonte: (Adaptado de [?], p. 381)

Conforme descrito na seção ??, a utilização de soluções fracas para Leis de conservação pode produzir resultados que não estarão de acordo com a física do problema, sendo necessário a introdução de um termo de correção, chamado condição de entropia. Nem todos os esquemas TVD atendem de maneira automática a condição de entropia. Sendo assim, utiliza-se a seguinte expressão que é inserida no esquema TVD.

$$\Psi(z) = \begin{cases} |z|, & |z| \geq \delta \\ \frac{(z^2 + \delta^2)}{2\delta}, & |z| < \delta \end{cases} \quad (4.42)$$

Sendo  $\Psi(z)$ , uma aproximação não nula, continuamente diferenciável para  $|z|$ , onde  $\delta$  é chamado de parâmetro de correção de entropia, sendo o valor de  $\delta$  dentro do intervalo  $0 \leq \delta \leq 0,125$ , conforme mostrado em [?].

### 4.5.2 Esquema TVD Implícito e sua Formulação de Segunda Ordem

A Eq. (??) que representa a forma explícita de uma discretização conservativa, na verdade é obtida à partir de uma formulação geral para a família de esquemas conservativos de um parâmetro e cinco pontos.

$$u_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \theta \left( \tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \left( \tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (4.43)$$

Onde  $\theta$  é um parâmetro, em que se  $\theta = 0$ , o esquema será explícito e para qualquer valor de  $\theta \neq 0$ , o esquema será implícito.

Utilizando os conceitos de limitador de fluxo e correção de entropia, pode-se dar início à construção do esquema TVD de segunda ordem. Neste trabalho será utilizado o esquema modificado proposto por Yee em [?], que consiste na utilização de um fluxo numérico modificado para possibilitar o aumento da ordem do esquema. Maiores informações podem ser encontradas em [?], que é considerada a referência fundamental para o desenvolvimento do conceito de esquema TVD.

Considerando a Eq. (??), com  $\theta = 1$ , têm-se:

$$u_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) = u_i^n \quad (4.44)$$

onde

$$\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ f_i + f_{i+1} + g_i + g_{i+1} - \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) (u_{i+1} - u_i) \right] \quad (4.45)$$

$$\tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ f_{i-1} + f_i + g_{i-1} + g_i - \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) (u_i - u_{i-1}) \right] \quad (4.46)$$

com  $\Psi$  e  $a_{i\pm\frac{1}{2}}$  dados pelas eqs. (??) e (??), respectivamente. Os termos  $\gamma_{i\pm\frac{1}{2}}$  são dados à seguir.

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{(g_{i+1} - g_j)}{(u_{i+1} - u_j)}, & u_{i+1} \neq u_i \\ 0, & u_{i+1} = u_i \end{cases} \quad (4.47)$$

$$\gamma_{i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{(g_i - g_{i-1})}{(u_i - u_{i-1})}, & u_i \neq u_{i-1} \\ 0, & u_i = u_{i-1} \end{cases} \quad (4.48)$$

e sendo  $g_i$  definido por

$$g_i = S \cdot \max \left[ 0, \min \left( \sigma_{i+\frac{1}{2}} |u_{i+1} - u_i|, S \cdot \sigma_{i+\frac{1}{2}} \cdot (u_i - u_{i-1}) \right) \right] \quad (4.49)$$

$$S = \text{sign}(u_{i+1} - u_i) \quad (4.50)$$

com

$$\sigma(z) = \frac{1}{2} \Psi(z) \geq 0 \quad (4.51a)$$

$$\sigma(z) = \frac{1}{2} \left( \Psi(z) + \frac{\Delta t \cdot z^2}{\Delta x} \right) \geq 0 \quad (4.51b)$$

De acordo com [?], a Eq. (??) será utilizada para aplicações em regime permanente pois é independente do tempo e a Eq. (??) por ser de segunda ordem tanto no espaço como no tempo será utilizada para casos dependentes do tempo, ou seja, não permanentes.

### 4.5.3 Linearização do Esquema Implícito

Para que o valor de  $u_i^{n+1}$  em um esquema implícito do tipo dado pela Eq. (??) possa ser calculado, é necessário resolver um sistema de equações que apresentam um comportamento fortemente não-linear. Considerando a dificuldade matemática que este tipo de solução representa, será utilizado um procedimento para linearizar o esquema implícito.

Existem dois procedimentos possíveis para a realização da linearização, o LNI que é a forma não conservativa (*Linearized Nonconservative Implicit*), e o LCI que é a forma conservativa (*Linearized Conservative Implicit*), [?].

#### 4.5.3.1 Forma Linearizada Implícita Não Conservativa - LNI

A forma LNI é a mais utilizada para cálculos em situações de regime permanente, pois quando o processo atingir o regime permanente a solução será conservativa. Este método preserva a característica da formulação implícita ser incondicionalmente TVD.

Considerando a função  $C$ , que é dada por

$$C^{\pm}(z)^{n+1} = \frac{1}{2} [\Psi(z) \pm z]^{n+1} \quad (4.52)$$

a forma LNI é obtida simplesmente substituindo os coeficiente  $C^{\pm}(z)^{n+1}$  por  $C^{\pm}(z)^n$  na equação do esquema. Para isto, será necessário rearrumar os termos da Eq. (??) de maneira conveniente.

Sendo assim, reescrevendo a Eq. (??) na forma delta, têm-se

$$E_1 d_{i-1} + E_2 d_i + E_3 d_{i+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}^n \right] \quad (4.53)$$

sendo

$$d_i = u_i^{n+1} - u_i^n \quad (4.54)$$

$$E_1 = -\frac{\Delta t}{\Delta x} C^+(a + \gamma)_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (4.55)$$

$$E_2 = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ C^-(a + \gamma)_{i+\frac{1}{2}}^n + C^+(a + \gamma)_{i-\frac{1}{2}}^n \right] \quad (4.56)$$

$$E_3 = -\frac{\Delta t}{\Delta x} C^-(a + \gamma)_{i+\frac{1}{2}}^n \quad (4.57)$$

Todos os termos que fazem parte de  $\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$  e  $\tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}^n$  são calculados no nível de tempo  $n$ . Maiores detalhes podem ser encontrados em [?], [?] e [?].

#### 4.5.3.2 Forma Linearizada Implícita Conservativa - LCI

A forma LCI irá preservar o caráter conservativo do esquema e é adequada para utilização tanto em regime permanente quanto dependente do tempo, porém não existe

nenhuma prova formal de que este método mantenha a característica TVD [?].

Substituindo as Eqs. (??) e (??) na Eq. (??), têm-se

$$u_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ f_i + f_{i+1} + g_i + g_{i+1} - \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i+\frac{1}{2}} u - f_{i-1} - f_i - g_{i-1} - g_i + \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i-\frac{1}{2}} u \right]^{n+1} = u_i^n \quad (4.58)$$

e sendo

$$\bar{f}_{i+1} = (f_i + f_{i+1}) + (g_i + g_{i+1}) \quad (4.59)$$

$$\bar{f}_{i-1} = (f_{i-1} + f_i) + (g_{i-1} + g_i) \quad (4.60)$$

A forma linearizada implícita conservativa será obtida através de uma expansão em série de Taylor no tempo dos termos  $f^{n+1}$ .

$$\bar{f}_i^{n+1} = \bar{f}_i^n + \bar{a}_i^n (u_i^{n+1} - u_i^n) + O(\Delta t)^2 \quad (4.61)$$

onde

$$\bar{a}_i^n = \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \right)_i^n$$

À seguir substituindo a Eq. (??) na Eq. (??) e realizando a linearização local ao reduzir a ordem dos termos  $\Delta_{i+\frac{1}{2}} u$  de  $n+1$  para  $n$ , têm-se

$$E_1 d_{i-1} + E_2 d_i + E_3 d_{i+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}^n \right] \quad (4.62)$$

sendo

$$E_1 = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \bar{a}_{i-1} + \Psi \left( \bar{a}_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (4.63)$$

$$E_2 = 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \Psi \left( \bar{a}_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) + \Psi \left( \bar{a}_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (4.64)$$

$$E_3 = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \bar{a}_{i+1} - \Psi \left( \bar{a}_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (4.65)$$

Observe que com isso obtém-se um sistema algébrico linear tridiagonal que pode ser resolvido tanto por métodos diretos como eliminação de Gauss, como através do método de Thomas [?], que propicia um excelente desempenho numérico. Sendo assim, fica estabelecido o método TVD em sua forma escalar. A demonstração completa da forma LCI encontra-se no apêndice C. Maiores detalhes podem ser encontrados em [?], [?] e [?].

## 4.6 Resíduo Numérico

Quando se executa um procedimento numérico para encontrar a solução de um determinado problema, deve-se medir o erro da solução obtida de modo a verificar a estabilidade do método utilizado. Como os resultados são comumente obtidos na forma de um vetor, para que não seja necessário avaliar o erro em cada ponto do domínio, o resíduo é calculado através na forma da norma de um vetor, obtendo-se assim um valor global para o resíduo do método numérico, [?]. A maneira mais comum de se calcular a norma de um vetor são através das normas  $l_p$ , que são dadas por:

- Norma  $l_1$

$$\|\phi\|_1 = |\phi_1| + |\phi_2| + \cdots + |\phi_N| \quad (4.66)$$

- Norma  $l_2$

$$\|\phi\|_2 = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \cdots + \phi_N^2} \quad (4.67)$$

- Norma  $l_\infty$

$$\|\phi\|_\infty = \max(|\phi_1|, |\phi_2|, \dots, |\phi_N|) \quad (4.68)$$

Porém, conforme mostrado em [?], neste trabalho será utilizada uma definição onde a norma  $l_2$  será escrita da seguinte maneira para o caso unidimensional,

$$l_2(\phi_i^{n+1} - \phi_i^n) = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{N-1} (\phi_i^{n+1} - \phi_i^n)^2}{N-2}} \quad (4.69)$$

e da seguinte maneira para o caso bidimensional,

$$l_2(\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n) = \sqrt{\frac{\sum_{i,j=2}^{N-1} (\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n)^2}{(N_x-2)(N_y-2)}} \quad (4.70)$$

Para que o gráfico do resíduo não seja representado com números muito pequenos, utiliza-se logaritmo na base 10.

## Capítulo 5

# Esquema TVD para Sistema de Leis de Conservação Hiperbólicas Quase 1D

### 5.1 Equação de Euler na Forma Quase 1D

Em aplicações de escoamentos internos, tais quais como os mostrados no Capítulo ??, onde a área da seção transversal do bocal varia ao longo da direção do escoamento [?], pode-se escrever as Eqs. (??), (??) e (??), conforme mostrado em [?].

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F(Q)}{\partial x} + H(Q) = 0 \quad (5.1)$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} \rho A \\ \rho u A \\ e A \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} \rho u A \\ (\rho u^2 + P) A \\ (e + P) u A \end{bmatrix}; H = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \frac{\partial A}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

e o vetor  $H$  é o termo fonte que leva em conta a variação de área em relação ao eixo em que ocorre o escoamento e  $A(x)$  é a área do bocal de acordo com a função conhecida que determina a sua geometria.

A equação de estado para este caso é dada por:

$$P = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{\rho}{2} u^2 \right] \quad (5.3)$$

sendo assim, o sistema fica totalmente definido.

## 5.2 Generalização do Esquema TVD para um Sistema de Leis de Conservação Hiperbólicas

O conceito de um esquema TVD, é satisfeito apenas para Leis de conservação não-lineares escalares ou sistemas de equações hiperbólicas com coeficientes constantes, sendo assim, para estender a teoria do método TVD para o caso de um sistema de Leis de conservação hiperbólicas, é necessário criar localmente, para cada ponto, um sistema de coeficiente constante, conforme mostrado em [?] e [?].

Desta maneira, considerando o seguinte sistema de Leis de conservação hiperbólicas

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F(Q)}{\partial x} = 0 \quad (5.4)$$

onde, utilizando a regra da cadeia, têm-se

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \therefore \frac{\partial Q}{\partial t} + A(Q) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

sendo  $A(Q)$  a matriz jacobiana

$$A(Q) = \frac{\partial F}{\partial Q} \quad (5.5)$$

e os vetores  $Q$  e  $F(Q)$  são dados pela Eq. (??).

Como o sistema é constituído de equações hiperbólicas, isto implica que  $A(Q)$  possui todos os autovalores reais e distintos e um conjunto de autovetores associados, [?]. A quantidade de autovalores está ligada à quantidade de dimensões espaciais utilizadas na análise, isto é, para um problema unidimensional existirão três autovalores, para um caso bidimensional haverá quatro autovalores, e conseqüentemente, para três dimensões existirão cinco autovalores.

Os autovalores serão denotados por  $\lambda^l(Q)$ , os autovetores diretos serão denotados por  $R^l(Q)$  e os autovetores esquerdos por  $R^{-l}(Q)$ , onde  $l = 1, \dots, m$ , onde cada um dos autovetores diretos corresponderá a uma coluna da matriz  $R$  dos autovetores, dada por

$$R(U) = (R^1(U), \dots, R^m(U)) \quad (5.6)$$

conseqüentemente, pode-se obter a matriz diagonal dos autovalores [?], fazendo

$$R^{-1}AR = \text{diag}(a^l) \quad (5.7)$$

O conjunto de variáveis características em relação ao vetor de estado  $Q$  é definido por

$$W = \{w^l\} = R^{-1}Q \quad (5.8)$$

A Eq. (??) será desacoplada em  $m$  equações escalares, onde cada equação estará relacionada a uma variável característica  $w^l$ , isto é,

$$\frac{\partial w^l}{\partial t} + a^l \frac{\partial w^l}{\partial x} = 0 \quad (5.9)$$

onde  $a^l$  é constante e  $1 \leq l \leq m$ .

A Eq. (??) representa uma abordagem escalar (desacoplamento do sistema) para cada uma das características do problema e para que seja possível construir a função de fluxo numérico para o sistema de equações é necessário calcular os valores nas fronteiras dos volumes para as variáveis  $a^l$ ,  $R^l$  e  $R^{-1l}$  que são dadas por  $a^l_{i+\frac{1}{2}}$ ,  $R^l_{i+\frac{1}{2}}$  e  $R^{-1l}_{i+\frac{1}{2}}$  e são avaliadas em  $Q_{i+\frac{1}{2}}$  que pode ser calculada através de uma média aritmética e/ou da média de Roe que será apresentada mais adiante. Sendo  $w^l$  um elemento do vetor das características, define-se  $\alpha^l_{i+\frac{1}{2}} = w^l_{i+1} - w^l_i$  como uma componente de  $\Delta_{i+\frac{1}{2}}Q = Q_{i+1} - Q_i$  na  $l$ -ésima direção característica, e assim define-se

$$\Delta_{i+\frac{1}{2}}Q = R_{i+\frac{1}{2}}\alpha_{i+\frac{1}{2}} \quad (5.10)$$

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} = R^{-1}_{i+\frac{1}{2}}\Delta_{i+\frac{1}{2}}Q \quad (5.11)$$

Com as Eqs. (??) e (??), a forma geral do esquema TVD para um sistema de Leis de conservação em sua formulação implícita é dada de maneira análoga à Eq. (??) pode ser definida localmente para cada uma das variáveis características da Eq. (??). Desta maneira têm-se

$$Q_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) = Q_i^n \quad (5.12)$$

Sendo as funções de fluxo numérico dadas por

$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2} \left( F_i^{n+1} + F_{i+1}^{n+1} + \left( R_{i+\frac{1}{2}} \Phi_{i+\frac{1}{2}} \right)^{n+1} \right) \quad (5.13)$$

$$\tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2} \left( F_{i-1}^{n+1} + F_i^{n+1} + \left( R_{i-\frac{1}{2}} \Phi_{i-\frac{1}{2}} \right)^{n+1} \right) \quad (5.14)$$

onde o limitador de fluxo  $\Phi$  é um vetor com três componentes, isto é,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 \end{bmatrix}^T \quad (5.15)$$

e cada uma das suas componentes para o caso *upwind* [?], é dada por, para  $l = 1, 2, 3$ ,

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^l = \sum_{l=1}^m \left[ \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}}^l \right) (g_i^l + g_{i+1}^l) - \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}}^l + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^l \right) \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l \right] \quad (5.16)$$

$$\phi_{i-\frac{1}{2}}^l = \sum_{l=1}^m \left[ \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}}^l \right) (g_{i-1}^l + g_i^l) - \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}}^l + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^l \right) \alpha_{i-\frac{1}{2}}^l \right] \quad (5.17)$$

onde o limitador de fluxo para o caso *upwind* pode ser dado pelas seguintes opções de funções, [?] e [?]

- Minmod

$$g_i^l = \minmod \left( \alpha_{i-\frac{1}{2}}^l, \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l \right) \quad (5.18)$$

- Yee

$$g_i^l = S \cdot \max \left[ 0, \min \left( \sigma_{i+\frac{1}{2}}^l \left| \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l \right| \right), S \cdot \sigma_{i-\frac{1}{2}}^l \alpha_{i-\frac{1}{2}}^l \right] \quad (5.19)$$

- Van Leer

$$g_i^l = \frac{\left\{ \alpha_{i-\frac{1}{2}}^l \left[ \left( \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l \right)^2 + \delta_2 \right] + \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l \left[ \left( \alpha_{i-\frac{1}{2}}^l \right)^2 + \delta_2 \right] \right\}}{\left[ \left( \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l \right)^2 + \left( \alpha_{i-\frac{1}{2}}^l \right)^2 + 2\delta_2 \right]} \quad (5.20)$$

- Superbee

$$g_i^l = S \cdot \max \left[ 0, \min \left( 2 \left| \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l \right|, S \cdot \alpha_{i-\frac{1}{2}}^l \right), \min \left( \left| \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l \right|, 2S \cdot \alpha_{i-\frac{1}{2}}^l \right) \right] \quad (5.21)$$

e os demais itens são dados por

$$(a^1, a^2, a^3) = (u - c, c, u + c) \quad (5.22)$$

$$S = \text{sign} \left( \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l \right) \quad (5.23)$$

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}}^l = \begin{cases} \frac{(g_{i+1}^l - g_i^l)}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^l}, & \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l \neq 0 \\ 0, & \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

e  $\sigma_{i+\frac{1}{2}}^l$  é dado pelas Eqs. (??) e (??).

Para esquemas TVD *simétricos* [?], o limitador de fluxo pode ser escrito como:

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^l = -\Psi \left( \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l \right) \left[ \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l - g_{i+\frac{1}{2}}^l \right] \quad (5.25)$$

e onde  $g_{i+\frac{1}{2}}^l$ , [?] e [?], pode ser definido como:

$$g_{i+\frac{1}{2}}^l = \minmod \left( \alpha_{i-\frac{1}{2}}^l, \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l \right) + \minmod \left( \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l, \alpha_{i+\frac{3}{2}}^l \right) - \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l \quad (5.26)$$

$$g_{i+\frac{1}{2}}^l = \minmod \left( \alpha_{i-\frac{1}{2}}^l, \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l, \alpha_{i+\frac{3}{2}}^l \right) \quad (5.27)$$

$$g_{i+\frac{1}{2}}^l = \minmod \left( 2\alpha_{i-\frac{1}{2}}^l, 2\alpha_{i+\frac{1}{2}}^l, 2\alpha_{i+\frac{3}{2}}^l, \frac{1}{2} \left( \alpha_{i+\frac{1}{2}}^l, \alpha_{i+\frac{3}{2}}^l \right) \right) \quad (5.28)$$

Conforme mencionado anteriormente, as médias podem ser calculadas através de uma média aritmética ou através das médias de Roe [?].

- Média aritmética

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{Q_{i+1} + Q_i}{2} \quad (5.29)$$

- Médias de Roe

$$H = \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2}u^2 \quad (5.30)$$

$$\bar{D} = \sqrt{\frac{\rho_{i+1}}{\rho_i}} \quad (5.31)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{D}u_{i+1} + u_i}{\bar{D} + 1} \quad (5.32)$$

$$H_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{D}H_{i+1} + H_i}{\bar{D} + 1} \quad (5.33)$$

$$c_{i+\frac{1}{2}}^2 = (\gamma - 1) \left( H_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}u_{i+\frac{1}{2}}^2 \right) \quad (5.34)$$

### 5.2.1 Linearização do Esquema Implícito para um Sistema de Leis de Conservação Hiperbólicas

Considerando as equações de Euler em sua forma quase 1D dada pela Eq. (??) e realizando utilizando a forma linearizada implícita conservativa (LCI), mostrada na Seção ??, o sistema de equações é dado por:

$$E_1 D_{i-1} + E_2 D_i + E_3 D_{i+1} = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ F_{i+\frac{1}{2}}^{\tilde{n}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{\tilde{n}} \right] - \Delta t \cdot H_i \quad (5.35)$$

onde

$$D_i = Q_i^{n+1} - Q_i^n \quad (5.36)$$

$$E_1 = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( A_{i-1} + \Omega_{i-\frac{1}{2}}^l \right) \quad (5.37)$$

$$E_2 = I + \Delta t \cdot B_i + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( \Omega_{i+\frac{1}{2}}^l + \Omega_{i-\frac{1}{2}}^l \right) \quad (5.38)$$

$$E_3 = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( A_{i+1} - \Omega_{i+\frac{1}{2}}^l \right) \quad (5.39)$$

sendo  $\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^n$  e  $\tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^n$  são dados pelas Eqs. (??) e (??). Quando forem utilizadas as Eqs. (??) e (??) para o cálculo do produto triplo, não existirá o termo de somatório dentro das Eqs. (??), (??) e (??). A demonstração completa da montagem da Eq. (??) pode ser encontrada no apêndice D.

Os demais termos das Eqs. (??), (??) e (??) são dados por,

$$A = \frac{\partial F}{\partial Q} = S \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \left(\frac{\gamma-3}{2}\right) u^2 & -(\gamma-3)u & (\gamma-1) \\ -\gamma ue + (\gamma-1)u^3 & \gamma e - \frac{3(\gamma-1)}{2}u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

$$B = \frac{\partial H}{\partial Q} = (\gamma-1) \frac{dS}{dx} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{u^2}{2} & -u & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$\Omega_{i-\frac{1}{2}} = R_{i-\frac{1}{2}} \cdot \text{diag} \left[ \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \right] \cdot R_{i-\frac{1}{2}}^{-1} \quad (5.42)$$

$$\Omega_{i+\frac{1}{2}} = R_{i+\frac{1}{2}} \cdot \text{diag} \left[ \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) \right] \cdot R_{i+\frac{1}{2}}^{-1} \quad (5.43)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u-c & u & u+c \\ H-uc & \frac{1}{2}u^2 & H+uc \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( b_1 + \frac{u}{c} \right) & \frac{1}{2} \left( -b_2 u - \frac{1}{c} \right) & \frac{1}{2} b_2 \\ 1-b_1 & b_2 u & -b_2 \\ \frac{1}{2} \left( b_1 - \frac{u}{c} \right) & \frac{1}{2} \left( -b_2 u + \frac{1}{c} \right) & \frac{1}{2} b_2 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

$$b_1 = b_2 \frac{u^2}{2} \quad (5.46)$$

$$b_2 = \frac{\gamma-1}{c^2} \quad (5.47)$$

Para aplicações em regime permanente as Eqs. (??) e (??) podem ser substituídas por,

$$\Omega_{i\pm\frac{1}{2}}^l = M \cdot I \quad (5.48)$$

sendo

$$M = \max^l \Psi(a^l + \gamma^l)_{i\pm\frac{1}{2}} \quad (5.49)$$

Este artifício substitui o cálculo de um produto triplo de matrizes, o que possibilita uma economia considerável no esforço computacional, principalmente para situações bi e tridimensionais, mas deve-se ter em mente que esta substituição aumenta a quantidade de dissipação artificial.

## 5.3 Condições de Contorno

A aplicação das condições de contorno para a resolução de um problema hiperbólico está diretamente ligada ao método das características e depende do sentido de propagação das informações dentro do domínio estudado, que é determinado pelos autovalores do problema.

Com isso, de acordo com a análise do escoamento nas seções de entrada e de saída, definem-se quantas variáveis deverão ter os seus valores especificados e quantas terão os valores extrapolados de dentro do domínio, conforme pode ser visto na tabela compilada de [?].

|                                                          | Seção de entrada |             | Seção de saída |             |
|----------------------------------------------------------|------------------|-------------|----------------|-------------|
|                                                          | Subsônico        | Supersônico | Subsônico      | Supersônico |
| Quantidade de condições de contorno a serem definidas    | 2                | 3           | 1              | 0           |
| Quantidade de condições de contorno a serem extrapoladas | 1                | 0           | 2              | 3           |

Tabela 5.1: Condições de contorno nas seções de entrada e de saída  
Fonte: ([?], p. 121)

As variáveis primitivas velocidade, massa específica e pressão serão utilizadas para a construção das variáveis conservadas conforme a Eq. (??). Sendo assim, de acordo com a Tab. ??, as condições de contorno serão definidas da seguinte maneira.

- Seção de entrada - Escoamento Subsônico

$$U(1, 1) = \rho_e \cdot A(1) \quad (5.50)$$

$$U(2, 1) = \rho_e \cdot V_e \cdot A(1) \quad (5.51)$$

$$P(1) = 2P(2) - P(3) \quad (5.52a)$$

$$U(3, 1) = \left( \frac{P(1)}{\gamma - 1} + \frac{U(1, 1)}{2 \cdot A(1)} \cdot \left( \frac{U(2, 1)}{U(1, 1)} \right)^2 \right) \cdot A(1) \quad (5.52b)$$

- Seção de entrada - Escoamento Supersônico

$$U(1, 1) = \rho_e \cdot A(1) \quad (5.53)$$

$$U(2, 1) = \rho_e \cdot V_e \cdot A(1) \quad (5.54)$$

$$U(3, 1) = \left( \frac{P_{en}}{\gamma - 1} + \frac{U(1, 1)}{2 \cdot A(1)} \cdot \left( \frac{U(2, 1)}{U(1, 1)} \right)^2 \right) \cdot A(1) \quad (5.55)$$

- Seção de saída - Escoamento Subsônico

$$U(1, N) = \left( \frac{2 \cdot U(1, N-1)}{A(N-1)} - \frac{U(1, N-2)}{A(N-2)} \right) \cdot A(N) \quad (5.56)$$

$$U(2, N) = \left( \frac{2 \cdot U(2, N-1)}{A(N-1)} - \frac{U(2, N-2)}{A(N-2)} \right) \cdot A(N) \quad (5.57)$$

$$U(3, N) = \left( \frac{P_s}{\gamma - 1} + \frac{U(1, N)}{2 \cdot A(N)} \cdot \left( \frac{U(2, N)}{U(1, N)} \right)^2 \right) \cdot A(N) \quad (5.58)$$

- Seção de saída - Escoamento Superônico

$$U(1, N) = \left( \frac{2 \cdot U(1, N-1)}{A(N-1)} - \frac{U(1, N-2)}{A(N-2)} \right) \cdot A(N) \quad (5.59)$$

$$U(2, N) = \left( \frac{2 \cdot U(2, N-1)}{A(N-1)} - \frac{U(2, N-2)}{A(N-2)} \right) \cdot A(N) \quad (5.60)$$

$$P(N) = 2P(N-1) - P(N-2) \quad (5.61a)$$

$$U(3, N) = \left( \frac{P(N)}{\gamma-1} + \frac{U(1,1)}{2 \cdot A(1)} \cdot \left( \frac{U(2,1)}{U(1,1)} \right)^2 \right) \cdot A(1) \quad (5.61b)$$

Apesar da utilização da extrapolação de primeira ordem na definição das condições de contorno, pode-se utilizar extrapolações de ordem mais alta.

## 5.4 Implementação Numérica

Nesta seção, serão mostrados os algoritmos e os resultados obtidos para as equações de Euler dadas pela Eq. (??) resolvida através do método TVD considerando as geometrias de um bocal divergente modelado pela Eq. (??) e de um bocal convergente/divergente definido pela Eq. (??).

### 5.4.1 Algoritmo - Método TVD Quase 1D

#### 1. Entrada de dados

- Posição inicial
- Posição final
- Número de nós
- Relação dos calores específicos do fluido considerado
- Definição do *CFL*
- Número máximo de iterações
- Valores das variáveis primitivas no reservatório, na entrada e saída do bocal, de acordo com a necessidade para definição das condições de contorno.
- Equação da relação de área que define a geometria do bocal.

#### 2. Calcular o valor da área do bocal desde $i = 1$ até $i = nx$

3. Calcular a derivada da função de área desde  $i = 1$  até  $i = nx$
4. Montagem do vetor das variáveis conservativas, Eq. (??)
5. Definição e atualização das condições de contorno, tab.(5.1)
6. Cálculo do intervalo de tempo, utilizando as Eqs. (??) e (??).

$$M = \max_j \left( u_{j+\frac{1}{2}} + c_{j+\frac{1}{2}} \right) \quad (5.62)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{CFL}{M} \quad (5.63)$$

7. Montagem do lado esquerdo do sistema de equações
  - 7.1. Cálculo das médias aritméticas ou médias de Roe, utilizando as Eqs. (??) a (??)
  - 7.2. Cálculo dos autovalores, Eq. (??)
  - 7.3. Montagem das matrizes jacobianas para os vetores  $F(Q)$  e  $H(Q)$
  - 7.4. Montagem da matriz dos autovetores, Eq. (??)
  - 7.5. Montagem da matriz inversa dos autovetores, Eq. (??)
  - 7.6. Cálculo da média das características locais, Eq. (??)
  - 7.7. Cálculo da correção de entropia, Eq. (??)
  - 7.8. Aplicação do limitador de fluxo, de acordo com a opção selecionada
  - 7.9. Cálculo da velocidade característica modificada, Eqs. (??) e (??)
  - 7.10. Cálculo do produto triplo, Eqs. (??) e (??), ou das aproximações para regime permanente, Eqs. (??) e (??)
8. Montagem do lado direito do sistema de equações
  - 8.1. Cálculo das médias aritméticas ou médias de Roe, utilizando as Eqs. (??) a (??)
  - 8.2. Cálculo dos autovalores, Eq. (??)
  - 8.3. Cálculo da correção de entropia, Eq. (??)

- 8.4. Aplicação do limitador de fluxo, de acordo com a opção selecionada
- 8.5. Cálculo do limitador de fluxo corrigido para esquemas simétricos, caso seja utilizada esta abordagem
- 8.6. Montagem do vetor da função de fluxo, Eq. (??)
- 8.7. Montagem do lado direito do sistema de equação utilizando as Eqs. (??) e (??)
9. Montagem das diagonais inferior, principal e superior e da matriz tridiagonal
10. Aplicação das condições de contorno implícitas para os nós 2 e (nx-1)
11. Resolução do sistema de equações
12. Conservação do resultado da forma delta para o vetor das variáveis primitivas
13. Atualização das condições de contorno, conforme passo 5
14. Atualização da solução
15. Cálculo do novo intervalo de tempo, conforme passo 6
16. Desmonte do vetor das variáveis primitivas

### 5.4.2 Estrutura de Dados e Implementação do Caso Quase 1D

Sendo a equação de Euler Quasi 1D dada pelas Eqs. (??) e (??), as variáveis primitivas  $\rho$ ,  $u$ ,  $e$ ,  $P$  e  $A$  são armazenados na forma de um vetor com uma coluna e "N"linhas, como mostrado para a variável pressão através do seguinte pseudocódigo.

**Variável:** N

**Passo 1:**

Defina a variável que será armazenada:  $\rho$ ,  $u$ ,  $e$ ,  $P$ ,  $A$ , etc..., e a dimensão do vetor (N,1).

**Passo 2:**

Defina o valor inicial dos elementos do vetor

**Saída:** Eq. (??)

$$P = \begin{bmatrix} P(1) \\ P(2) \\ P(3) \\ \vdots \\ \vdots \\ P(N) \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

O vetor das variáveis de estado  $Q$  e o vetor de fluxo  $F$  serão armazenados de maneira similiar, porém neste caso será uma matriz composta por  $N$  vetores conforme será detalhado no pseudocódigo à seguir

**Variável:**  $N$

**Passo 1:**

Defina a variável que será armazenada:  $Q$ ,  $F$ , e a dimensão do vetor (3,N).

**Passo 2:**

Defina o valor inicial dos elementos da matriz.

**Saída:** Eq. (??)

$$Q = \begin{bmatrix} Q(1,1) & Q(1,2) & \cdots & \cdots & Q(1,N) \\ Q(2,1) & Q(2,2) & \cdots & \cdots & Q(2,N) \\ Q(3,1) & Q(3,2) & \cdots & \cdots & Q(3,N) \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Após a montagem da matriz, deve-se realizar um ciclo iterativo para ajustar os valores iniciais de cada uma das suas componentes de acordo com a Eq. (??), conforme mostrado no pseudocódigo para o vetor das variáveis primitivas  $Q$ .

**Variável:**  $\rho$ ,  $u$ ,  $e$ ,  $A$

**Passo 1:**

**Para**  $i = 1$  **até**  $N$  **faça**

$$Q(1,i) = \rho(i) \cdot A(i)$$

$$Q(2,i) = \rho(i) \cdot u(i) \cdot A(i)$$

$$Q(3,i) = e(i) \cdot A(i)$$

**fim Para**

O tempo é discretizado da maneira  $t + \Delta t$ , porém os valores das variáveis para cada intervalo de tempo não são armazenados para evitar o uso excessivo da memória do computador.

A Eq. (??), após ser discretizada e escrita na forma implícita é dada na forma de um sistema de equações conforme mostrado na Eq. (??), onde a matriz dos coeficientes é do tipo esparsa tridiagonal, conforme mostrado à seguir

$$\begin{bmatrix} E_2^2 & E_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ E_1^3 & E_2^3 & E_3^3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1^4 & E_2^4 & E_3^4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1^5 & E_2^5 & E_3^5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & E_1^{N-2} & E_2^{N-2} & E_3^{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & E_1^{N-1} & E_2^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^2 \\ D^3 \\ D^4 \\ D^5 \\ \vdots \\ D^{N-2} \\ D^{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHS^2 - E_1^2 D^1 \\ RHS^3 \\ RHS^4 \\ RHS^5 \\ \vdots \\ RHS^{N-2} \\ RHS^{N-1} - E_3^{N-1} D^{N-1} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Deve-se ter em mente que os termos  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  mostrados na Eq. (??) são matrizes 3x3, e enquanto o lado direito do sistema de equações corresponde a um vetor 3x1. A Eq. (??) é iniciada em  $i = 2$  e  $i = N - 1$ , pois os pontos da fronteira do domínio não fazem parte do sistema de equações que será resolvido.

Para montar as matrizes dadas por  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$ , utiliza-se as Eqs. (??), (??) e (??). O primeiro passo é realizar um ciclo iterativo na parte interna do domínio para montar as matrizes, e na sequência, deve-se realizar outro ciclo iterativo de modo a ajustar o início e o fim do domínio de cada uma das diagonais da matriz dos coeficientes dada pela Eq. (??).

Desta maneira, ao se observar a Eq. (??), tem-se o seguinte domínio para cada uma das diagonais,

- Diagonal inferior  $E_1$ : Início em  $i = 3$  e final em  $i = N - 1$
- Diagonal principal  $E_2$ : Início em  $i = 2$  e final em  $i = N - 1$
- Diagonal superior  $E_3$ : Início em  $i = 2$  e final em  $i = N - 2$

As matrizes de bloco dadas por  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  devem ser alocadas dentro de uma matriz que corresponda a todo o domínio que está sendo analisado. Esse procedimento é realizado

pela rotina *blktridiag*, desenvolvida por John D’Errico [?], que organiza todos os termos dentro de uma matriz esparsa, salvando apenas os termos que forem diferentes de zero, obtendo-se assim a matriz dos coeficientes dada pela Eq. (??).

O sistema de equações dado pela Eq. (??), pode ser resolvido através de métodos diretos ou iterativos e o seu resultado será a forma delta para o vetor  $Q$ , dada pela Eq. (??).

# Capítulo 6

## Resultados - Escoamento Quase 1D

Nesta seção serão apresentados os resultados de alguns casos utilizando o método TVD juntamente com a comparação com a solução analítica apresentada no capítulo ??.

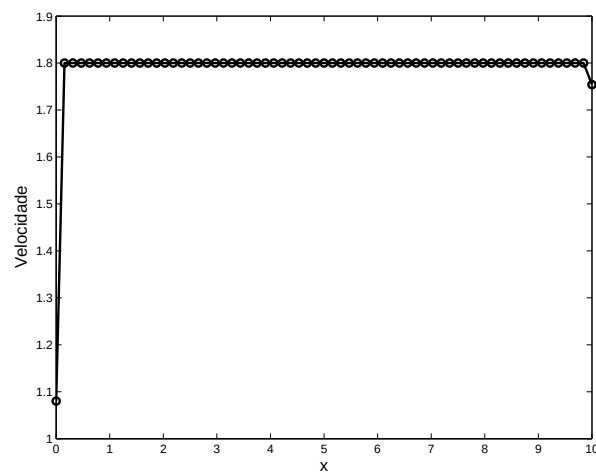
### 6.1 Caso 1: Bocal Divergente - Entrada e Saída Supersônica

Neste caso está sendo utilizada a correção de segunda ordem dada pelas Eqs. (??) e (??) com limitador de fluxo simétrico, mostrado pela Eq. (??) e as funções limitadoras de fluxo mostradas na Eqs. (??) e (??).

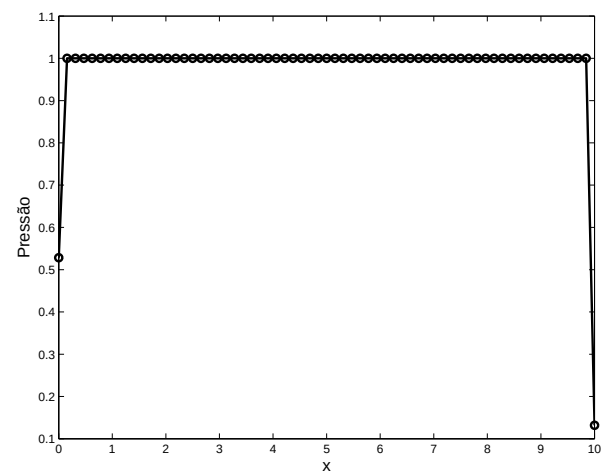
A geometria é a mesma utilizada na seção ??. Os valores adimensionalizados calculados nas seções de entrada e saída são dados pela Tab. 6.1, e as condições iniciais para as variáveis velocidade, massa específica e pressão são mostradas nos gráficos da Fig. ??.

| Seção de Entrada     | Seção de Saída    |
|----------------------|-------------------|
| $V_{en} = 1,0801$    | $V_s = 1,7540$    |
| $P_{en} = 0,5283$    | $P_s = 0,1318$    |
| $\rho_{en} = 0,6339$ | $\rho_s = 0.2352$ |

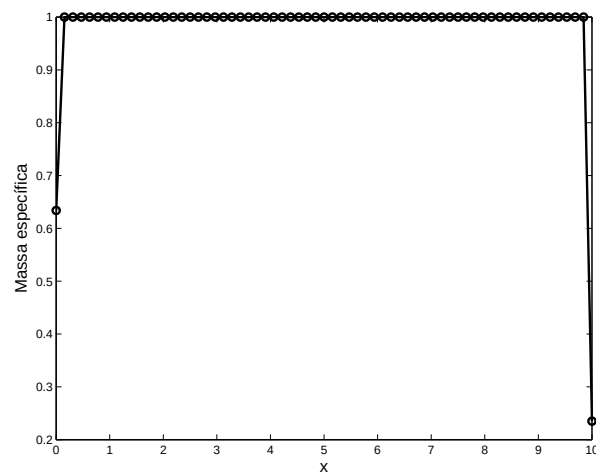
Tabela 6.1: Condições iniciais nas seções de entrada e de saída - Caso 1



(a) Velocidade

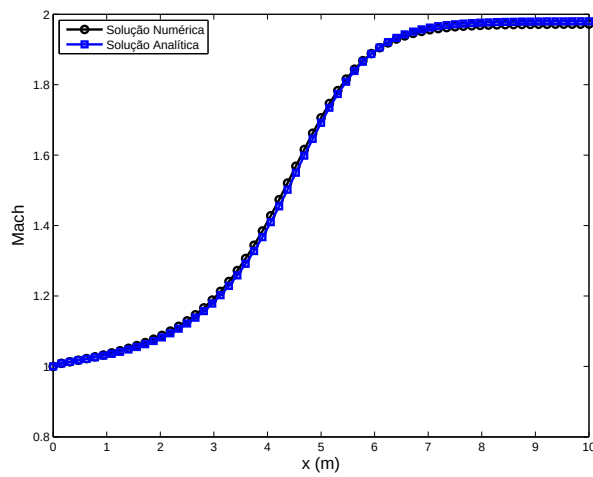


(b) Pressão

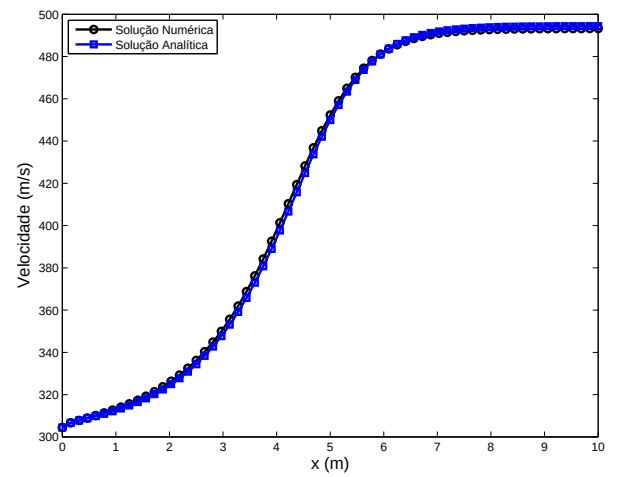


(c) Massa específica

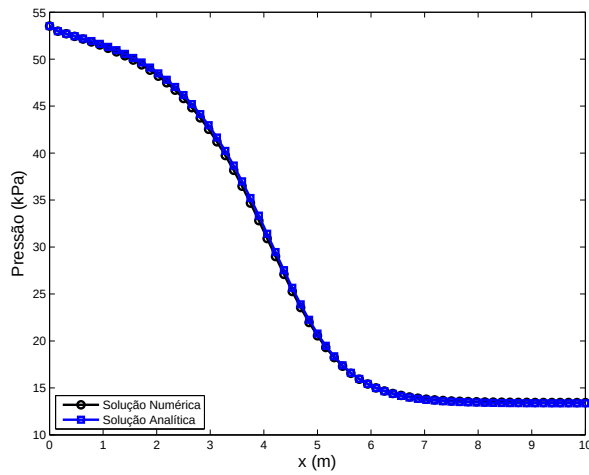
Figura 6.1: Condições iniciais - Caso 1



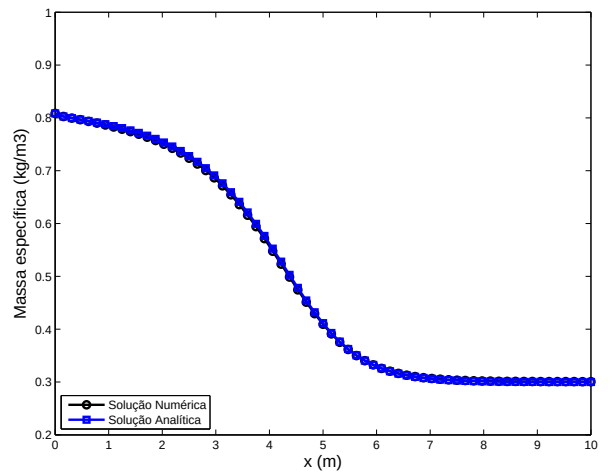
(a) Número de Mach



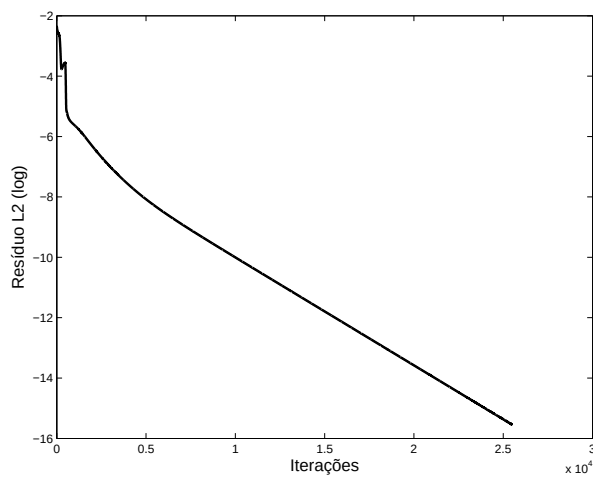
(b) Velocidade



(c) Pressão

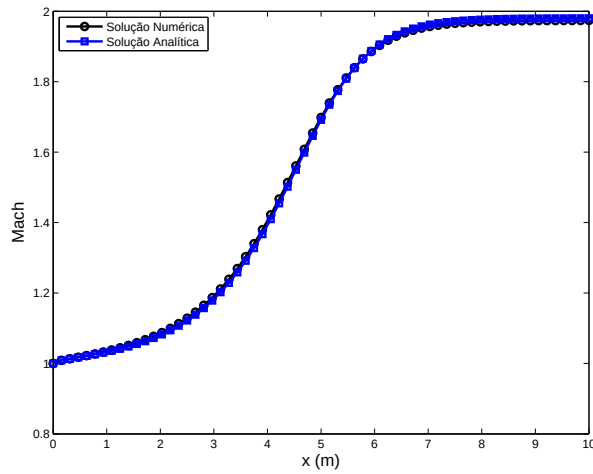


(d) Massa específica

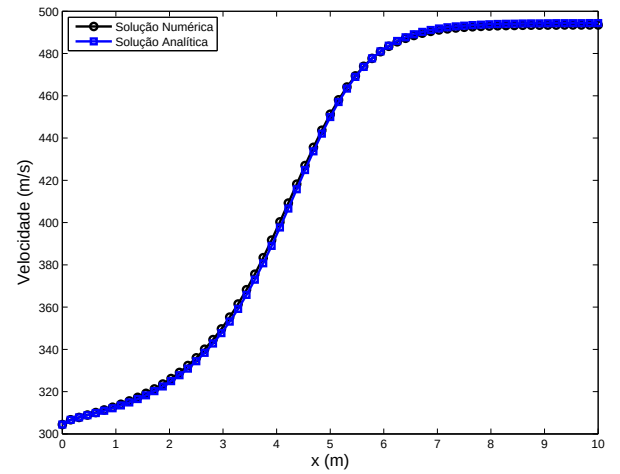


(e) Resíduo

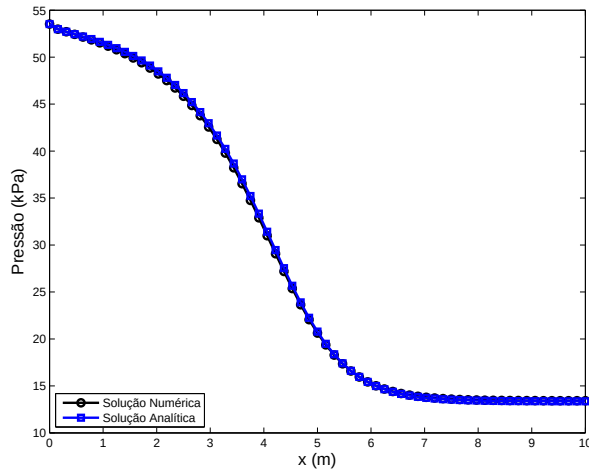
Figura 6.2: Solução Analítica x Solução TVD - Caso 1 - Sem limitador



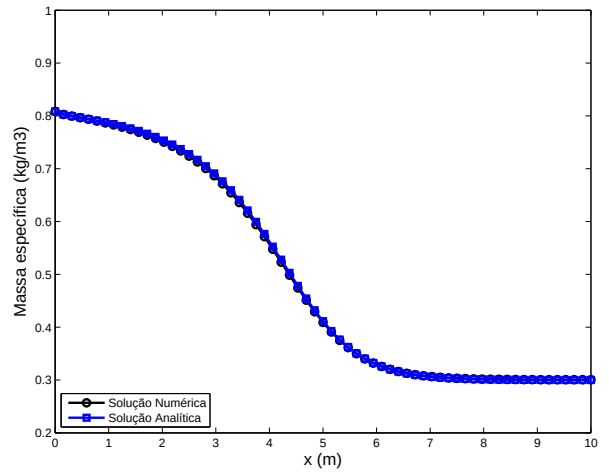
(a) Número de Mach



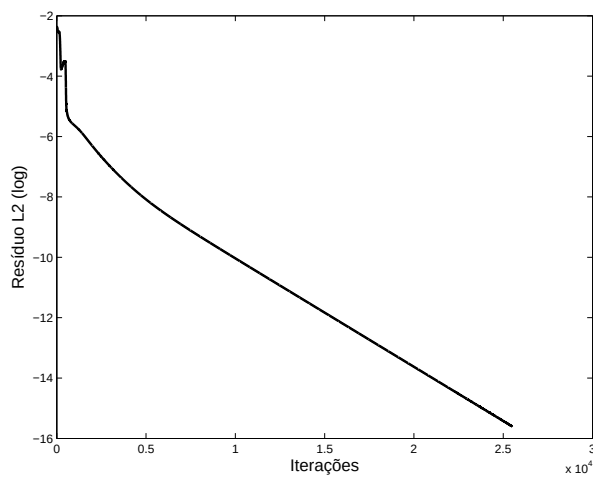
(b) Velocidade



(c) Pressão

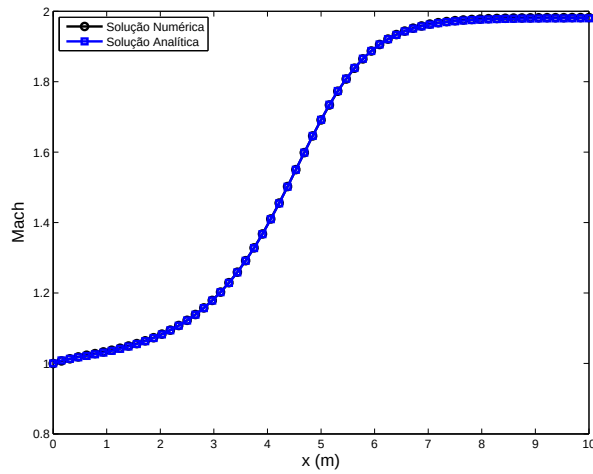


(d) Massa específica

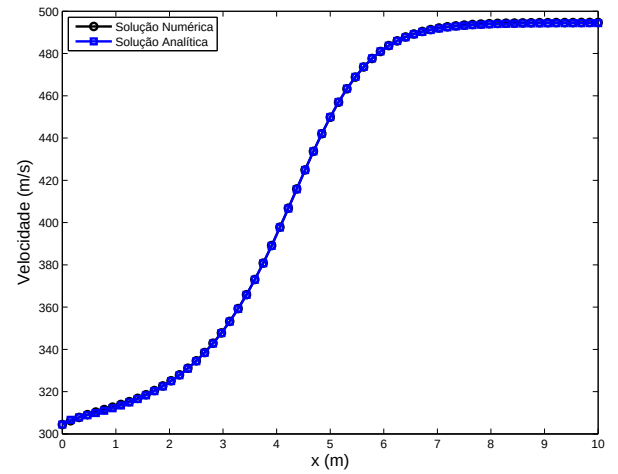


(e) Resíduo

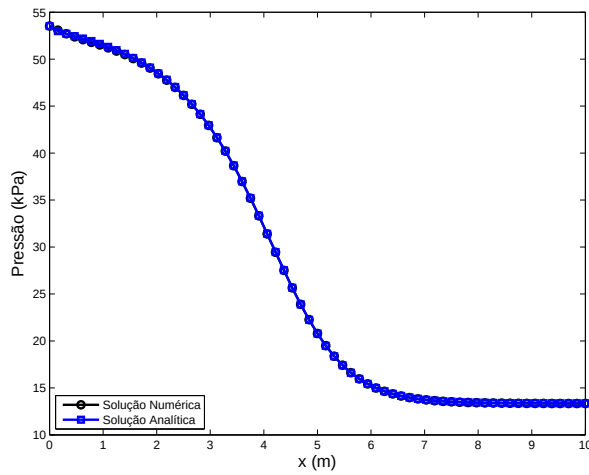
Figura 6.3: Solução Analítica x Solução TVD - Caso 1 - Limitador Yee Eq.(??)



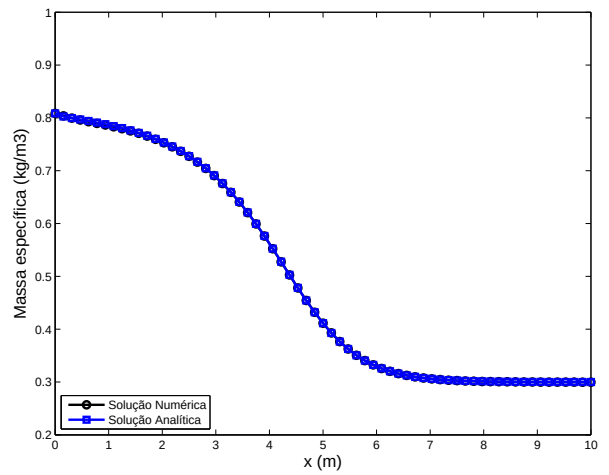
(a) Número de Mach



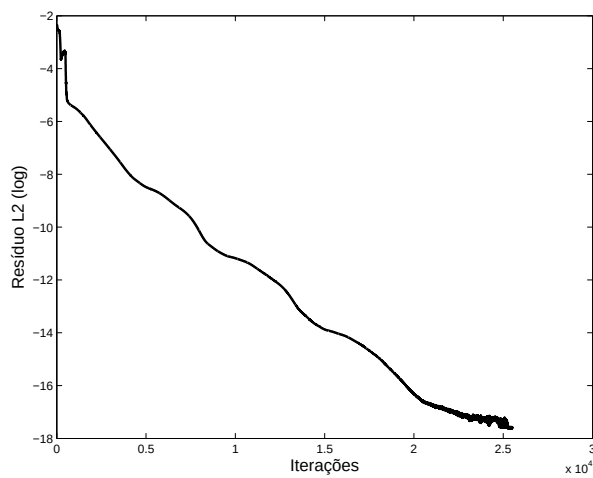
(b) Velocidade



(c) Pressão



(d) Massa específica



(e) Resíduo

Figura 6.4: Solução Analítica x Solução TVD - Caso 1 - Limitador Superbee Eq.(??)

Na Figs. ??, ?? e ?? pode-se observar que o método numérico teve uma ótima aderência com a solução analítica e o não ocorreu instabilidade numérica durante a sua execução conforme pode ser observado nos gráficos de resíduo. Como este caso é uma aplicação bastante simples e não ocorre a formação de uma onda de choque, sendo que o escoamento é apenas acelerado dentro de todo o domínio, as simulações com o uso dos limitadores Yee Eq.(??), Superbee Eq.(??) e sem o uso dos limitadores de fluxo forneceram resultados extremamente semelhantes entre si, sendo que a apenas o gráfico de resíduo para o limitador Superbee apresentou um comportamento ligeiramente diferente.

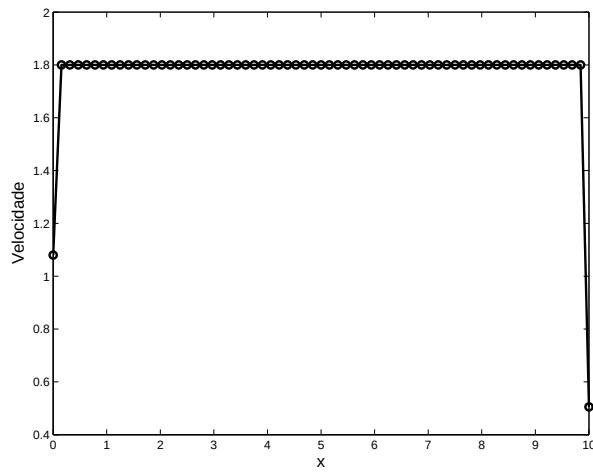
Sendo assim, neste caso, percebe-se que o uso de limitadores de fluxo diferentes ou ausência dos mesmos não é suficiente para interferir no resultado fornecido pelo método numérico, considerando-se a geometria e as condições de contorno deste caso.

## 6.2 Caso 2: Bocal Divergente - Entrada Supersônica e Saída Subsônica

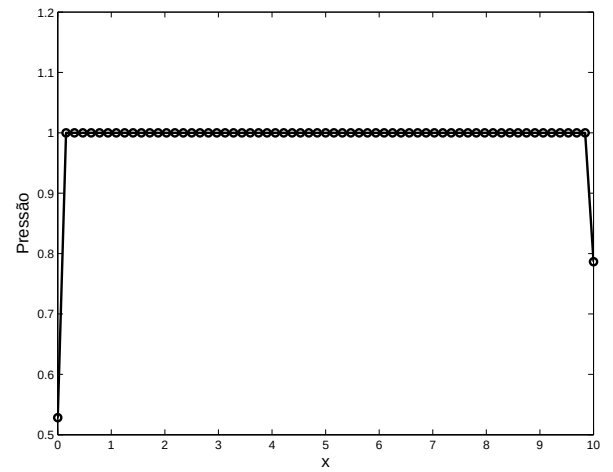
Neste caso, a geometria do bocal e a implementação numérica é idêntica ao caso 1. Os valores adimensionalizados calculados nas seções de entrada e saída são dados pela Tab. 6.2, e as condições iniciais para as variáveis velocidade, massa específica e pressão são mostradas nos gráficos da Fig. ??.

| Seção de Entrada     | Seção de Saída    |
|----------------------|-------------------|
| $V_{en} = 1,0801$    | $V_s = 0,5054$    |
| $P_{en} = 0,5283$    | $P_s = 0,7865$    |
| $\rho_{en} = 0,6339$ | $\rho_s = 0.8163$ |

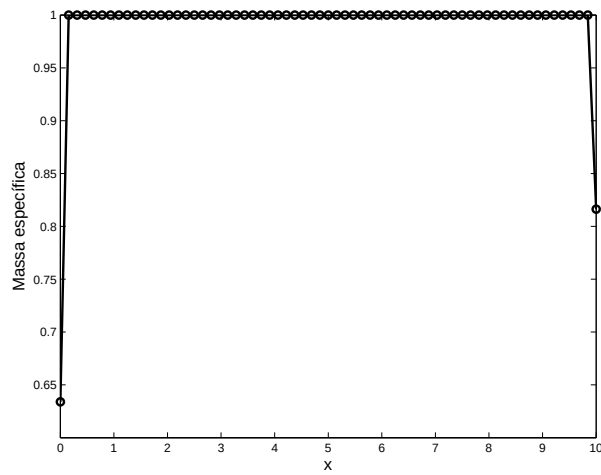
Tabela 6.2: Condições iniciais nas seções de entrada e de saída - Caso 2



(a) Velocidade

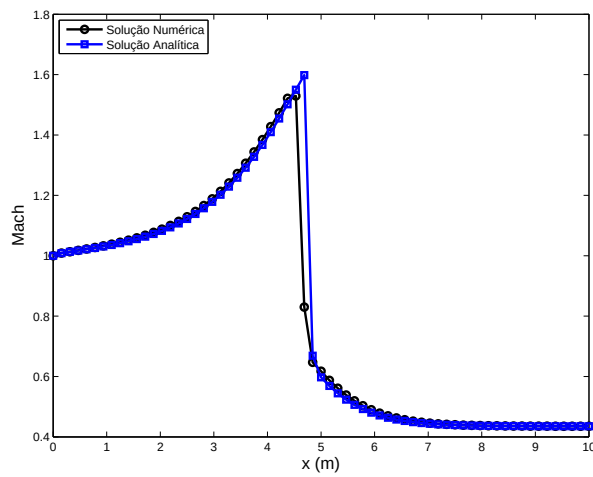


(b) Pressão

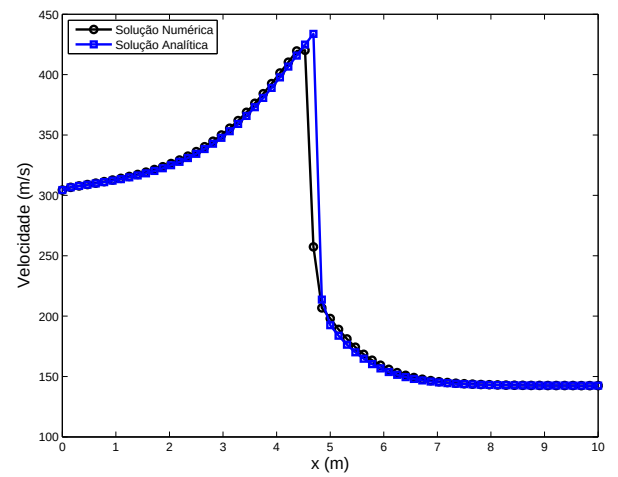


(c) Massa específica

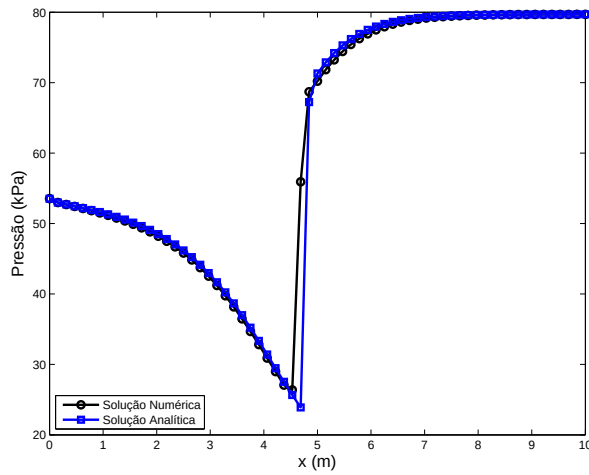
Figura 6.5: Condições Iniciais - Caso 2



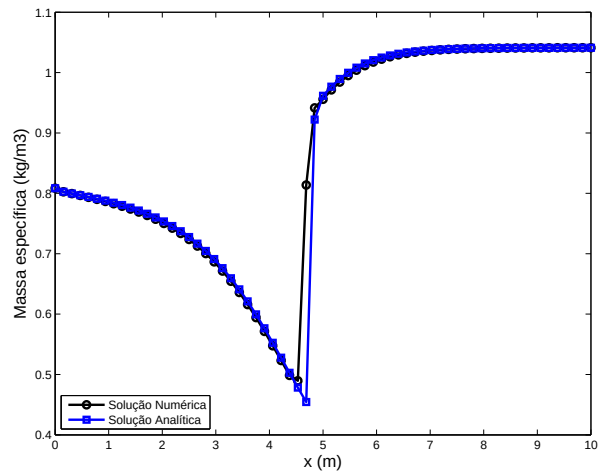
(a) Número de Mach



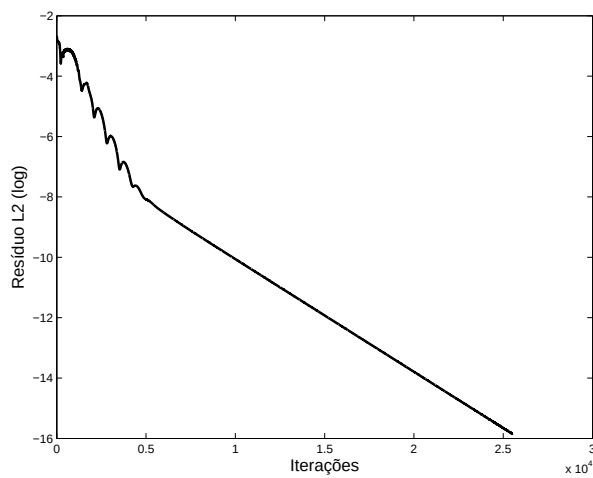
(b) Velocidade



(c) Pressão

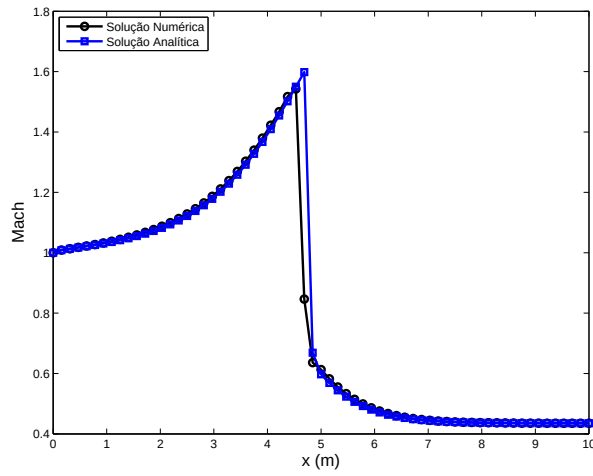


(d) Massa específica

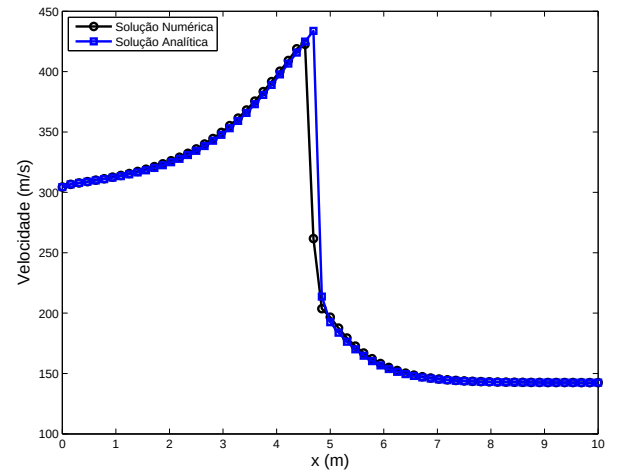


(e) Resíduo

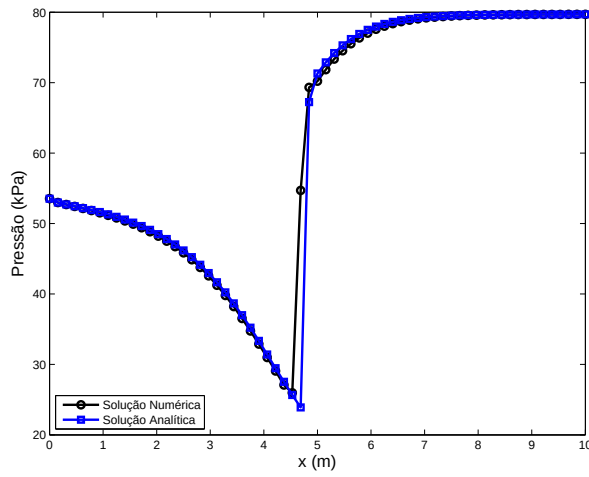
Figura 6.6: Solução Analítica x Solução TVD - Caso 2 - Sem limitador



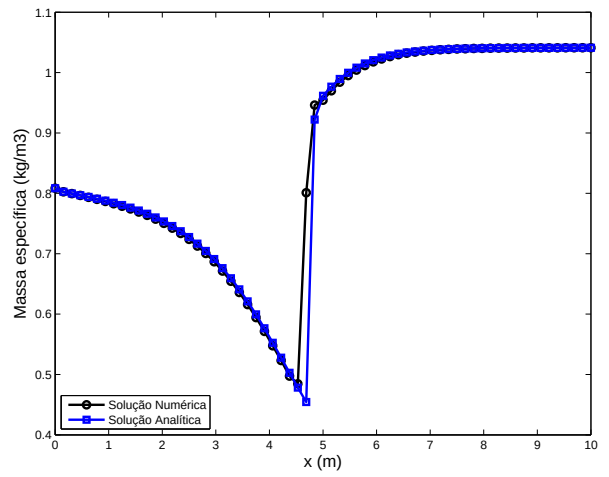
(a) Número de Mach



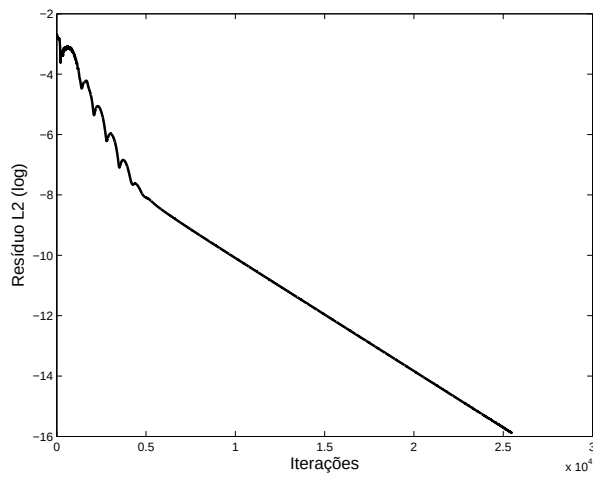
(b) Velocidade



(c) Pressão

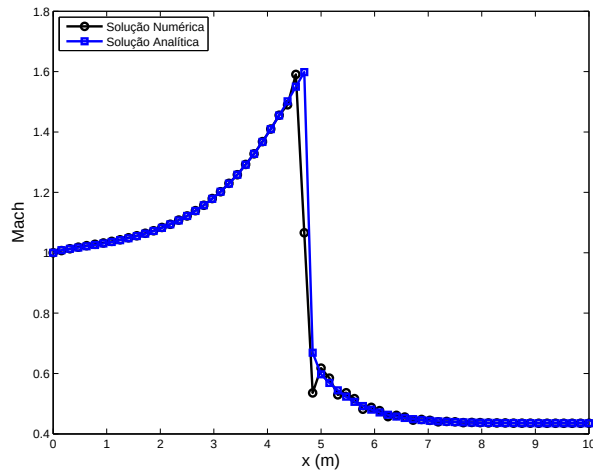


(d) Massa específica

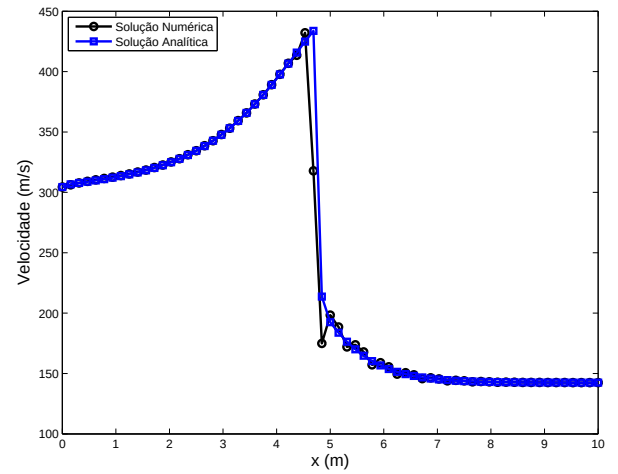


(e) Resíduo

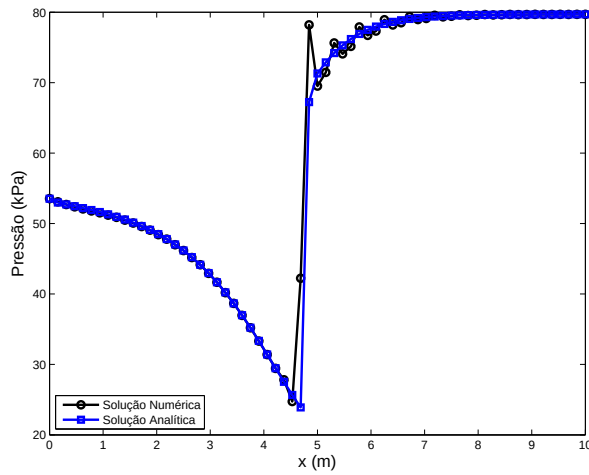
Figura 6.7: Solução Analítica x Solução TVD - Caso 2 - Limitador Yee Eq.(??)



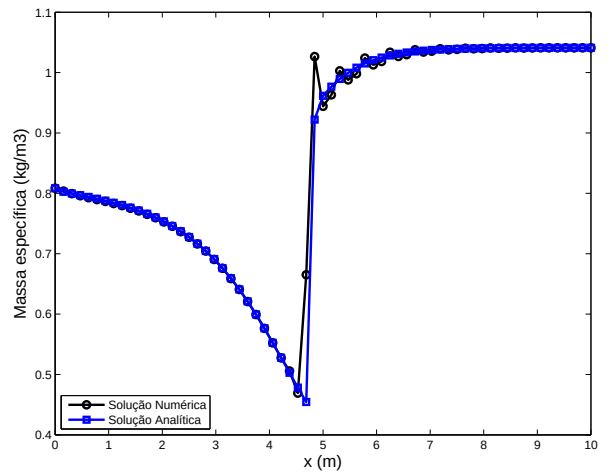
(a) Número de Mach



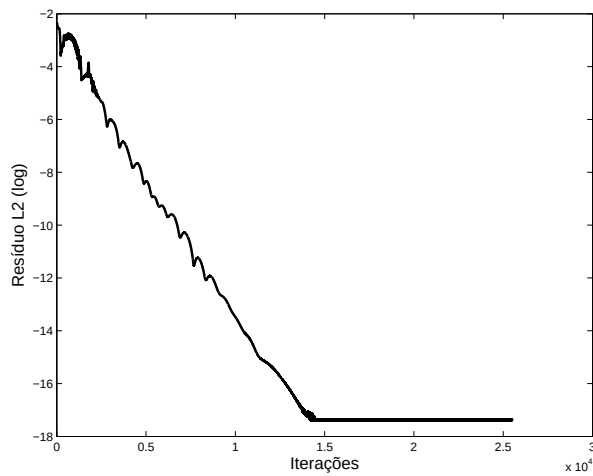
(b) Velocidade



(c) Pressão



(d) Massa específica



(e) Resíduo

Figura 6.8: Solução Analítica x Solução TVD - Caso 2 - Limitador Superbee Eq.(??)

Ao se analisar as Figs. ??, ?? e ??, é possível constatar que todas as simulações forneceram resultados satisfatórios e posicionaram a onda de choque com uma diferença de apenas um nó discreto em relação a solução analítica. Apesar deste escoamento possuir trechos de aceleração e desaceleração do fluido e também conter uma onda de choque, ainda assim, os resultados sem o uso de limitador e com o limitador Yee foram praticamente idênticos entre si, sendo que apenas o desempenho do limitador Superbee se mostrou diferente dos demais ao produzir uma grande oscilação no nó imediatamente após o choque e pequenas oscilações nos nós subsequentes.

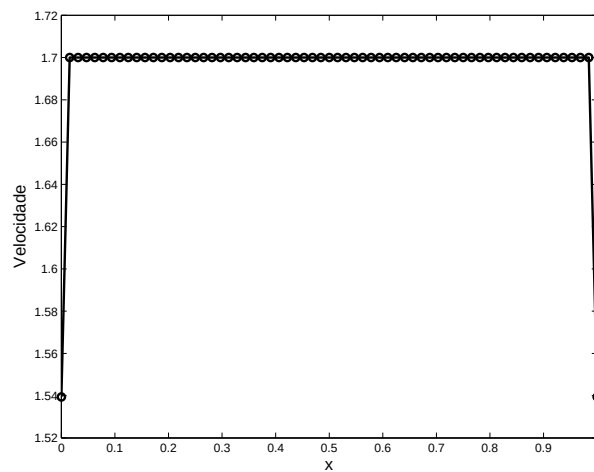
Para estas condições de escoamento e geometria, percebe-se que diferentemente para o caso de um escoamento sem choque nesta mesma geometria mostrada na Seção ??, a alteração da função limitadora de fluxo é capaz de influenciar na solução produzida pelo método numérico. Neste caso, ao se usar um limitador de fluxo mais "compressivo", houve um efeito adverso na solução.

### 6.3 Caso 3: Bocal Convergente/Divergente Simétrico - Entrada e Saída Supersônica

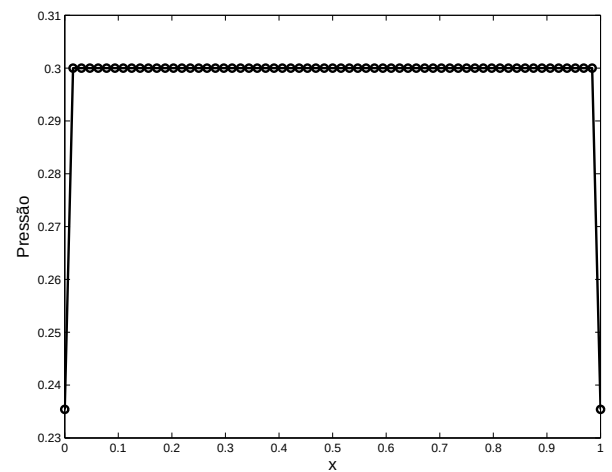
Neste caso, a geometria do bocal é a mesma utilizada na seção ?. Os valores adimensionalizados calculados nas seções de entrada e saída são dados pela tabela 6.3, e as condições iniciais para as variáveis velocidade, massa específica e pressão são mostradas nos gráficos da Fig. ?.

| Seção de Entrada     | Seção de Saída    |
|----------------------|-------------------|
| $V_{en} = 1,5394$    | $V_s = 1,5394$    |
| $P_{en} = 0,2354$    | $P_s = 0,2354$    |
| $\rho_{en} = 0,3558$ | $\rho_s = 0.3558$ |

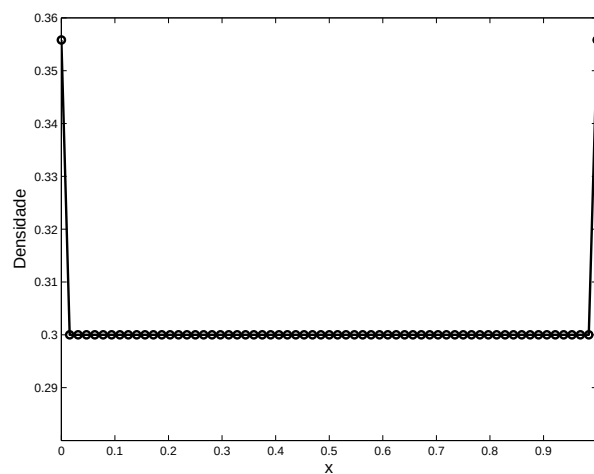
Tabela 6.3: Condições iniciais nas seções de entrada e de saída - Caso 3



(a) Velocidade

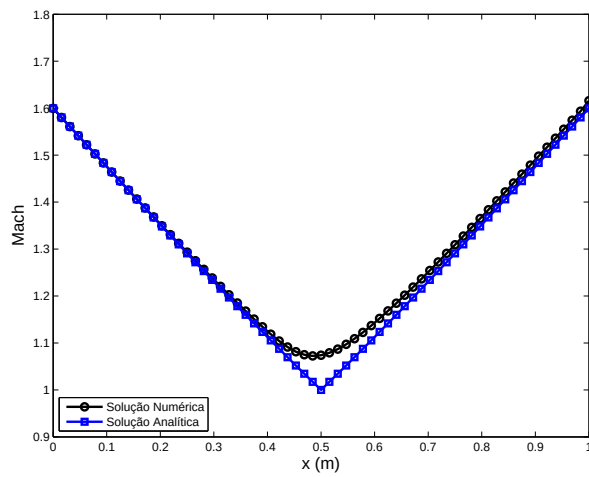


(b) Pressão

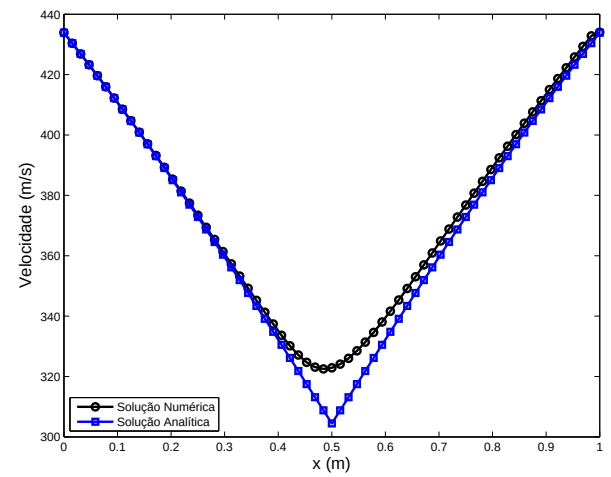


(c) Massa específica

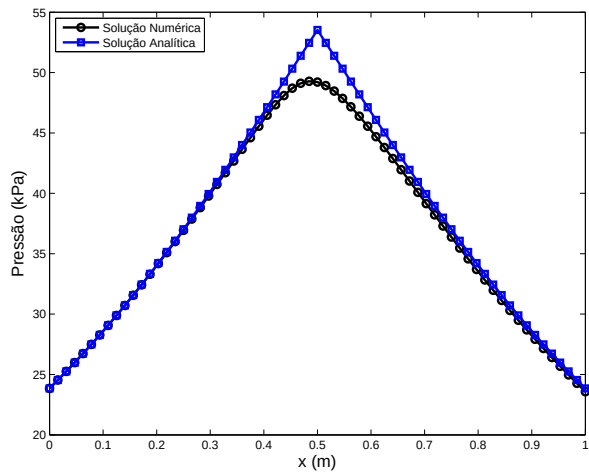
Figura 6.9: Condições Iniciais - Caso 3



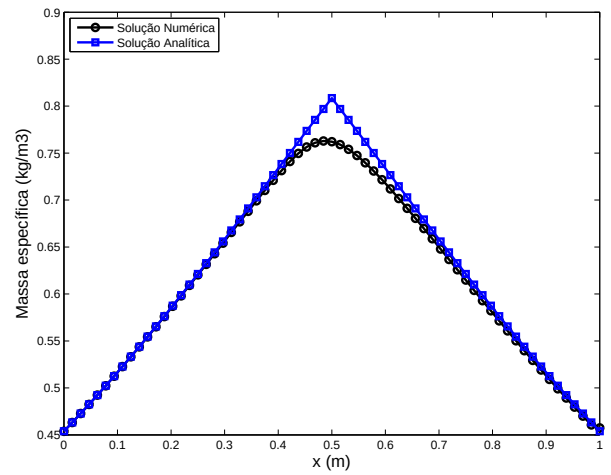
(a) Número de Mach



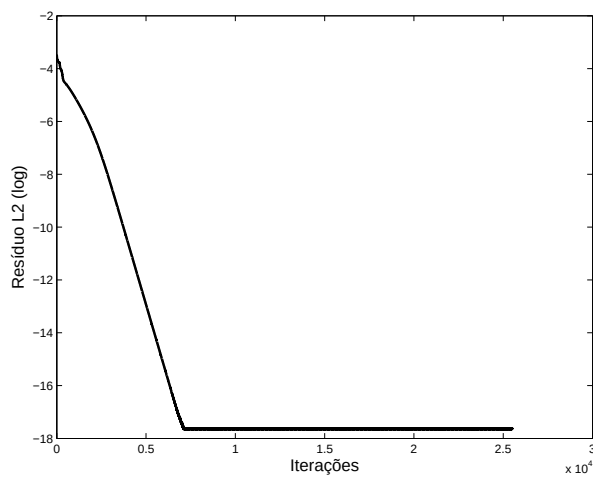
(b) Velocidade



(c) Pressão

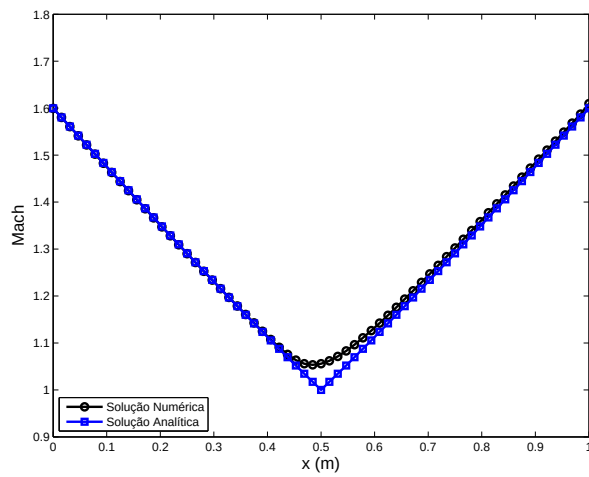


(d) Massa específica

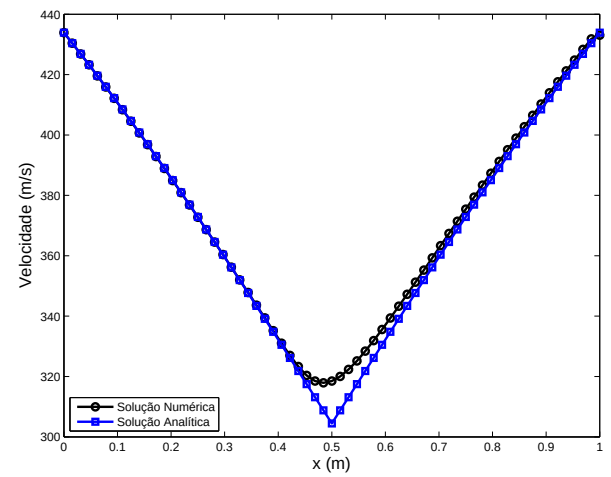


(e) Resíduo

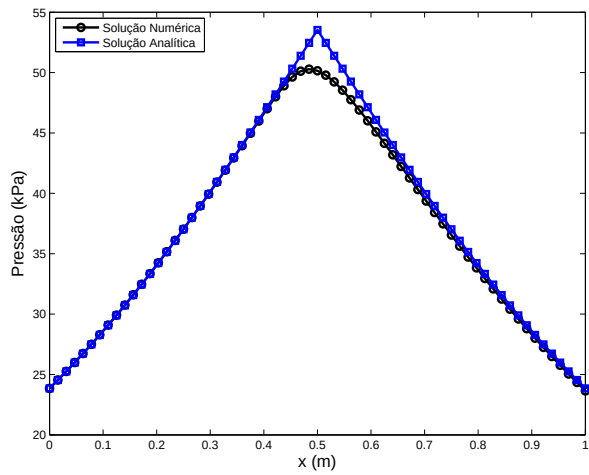
Figura 6.10: Solução Analítica x Solução TVD - Caso 3 - Sem limitador



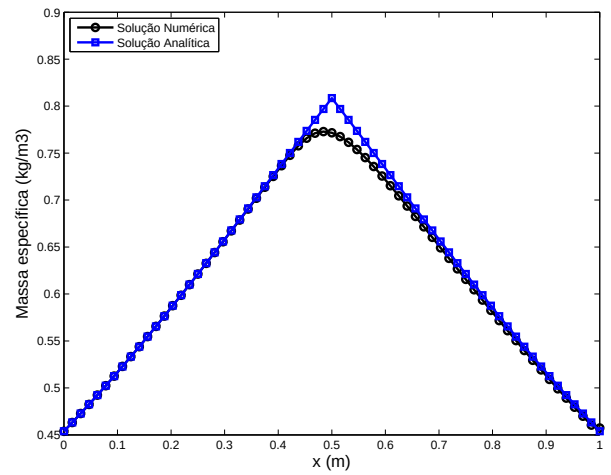
(a) Número de Mach



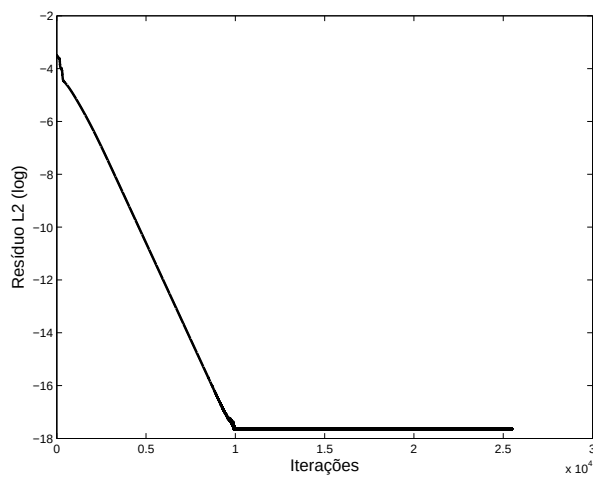
(b) Velocidade



(c) Pressão

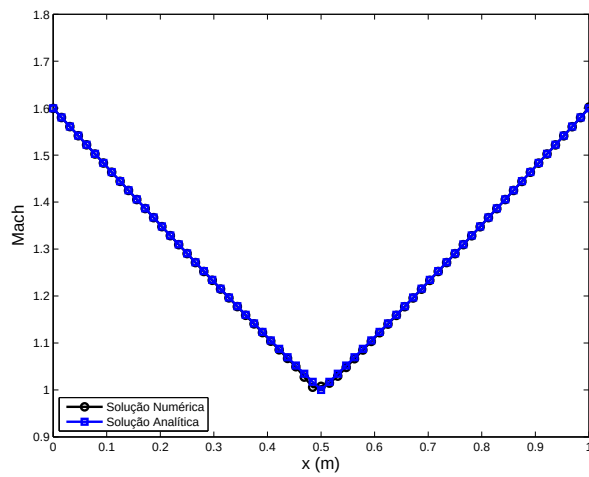


(d) Massa específica

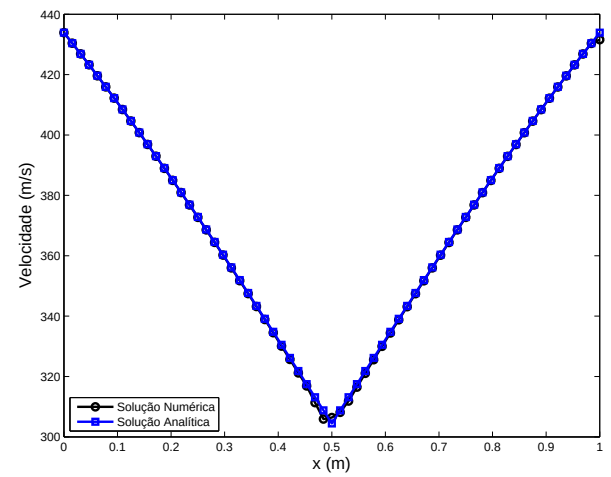


(e) Resíduo

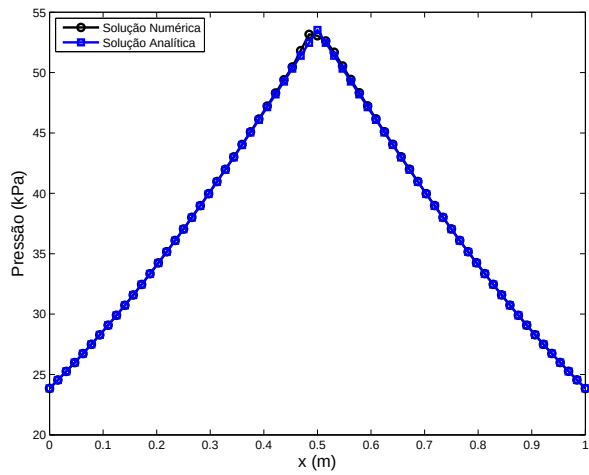
Figura 6.11: Solução Analítica x Solução TVD - Caso 3 - Limitador Yee Eq. (??)



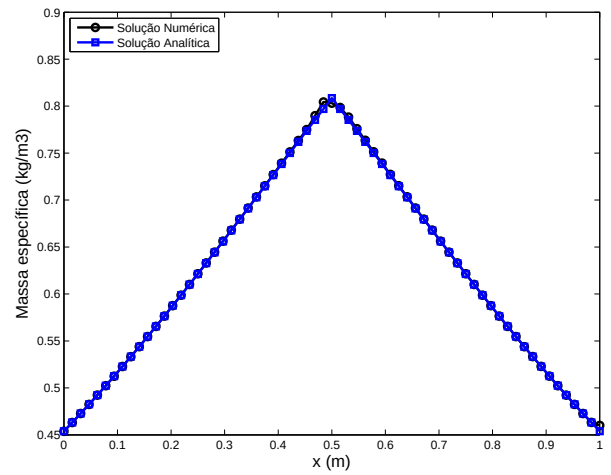
(a) Número de Mach



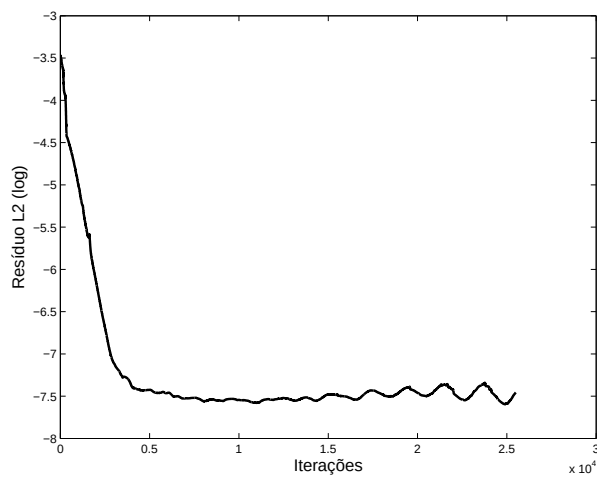
(b) Velocidade



(c) Pressão



(d) Massa específica



(e) Resíduo

Figura 6.12: Solução Analítica x Solução TVD - Caso 3 - Limitador Superbee Eq. (??)

Para a geometria convergente\divergente simétrica dada pela Eq. (??) e com as condições do escoamento dadas pela Tab. ??, o ponto de inflexão entre o trecho de desaceleração e aceleração ocorre exatamente na garganta do bocal, que corresponde à área crítica, e onde  $M = 1$ .

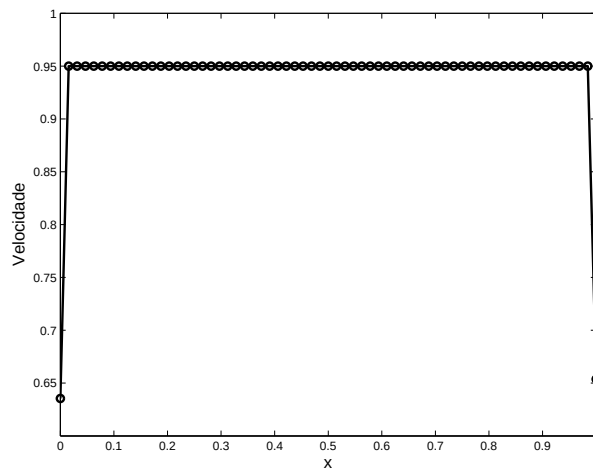
Ao se analisar os resultados obtidos sem o uso de limitador de fluxo e com o uso do limitador Yee, percebe-se que ocorreu uma "relaxação" da solução na região da garganta do bocal, sendo que o caso sem limitador foi o que mais longe do resultado esperado. Quando se usou o limitador Superbee, a solução numérica teve uma aderência praticamente perfeita com a solução analítica. Para este caso, ao contrário do caso 2 mostrado na Seção ??, o uso de um limitador mais "compressivo" se mostrou benéfico para esta combinação entre as condições do escoamento e a geometria.

## 6.4 Caso 4: Bocal Convergente/Divergente Simétrico - Entrada e Saída Subsônica

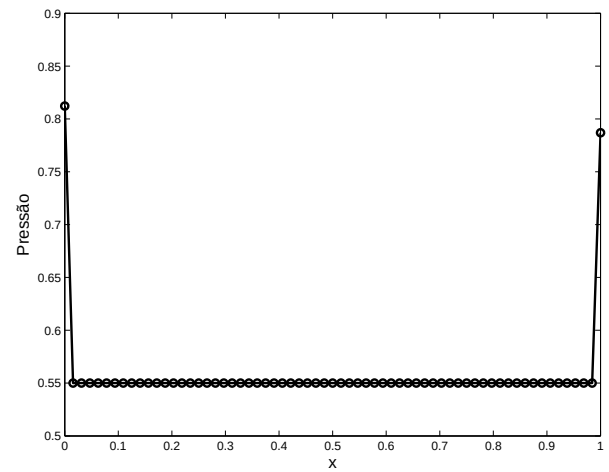
Neste caso está sendo utilizada mesma abordagem numérica dos casos 1, 2 e 3. A geometria é idêntica ao caso 3. Os valores adimensionalizados calculados nas seções de entrada e saída são dados pela tabela 6.4, e as condições iniciais para as variáveis velocidade, massa específica e pressão são mostradas nos gráficos da Fig. ??.

| Seção de Entrada     | Seção de Saída    |
|----------------------|-------------------|
| $V_{en} = 0,6355$    | $V_s = 0,6537$    |
| $P_{en} = 0,8122$    | $P_s = 0,7869$    |
| $\rho_{en} = 0,8619$ | $\rho_s = 0.8380$ |

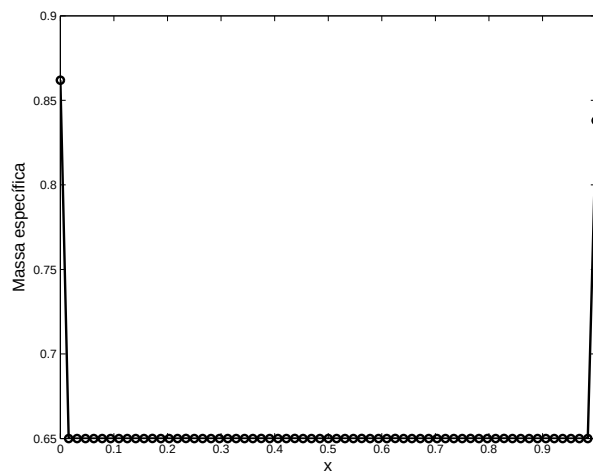
Tabela 6.4: Condições iniciais nas seções de entrada e de saída - Caso 4



(a) Velocidade

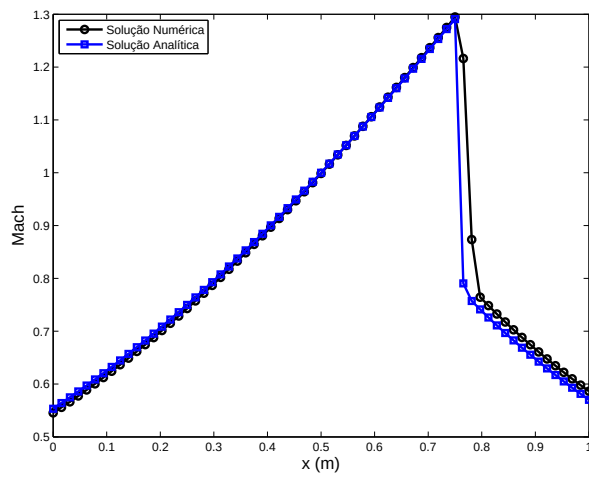


(b) Pressão

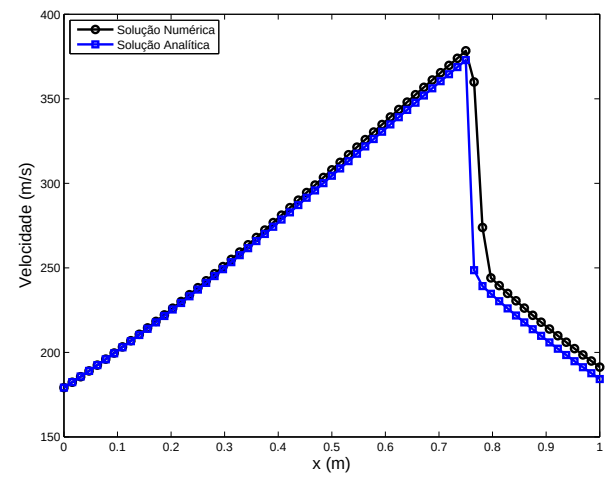


(c) Massa específica

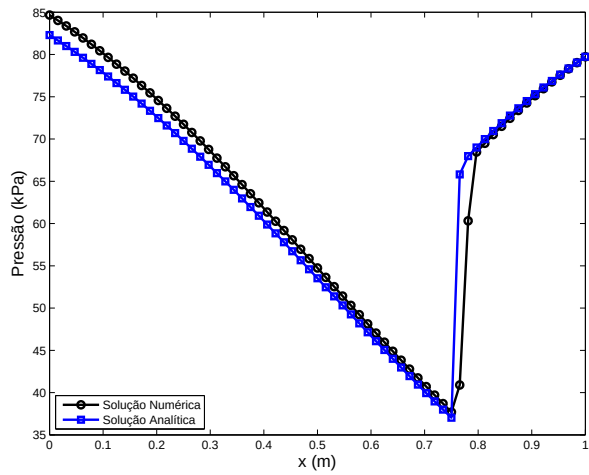
Figura 6.13: Condições Iniciais - Caso 4



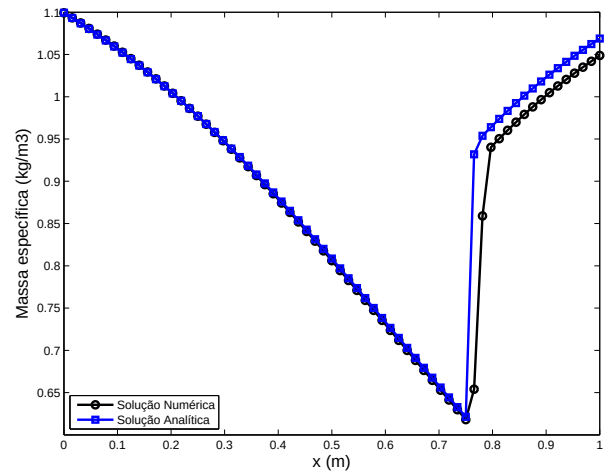
(a) Número de Mach



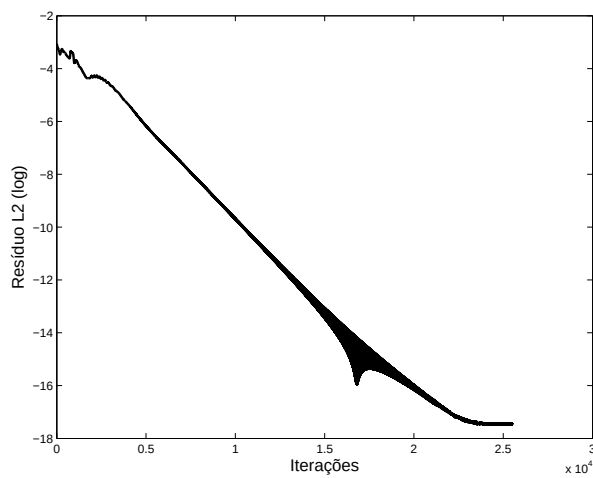
(b) Velocidade



(c) Pressão

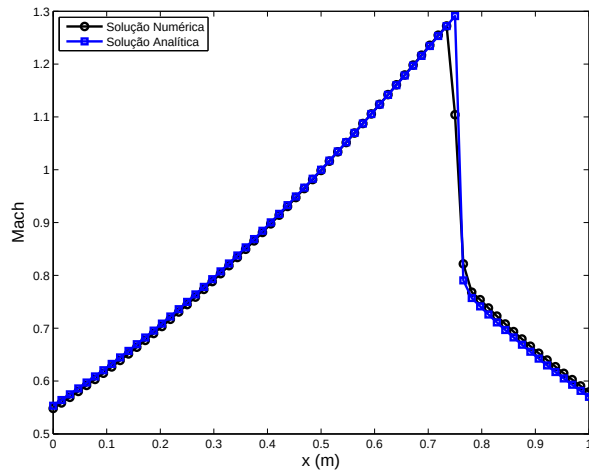


(d) Massa específica

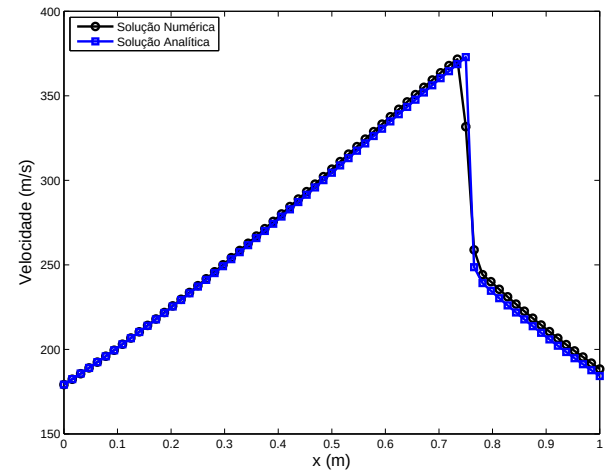


(e) Resíduo

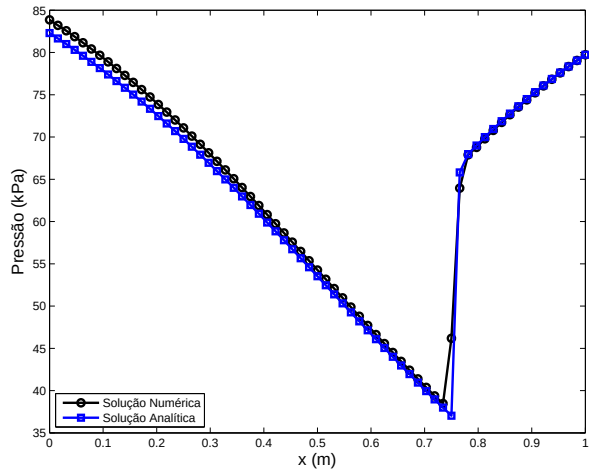
Figura 6.14: Solução Analítica x Solução TVD - Caso 4 - Sem limitador



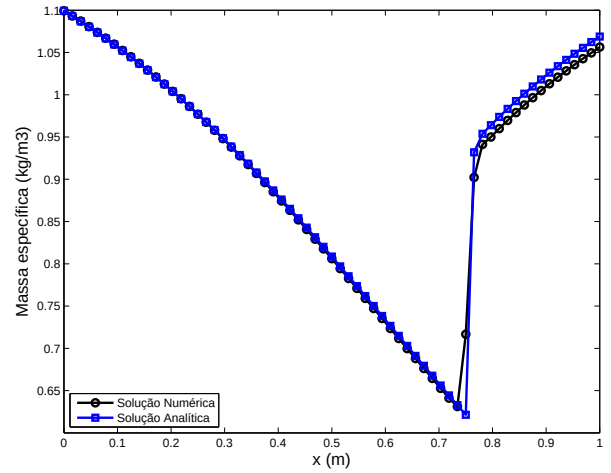
(a) Número de Mach



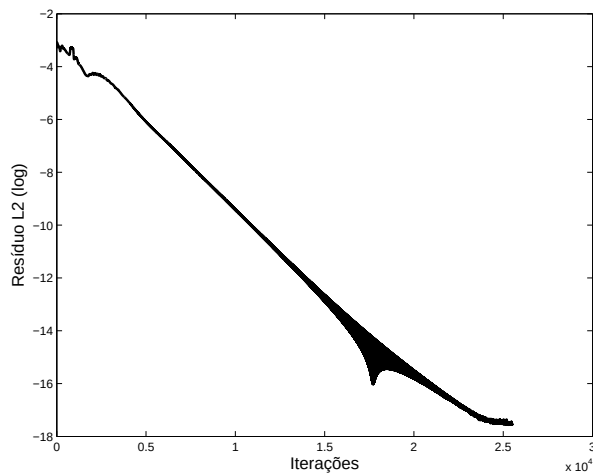
(b) Velocidade



(c) Pressão

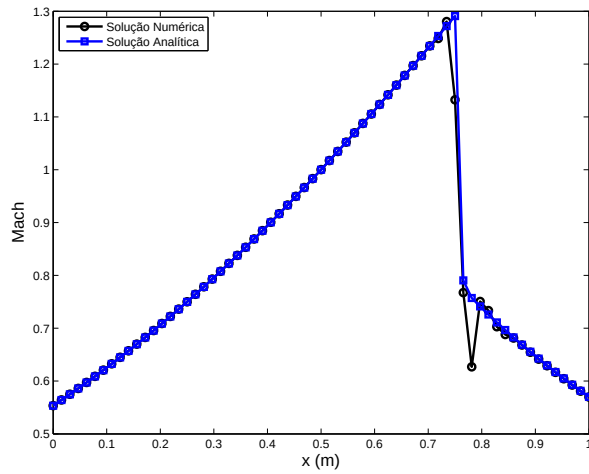


(d) Massa específica

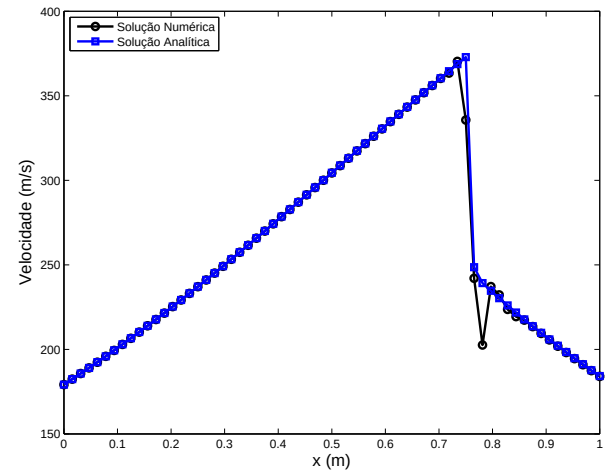


(e) Resíduo

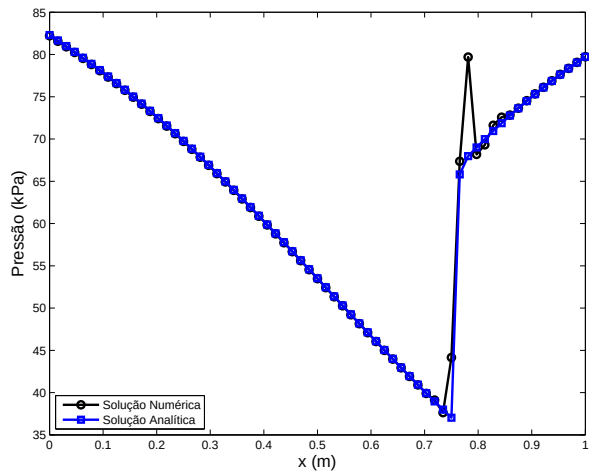
Figura 6.15: Solução Analítica x Solução TVD - Caso 4 - Limitador Yee Eq. (??)



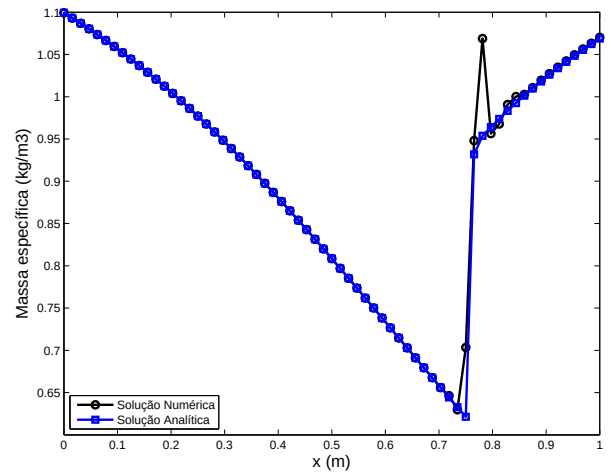
(a) Número de Mach



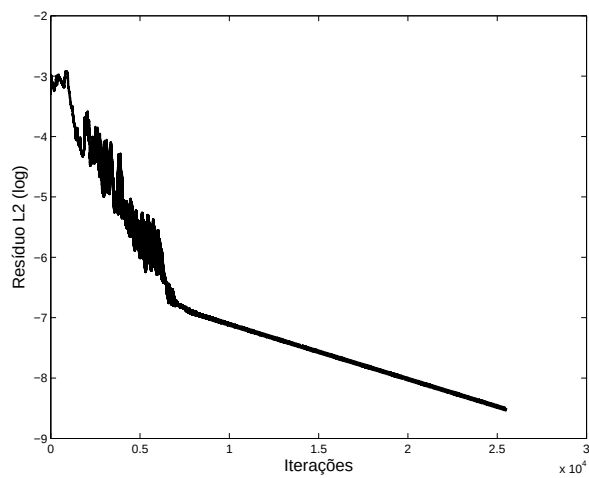
(b) Velocidade



(c) Pressão



(d) Massa específica



(e) Resíduo

Figura 6.16: Solução Analítica x Solução TVD - Caso 4 - Limitador Superbee Eq. (??)

Este caso apresenta uma combinação entre geometria e condições do escoamento que fazem com que o fluido entre no bocal em uma velocidade subsônica. Desta maneira, de acordo com a definição das condições de contorno mostrado na Seção ??, a pressão será definida apenas na seção de saída do bocal, o que dificulta o correto posicionamento da onda de choque.

Ao se observar os resultados da simulação sem o uso de limitador de fluxo, percebe-se que a onda de choque não foi posicionada corretamente e ocorreu uma diferença no valor das variáveis primitivas extrapoladas conforme a definição das condições de contorno. Quando foi utilizado o limitador Yee, a onda de choque foi posicionada corretamente, porém o uso deste limitador não foi suficiente para eliminar a diferença nos valores das variáveis primitivas. Já o limitador Superbee foi capaz de posicionar a onda de choque e definir o corretamente os valores das variáveis primitivas nas seções em que foram extrapolados, porém foi verificado uma grande oscilação no nó imediatamente após a onda de choque e pequenas oscilações nos nós subsequentes.

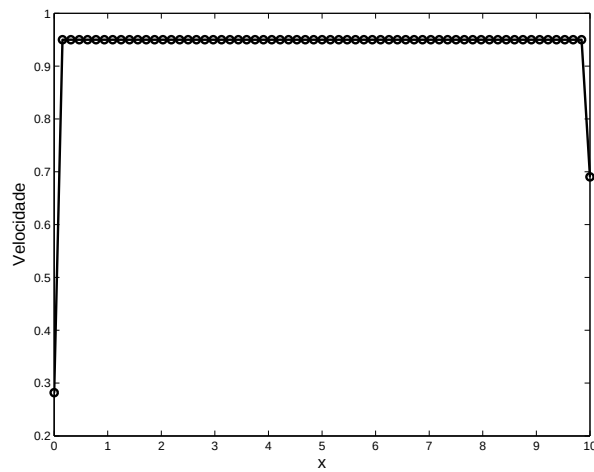
Percebe-se então que nenhum dos limitadores estudados foi capaz de fornecer uma solução que correspondesse à solução analítica sem a presença de diferenças perceptíveis a olho nú.

## 6.5 Caso 5: Bocal Convergente/Divergente Assimétrico - Entrada e Saída Subsônica

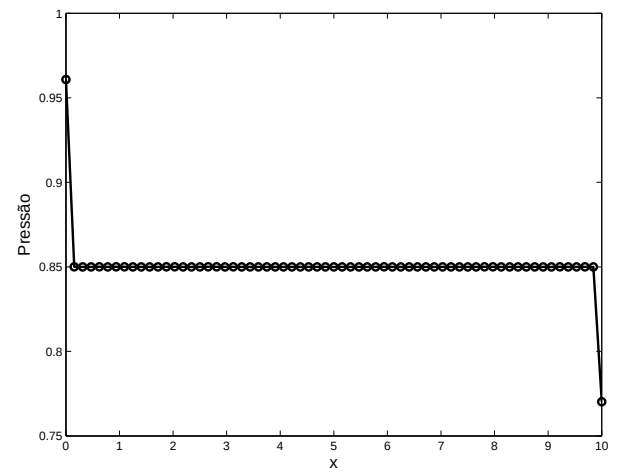
Neste caso, a geometria do bocal é a mesma utilizada na seção ?. Os valores adimensionalizados calculados nas seções de entrada e saída são dados pela Tab. 6.5, e as condições iniciais para as variáveis velocidade, massa específica e pressão são mostradas nos gráficos da Fig. ?.

| Seção de Entrada     | Seção de Saída    |
|----------------------|-------------------|
| $V_{en} = 0,2818$    | $V_s = 0,6904$    |
| $P_{en} = 0,9608$    | $P_s = 0,7702$    |
| $\rho_{en} = 0,9719$ | $\rho_s = 0.8265$ |

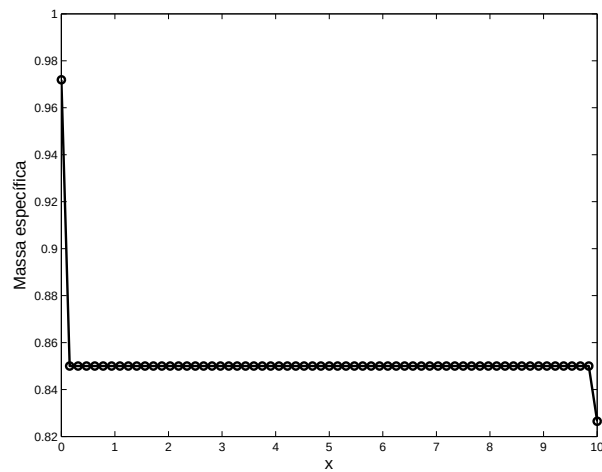
Tabela 6.5: Condições iniciais nas seções de entrada e de saída - Caso 5



(a) Velocidade

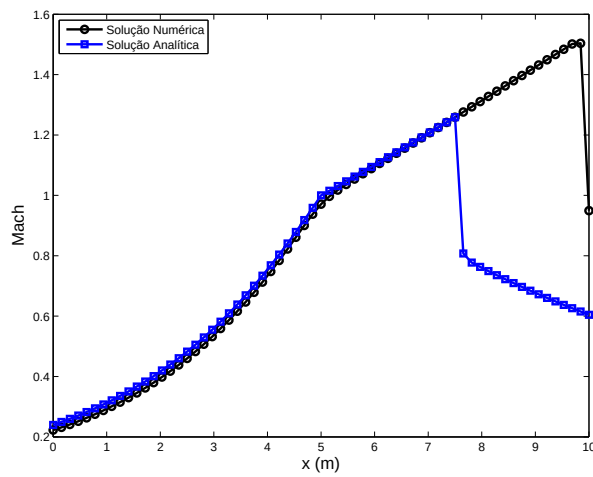


(b) Pressão

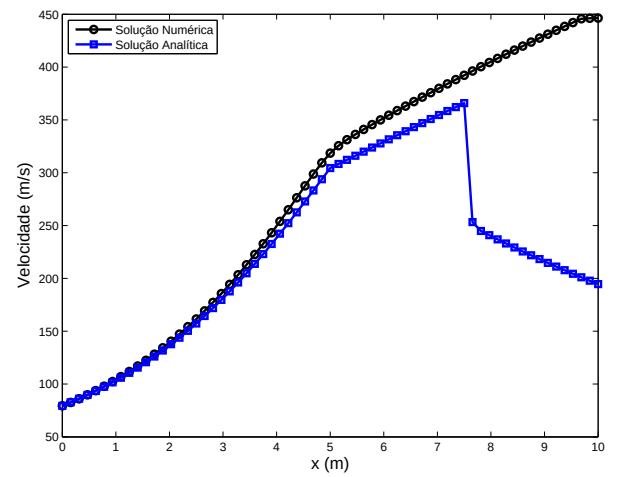


(c) Massa específica

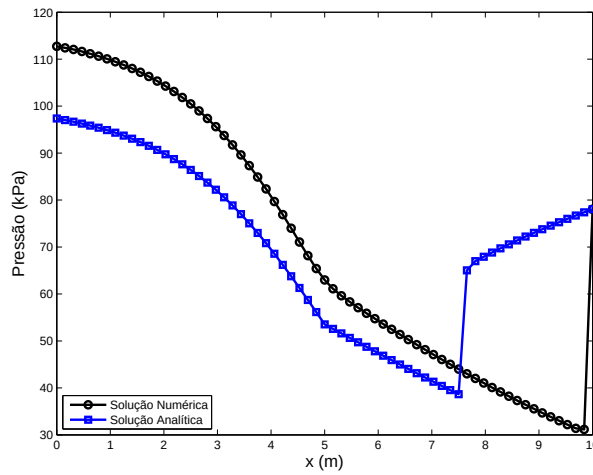
Figura 6.17: Condições iniciais - Caso 5



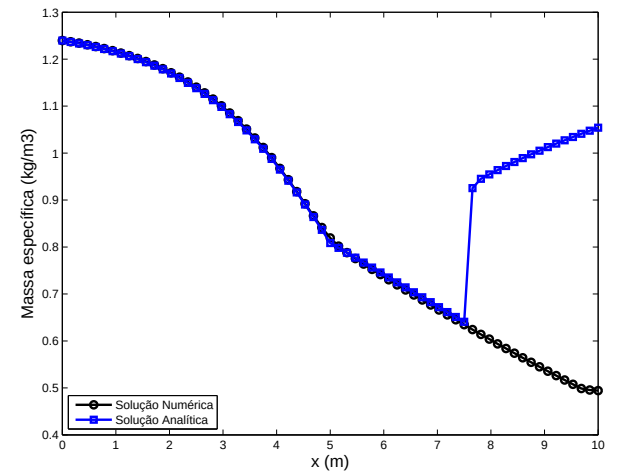
(a) Número de Mach



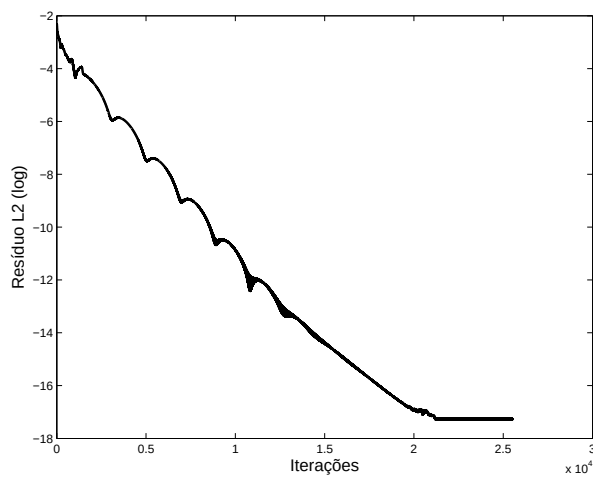
(b) Velocidade



(c) Pressão

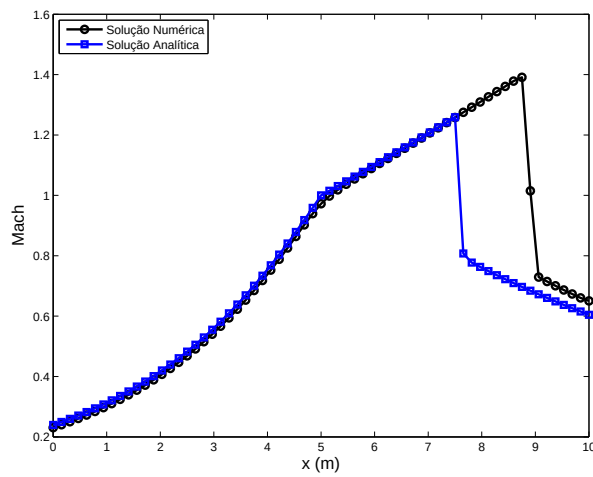


(d) Massa específica

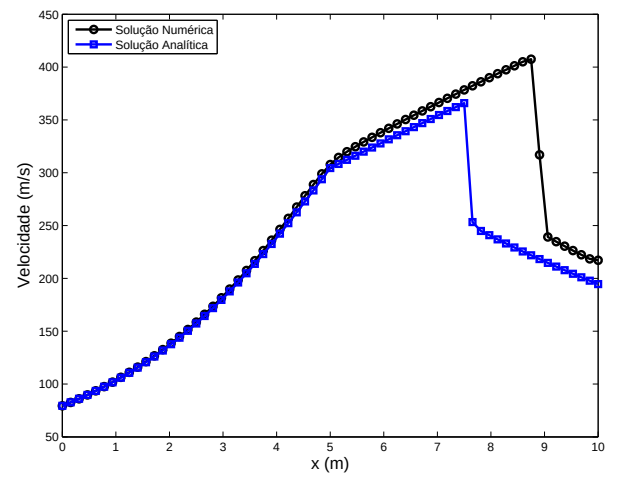


(e) Resíduo

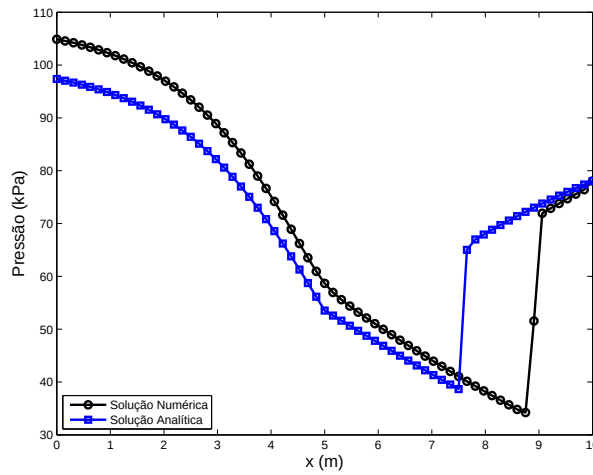
Figura 6.18: Solução Analítica x Solução TVD - Caso 5 - Sem limitador



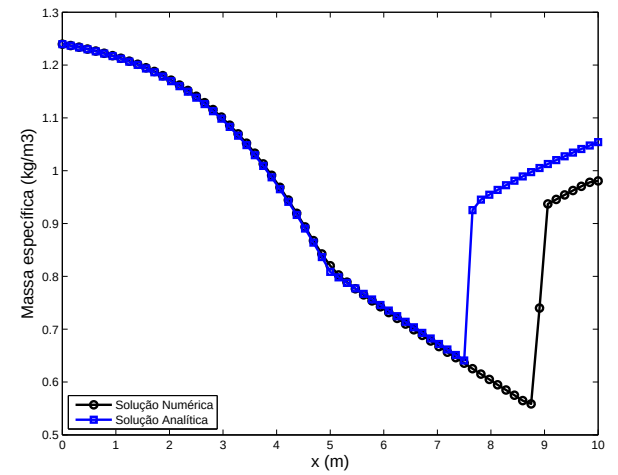
(a) Número de Mach



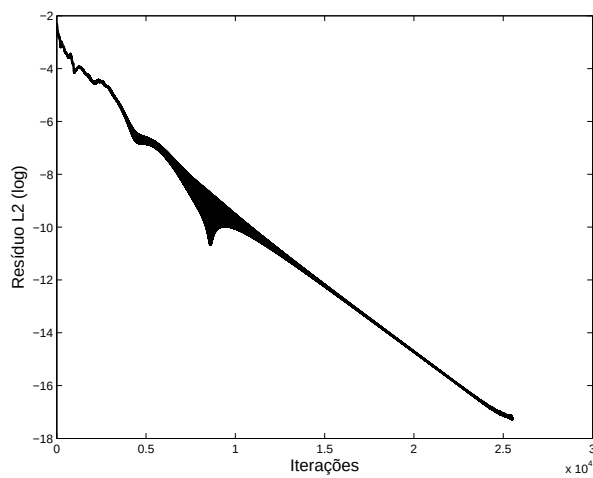
(b) Velocidade



(c) Pressão

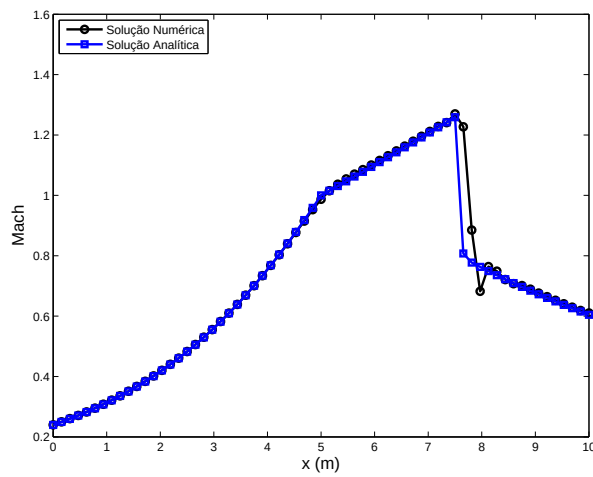


(d) Massa específica

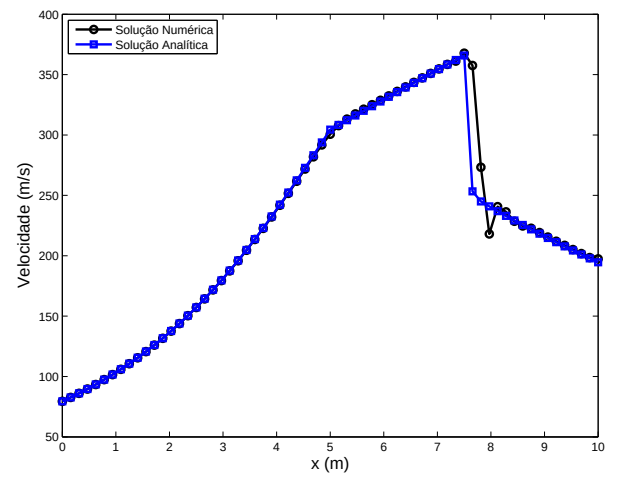


(e) Resíduo

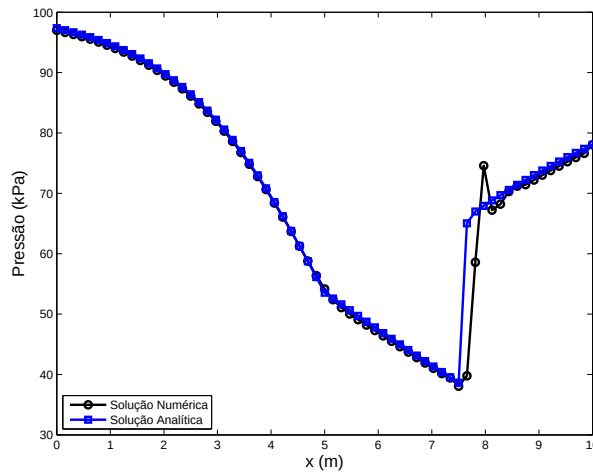
Figura 6.19: Solução Analítica x Solução TVD - Caso 5 - Limitador Yee Eq. (??)



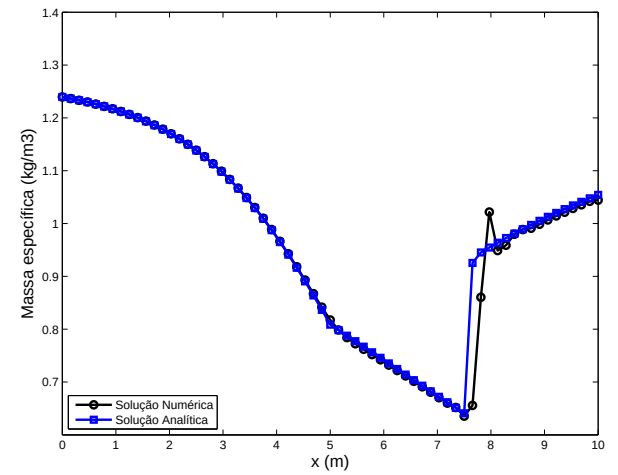
(a) Número de Mach



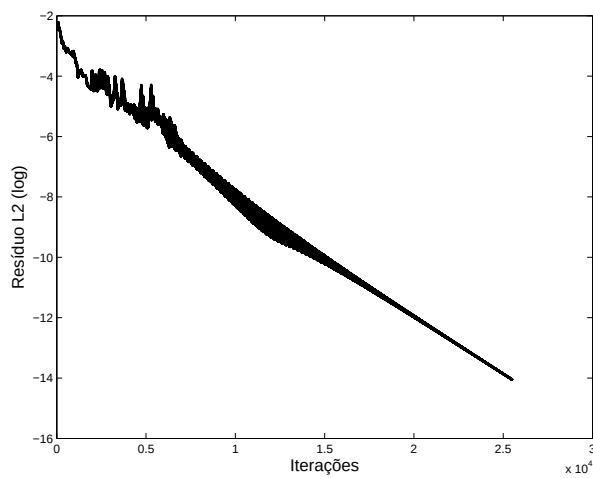
(b) Velocidade



(c) Pressão



(d) Massa específica



(e) Resíduo

Figura 6.20: Solução Analítica x Solução TVD - Caso 5 - Limitador Superbee Eq. (??)

A combinação de um bocal convergente-divergente assimétrico e um escoamento subsônico nas seções de entrada e de saída é o que apresenta a maior diferença no resultado final ao se executar o método numérico sem o uso de limitador de fluxo e ao usar diferentes tipos de limitadores. Na Fig. ??, o método numérico não foi capaz de capturar a onda de choque ao ser executado sem o uso de um limitador de fluxo, quando foi utilizado o limitador Yee, Fig. ??, foi capturada uma onda de choque, porém muito longe da posição correta, assim como ocorreu uma diferença muito grande dos valores das variáveis extrapoladas nas seções de entrada e saída do bocal quando comparados com a solução analítica. O limitador superbee, Fig. ??, foi capaz de praticamente eliminar a diferença das variáveis extrapoladas e posicionou a onda de choque a um nó de distância da posição correta, apresentando porém uma oscilação indesejada no nó imediatamente após o choque.

Este caso comprova que quanto mais complexa for a geometria do bocal e as condições do escoamento, principalmente casos com entrada e saída subsônica, maior influência terá o limitador de fluxo. Neste caso, a maior compressibilidade do limitador superbee foi fundamental para o correto posicionamento da onda de choque e cálculo das variáveis nas seções de entrada e de saída.

## 6.6 Desempenho Computacional - Casos Quase 1D

Nesta seção será mostrado o desempenho computacional de acordo com o equipamento utilizado e com a quantidade de nós utilizado na discretização do domínio. Todas as simulações foram executadas em um *notebook* Dell Inspiron 1564, com um processador Intel Core i5 2,27 GHz, 4 GB de memória RAM e sistema operacional Windows 7 de 64 bits.

Em todos os casos foram executadas 25500 iterações, com 65 nós no domínio discreto e  $CFL$  igual a 0,8.

|        | Sem Limitador | Limitador Yee | Limitador Superbee |
|--------|---------------|---------------|--------------------|
| Caso 1 | 224,37        | 231,51        | 226,99             |
| Caso 2 | 239,03        | 246,74        | 236,33             |
| Caso 3 | 219,62        | 234,31        | 228,19             |
| Caso 4 | 225,02        | 232,90        | 228,09             |
| Caso 5 | 221,74        | 229,53        | 235,77             |

Tabela 6.6: Tempo de processamento em segundos - Casos quase 1D

Ao se comparar os tempos de cada caso para os respectivos limitadores, pode-se reparar que o maior tempo de execução foi 12,3% mais lento do que o caso que forneceu os resultados no menor tempo. Sendo assim, apesar de existirem diferenças na quantidade de operações que são realizadas para os casos com e sem limitador, isso não causou um impacto significativo no tempo de processamento. Podendo-se considerar também que flutuações no desempenho do computador, como por exemplo processos diversos sendo executados em segundo plano, contribuem para as diferenças entre os tempos de processamento.

## Capítulo 7

# Esquema TVD para Sistema de Leis de Conservação Hiperbólicas 2D

### 7.1 Equações de Euler Bidimensional em Coordenadas Generalizadas

As equações de Euler mostrada no capítulo 2 em sua forma tridimensional nas Eqs. (??) e (??) juntamente com a equação de estado em Eq. (??), estas equações, quando reescritas na forma bidimensional serão dadas por,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (7.1)$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (e + P)u \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ (e + P)v \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

e a equação de estado dada para a pressão é,

$$P = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right] \quad (7.3)$$

para que estas equações possam se ajustar a geometrias complexas e evitar a aplicação de condições de contorno aproximadas é necessário realizar a transformação do sistema de coordenadas cartesiano para um sistema de coordenadas coincidente com a fronteira,

que à partir deste momento será chamado de coordenadas generalizadas.

A relação entre o sistema de coordenadas cartesiano e o generalizado, ver Fig ??, é dada por,

$$\xi = \xi(x, y) \quad (7.4)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (7.5)$$

onde as métricas que relacionam a transformação do sistema cartesiano para o generalizado são dadas por,

$$\xi_x = J y_\eta \quad (7.6)$$

$$\xi_y = -J x_\eta \quad (7.7)$$

$$\eta_x = -J y_\xi \quad (7.8)$$

$$\eta_y = J x_\xi \quad (7.9)$$

e de maneira inversa, do sistema generalizado para o cartesiano as métricas são dadas por,

$$x_\xi = \frac{1}{J} \eta_y \quad (7.10)$$

$$x_\eta = -\frac{1}{J} \xi_y \quad (7.11)$$

$$y_\xi = -\frac{1}{J} \eta_x \quad (7.12)$$

$$y_\eta = \frac{1}{J} \xi_x \quad (7.13)$$

e o jacobiano da transformação é dado por,

$$J = (\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x) = \frac{1}{(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)} \quad (7.14)$$

e a Eqs. (??), (??), (??) e (??) podem ser aproximadas por diferenças finitas centradas de segunda ordem,

$$x_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \quad (7.15)$$

$$y_\xi = \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \quad (7.16)$$

$$x_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \quad (7.17)$$

$$y_\eta = \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \quad (7.18)$$

Sendo assim, a equação transformada será escrita da seguinte maneira,

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (7.19)$$

onde

$$\hat{Q} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

$$\hat{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho (\xi_x u + \xi_y v) \\ \rho u (\xi_x u + \xi_y v) + \xi_x P \\ \rho v (\xi_x u + \xi_y v) + \xi_y P \\ (e + P) (\xi_x u + \xi_y v) \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

$$\hat{G} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho (\eta_x u + \eta_y v) \\ \rho u (\eta_x u + \eta_y v) + \eta_x P \\ \rho v (\eta_x u + \eta_y v) + \eta_y P \\ (e + P) (\eta_x u + \eta_y v) \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

onde os termos entre parênteses nas Eqs. (??) e (??) são as componentes contravariantes da velocidade, conforme mostrado abaixo,

$$U = (\xi_x u + \xi_y v) \quad (7.23)$$

$$V = (\eta_x u + \eta_y v) \quad (7.24)$$

e as componentes  $u$  e  $v$  da velocidade podem ser calculadas através do seguinte sistema de equações,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \eta_y & -\xi_y \\ -\eta_x & \xi_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

A demonstração completa destes cálculos, inclusive com os termos para utilização de malha móvel, pode ser encontrada no apêndice E.

## 7.2 Abordagem MUSCL

De maneira similar à Eq. (??) a família de um parâmetro para esquemas TVD explícitos e implícitos para um problema bidimensional é dado por, [?],

$$\begin{aligned} Q_{i,j}^{n+1} &+ \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \theta \left[ \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \theta \left[ \tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right] \\ &= Q_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (1 - \theta) \left[ \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right] - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (1 - \theta) \left[ \tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right] \end{aligned} \quad (7.26)$$

sendo que, para  $\theta = 1$ , a Eq. (??) é dada por,

$$Q_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left[ \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left[ \tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right] = Q_{i,j}^n \quad (7.27)$$

Utilizando o mesmo procedimento que foi aplicado anteriormente para os casos escalar Eq. (??), e quase-unidimensional Eq. (??), a Eq. (??) pode ser escrita da seguinte maneira, conforme mostrado em [?], [?] e [?].

$$\begin{aligned} &\left[ I + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left( H_{i+\frac{1}{2},j}^\xi - H_{i-\frac{1}{2},j}^\xi \right) + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left( H_{i,j+\frac{1}{2}}^\eta - H_{i,j-\frac{1}{2}}^\eta \right) \right] D_{i,j} \\ &= -\frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left( \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left( \tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) \end{aligned} \quad (7.28)$$

Sendo assim, a matriz dos coeficientes da Eq. (??), cuja demonstração completa pode ser encontrada no apêndice G, será dada por

$$\begin{bmatrix}
E_3^2 & E_4^2 & 0 & E_5^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
E_2^3 & E_3^3 & E_4^3 & 0 & E_5^3 & 0 & & & & & & \vdots \\
0 & E_2^4 & E_3^4 & E_4^4 & 0 & E_5^4 & 0 & & & & & \vdots \\
E_1^5 & 0 & E_2^5 & E_3^5 & E_4^5 & 0 & E_5^5 & 0 & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & & E_1^{N-4} & 0 & E_2^{N-4} & E_3^{N-4} & E_4^{N-4} & 0 & E_5^{N-4} \\
\vdots & & & & & & E_1^{N-3} & 0 & E_2^{N-3} & E_3^{N-3} & E_4^{N-3} & 0 \\
\vdots & & & & & & & E_1^{N-2} & 0 & E_2^{N-2} & E_3^{N-2} & E_4^{N-2} \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & E_1^{N-1} & 0 & E_2^{N-1} & E_3^{N-1}
\end{bmatrix} \quad (7.29)$$

e os termos da Eq. (??) e os coeficientes da Eq. (??) são dados por

$$E_1 = H_{i-\frac{1}{2},j}^\xi D_{i,j} = \frac{1}{2} \left[ A_{i-1,j} D_{i-1,j} - \frac{\Omega_{i-\frac{1}{2},j}^\xi \cdot \Delta_{i-\frac{1}{2},j} D}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \right] \quad (7.30)$$

$$E_2 = H_{i,j-\frac{1}{2}}^\eta D_{i,j} = \frac{1}{2} \left[ B_{i,j-1} D_{i,j-1} - \frac{\Omega_{i,j-\frac{1}{2}}^\eta \cdot \Delta_{i,j-\frac{1}{2}} D}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right] \quad (7.31)$$

$$E_3 = I \quad (7.32)$$

$$E_4 = H_{i+\frac{1}{2},j}^\xi D_{i,j} = \frac{1}{2} \left[ A_{i+1,j} D_{i+1,j} - \frac{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}^\xi \cdot \Delta_{i+\frac{1}{2},j} D}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \right] \quad (7.33)$$

$$E_5 = H_{i,j+\frac{1}{2}}^\eta D_{i,j} = \frac{1}{2} \left[ B_{i,j+1} D_{i,j+1} - \frac{\Omega_{i,j+\frac{1}{2}}^\eta \cdot \Delta_{i,j+\frac{1}{2}} D}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} \right] \quad (7.34)$$

$$D_{i,j} = Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n \quad (7.35)$$

$$\Delta_{i+\frac{1}{2},j} D = D_{i+1,j} - D_{i,j} \quad (7.36)$$

$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ \hat{F}_{i+1,j} + \hat{F}_{i,j} + R_{i+\frac{1}{2},j}^{(\xi)} \Phi_{i+\frac{1}{2},j} / J_{i+\frac{1}{2},j} \right] \quad (7.37)$$

$$\tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ \hat{F}_{i,j} + \hat{F}_{i-1,j} + R_{i-\frac{1}{2},j}^{(\xi)} \Phi_{i-\frac{1}{2},j} / J_{i-\frac{1}{2},j} \right] \quad (7.38)$$

$$\tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^{m+1} = \frac{1}{2} \left[ \hat{G}_{i,j+1} + \hat{G}_{i,j} + R_{i,j+\frac{1}{2}}^{(\eta)} \Phi_{i,j+\frac{1}{2}} / J_{i,j+\frac{1}{2}} \right] \quad (7.39)$$

$$\tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^{m+1} = \frac{1}{2} \left[ \hat{G}_{i,j-1} + \hat{G}_{i,j} + R_{i,j-\frac{1}{2}}^{(\eta)} \Phi_{i,j-\frac{1}{2}} / J_{i,j-\frac{1}{2}} \right] \quad (7.40)$$

### 7.2.1 Método da Direção Alternada Implícita

Para problemas bidimensionais, a formulação implícita irá gerar uma matriz de blocos pentadiagonal com diagonais não adjacentes, onde cada bloco terá dimensão 4x4, o que fará com que o processo de solução tenha um custo computacional muito alto, sendo assim, para reduzir o tempo de processamento, pode-se utilizar o método da Direção Alternada Implícita (*ADI - Alternating Direction Implicit*).

O método ADI recupera a característica tridiagonal do sistema de equações ao dividir um problema bidimensional em dois problemas unidimensionais, [?], conforme pode ser visto na Fig. ???. Sendo assim, a Eq. (??) é dividida em duas equações, sendo a varredura para a direção  $\xi$  dada por

$$\left[ I + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left( H_{i+\frac{1}{2},j}^{\xi} - H_{i-\frac{1}{2},j}^{\xi} \right) \right] D_{i,j}^* = -\frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left( \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left( \tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^m - \tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^m \right) \quad (7.41)$$

e a varredura para a direção  $\eta$  dada por

$$\left[ I + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left( H_{i,j+\frac{1}{2}}^{\eta} - H_{i,j-\frac{1}{2}}^{\eta} \right) \right] D_{i,j} = D_{i,j}^* \quad (7.42)$$

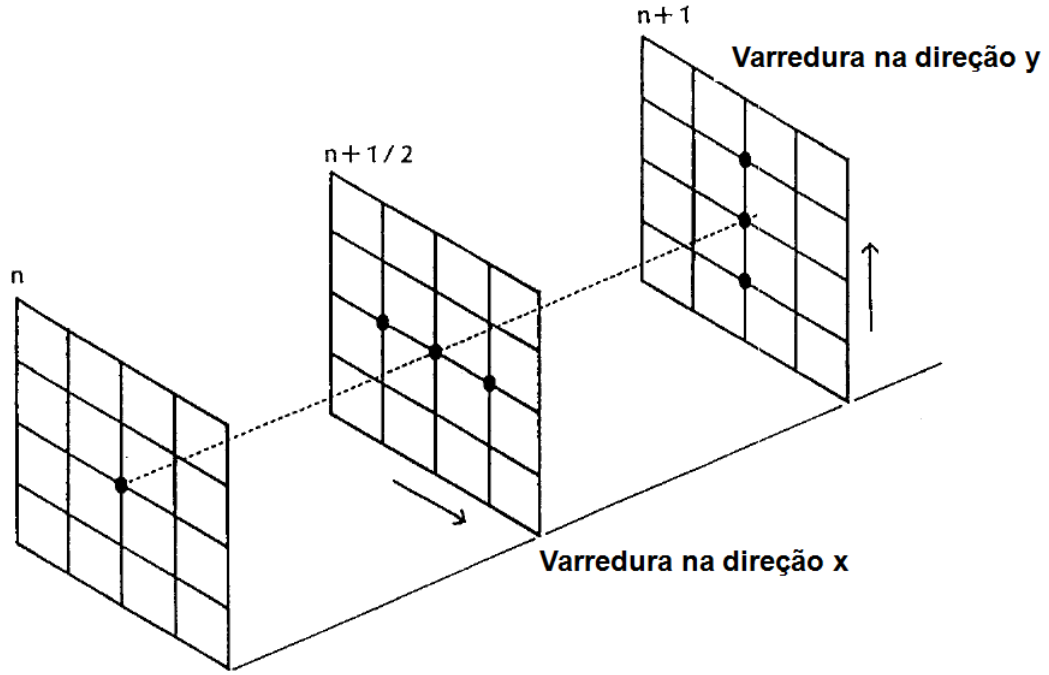


Figura 7.1: Método ADI  
 Fonte: (Modificada de [?], p.80)

### 7.2.2 Fatoração LU

Para casos tridimensionais, o método ADI é incondicionalmente instável, conforme mostrado em [?], sendo assim, para proporcionar uma transição mais fácil para o caso tridimensional em trabalhos futuros, será utilizado o método da fatoração LU neste trabalho. Desta maneira, a matriz dos coeficientes da Eq. (??), dada pela Eq. (??) será dividida em duas matrizes tridiagonais de blocos, sendo um para a varredura inferior, conforme mostrado pela Eq. (??),

$$\begin{aligned}
 & \left[ I + \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left( A_{i,j} + \frac{\Omega_{i-\frac{1}{2},j}^\xi}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \right) + \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left( B_{i,j} + \frac{\Omega_{i,j-\frac{1}{2}}^\eta}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right) \right] D_{i,j}^* \\
 & - \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left( A_{i-1,j} + \frac{\Omega_{i-\frac{1}{2},j}^\xi}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \right) D_{i-1,j}^* - \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left( B_{i,j-1} + \frac{\Omega_{i,j-\frac{1}{2}}^\eta}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right) D_{i,j-1}^* = \\
 & - \frac{\Delta t}{\Delta\xi} \left( \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta\eta} \left( \tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^m - \tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^m \right)
 \end{aligned} \tag{7.43}$$

onde a matriz dos coeficientes será dada por,

$$\begin{bmatrix}
E_3^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
E_2^3 & E_3^3 & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & E_2^4 & E_3^4 & & & & & & & & & & \vdots \\
E_1^5 & 0 & E_2^5 & E_3^5 & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & E_1^{N-4} & 0 & E_2^{N-4} & E_3^{N-4} & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & E_1^{N-3} & 0 & E_2^{N-3} & E_3^{N-3} & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & E_1^{N-2} & 0 & E_2^{N-2} & E_3^{N-2} & 0 & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & E_1^{N-1} & 0 & E_2^{N-1} & E_3^{N-1} & \vdots
\end{bmatrix} \quad (7.44)$$

e os termos  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  são dados por

$$E_1 = A_{i,j} + \frac{\Omega_{i-\frac{1}{2},j}^\xi}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \quad (7.45)$$

$$E_2 = B_{i,j} + \frac{\Omega_{i,j-\frac{1}{2}}^\eta}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \quad (7.46)$$

$$E_3 = I \quad (7.47)$$

e outra equação para a varredura superior, de acordo com a Eq. (??)

$$\begin{aligned}
& \left[ I - \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left( A_{i,j} - \frac{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}^\xi}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left( B_{i,j} - \frac{\Omega_{i,j+\frac{1}{2}}^\eta}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) \right] D_{i,j} \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left( A_{i+1,j} - \frac{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}^\xi}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \right) D_{i+1,j} + \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left( B_{i,j+1} - \frac{\Omega_{i,j+\frac{1}{2}}^\eta}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) D_{i,j+1} = D_{i,j}^*
\end{aligned} \quad (7.48)$$

sendo a matriz dos coeficientes dada por,

$$\begin{bmatrix}
E_3^2 & E_4^2 & 0 & E_5^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & E_3^3 & E_4^3 & 0 & E_5^3 & 0 & & & & & & \vdots \\
\vdots & & E_3^4 & E_4^4 & 0 & E_5^4 & 0 & & & & & \vdots \\
\vdots & & & E_3^5 & E_4^5 & 0 & E_5^5 & 0 & & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & E_3^{N-4} & E_4^{N-4} & 0 & E_5^{N-4} \\
\vdots & & & & & & & & & E_3^{N-3} & E_4^{N-3} & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & E_3^{N-2} & E_4^{N-2} \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & E_3^{N-1}
\end{bmatrix} \quad (7.49)$$

e os termos  $E_3$ ,  $E_4$  e  $E_5$  são dados por

$$E_3 = I \quad (7.50)$$

$$E_4 = A_{i,j} - \frac{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}^\xi}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \quad (7.51)$$

$$E_5 = B_{i,j} - \frac{\Omega_{i,j+\frac{1}{2}}^\eta}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} \quad (7.52)$$

Nas Eqs. (??) e (??) os termos  $E_1^2$ ,  $E_2^2$ ,  $E_4^{N-1}$  e  $E_5^{N-1}$  estarão presentes no lado direito do sistema de equações por serem termos de condição de contorno. Os termos das Eqs. (??) e (??) são mostrados à seguir.

- Matrizes jacobianas  $A = \frac{\partial F}{\partial Q}$  e  $B = \frac{\partial G}{\partial Q}$

$$A = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & \xi_x & & & & \\ \xi_x \left( \frac{1}{2} (u^2 + v^2) (\gamma - 1) - u^2 \right) - \xi_y uv & \xi_y v - \xi_x u (\gamma - 3) & & & & \\ \xi_y \left( \frac{1}{2} (u^2 + v^2) (\gamma - 1) - v^2 \right) - \xi_x uv & \xi_x v - \xi_y u (\gamma - 1) & & & & \\ \frac{(\xi_x u + \xi_y v)(-2a^2 + (u^2 + v^2)(\gamma - 1)(\gamma - 2))}{2(\gamma - 1)} & \xi_x \left( \frac{a^2}{(\gamma - 1)} - \gamma u^2 + \frac{3u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) - \xi_y uv (\gamma - 1) & & & & \\ & \xi_y & & & 0 & \\ & \xi_y u - \xi_x v (\gamma - 1) & & & \xi_x (\gamma - 1) & \\ & \xi_x u - \xi_y v (\gamma - 3) & & & \xi_y (\gamma - 1) & \\ \frac{\xi_y u^2}{2} - \gamma (\xi_y v^2 + \xi_x uv) + \frac{3}{2} \xi_y v^2 + \frac{a^2 \xi_y}{\gamma - 1} + \xi_x uv & \gamma (\xi_x u + \xi_y v) & & & & \end{bmatrix} \quad (7.53)$$

$$B = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & \eta_x & & & & \\ \eta_x \left( \frac{1}{2} (u^2 + v^2) (\gamma - 1) - u^2 \right) - \eta_y uv & \eta_y v - \eta_x u (\gamma - 3) & & & & \\ \eta_y \left( \frac{1}{2} (u^2 + v^2) (\gamma - 1) - v^2 \right) - \eta_x uv & \eta_x v - \eta_y u (\gamma - 1) & & & & \\ \frac{(\eta_x u + \eta_y v)(-2a^2 + (u^2 + v^2)(\gamma - 1)(\gamma - 2))}{2(\gamma - 1)} & \eta_x \left( \frac{a^2}{(\gamma - 1)} - \gamma u^2 + \frac{3u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) - \eta_y uv (\gamma - 1) & & & & \\ & \eta_y & & & 0 & \\ & \eta_y u - \eta_x v (\gamma - 1) & & & \eta_x (\gamma - 1) & \\ & \eta_x u - \eta_y v (\gamma - 3) & & & \eta_y (\gamma - 1) & \\ \frac{\eta_y u^2}{2} - \gamma (\eta_y v^2 + \eta_x uv) + \frac{3}{2} \eta_y v^2 + \frac{a^2 \eta_y}{\gamma - 1} + \eta_x uv & \gamma (\eta_x u + \eta_y v) & & & & \end{bmatrix} \quad (7.54)$$

- Produto triplo  $\Omega$  para as direções  $\xi$  e  $\eta$

$$\Omega_{i+\frac{1}{2},j}^\xi = R_{i+\frac{1}{2},j}^{(\xi)} \cdot \text{diag} \left[ \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) \right] \cdot R_{i+\frac{1}{2},j}^{-1(\xi)} \quad (7.55)$$

$$\Omega_{i-\frac{1}{2},j}^\xi = R_{i-\frac{1}{2},j}^{(\xi)} \cdot \text{diag} \left[ \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right) \right] \cdot R_{i-\frac{1}{2},j}^{-1(\xi)} \quad (7.56)$$

$$\Omega_{i,j+\frac{1}{2}}^\eta = R_{i,j+\frac{1}{2}}^{(\eta)} \cdot \text{diag} \left[ \Psi \left( b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right) \right] \cdot R_{i,j+\frac{1}{2}}^{-1(\eta)} \quad (7.57)$$

$$\Omega_{i,j-\frac{1}{2}}^\eta = R_{i,j-\frac{1}{2}}^{(\eta)} \cdot \text{diag} \left[ \Psi \left( b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right) \right] \cdot R_{i,j-\frac{1}{2}}^{-1(\eta)} \quad (7.58)$$

- Autovalores para as direções  $\xi$  e  $\eta$

$$(a^1, a^2, a^3, a^4) = \begin{pmatrix} U \\ U \\ U + c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \\ U - c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \end{pmatrix} \quad (7.59)$$

$$(b^1, b^2, b^3, b^4) = \begin{pmatrix} V \\ V \\ V + c\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \\ V - c\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \end{pmatrix} \quad (7.60)$$

onde as componentes da velocidade contravariante são dadas pelas Eqs. (??) e (??) e a velocidade do som é calculada pela Eq. (??).

- Matriz dos autovetores para as direções  $\xi$  e  $\eta$

$$R^{(\xi)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{\xi_y}{\xi_x} & \frac{u\xi_x + v\xi_y}{\xi_x} & u + \frac{c\xi_x}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} & u - \frac{c\xi_x}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} \\ 1 & 0 & v + \frac{c\xi_y}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} & v - \frac{c\xi_y}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} \\ \frac{v\xi_x - u\xi_y}{\xi_x} & \frac{2uv\xi_y + (u^2 - v^2)\xi_x}{2\xi_x} & \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{c(u\xi_x + v\xi_y)}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} & \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} - \frac{c(u\xi_x + v\xi_y)}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} \end{bmatrix} \quad (7.61)$$

$$R^{(\eta)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{\eta_y}{\eta_x} & \frac{u\eta_x + v\eta_y}{\eta_x} & u + \frac{c\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} & u - \frac{c\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} \\ 1 & 0 & v + \frac{c\eta_y}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} & v - \frac{c\eta_y}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} \\ \frac{v\eta_x - u\eta_y}{\eta_x} & \frac{2uv\eta_y + (u^2 - v^2)\eta_x}{2\eta_x} & \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{c(u\eta_x + v\eta_y)}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} & \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} - \frac{c(u\eta_x + v\eta_y)}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} \end{bmatrix} \quad (7.62)$$

- Matriz inversa dos autovetores para as direções  $\xi$  e  $\eta$

$$R^{-1(\xi)} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\gamma)v(u^2+v^2)}{2c^2} + \frac{\xi_y(u\xi_x+v\xi_y)}{\xi_x^2+\xi_y^2} & \frac{(\gamma-1)uv}{c^2} - \frac{\xi_x\xi_y}{\xi_x^2+\xi_y^2} & \frac{(\gamma-1)v^2}{c^2} + \frac{\xi_x^2}{\xi_x^2+\xi_y^2} & -\frac{(\gamma-1)v}{c^2} \\ 1 + \frac{(1-\gamma)(u^2+v^2)}{2c^2} & \frac{(\gamma-1)u}{c^2} & \frac{(\gamma-1)v}{c^2} & -\frac{(\gamma-1)}{c^2} \\ \frac{(\gamma-1)(u^2+v^2)}{4c^2} - \frac{u\xi_x+v\xi_y}{2c\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}} & \frac{(1-\gamma)u}{2c^2} + \frac{\xi_x}{2c\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}} & \frac{(1-\gamma)v}{2c^2} + \frac{\xi_y}{2c\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}} & \frac{(\gamma-1)}{2c^2} \\ \frac{(\gamma-1)(u^2+v^2)}{4c^2} + \frac{u\xi_x+v\xi_y}{2c\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}} & \frac{(1-\gamma)u}{2c^2} - \frac{\xi_x}{2c\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}} & \frac{(1-\gamma)v}{2c^2} - \frac{\xi_y}{2c\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}} & \frac{(\gamma-1)}{2c^2} \end{bmatrix} \quad (7.63)$$

$$R^{-1(\eta)} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\gamma)v(u^2+v^2)}{2c^2} + \frac{\eta_y(u\eta_x+v\eta_y)}{\eta_x^2+\eta_y^2} & \frac{(\gamma-1)uv}{c^2} - \frac{\eta_x\eta_y}{\eta_x^2+\eta_y^2} & \frac{(\gamma-1)v^2}{c^2} + \frac{\eta_x^2}{\eta_x^2+\eta_y^2} & -\frac{(\gamma-1)v}{c^2} \\ 1 + \frac{(1-\gamma)(u^2+v^2)}{2c^2} & \frac{(\gamma-1)u}{c^2} & \frac{(\gamma-1)v}{c^2} & -\frac{(\gamma-1)}{c^2} \\ \frac{(\gamma-1)(u^2+v^2)}{4c^2} - \frac{u\eta_x+v\eta_y}{2c\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2}} & \frac{(1-\gamma)u}{2c^2} + \frac{\eta_x}{2c\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2}} & \frac{(1-\gamma)v}{2c^2} + \frac{\eta_y}{2c\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2}} & \frac{(\gamma-1)}{2c^2} \\ \frac{(\gamma-1)(u^2+v^2)}{4c^2} + \frac{u\eta_x+v\eta_y}{2c\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2}} & \frac{(1-\gamma)u}{2c^2} - \frac{\eta_x}{2c\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2}} & \frac{(1-\gamma)v}{2c^2} - \frac{\eta_y}{2c\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2}} & \frac{(\gamma-1)}{2c^2} \end{bmatrix} \quad (7.64)$$

As funções de fluxo numérico são mostradas nas Eqs. (??), (??), (??) e (??) e os termos são mostrados à seguir.

- Limitador de fluxo  $\Phi$

O limitador de fluxo  $\Phi$  é um vetor com quatro componentes para o caso bidimensional, e pode ser escrito nas formas *upwind* ou simétrica.

- ★ Limitador de fluxo *upwind*

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j}^l = \frac{1}{2}\Psi\left(a_{i+\frac{1}{2},j}^l\right)(g_{i,j}^l + g_{i+1,j}^l) - \Psi\left(a_{i+\frac{1}{2},j}^l + \gamma_{i+\frac{1}{2},j}^l\right)\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \quad (7.65)$$

$$\phi_{i-\frac{1}{2},j}^l = \frac{1}{2}\Psi\left(a_{i-\frac{1}{2},j}^l\right)(g_{i-1,j}^l + g_{i,j}^l) - \Psi\left(a_{i-\frac{1}{2},j}^l + \gamma_{i-\frac{1}{2},j}^l\right)\alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l \quad (7.66)$$

$$\phi_{i,j+\frac{1}{2}}^l = \frac{1}{2}\Psi\left(a_{i,j+\frac{1}{2}}^l\right)(g_{i,j}^l + g_{i,j+1}^l) - \Psi\left(a_{i,j+\frac{1}{2}}^l + \gamma_{i,j+\frac{1}{2}}^l\right)\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l \quad (7.67)$$

$$\phi_{i,j-\frac{1}{2}}^l = \frac{1}{2}\Psi\left(a_{i,j-\frac{1}{2}}^l\right)(g_{i,j-1}^l + g_{i,j}^l) - \Psi\left(a_{i,j-\frac{1}{2}}^l + \gamma_{i,j-\frac{1}{2}}^l\right)\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l \quad (7.68)$$

★ Limitador de fluxo simétrico

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j}^l = -\Psi \left( a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) \left[ \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l - g_{i+\frac{1}{2},j}^l \right] \quad (7.69)$$

$$\phi_{i-\frac{1}{2},j}^l = -\Psi \left( a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right) \left[ \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l - g_{i-\frac{1}{2},j}^l \right] \quad (7.70)$$

$$\phi_{i,j+\frac{1}{2}}^l = -\Psi \left( a_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right) \left[ \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l - g_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right] \quad (7.71)$$

$$\phi_{i,j-\frac{1}{2}}^l = -\Psi \left( a_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right) \left[ \alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l - g_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right] \quad (7.72)$$

• Função de correção de entropia

$$\Psi(z) = \begin{cases} |z|, & |z| \geq \delta \\ \frac{(z^2 + \delta^2)}{2\delta}, & |z| < \delta \end{cases} \quad (4.42)$$

onde  $z$  corresponde aos autovalores do problema, com ou sem correção de segunda ordem, e  $\delta$  é o parâmetro de correção de entropia constante, são utilizados valores no intervalo  $0,1 \leq \delta \leq 0,125$  segundo [?], porém para escoamentos hipersônicos ao redor de corpos rombudos o uso de uma forma variável do  $\delta$  é mais adequada em termos de estabilidade e taxa de convergência, de acordo com [?] e [?].

• Fator de correção de entropia variável

$$\delta_{i+\frac{1}{2},j} = \delta_0 \left[ \left| U_{i+\frac{1}{2},j} \right| + \left| V_{i+\frac{1}{2},j} \right| + 0,5c_{i+\frac{1}{2},j}\kappa_{i+\frac{1}{2},j} \right] \quad (7.73)$$

onde,

$$\kappa_{i+\frac{1}{2},j} = \sqrt{(\xi_x)_{i+\frac{1}{2},j}^2 + (\xi_y)_{i+\frac{1}{2},j}^2} + \sqrt{(\eta_x)_{i+\frac{1}{2},j}^2 + (\eta_y)_{i+\frac{1}{2},j}^2} \quad (7.74)$$

$$(\xi_x)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} \left[ (\xi_x)_{i+1,j} + (\xi_x)_{i,j} \right] \quad (7.75)$$

e o valor de  $\delta_0$ , fica no intervalo  $0,05 \leq \delta_0 \leq 0,25$ , de acordo com [?]. O jacobiano da transformação necessário para a Eq. (??) é dado pelas Eqs. (??), (??), (??) e (??).

- Média das características locais

$$\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l = R_{i+\frac{1}{2},j}^{-1(\xi)} \left( \hat{Q}_{i+1,j}^n - \hat{Q}_{i,j}^n \right) \quad (7.76)$$

$$\alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l = R_{i-\frac{1}{2},j}^{-1(\xi)} \left( \hat{Q}_{i,j}^n - \hat{Q}_{i-1,j}^n \right) \quad (7.77)$$

$$\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l = R_{i,j+\frac{1}{2}}^{-1(\eta)} \left( \hat{Q}_{i,j+1}^n - \hat{Q}_{i,j}^n \right) \quad (7.78)$$

$$\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l = R_{i,j-\frac{1}{2}}^{-1(\eta)} \left( \hat{Q}_{i,j}^n - \hat{Q}_{i,j-1}^n \right) \quad (7.79)$$

- Correção de segunda ordem da velocidade característica

$$\gamma_{i+\frac{1}{2},j}^l = \begin{cases} \frac{(g_{i+1,j}^l - g_{i,j}^l)}{\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l}, & \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \neq 0 \\ 0, & \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l = 0 \end{cases} \quad (7.80)$$

$$\gamma_{i-\frac{1}{2},j}^l = \begin{cases} \frac{(g_{i,j}^l - g_{i-1,j}^l)}{\alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l}, & \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l \neq 0 \\ 0, & \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l = 0 \end{cases} \quad (7.81)$$

$$\gamma_{i,j+\frac{1}{2}}^l = \begin{cases} \frac{(g_{i,j+1}^l - g_{i,j}^l)}{\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l}, & \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l \neq 0 \\ 0, & \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l = 0 \end{cases} \quad (7.82)$$

$$\gamma_{i,j-\frac{1}{2}}^l = \begin{cases} \frac{(g_{i,j}^l - g_{i,j-1}^l)}{\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l}, & \alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l \neq 0 \\ 0, & \alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l = 0 \end{cases} \quad (7.83)$$

- Funções limitadoras de fluxo

As funções limitadoras de fluxo podem ser extendidas para o caso bidimensional da seguinte maneira, conforme o procedimento mostrado em [?]. Para o caso *upwind*, têm-se,

★ Minmod

$$g_{i,j}^l = \minmod \left( \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l, \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l, \alpha_{i+\frac{3}{2},j}^l \right) \quad (7.84)$$

$$g_{i,j}^l = \minmod \left( \alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l, \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l, \alpha_{i,j+\frac{3}{2}}^l \right) \quad (7.85)$$

sendo que o limitador minmod possui a seguinte forma, conforme dado por [?],

$$\minmod(x, y) = \operatorname{sgn}(x) \max[0, \min\{|x|, \operatorname{sgn}(x) * y\}] \quad (7.86)$$

A Eq. (??) deverá ser utilizada duas vezes para que seja possível levar em consideração os três termos das Eqs. (??) e (??), isto é,

$$aux1 = \minmod \left( \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l, \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \right)$$

$$aux2 = \minmod \left( aux1, \alpha_{i+\frac{3}{2},j}^l \right)$$

★ Yee

$$g_{i,j}^l = S \cdot \max \left[ 0, \min \left( \sigma_{i+\frac{1}{2},j}^l \left| \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \right| \right), S \cdot \sigma_{i-\frac{1}{2},j}^l \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l \right] \quad (7.87)$$

$$g_{i,j}^l = S \cdot \max \left[ 0, \min \left( \sigma_{i,j+\frac{1}{2}}^l \left| \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right| \right), S \cdot \sigma_{i,j-\frac{1}{2}}^l \alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right] \quad (7.88)$$

★ Van Leer

$$g_{i,j}^l = \frac{\left\{ \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l \left[ \left( \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \right)^2 + \delta_2 \right] + \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \left[ \left( \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l \right)^2 + \delta_2 \right] \right\}}{\left[ \left( \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \right)^2 + \left( \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l \right)^2 + 2\delta_2 \right]} \quad (7.89)$$

$$g_{i,j}^l = \frac{\left\{ \alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l \left[ \left( \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right)^2 + \delta_2 \right] + \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l \left[ \left( \alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right)^2 + \delta_2 \right] \right\}}{\left[ \left( \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right)^2 + \left( \alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right)^2 + 2\delta_2 \right]} \quad (7.90)$$

O parâmetro  $\delta_2$  está presente para evitar que ocorra uma divisão por zero. O seu valor geralmente é dado por  $10^{-5} \leq \delta_2 \leq 10^{-7}$ .

★ Superbee

$$g_{i,j}^l = S \cdot \max \left[ 0, \min \left( 2 \left| \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \right|, S \cdot \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l \right), \min \left( \left| \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \right|, 2S \cdot \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l \right) \right] \quad (7.91)$$

$$g_{i,j}^l = S \cdot \max \left[ 0, \min \left( 2 \left| \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right|, S \cdot \alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right), \min \left( \left| \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right|, 2S \cdot \alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right) \right] \quad (7.92)$$

e para o caso simétrico, têm-se três formas para a função limitadora *minmod*,

★ Forma 1

$$g_{i+\frac{1}{2},j}^l = \minmod \left( \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l, \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) + \minmod \left( \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l, \alpha_{i+\frac{3}{2},j}^l \right) - \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \quad (7.93)$$

$$g_{i,j+\frac{1}{2}}^l = \minmod \left( \alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l, \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right) + \minmod \left( \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l, \alpha_{i,j+\frac{3}{2}}^l \right) - \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l \quad (7.94)$$

★ Forma 2

$$g_{i+\frac{1}{2},j}^l = \minmod \left( \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l, \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l, \alpha_{i+\frac{3}{2},j}^l \right) \quad (7.95)$$

$$g_{i,j+\frac{1}{2}}^l = \minmod \left( \alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l, \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l, \alpha_{i,j+\frac{3}{2}}^l \right) \quad (7.96)$$

★ Forma 3

$$g_{i+\frac{1}{2},j}^l = \minmod \left( 2\alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l, 2\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l, 2\alpha_{i+\frac{3}{2},j}^l, \frac{1}{2} \left( \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l, \alpha_{i+\frac{3}{2},j}^l \right) \right) \quad (7.97)$$

$$g_{i,j+\frac{1}{2}}^l = \minmod \left( 2\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^l, 2\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l, 2\alpha_{i,j+\frac{3}{2}}^l, \frac{1}{2} \left( \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^l, \alpha_{i,j+\frac{3}{2}}^l \right) \right) \quad (7.98)$$

- Jacobiano da transformação

$$J_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} [J_{i+1,j} + J_{i,j}] \quad (7.99)$$

$$J_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} [J_{i,j} + J_{i-1,j}] \quad (7.100)$$

$$J_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [J_{i,j+1} + J_{i,j}] \quad (7.101)$$

$$J_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [J_{i,j} + J_{i,j-1}] \quad (7.102)$$

Os produtos triplos dados pelas Eqs. (??), (??), (??) e (??) podem ser substituídos com o objetivo de reduzir o esforço computacional de maneira análoga ao que foi feito para o caso quase 1D, conforme mostrado pelas Eqs. (??) e (??), sendo assim, têm-se,

$$\Omega_{i+\frac{1}{2},j}^\xi = M_\xi I \quad (7.103)$$

$$\Omega_{i,j+\frac{1}{2}}^\eta = M_\eta I \quad (7.104)$$

onde,

$$M_\xi = \max \left[ \psi \left( a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) \right] \quad (7.105)$$

$$M_\eta = \max \left[ \psi \left( a_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right) \right] \quad (7.106)$$

## 7.3 Condições de Contorno

- Seções de entrada e de saída

De maneira análoga à Tab.?? para o caso unidimensional, teremos as seguintes condições de contorno para as seções de entrada e saída para uma situação bidimensional.

|                                                          | Seção de entrada |             | Seção de saída |             |
|----------------------------------------------------------|------------------|-------------|----------------|-------------|
|                                                          | Subsônico        | Supersônico | Subsônico      | Supersônico |
| Quantidade de condições de contorno a serem definidas    | 3                | 4           | 1              | 0           |
| Quantidade de condições de contorno a serem extrapoladas | 1                | 0           | 3              | 4           |

Tabela 7.1: Condições de contorno nas seções de entrada e de saída - Caso bidimensional

O procedimento de definição das condições de contorno é análogo ao mostrado na Seção ??, considerando apenas que no caso bidimensional serão quatro variáveis primitivas que deverão ser consideradas, sendo elas, velocidade no eixo x, velocidade no eixo y, massa específica e pressão.

- Superfície sólida

Sendo uma superfície sólida não-porosa, como não existe fluxo através da mesma, deve-se impor a condição de que o vetor velocidade é tangente à superfície. Isso pode ser visto na Eq. (??) [?],

$$\dot{m} = \rho \vec{V} \cdot \hat{n} \quad (7.107)$$

pois, como  $\dot{m} = 0$ , então,  $\vec{V} \cdot \hat{n} = 0$ . Desta maneira, a componente da velocidade contravariante  $V$  dada pela Eq. (??) será igual a zero. Como consequência, o vetor dos fluxos convectivos dado pela Eq. (??), será reduzido apenas ao termo da pressão, [?], conforme mostrado pela Eq. (??).

$$\hat{G} = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x P \\ \eta_y P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.108)$$

Para escoamentos invíscidos utiliza-se a condição de contorno chamada de "*free-slip*" conforme mostrado em [?], isto é, a velocidade sobre a superfície não será nula, porém deve-se considerar a condição de tangência do vetor velocidade à superfície.

Sendo assim, a componente de velocidade contravariante  $U$  dada pela Eq. (??), será tratada pelos resultados das seguintes relações,

$$|\xi_x| \geq |\xi_y| \rightarrow \begin{cases} v = (4v_{i+1,j} - v_{i+2,j}) / 3 \\ u = -\xi_y v / \xi_x \end{cases} \quad (7.109)$$

$$|\xi_x| < |\xi_y| \rightarrow \begin{cases} u = (4u_{i+1,j} - u_{i+2,j}) / 3 \\ v = -\xi_x u / \xi_y \end{cases} \quad (7.110)$$

e da mesma maneira será feito para a componente de velocidade contravariante  $V$  dada pela Eq. (??),

$$|\eta_x| \geq |\eta_y| \rightarrow \begin{cases} v = (4v_{i,j+1} - v_{i,j+2}) / 3 \\ u = -\eta_y v / \eta_x \end{cases} \quad (7.111)$$

$$|\eta_x| < |\eta_y| \rightarrow \begin{cases} u = (4u_{i,j+1} - u_{i,j+2}) / 3 \\ v = -\eta_x u / \eta_y \end{cases} \quad (7.112)$$

Para casos em que a curvatura do corpo é acentuada, tal como superfícies cilíndricas e aerofólios, é conveniente utilizar a correção de pressão desenvolvida por Rizzi e explicitada em [?].

Portanto, somente o valor da pressão deverá ser definido sobre a superfície sólida, e este valor é dado pela Eq. (??),

$$-\rho U (u_\xi \eta_x + v_\xi \eta_y) = (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) P_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) P_\eta \quad (7.113)$$

A demonstração da Eq. (??) pode ser encontrada no apêndice I.

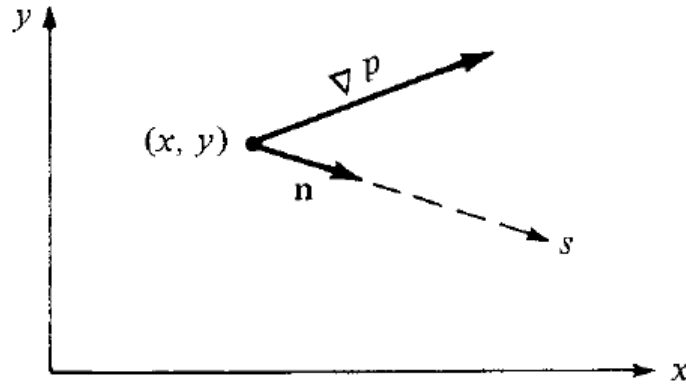


Figura 7.2: Derivada Direcional

Fonte: ([?], p.112)

Conforme mostrado em [?], considerando  $\nabla P$  em um dado ponto  $(x, y)$  e escolhendo uma determinada direção  $s$  à partir deste ponto, sendo  $n$  o vetor unitário na direção  $s$ , portanto, a taxa de variação de  $P$  por unidade de comprimento na direção  $s$  será dada por,

$$\frac{dP}{ds} = \nabla P \cdot n \quad (7.114)$$

sendo a Eq. (??) chamada de derivada direcional na direção  $s$ . Maiores detalhes em [?].

Neste caso, considerando a variação da pressão na direção  $\eta$  ao longo da superfície do corpo, e sendo  $n = \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}$ , a Eq. (??) é reescrita da seguinte maneira,

$$\rho U (u_\xi \eta_x + v_\xi \eta_y) + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) P_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) P_\eta = \frac{\partial P}{\partial s} \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (7.115)$$

e como a variação da pressão na direção  $\eta$  ao longo da superfície do corpo é igual a zero, ver Fig. ??, têm-se

$$\rho U (u_\xi \eta_x + v_\xi \eta_y) + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) P_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) P_\eta = 0 \quad (7.116)$$

Para que seja possível calcular a pressão sobre a superfície do corpo, será necessário discretizar os termos  $P_\xi$  e  $P_\eta$ , através do uso de diferenças finitas de segunda conforme mostrado na sequência,

$$\frac{\partial P_{i,1}}{\partial \xi} = \frac{P_{i+1,1} - P_{i-1,1}}{2\Delta\xi} \quad (7.117)$$

$$\frac{\partial P_{i,1}}{\partial \eta} = \frac{-3P_{i,1} + 4P_{i,2} - P_{i,3}}{2\Delta\eta} \quad (7.118)$$

e após substituir as Eqs. (??) e (??) na Eq. (??), obtém-se

$$\begin{aligned} & -\frac{P_{i-1,1}}{2} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) - \frac{3P_{i,1}}{2} (\eta_x^2 + \eta_y^2) + \frac{P_{i+1,1}}{2} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \\ & = -\rho U (\eta_x u_\xi + \eta_y v_\xi) - (\eta_x^2 + \eta_y^2) \left( \frac{4P_{i,2} - P_{i,3}}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.119)$$

que assume a forma de um sistema de equações tridiagonal que fornecerá como resultado o valor da pressão na superfície do corpo, ou  $P_{i,1}$ .

## 7.4 Implementação Numérica - Caso Bidimensional

Nesta seção, será mostrado o algoritmo e a estrutura de dados para a resolução das equações de Euler dada pela Eq. (??) através do método TVD considerando casos de escoamentos interno e externo. Este algoritmo considera o parâmetro de correção de entropia fixo e a condição de contorno sobre a superfície sólida dada pela Eq. (??).

### 7.4.1 Algoritmo - Método TVD - Fatoração LU

#### 1. Entrada de dados

- Arquivo de dados com as coordenadas da malha;
- Número de Mach de corrente livre;
- Definição do  $CFL$ ;
- Número máximo de iterações;
- Relação dos calores específicos do fluido considerado;
- Valor das variáveis primitivas massa específica e pressão na corrente livre.

#### 2. Leitura do arquivo de dados com as coordenadas da malha;

### 3. Cálculo das métricas da transformação

3.1. Cálculo das métricas utilizando as Eqs. (??),(??), (??) e (??);

3.2. Cálculo do jacobiano utilizando a Eq. (??);

3.3. Cálculo das métricas utilizando as Eqs. (??),(??), (??) e (??).

### 4. Montagem do vetor das variáveis conservativas, Eq. (??);

### 5. Definição e atualização das condições de contorno

- Superfície sólida

5.1. Cálculo da pressão sobre o corpo utilizando a Eq. (??);

5.2. Cálculo das componentes da velocidade sobre o corpo utilizando a Eq. (??);

5.3. Cálculo da variável primitiva massa específica com os valores do vetor  $Q$ , (??), definidos na iteração anterior;

5.4. Atualização do vetor  $Q$ , (??), com os resultados dos passos 5.2, 5.3 e 5.4.

- Fronteira coincidente

5.5. Cálculo das variáveis primitivas de acordo com os valores do vetor  $Q$ , Eq. (??), definidos na iteração anterior;

5.6. Atualização do vetor  $Q$ , Eq. (??), de acordo com os resultados do passo 5.5;

5.7. Cálculo das médias do vetor das variáveis primitivas  $Q$ , Eq. (??), considerando os valores nos pontos  $i = 1$  e  $i = nx$ .

- Seções de entrada e saída

5.8. Cálculo do número de Mach nos pontos da fronteira externa através da Eq. (??), utilizando os valores das variáveis primitivas da iteração anterior;

5.9. Cálculo das variáveis primitivas com a Eq. (??) nos dois pontos adjacentes à fronteira externa e extrapolação do resultado para a fronteira externa;

5.10. Definição dos pontos que definirão o início e o fim das seções de entrada e de saída;

5.11. Aplicação da condição de contorno de acordo com a Tab. 7.1 nas seções de entrada e saída.

## 6. Cálculo das funções de fluxo e das matrizes jacobianas e do intervalo de tempo

6.1. Cálculo do intervalo de tempo de acordo com as Eqs. (??), (??) e (??);

$$M_{\xi} = \max_{i,j} \left( \left| U_{i+\frac{1}{2},j} \right| + c_{i+\frac{1}{2},j} \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \right) \quad (7.120)$$

$$M_{\eta} = \max_{i,j} \left( \left| V_{i,j+\frac{1}{2}} \right| + c_{i,j+\frac{1}{2}} \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \right) \quad (7.121)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{CFL}{\max_{i,j} (M_{\xi}, M_{\eta})} \quad (7.122)$$

6.2. Cálculo dos vetores de fluxo com as Eqs. (??) e (??);

6.3. Cálculo das matrizes jacobianas através das Eqs. (??) e (??).

## 7. Cálculo dos limitadores de fluxo

7.1. Cálculo dos autovalores nas direções  $\xi$  e  $\eta$  com as Eqs. (??) e (??);

7.2. Cálculo da função de correção de entropia com a Eq. (??);

7.3. Cálculo do substituto do produto triplo dada pelas Eqs. (??), (??), (??) e (??), através das Eqs. (??), (??), (??) e (??);

7.4. Cálculo da média das características locais através das Eqs. (??), (??), (??) e (??);

7.5. Cálculo das matrizes dos autovetores dadas pelas Eqs. (??) e (??);

7.6. Cálculo da correção de segunda ordem da velocidade característica com as Eqs. (??), (??), (??) e (??);

7.7. Cálculo da função da correção de entropia, (??) com a correção de segunda ordem, podendo-se utilizar o parâmetro de correção de entropia fixo ou variável dado pela Eq. (??), de acordo com o caso que estiver sendo analisado;

- 7.8. Cálculo do limitador de fluxo *upwind*, de acordo com as Eqs. (??), (??), (??) e (??), ou do limitador simétrico, de acordo com as Eqs. (??), (??), (??) e (??);
- 7.9. Cálculo do termo  $\frac{R\Phi}{J}$  dentro das Eqs. (??), (??), (??) e (??);
8. Montagem da primeira varredura através da Eq. (??)
9. Montagem da segunda varredura através da Eq. (??)
10. Resolução dos sistemas de equações do passos 8 e 9.
11. Atualização das condições de contorno de acordo com o passo 5
12. Cálculo do novo intervalo de tempo de acordo com o passo 6
13. Desmonte do vetor das variáveis primitivas

### 7.4.2 Estrutura de Dados e Implementação do Caso 2D

Para a resolução do caso bidimensional, com o objetivo de aumentar performance computacional, será aplicado um processo de vetorização do domínio, isto é, o domínio bidimensional será mapeado e transformado em um vetor 1D. Considerando a Fig. ??, pode-se ver um domínio 2D que será mapeado e transformado em um vetor unidimensional.

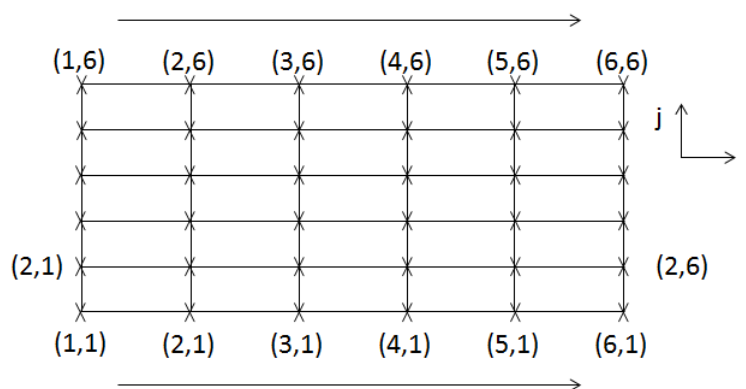


Figura 7.3: Mapeamento bidimensional

| Ponto    | Localização |
|----------|-------------|
| 1        | (1,1)       |
| 2        | (2,1)       |
| 3        | (3,1)       |
| 4        | (4,1)       |
| 5        | (5,1)       |
| 6        | (6,1)       |
| 7        | (2,1)       |
| 8        | (2,2)       |
| 9        | (2,3)       |
| $\vdots$ | $\vdots$    |
| 33       | (3,6)       |
| 34       | (4,6)       |
| 35       | (5,6)       |
| 36       | (6,6)       |

Tabela 7.2: Resultado do mapeamento

A seta indica o sentido do mapeamento do domínio, isto é, neste caso, será feita uma varredura em todas as colunas de uma linha antes de se passar para a próxima linha, e não existe nenhum impedimento para a realização do mapeamento com a seta da Fig. ?? na direção vertical. Desta maneira, o mapeamento será realizado através da equação (??), e o seu resultado por ser visto na Tab. 7.1.

$$ij = (j - 1) * N_x + i \quad (7.123)$$

Para o caso 2D, para evitar cálculo de sistema de equações de grandes dimensões, ao solucionar os sistemas dados pelas Eqs. (??) e (??), será utilizada uma abordagem localmente implícita, isto é, onde cada um dos elementos  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$  e  $E_5$  será resolvido como um sistema de equações independente do resto do domínio, evitando assim a necessidade de alocação de grande quantidade de memória e a necessidade de implementação de métodos para a solução de matrizes tridiagonais em bloco.

Para se determinar se um determinado ponto do vetor unidimensional faz parte da fronteira, e sendo assim, deve-se aplicar as condições de contorno, usa-se as seguintes estruturas.

$$ij = 0$$

```
for j = 1:Ny
    for i = 1:Nx
        ij = ij + 1
        Nodes(1,ij) = i;
        Nodes(2,ij) = j;
    end
end
```

e a escolha dos nós internos é implementada da seguinte maneira,

```
for ij = 1:Nx*Ny
    if (
        Nodes(1,ij)  $\neq$  1    &
        Nodes(1,ij)  $\neq$  Nx    &
        Nodes(2,ij)  $\neq$  1    &
        Nodes(2,ij)  $\neq$  Ny    &
        Qold(ij) = Qnew(ij))
    end
end
```

Assim, garante-se a correta aplicação das condições de contorno.

# Capítulo 8

## Geração de Malhas

### 8.1 Introdução

Como as equações para o modelamento do escoamento de fluidos não possuem solução analítica sem o uso de simplificações, torna-se necessário a discretização do domínio para que a aproximação numérica das equações sejam calculadas nos pontos determinados.

### 8.2 Transformação de Coordenadas

Com uso de geometrias complexas, o uso de malhas cartesianas se torna inviável, pois a mesma não se ajusta à superfície do corpo conforme mostrado na Fig. ??,

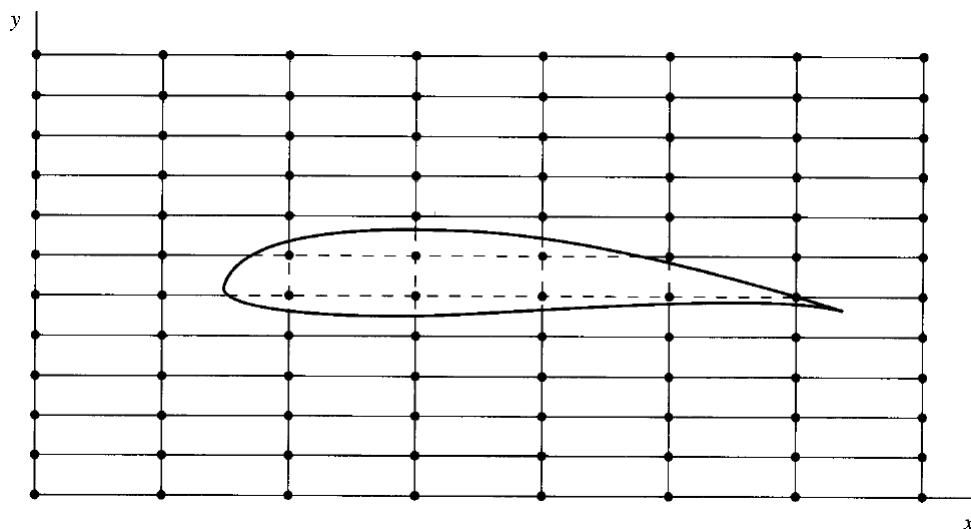


Figura 8.1: Malha cartesiana para um aerofólio

Fonte: ([?], p. 169)

A existência de nós localizados no interior do domínio tornaria obrigatório a determinação dos comprimentos entre os nós internos e externos ao domínio e dificultaria a construção do algoritmo que resolve as equações que modelam o escoamento. Para contornar este problema, são utilizadas malhas coincidentes com a fronteira, fazendo com que a malha se ajuste à geometria do corpo eliminando a existência de nós internos ao domínio, [?].

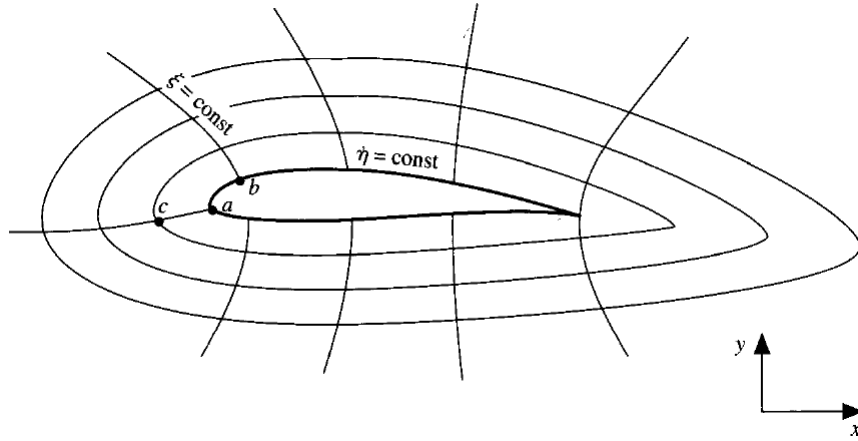


Figura 8.2: Malha coincidente com a fronteira - Domínio Físico

Fonte: ([?], p. 170)

A Fig. ?? no domínio generalizado é representada por um domínio retangular onde o espaçamento entre cada um dos seus pontos é igual a 1.

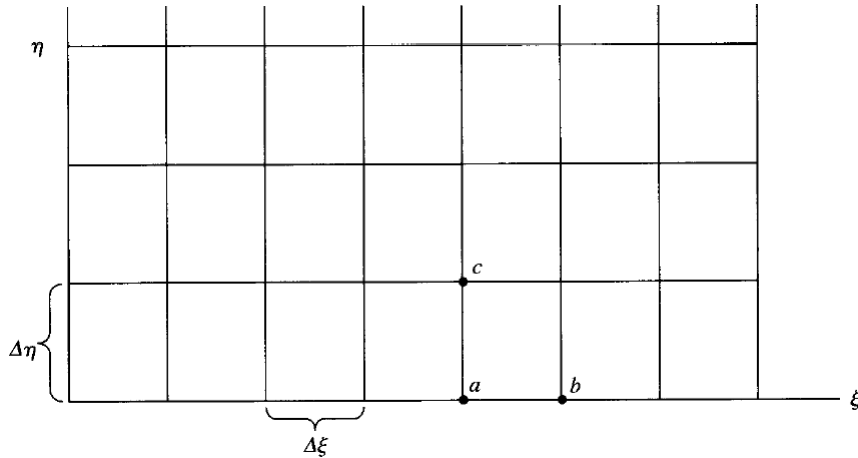


Figura 8.3: Malha coincidente com a fronteira - Domínio Generalizado

Fonte: ([?], p. 170)

As métricas que fazem a transformação do domínio físico para o computacional são dadas pelas Eqs. (??), (??), (??) e (??) e as que fazem a transformação do domínio

computacional para o físico são dadas pelas Eqs. (??), (??), (??) e (??).

### 8.2.1 Geometria Simplesmente Conexa

Uma geometria simplesmente conexa, são aquelas que mesmo possuindo formas distintas, possuem o mesmo plano transformado, [?]. À seguir, são mostrados alguns exemplos de geometrias simplesmente conexas nas Figs. ?? e ??.

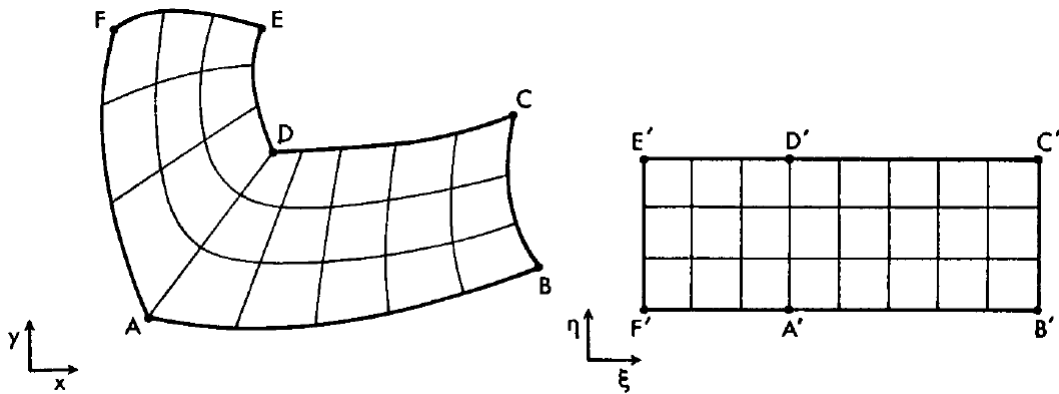


Figura 8.4: Geometria simplesmente conexa - Exemplo 1

Fonte: ([?], p. 81)

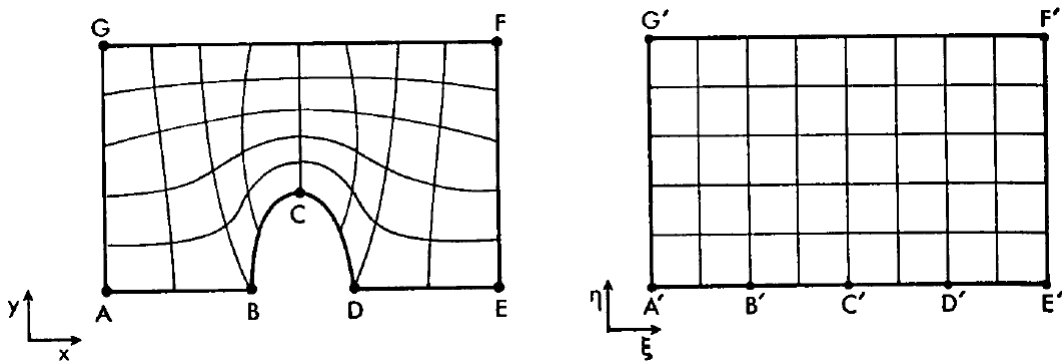


Figura 8.5: Geometria simplesmente conexa - Exemplo 2

Fonte: ([?], p. 82)

### 8.2.2 Geometria Multiplamente Conexa

Geometrias multiplamente conexas podem ser exemplificadas como regiões onde ocorrem escoamento externos em torno de algum tipo de obstáculo, tal como aerfólio ou cilindros, [?]. Uma regra básica para o mapeamento de geometrias multiplamente conexas em um bloco único é a necessidade de percorrer todas as fronteiras do domínio físico sem

levantar o lápis do papel, conforme explicado em [?]. Na sequência são mostrados alguns exemplos de geometrias multiplamente conexas.

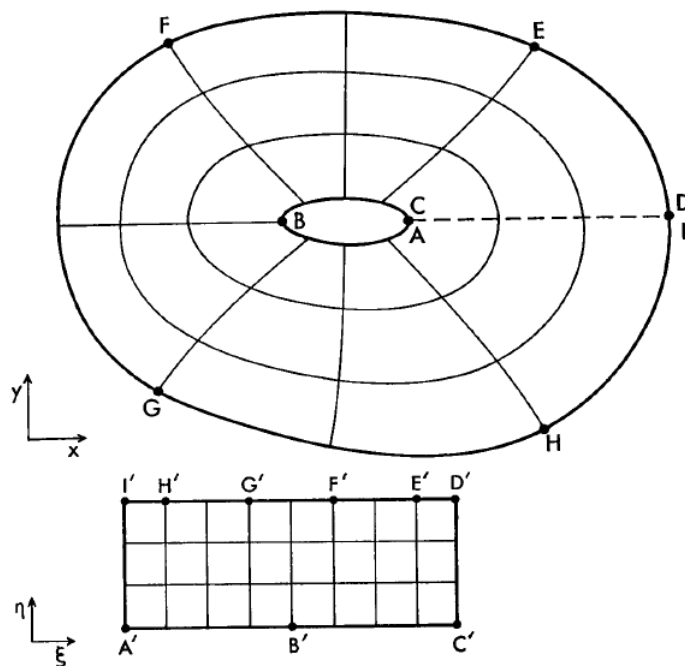


Figura 8.6: Geometria multiplamente conexa - Malha do tipo O

Fonte: ([?], p. 84)

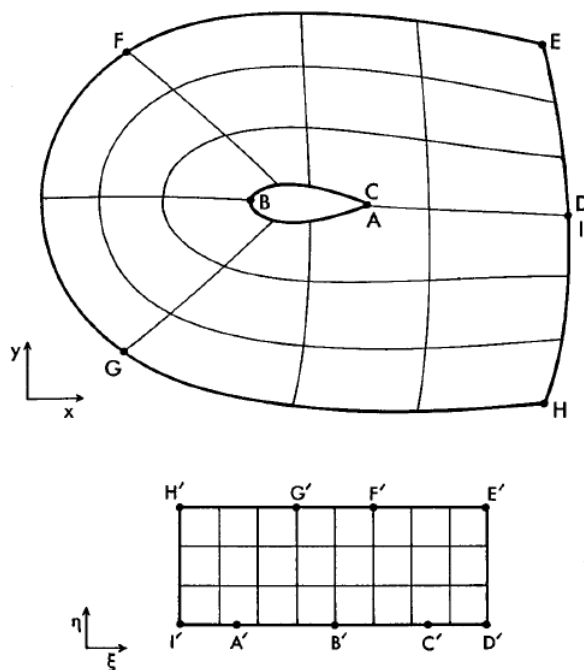


Figura 8.7: Geometria multiplamente conexa - Malha do tipo C

Fonte: ([?], p. 85)

### 8.3 Geração de Malha no Sistema de Coordenadas Generalizadas

A geração do sistema de coordenadas generalizadas pode ser realizadas através da utilização de equações diferenciais parciais elípticas. O sistema gerador, sem o uso de termos fontes <sup>1</sup>, é dado por, [?].

$$\nabla^2 \xi = 0 \quad (8.1)$$

$$\nabla^2 \eta = 0 \quad (8.2)$$

Nas Eqs. (??) e (??),  $\xi$  e  $\eta$  são variáveis dependentes e  $x$  e  $y$  são as variáveis independentes. Ao se inverter os papéis, obtêm-se as seguintes equações.

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0 \quad (8.3)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0 \quad (8.4)$$

onde

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad (8.5)$$

$$\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \quad (8.6)$$

$$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \quad (8.7)$$

A demonstração das Eqs. (??) e (??) pode ser encontrada no apêndice J.

---

<sup>1</sup>Termos fontes são funções utilizadas para forçar a concentração de nós em uma determinada região do domínio, [?] e [?].

### 8.3.1 Resolução das Equações Geradoras Através do Método das Diferenças Finitas

As equações geradoras da malha no sistema de coordenadas generalizadas dadas pelas Eqs. (??) e (??) não possuem solução analítica, sendo necessário a utilização de um método numérico para a solução das mesmas. Para este caso, será utilizado o método das diferenças finitas.

As Eqs. (??) e (??) após o processo de discretização passarão a ser escritas da seguinte maneira.

$$x_{i,j} = \frac{\alpha (x_{i+1,j} + x_{i-1,j}) + \gamma (x_{i,j+1} + x_{i,j-1})}{2(\alpha + \gamma)} - \frac{\beta (x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j+1})}{4(\alpha + \gamma)} \quad (8.8)$$

$$y_{i,j} = \frac{\alpha (y_{i+1,j} + y_{i-1,j}) + \gamma (y_{i,j+1} + y_{i,j-1})}{2(\alpha + \gamma)} - \frac{\beta (y_{i+1,j+1} + y_{i-1,j-1} - y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j+1})}{4(\alpha + \gamma)} \quad (8.9)$$

onde as Eqs. (??), (??) e (??) após serem discretizadas são reescritas conforme mostrado abaixo.

$$\alpha = \left( \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right)^2 + \left( \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right)^2 \quad (8.10)$$

$$\gamma = \left( \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \right)^2 + \left( \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \right)^2 \quad (8.11)$$

$$\beta = \left( \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \right) \left( \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right) + \left( \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \right) \left( \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right) \quad (8.12)$$

sendo  $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ .

Para que as Eqs. (??) e (??) que estão escritas na forma do método de Gauss-Seidel converjam mais rapidamente, será utilizado o método da sobre-relaxação sucessiva (SOR), [?], o que fará com que as equações sejam reescritas da seguinte maneira.

$$x_{i,j} = (1 - \omega) x_{i,j} + \frac{\omega}{2(\alpha + \gamma)} \left[ \alpha (x_{i+1,j} + x_{i-1,j}) + \gamma (x_{i,j+1} + x_{i,j-1}) - \frac{\beta}{2} (x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j+1}) \right] \quad (8.13)$$

$$y_{i,j} = (1 - \omega) y_{i,j} + \frac{\omega}{2(\alpha + \gamma)} \left[ \alpha (y_{i+1,j} + y_{i-1,j}) + \gamma (y_{i,j+1} + y_{i,j-1}) - \frac{\beta}{2} (y_{i+1,j+1} + y_{i-1,j-1} - y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j+1}) \right] \quad (8.14)$$

Sendo que o valor de  $\omega$  deverá estar no intervalo  $1 < \omega < 2$ .

A demonstração das Eqs. (??), (??), (??) e (??) está no apêndice J e maiores detalhes à respeito desta seção podem ser encontrados em [?].

### 8.3.2 Condições de Contorno

Para definir as condições de contorno para a solução das Eqs. (??) e (??), considera-se o seguinte exemplo.

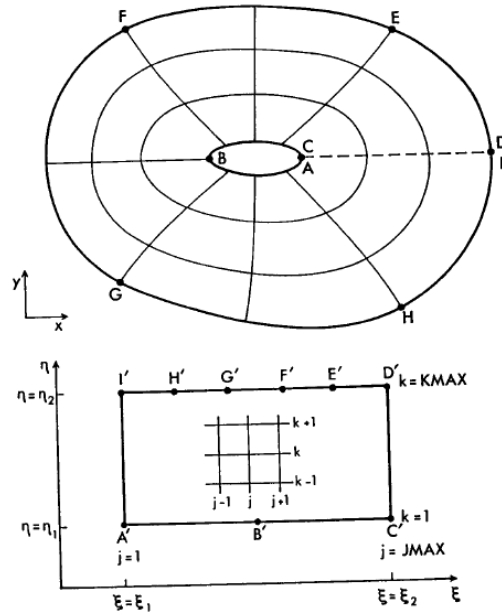


Figura 8.8: Mapeamento para geração de malha elíptica

Fonte: ([?], p. 98)

Conforme compilado em [?], no trecho  $ABC$  ( $A'B'C'$ ),  $\eta = \eta_1$  e  $x = x_{ABC}$ ,  $y = y_{ABC}$ , para  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ , onde as relações  $x_{ABC}(\xi)$  e  $y_{ABC}(\xi)$  são conhecidas e especificam a

distribuição dos pontos da malha em  $ABC$ . Analogamente, no trecho  $DFI$  ( $D'F'I'$ ),  $\eta = \eta_2$  e  $x = x_{DFI}(\xi)$ ,  $y = y_{DFI}(\xi)$ , para  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ , onde  $x_{DFI}(\xi)$  e  $y_{DFI}(\xi)$  especificam a distribuição dos pontos da malha em  $DFI$ .

Como os pontos  $A'I'$  e  $C'D'$  são internos ao domínio, não há a necessidade de definir condições de contorno para o escoamento neste trecho, mas devem ser aplicadas condições de contorno periódicas, pois a solução numérica para estes trechos deve ser idêntica.

# Capítulo 9

## Resultados - escoamento 2D

### 9.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os resultados para os casos de escoamento bidimensional e suas respectivas validações de acordo com os *benchmarks* disponíveis na literatura. Os seguintes casos serão estudados:

- Canal interno com arco circular de 10% de espessura
- Canal com arco circular de 4% de espessura
- Cilindro
- Aerfólio NACA 0012 sem ângulo de ataque
- Aerfólio NACA 0012 com ângulo de ataque de  $1,25^\circ$

### 9.2 Canal com Arco Circular

A geometria do canal interno é dado pela Fig. ??, retirada de [?], onde o obstáculo tem a forma de um arco circular. Para o caso em que o arco circular possui altura de 10% da altura total do canal, será analisado um escoamento subsônico, onde o número de Mach na entrada no canal será igual a 0,5 e também será abordado um escoamento transônico, em que o número de Mach na entrada do canal será igual a 0,675 e poderá ser observada a ocorrência de uma onda de choque. Também será analisado o caso em que o arco circular possui altura de 4% da altura total do canal e ocorre um escoamento supersônico com número de Mach de entrada igual a 1,4. Os resultados serão comparados com os dados que

foram gentilmente cedidos pelo Professor Ali Madadi, PhD da Universidade de Tecnologia Amirkabir no Irã e estão reproduzidos em [?]. Na Fig. ??, A linha vermelha representa a seção de entrada do canal e a linha azul representa a seção de saída, as duas linhas verdes representam as superfícies sólidas do canal.

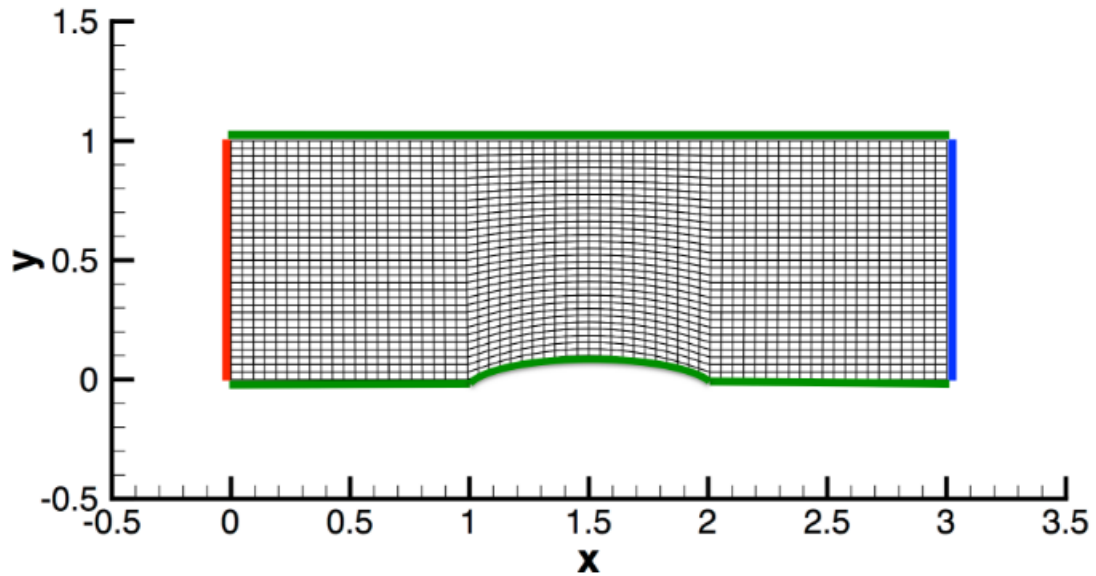


Figura 9.1: Canal interno com arco circular

Fonte: (Modificada de [?])

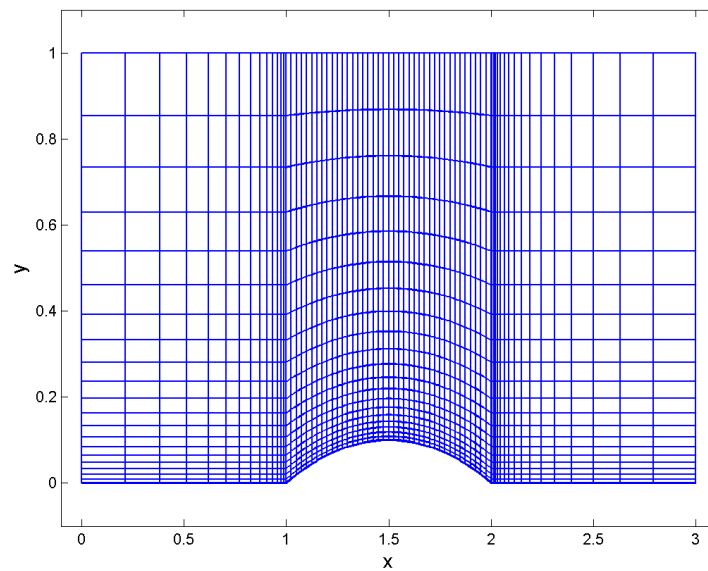


Figura 9.2: Malha do canal interno com arco circular de 10% de espessura

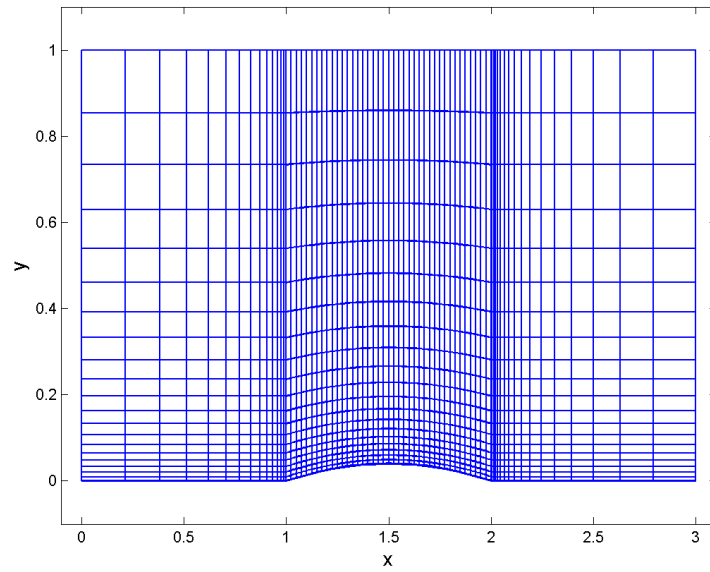
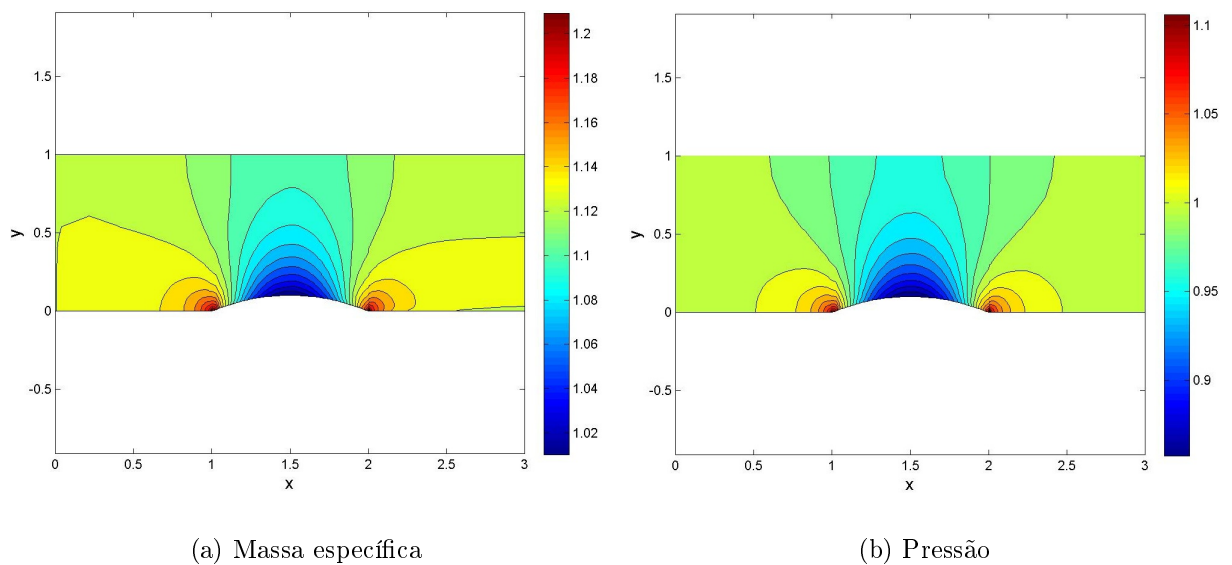
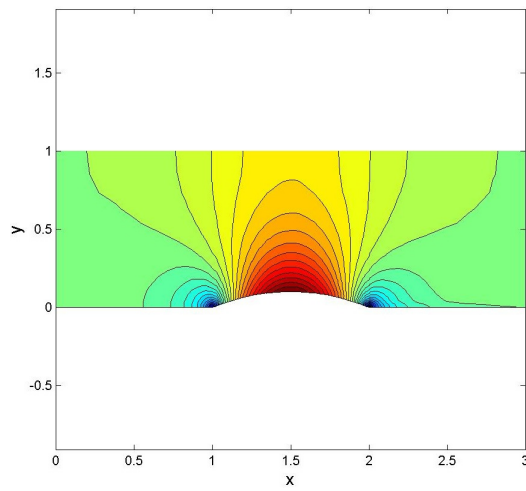


Figura 9.3: Malha do canal interno com arco circular de 4% de espessura

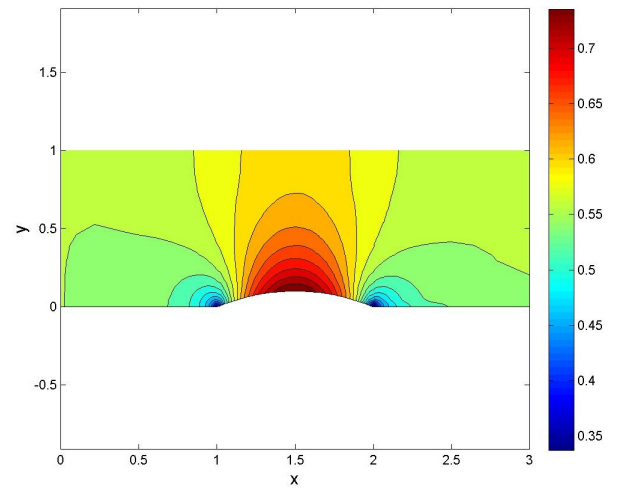
A malha para os canais com arco circular com altura de 10% e 4% da altura total do canal possuem 72 nós na direção  $x$  e 21 nós na direção  $y$ . O arco circular se inicia no nó 15 (bordo de ataque) e termina no nó 55 (bordo de fuga) da direção  $x$ . Antes do bordo de ataque e depois do bordo de fuga foi utilizada uma função de concentração de malha conforme mostrado em [?].

### 9.2.1 Canal com Arco Circular de 10% - Escoamento Subsônico

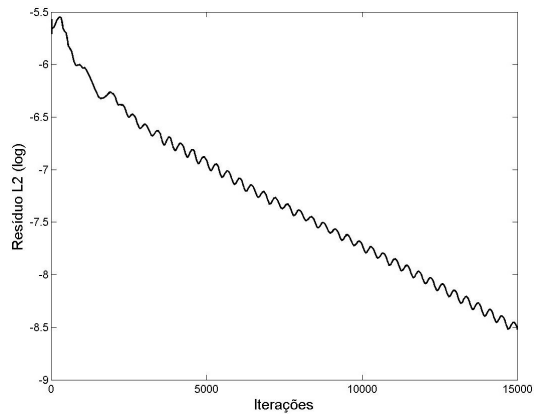




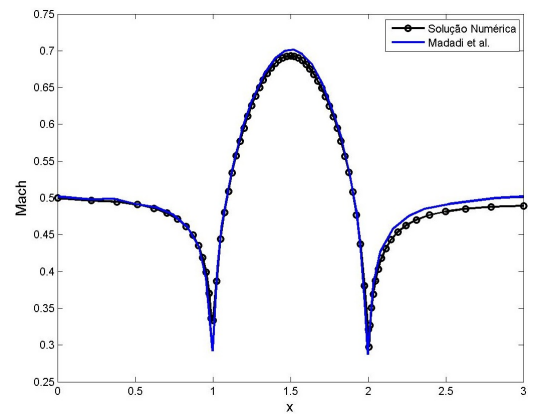
(c) Mach



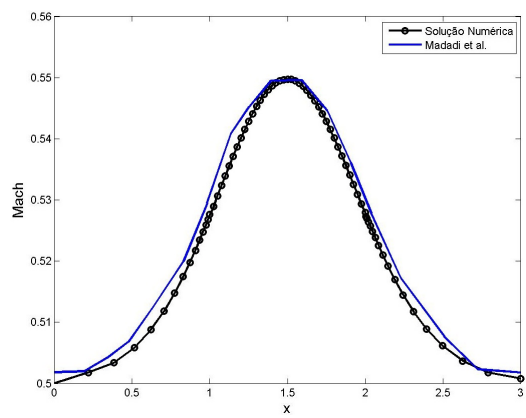
(d) Campo de velocidade



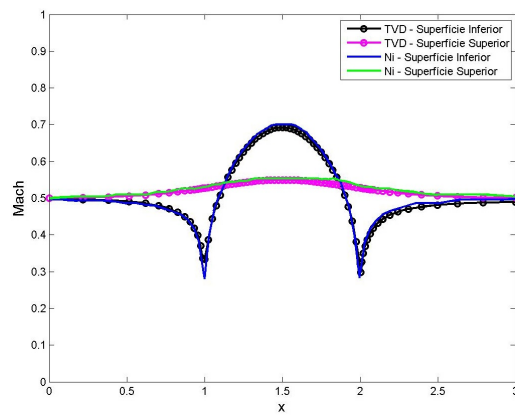
(e) Resíduo



(f) Número de Mach - Superfície Inferior



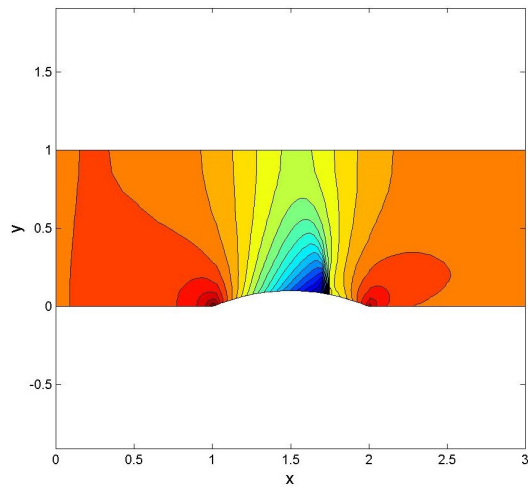
(g) Número de Mach - Superfície Superior



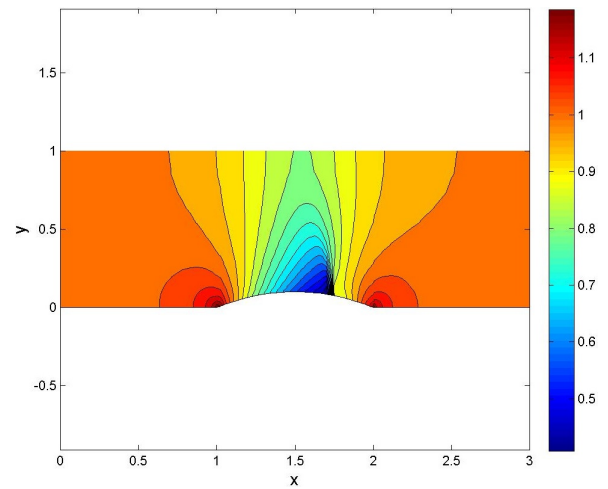
(h) Número de Mach - Resultados [?]

Figura 9.4: Solução TVD - Caso Subsônico

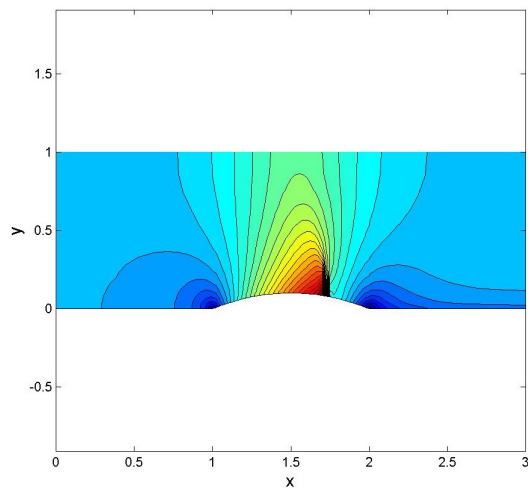
### 9.2.2 Canal com Arco Circular de 10% - Escoamento Transônico



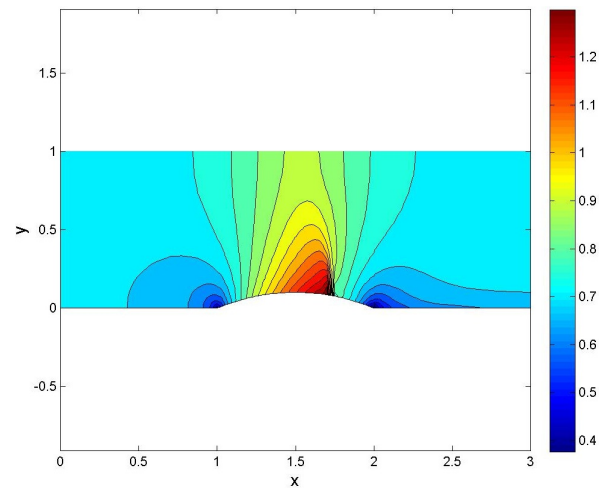
(a) Massa específica



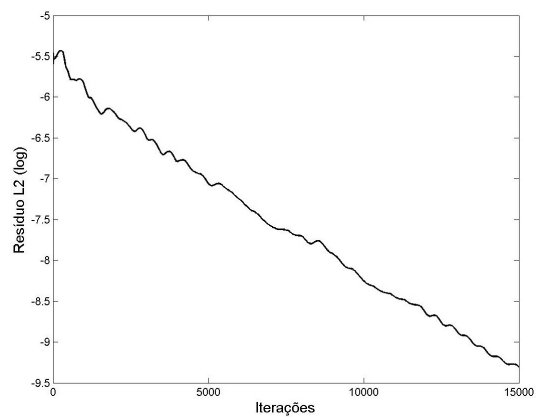
(b) Pressão



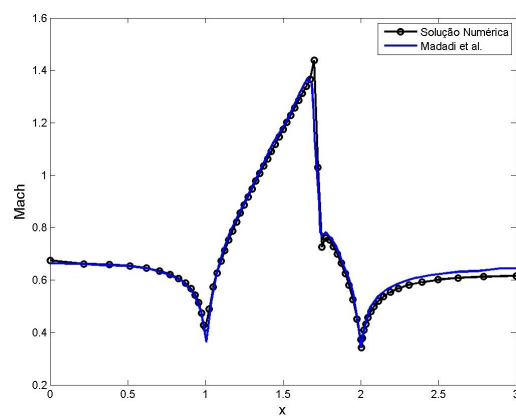
(c) Mach



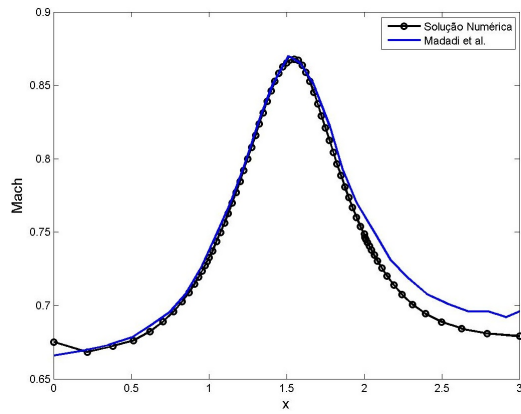
(d) Campo de velocidade



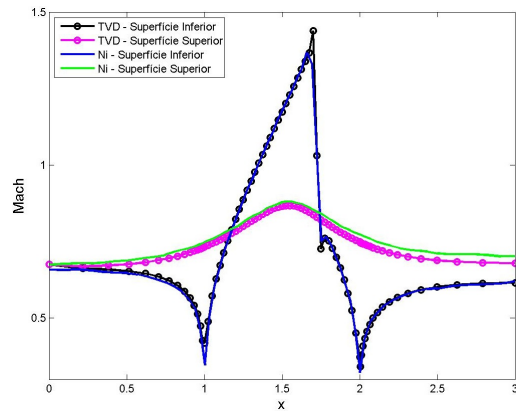
(e) Resíduo



(f) Mach - Superfície Inferior



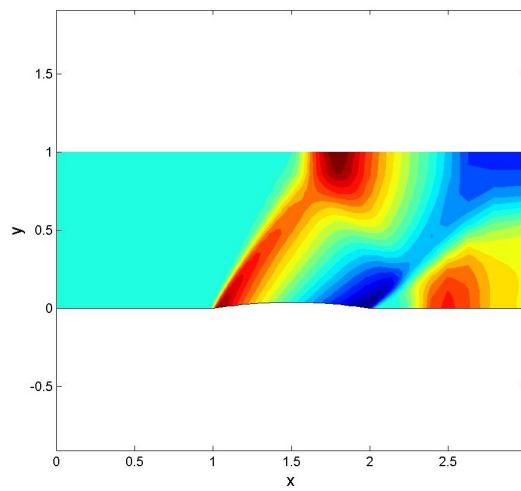
(g) Mach - Superfície Superior



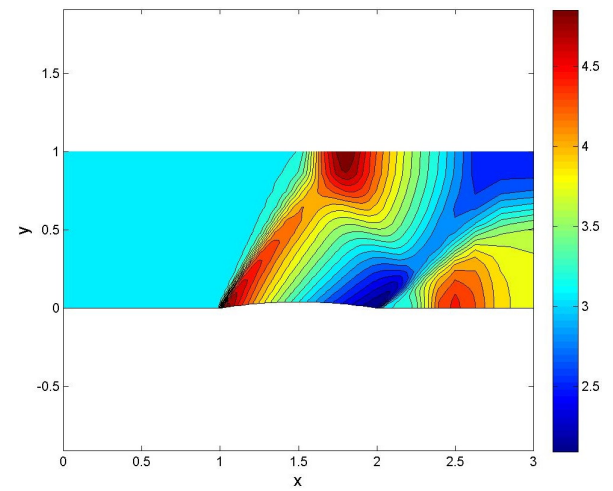
(h) Mach - Resultados [?]

Figura 9.5: Solução TVD - Caso Transônico

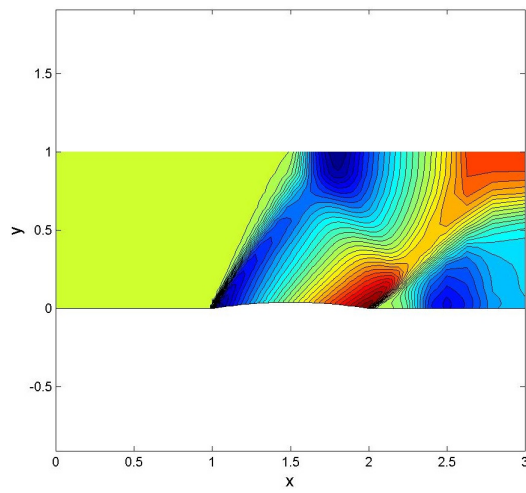
### 9.2.3 Canal com Arco Circular de 4% - Escoamento Supersônico



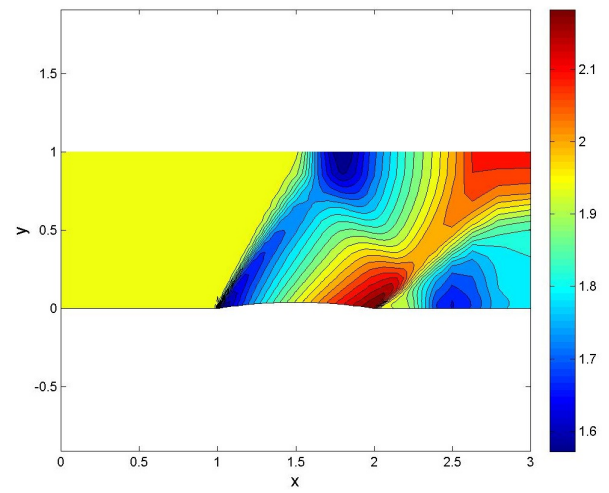
(a) Massa específica



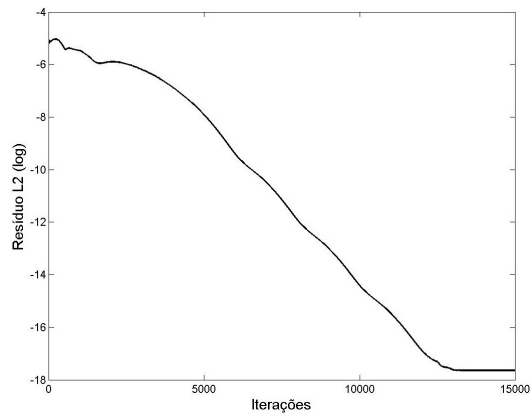
(b) Pressão



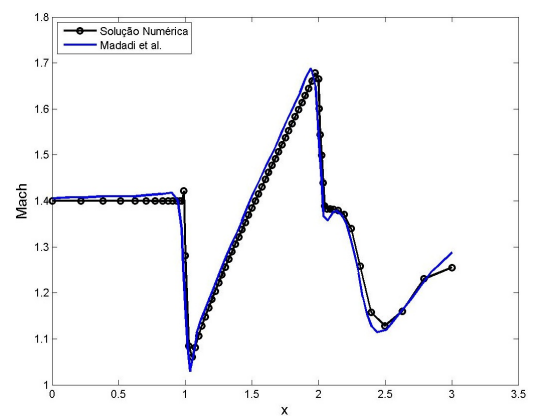
(c) Mach



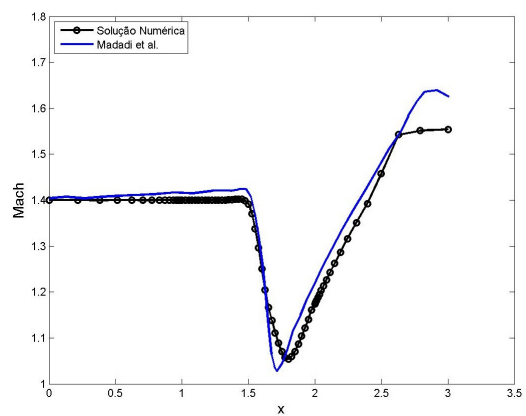
(d) Campo de velocidade



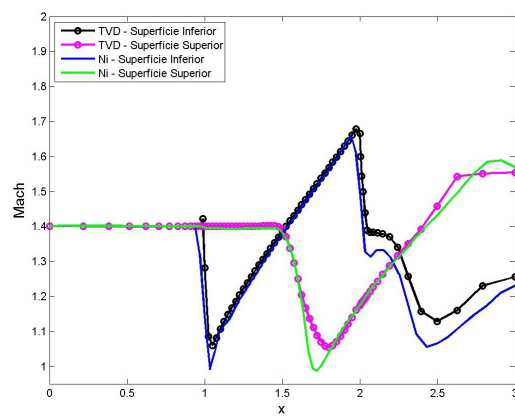
(e) Resíduo



(f) Mach - Superfície Inferior



(g) Mach - Superfície Superior



(h) Mach - Resultados [?]

Figura 9.6: Solução TVD - Caso Supersônico

### 9.2.4 Conclusões - Canal com Arco Circular

Ao se analisar os resultados de todos os casos, pode-se observar que os gráficos para o número de Mach foram condizentes com os dados existentes na literatura e que não houve a ocorrência de instabilidade numérica durante a execução do método, desta maneira, provando que o método é robusto para lidar com escoamentos subsônicos, transônicos, supersônicos e também é capaz de capturar ondas de choque sem a ocorrência de oscilações espúrias.

As diferenças entre a solução numérica e a referência [?], principalmente na região das seções de entrada e saída do canal pode ser atribuída ao fato da referência também ser um experimento numérico, mas não há nenhum indício de problemas no método numérico, em especial na aplicação das condições de contorno, visto que os resultados de uma maneira geral estão de acordo com os dados disponíveis na literatura.

## 9.3 Cilindro

Nesta seção será estudado o escoamento supersônico ao redor de um cilindro com raio de 0,5, que por ser um corpo rombudo, provoca o aparecimento de grandes gradientes na solução, sendo assim, o processo iterativo será realizado por etapas, isto é, será calculado o escoamento com números de Mach 1.2, 1.6, 2.2 e 2.6 antes de se atingir Mach 3.0. Serão realizadas 300 iterações em cada um dos passos, com exceção do último passo em Mach 3.0, onde serão realizadas 1200 iterações. Assim evita-se o surgimento desses grandes gradientes ao se melhorar a condição inicial do problema para cada uma das etapas de solução. Em todos os passos será utilizado um  $CFL$  igual a 0,1 e o parâmetro de correção de entropia variável dado pela Eq. (??). Os resultados numéricos serão comparados com os dados obtidos numericamente em [?].

O domínio foi discretizado com 141 nós na direção tangencial e 21 nós na direção radial e também foi utilizada a função para concentração da malha na direção radial, [?]. A seção de entrada do escoamento se encontra entre os nós 51 e 91, antes e após esses nós será a seção de saída do escoamento, conforme mostrado na Fig. ??.

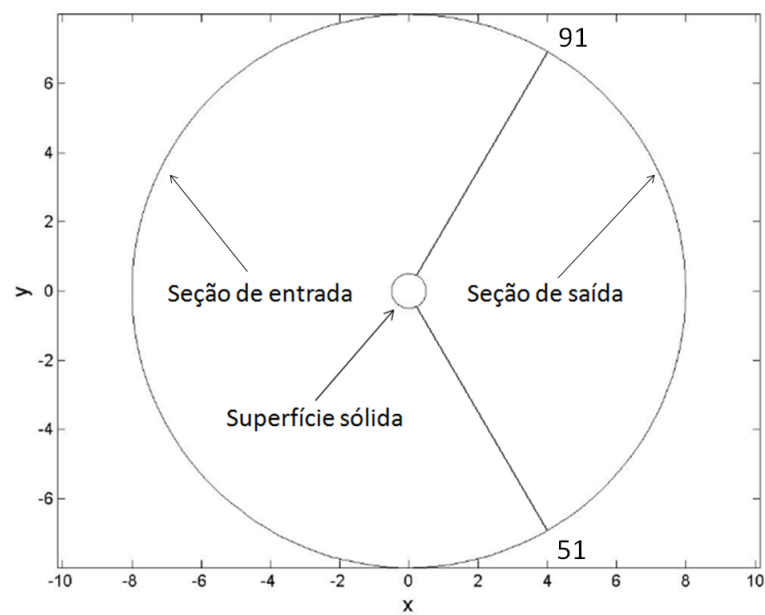
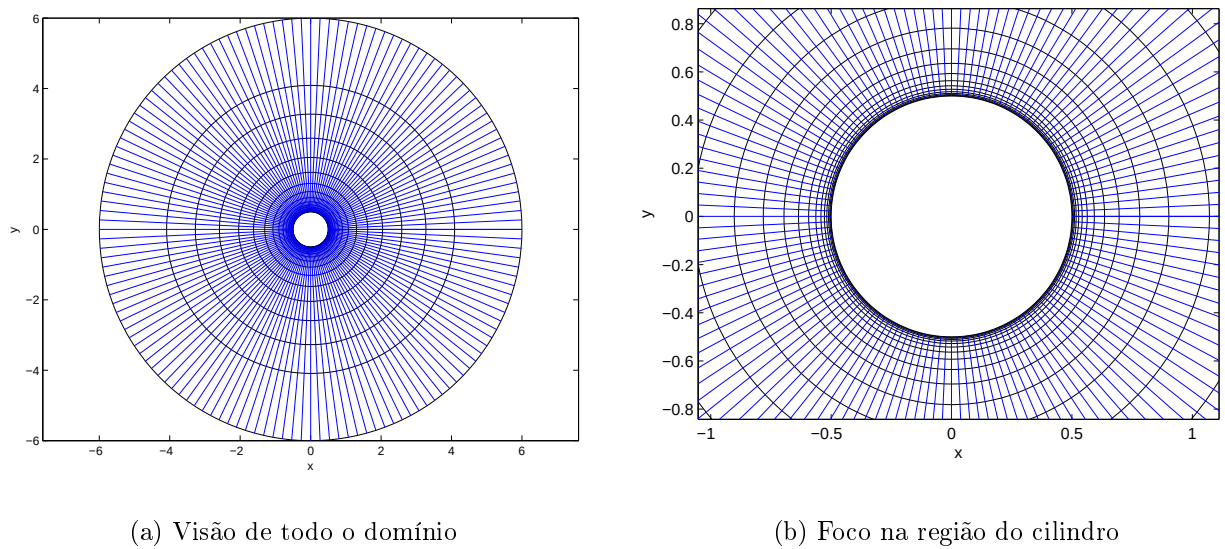


Figura 9.7: Fronteira sólida e seções de entrada e saída



(a) Visão de todo o domínio

(b) Foco na região do cilindro

Figura 9.8: Discretização do domínio para simulação de escoamento em torno de um cilindro

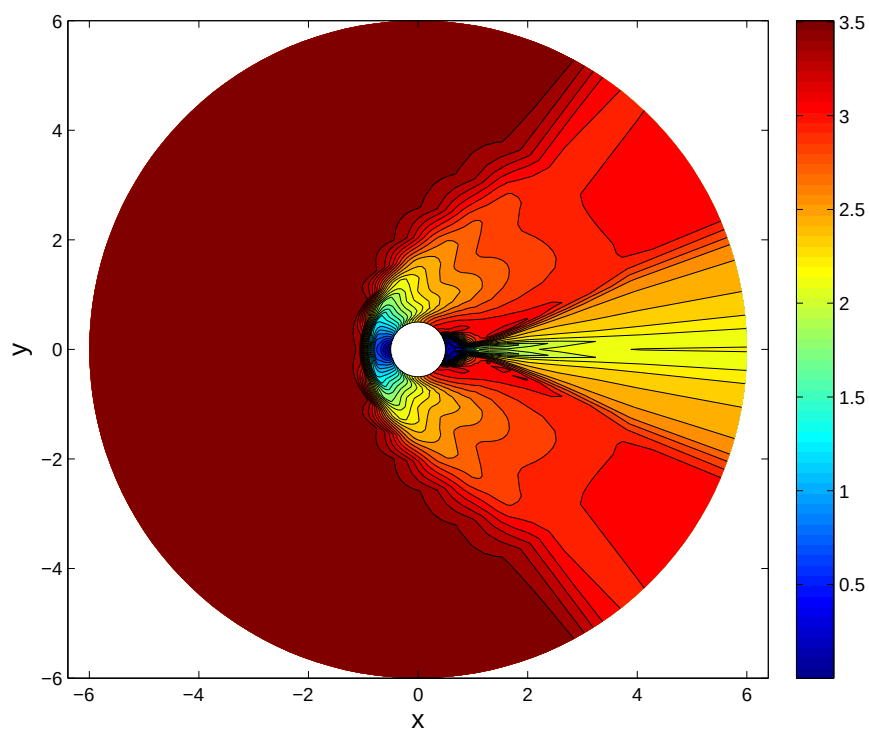


Figura 9.9: Campo de Velocidade em todo o domínio

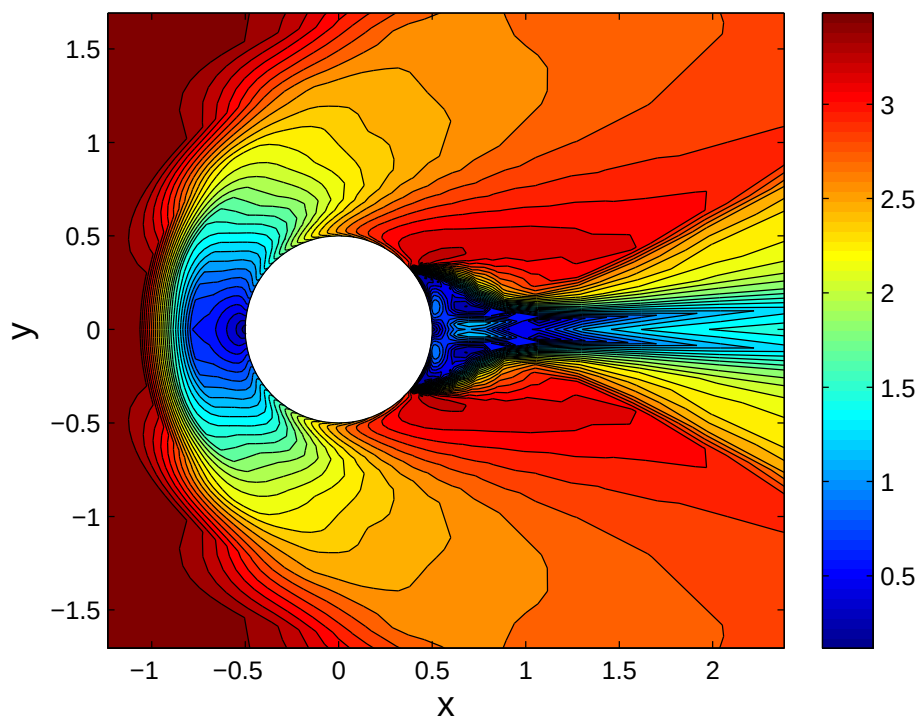


Figura 9.10: Campo de Velocidade com foco na região do cilindro

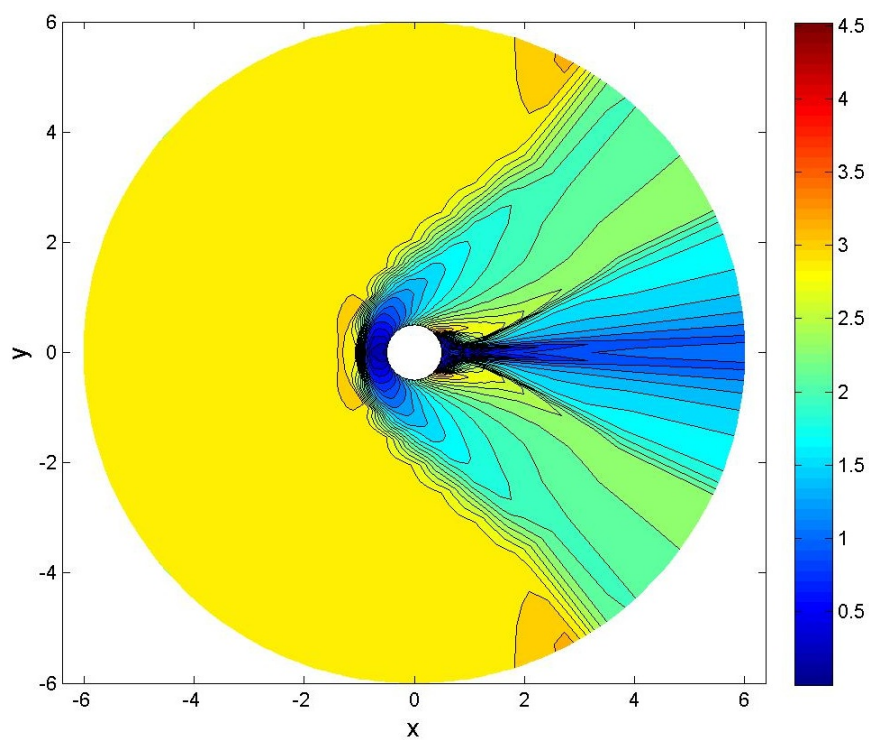


Figura 9.11: Número de Mach em todo o domínio

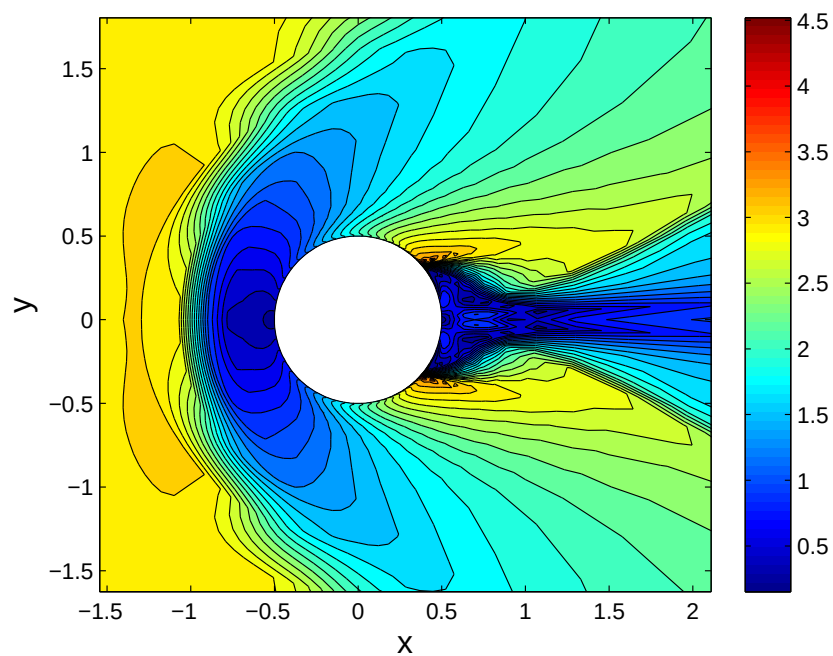


Figura 9.12: Número de Mach com foco na região do cilindro

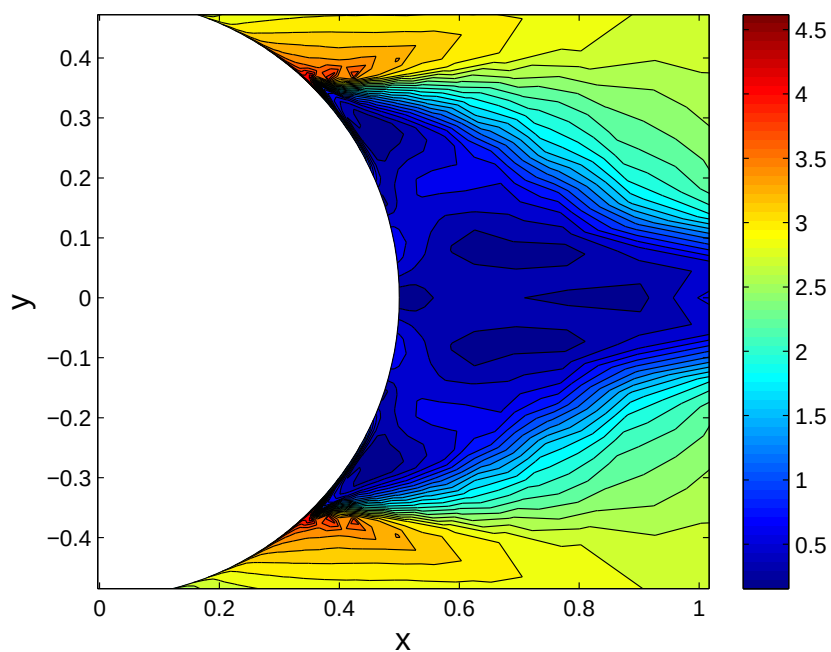


Figura 9.13: Número de Mach com foco na região após o cilindro

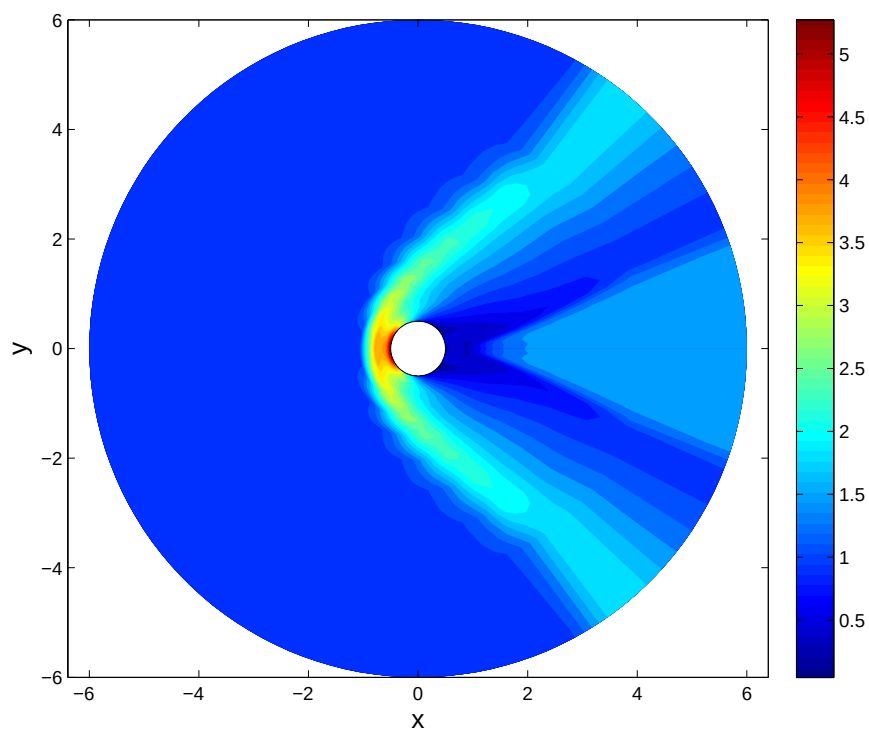


Figura 9.14: Massa específica em todo o domínio

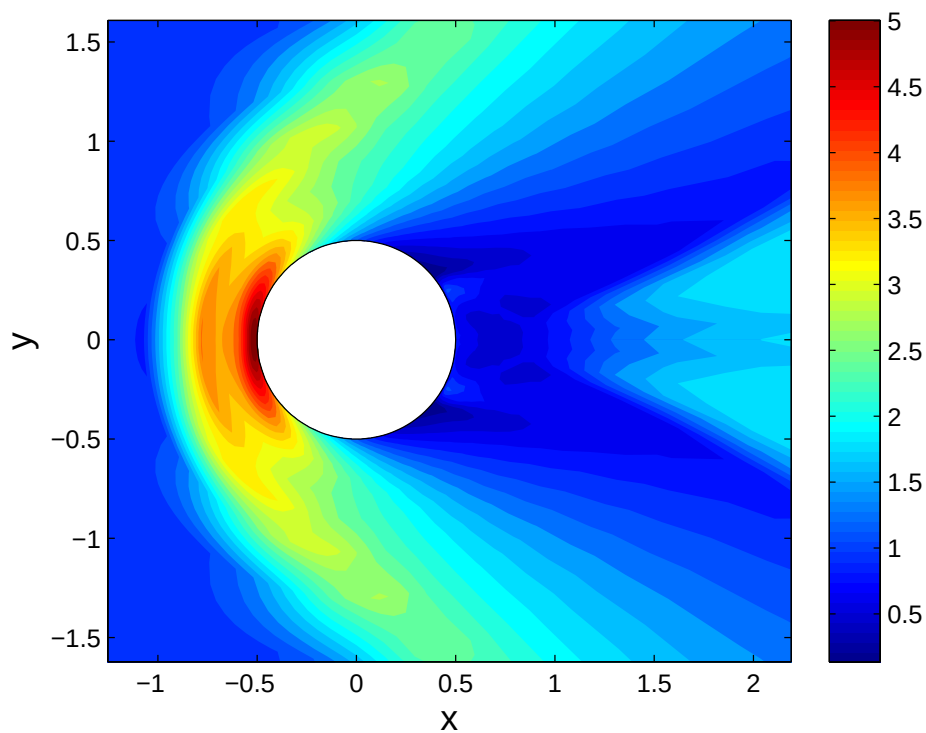


Figura 9.15: Massa específica com foco na região do cilindro

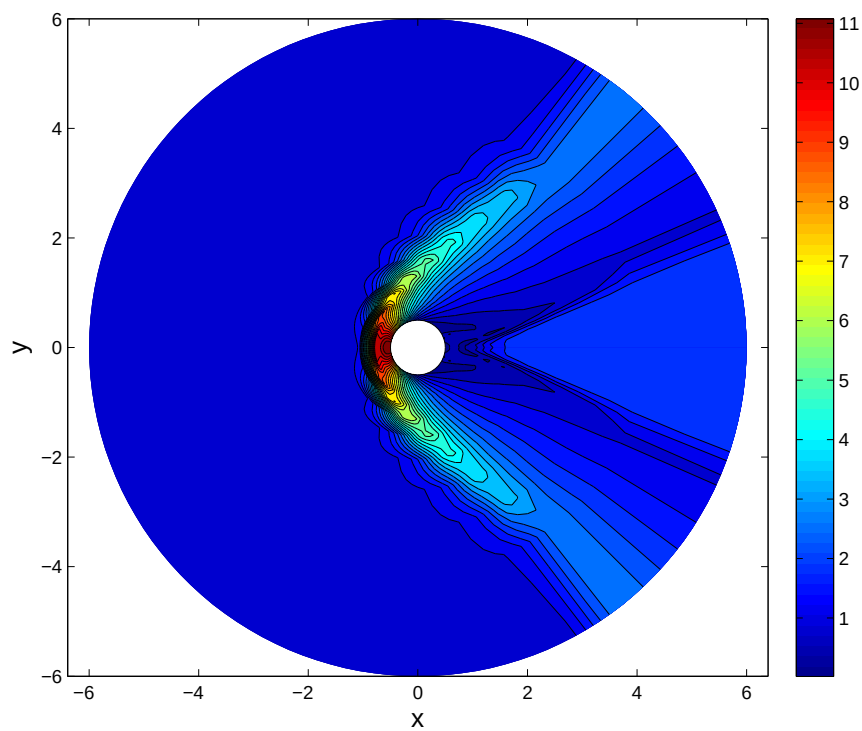


Figura 9.16: Pressão em todo o domínio

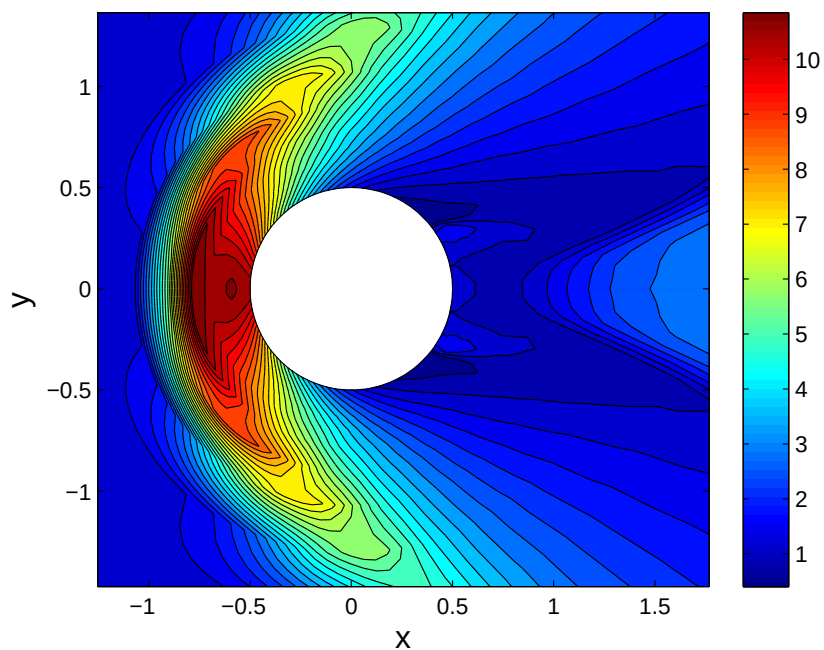


Figura 9.17: Pressão com foco na região do cilindro

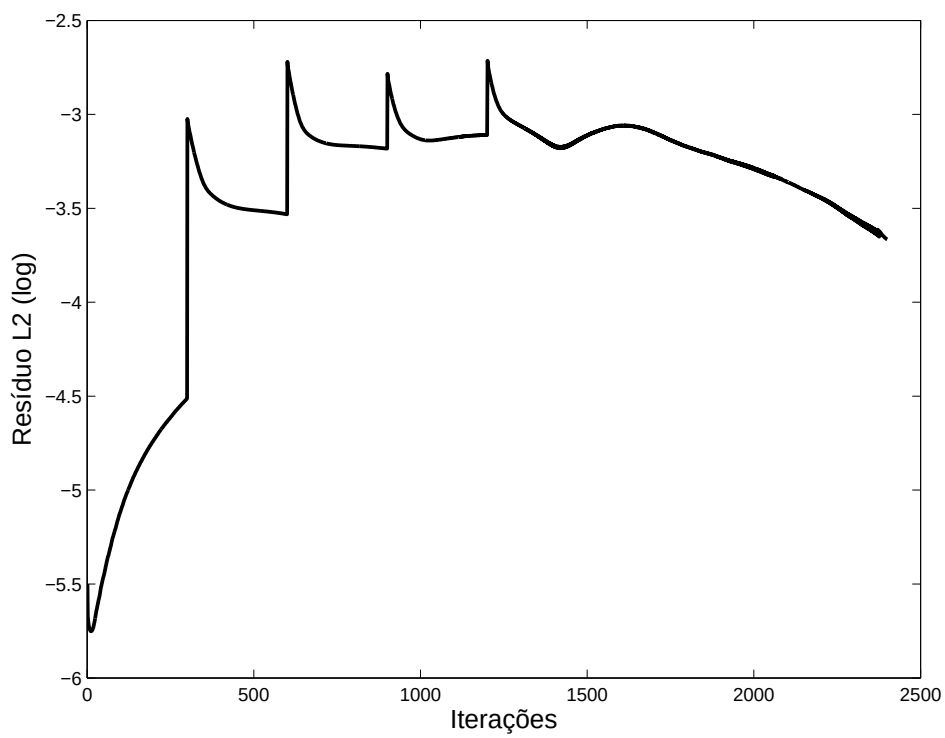


Figura 9.18: Resíduo

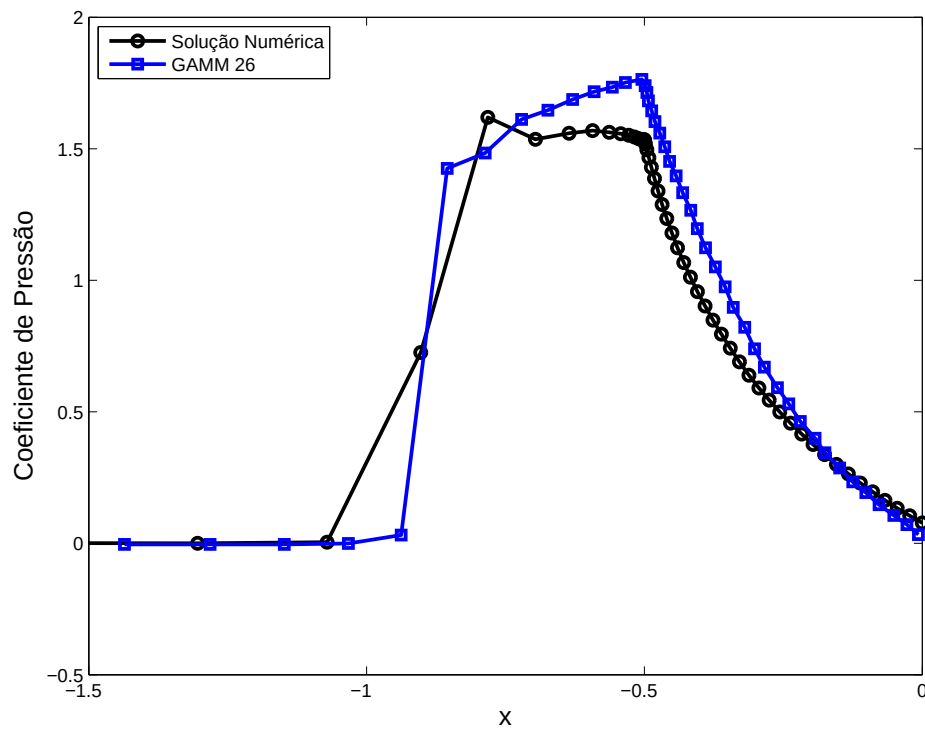


Figura 9.19: Validação da solução numérica

### 9.3.1 Conclusões - Cilindro

De acordo com a Fig. ??, o gráfico do resíduo se mostrou estável sem a presença de oscilações espúrias, os picos indicam o momento onde ocorreu o aumento do número de Mach. Analisando a Fig. ??, percebe-se que o procedimento numérico foi capaz de capturar o valor do coeficiente de pressão e a localização do choque antes do corpo com uma boa acurácia. Sendo assim, pode-se comprovar a eficiência da execução numérica em velocidades progressivas e do uso do parâmetro de correção de entropia variável.

## 9.4 Influência da Malha no Resultado de um Meio-Cilindro

O objetivo desta seção é a influência da malha no resultado do posicionamento da onda de choque em um escoamento supersônico. Para isso, foram construídas três geometrias de fronteira externa, circular, parabólica e hiperbólica, para simular um escoamento supersônico em torno de um meio-cilindro de raio 1,0, conforme mostrado nas Figs. ??, ?? e ??. O domínio foi discretizado com 142 nós na direção tangencial e 21 nós na direção

radial. A seção de entrada do escoamento se encontra entre os nós 21 e 121 da direção radial, e os pontos antes e após este intervalo fazem parte da seção de saída do escoamento.

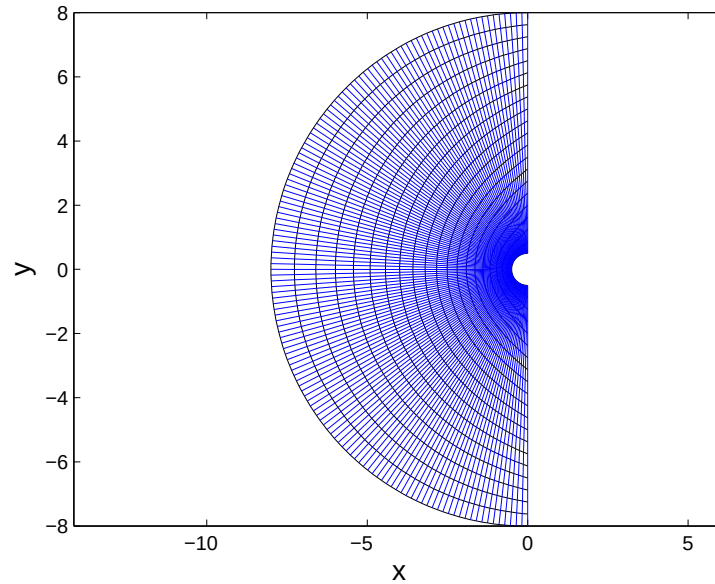


Figura 9.20: Malha com fronteira circular

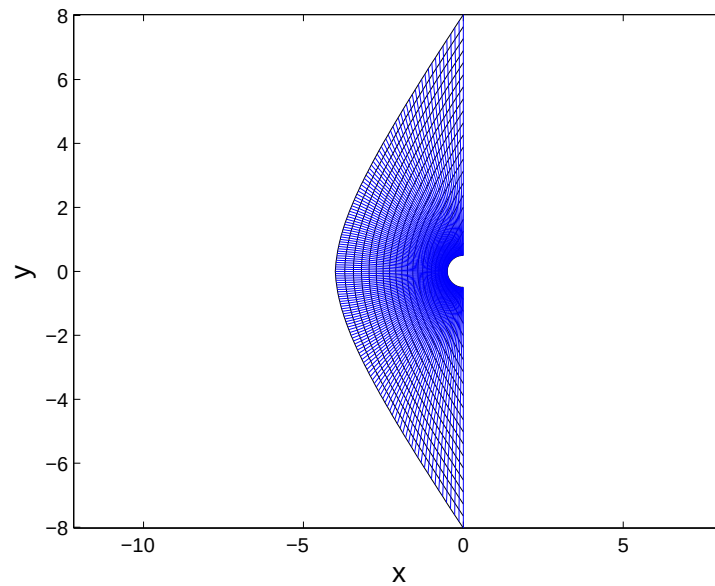


Figura 9.21: Malha com fronteira hiperbólica

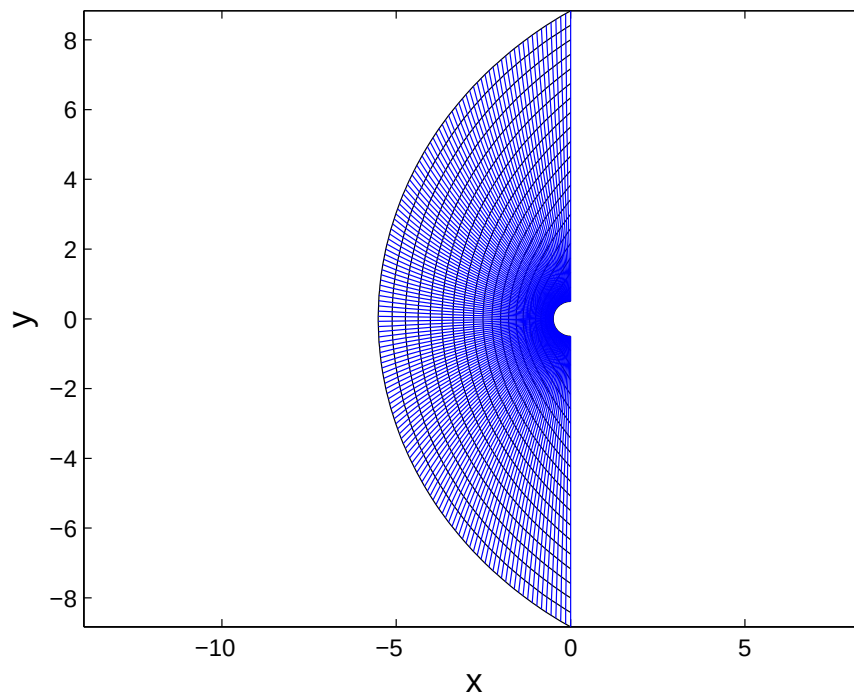
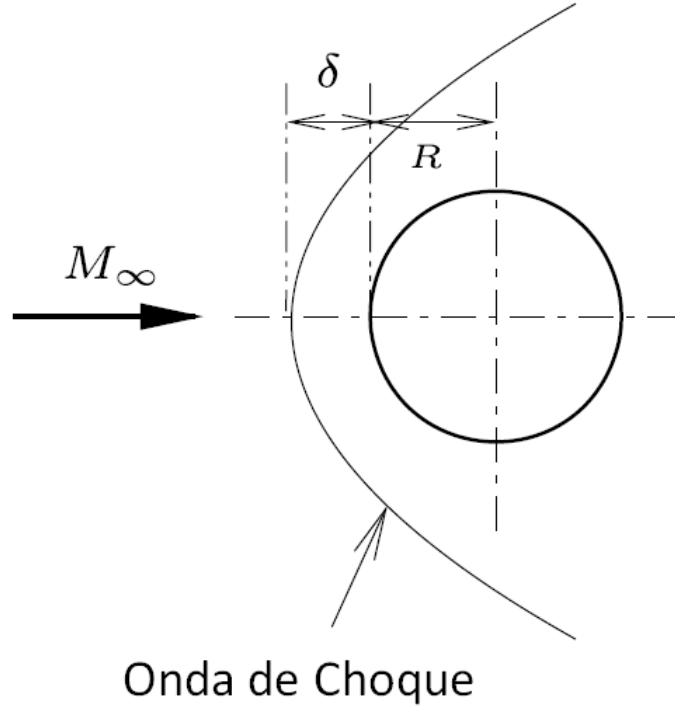


Figura 9.22: Malha com fronteira parabólica

A distância entre o ponto de estagnação no meio-cilindro e a onda de choque, também chamada de distância de *standoff*, pode ser vista na Fig. ?? e é calculada da seguinte maneira, conforme mostrado em [?].

Figura 9.23: Representação da distância de *standoff*

Fonte: ([?])

$$\delta = \frac{\beta_s^2}{\theta_s^2 \cos \beta_s^2} \cdot \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1) M_\infty^2}{2\gamma M_\infty^2 - \gamma + 1}} \quad (9.1)$$

onde

$$\beta_s = \frac{\pi}{2} - \text{sen}^{-1} \sqrt{\frac{C_{ps}}{C_{p,max}}} \quad (9.2)$$

$$\beta_s + \theta_s = \frac{\pi}{2} \quad (9.3)$$

$$C_{p,max} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[ \frac{(\gamma + 1)^2 M_\infty^2}{4\gamma M_\infty^2 - 2(\gamma - 1)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \left[ \frac{1 - \gamma + 2\gamma M_\infty^2}{\gamma + 1} \right] - 1 \right\} \quad (9.4)$$

$$C_{ps} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[ \frac{(\gamma + 1)^2 M_\infty^2}{4\gamma M_\infty^2 - 2(\gamma - 1)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \left[ \frac{1 - \gamma + 2\gamma M_\infty^2}{\gamma + 1} \right] - 1 \right\} \quad (9.5)$$

e de maneira alternativa, considerando-se um perfil de densidade linear a Eq. (??) pode

ser reescrita da seguinte maneira

$$\delta = \frac{\beta_s^2}{\theta_s^2 \cos \beta_s^2} \cdot \frac{2 + (\gamma - 1) M_\infty^2}{(\gamma + 1) M_\infty^2} \quad (9.6)$$

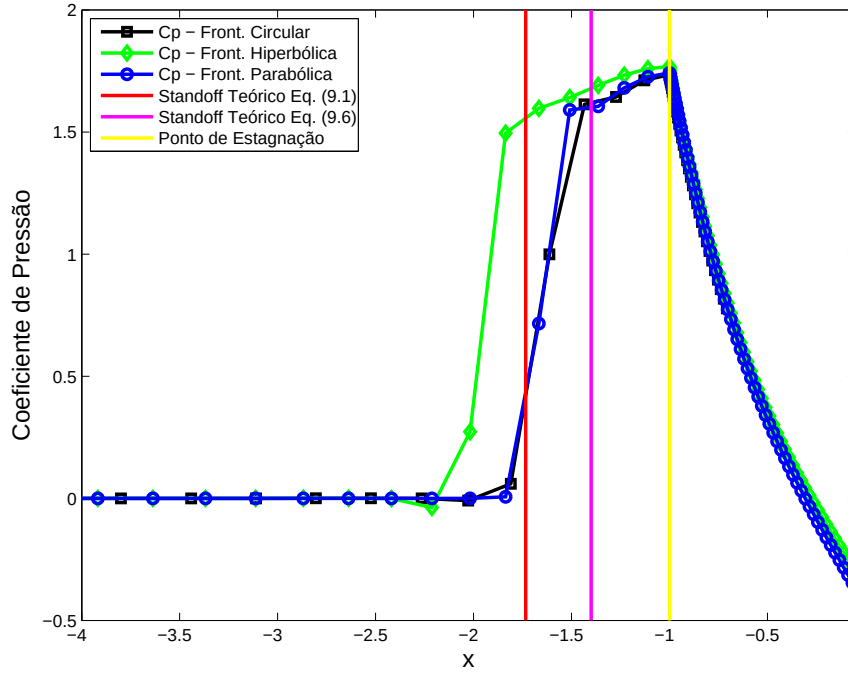


Figura 9.24: Comparação das curvas do coeficiente de pressão

Ao utilizar as malhas mostradas nas Figs. ??, ?? e ?? para um escoamento com número de Mach igual a 3 na corrente livre, obtêm-se as curvas do coeficiente de pressão mostradas na Fig. ?? e que são validadas através das Eqs. (??) e (??) que resultaram em uma distância de *standoff* de  $-0,7337$  e  $-0,4003$  respectivamente antes do ponto de estagnação. Pode-se notar que as malhas com fronteira circular e parabólica foram as que forneceram um resultado mais próximo do cálculo teórico mostrado por [?] de acordo com a Eq. (??) que forneceu a melhor aproximação. Este resultado comprova a diferença de desempenho entre diferentes configurações de malha para uma mesma geometria, que devem ser selecionadas de acordo com as características de cada caso.

## 9.5 Aerofólio NACA 0012

Nesta seção, será analisado um escoamento transônico ao redor de um aerofólio NACA 0012 com e sem ângulo de ataque. O número de Mach na seção de entrada será de 0,8

e serão utilizadas malhas estruturadas do tipo O e C, conforme mostrado nas Figs. ?? e ??.

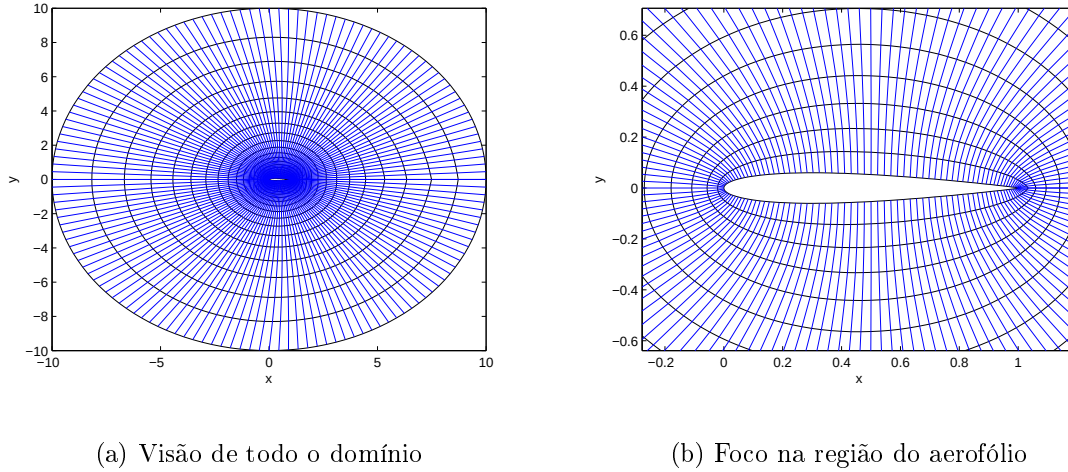


Figura 9.25: Malha do tipo O

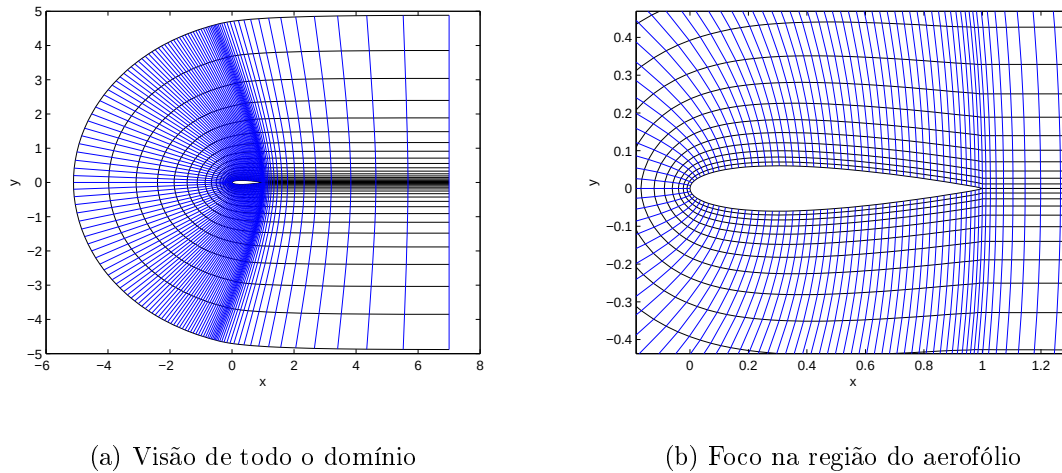


Figura 9.26: Malha do tipo C

O domínio para as malhas do tipo O e C foi discretizado com 141 nós na direção tangencial e 21 nós na direção radial e a seção de entrada do escoamento se encontra entre os nós 21 e 121 da direção tangencial, da mesma maneira que foi feito para o caso do cilindro mostrado na Seção ???. Ao analisar as Figs. ?? e ??, percebe-se que para a malha do tipo O os pontos da malha não estão próximos do corpo quando comparados com a malha do tipo C, isto se deve a características construtivas da malha e a dificuldade de implementar uma função para atrair os pontos para mais perto da superfície sólida na malha do tipo O. Considerando essas diferenças entre as malhas, analisaremos os

respectivos resultados. Todos os casos foram executados com o  $CFL$  igual a 0,8 e foram realizadas 15000 iterações. Os resultados numéricos serão validados com base nas análises numéricas de [?].

## 9.6 Aerofólio NACA 0012 sem Ângulo de Ataque

### 9.6.1 Resultados para Malha do Tipo O

Nesta seção, será analisada a solução numérica utilizando malhas do tipo O para um caso sem ângulo de ataque entre o escoamento e o aerofólio.

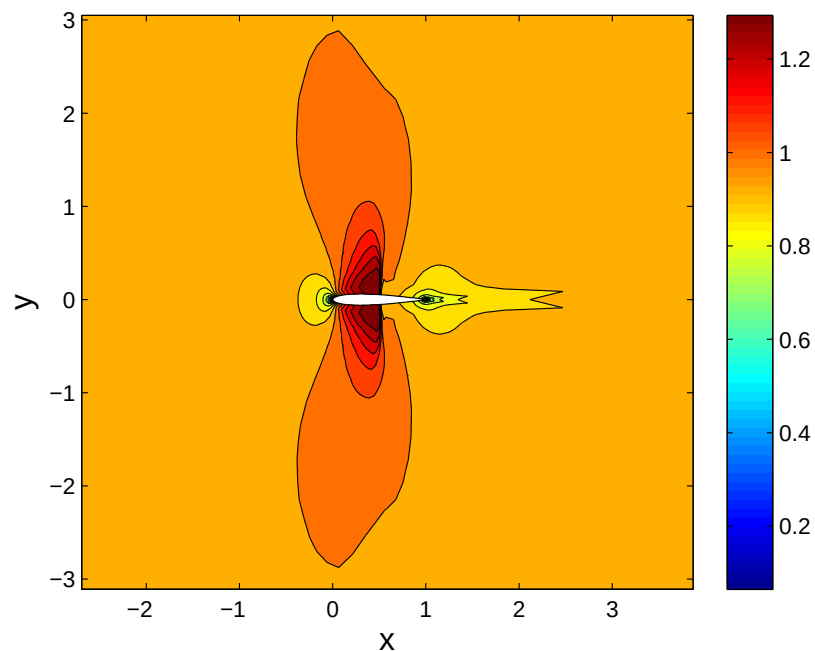


Figura 9.27: Campo de velocidade - Malha O - Sem ângulo de ataque

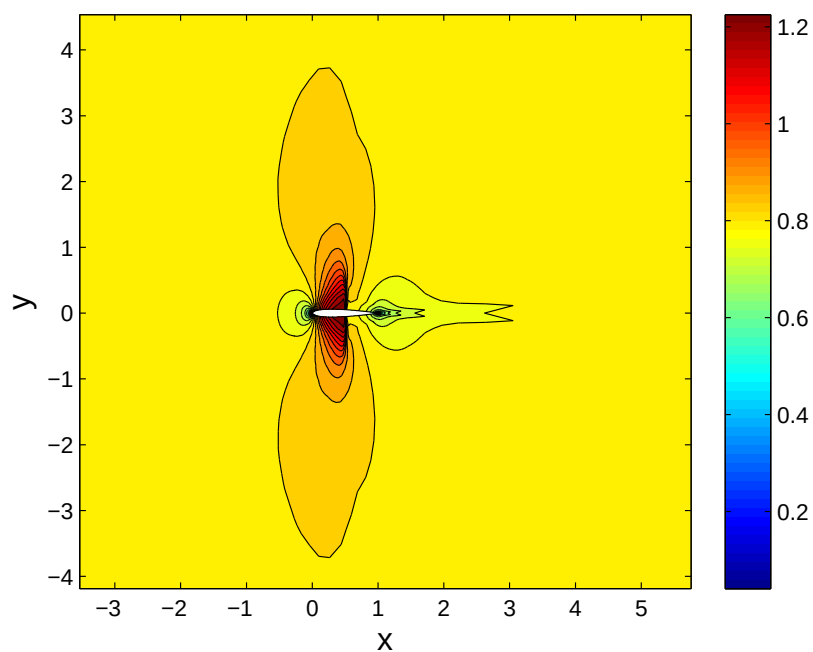


Figura 9.28: Número de Mach - Malha O - Sem ângulo de ataque

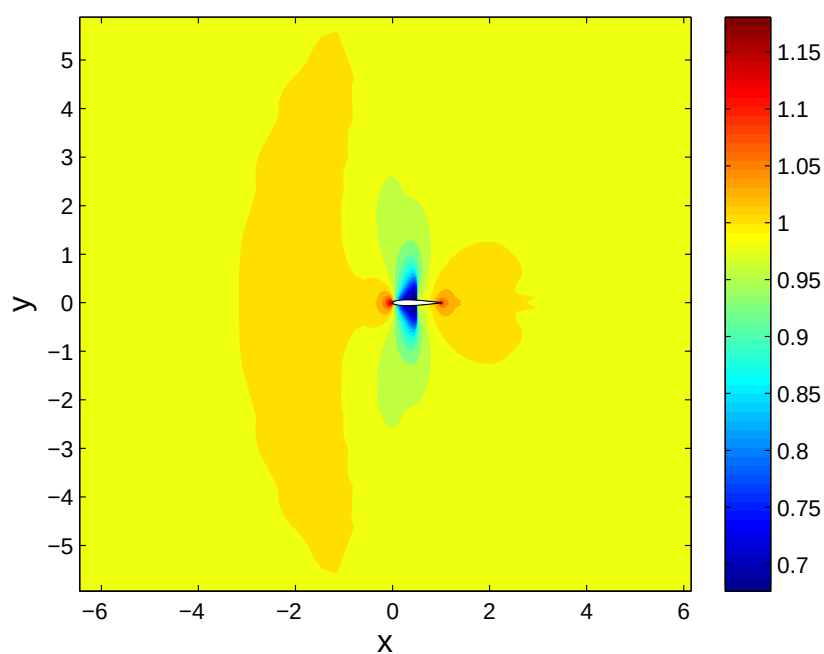


Figura 9.29: Massa específica - Malha O - Sem ângulo de ataque

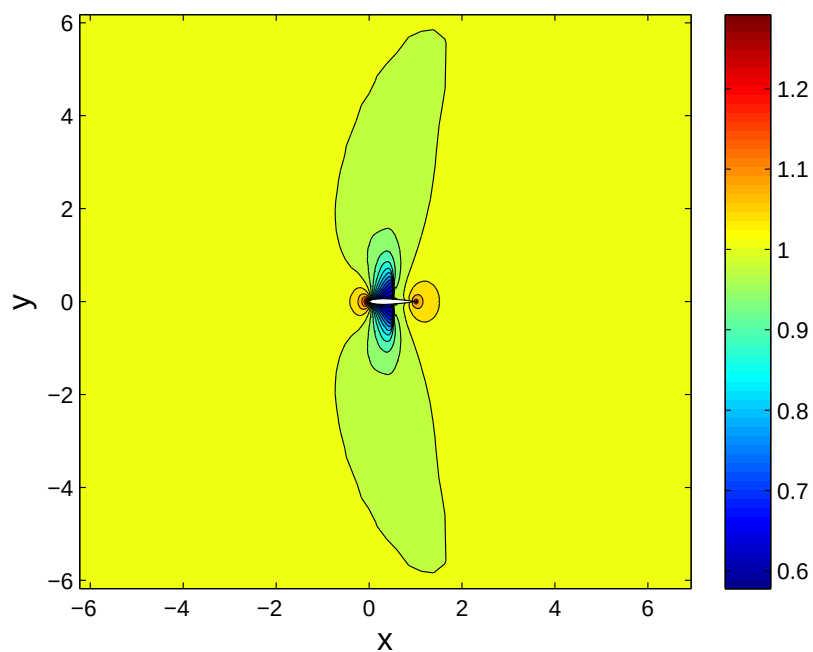


Figura 9.30: Pressão - Malha O - Sem ângulo de ataque

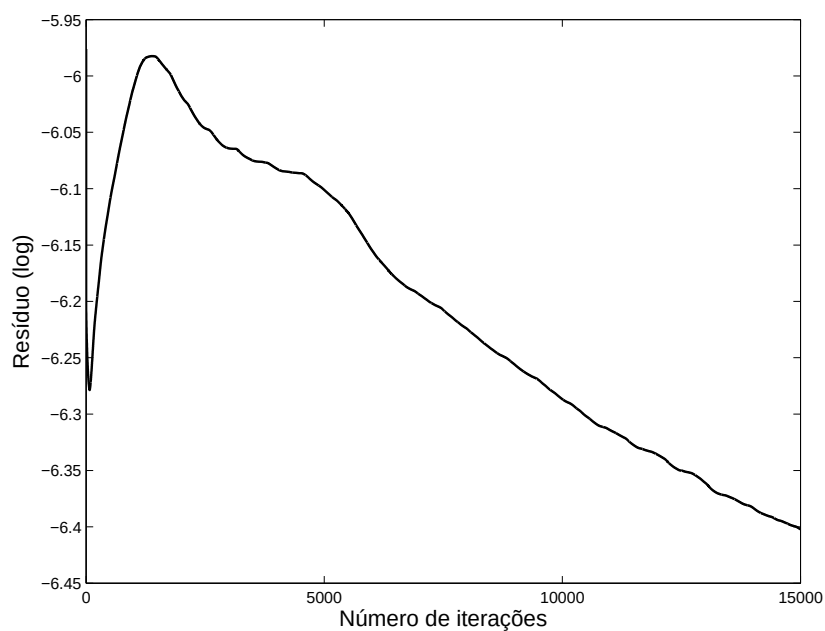


Figura 9.31: Resíduo L2 - Malha O - Sem ângulo de ataque

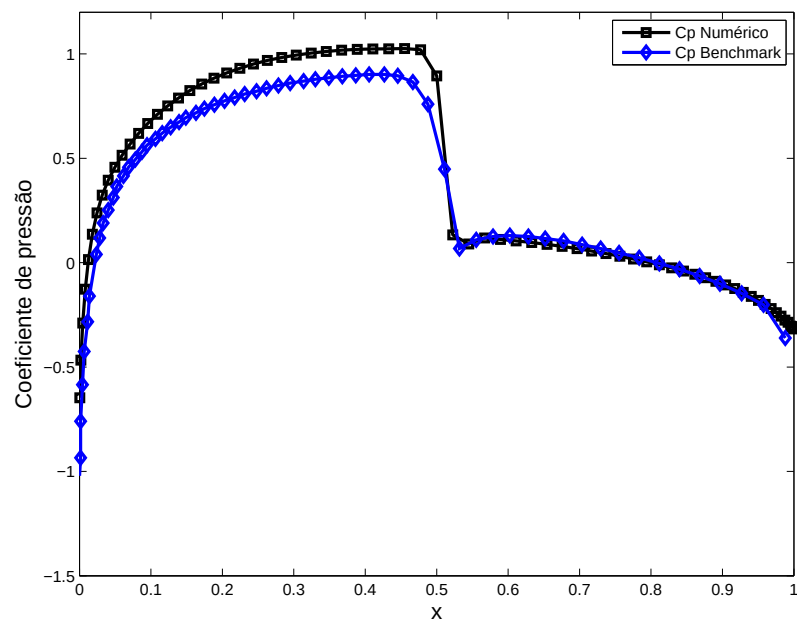


Figura 9.32: Coeficiente de pressão - Malha O - Sem ângulo de ataque

Para este caso, observando os resultados do escoamento dados pelas Figs. ??, ??, ?? e ??, nota-se, conforme esperado, que em todos os casos as isolinhas são simétricas no extradorso e no intradorso. O gráfico do coeficiente de pressão, Fig. ??, mostra que a onda de choque foi capturada em sua posição correta, apresentando uma variação com relação ao valores do caso base na região anterior ao choque. O método se mostrou estável durante todo o ciclo iterativo não apresentando oscilações espúrias, conforme mostrado pela Fig. ??.

### 9.6.2 Resultados para Malha do Tipo C

De maneira análoga à Seção ??, agora será utilizada uma malha C para o cálculo do escoamento.

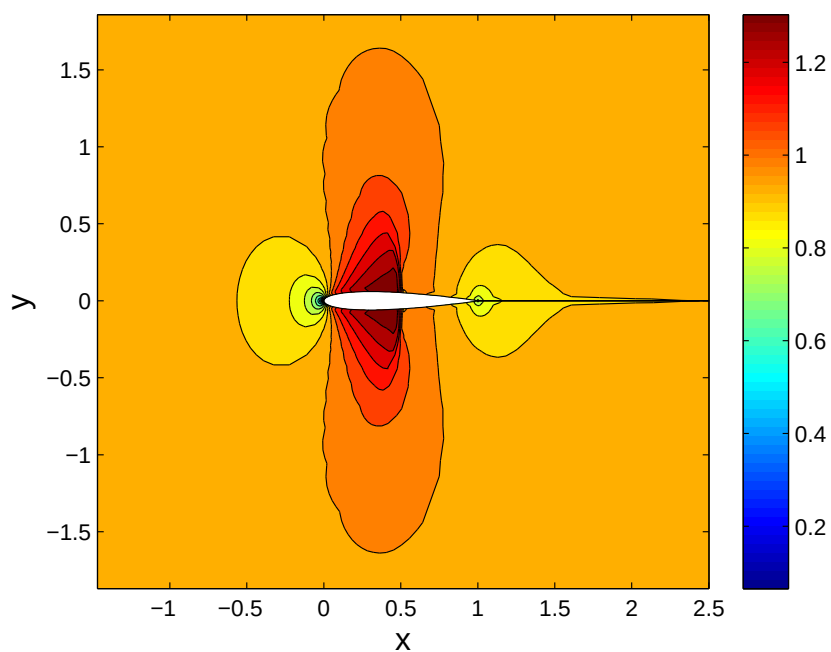


Figura 9.33: Campo de velocidade - Malha C - Sem ângulo de ataque

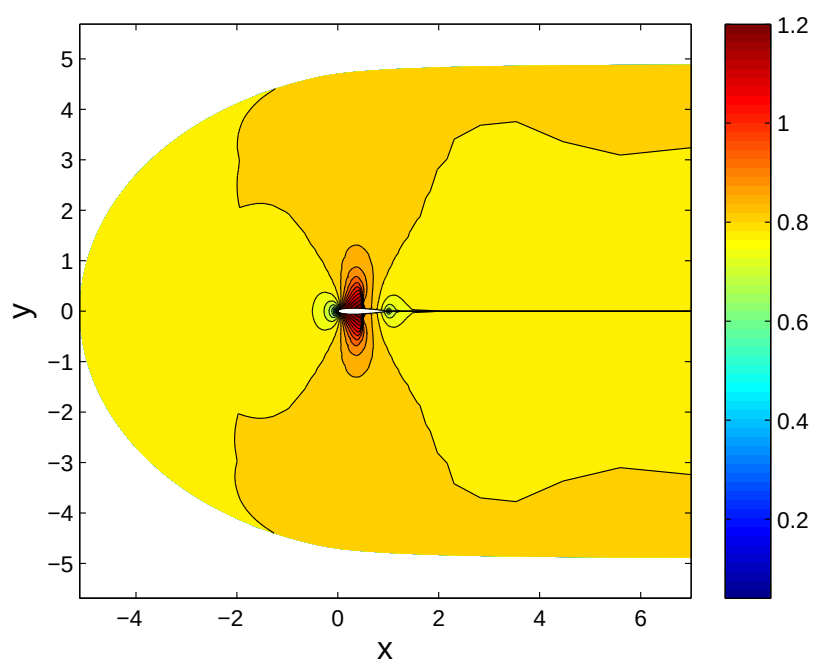


Figura 9.34: Número de Mach - Malha C - Sem ângulo de ataque

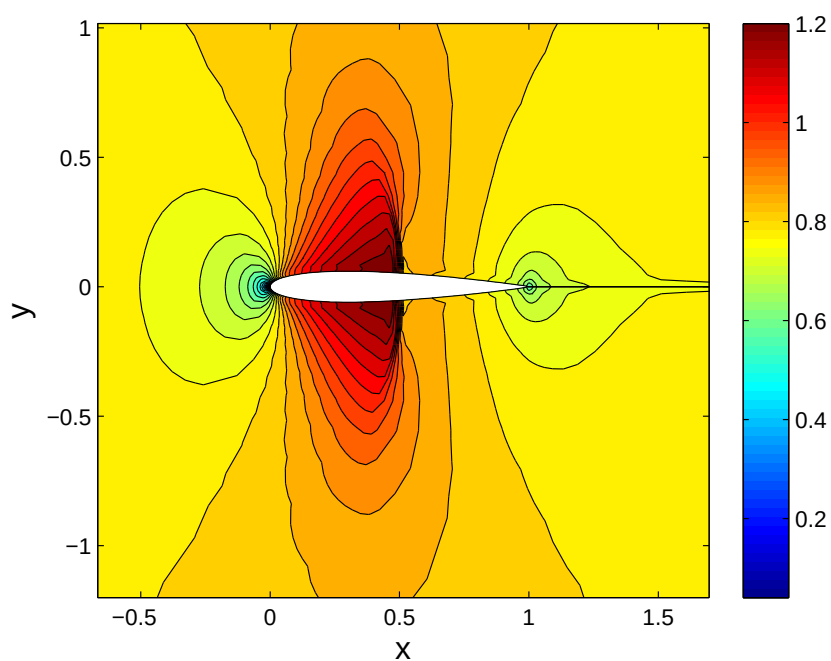


Figura 9.35: Ampliação do número de Mach - Malha C - Sem ângulo de ataque

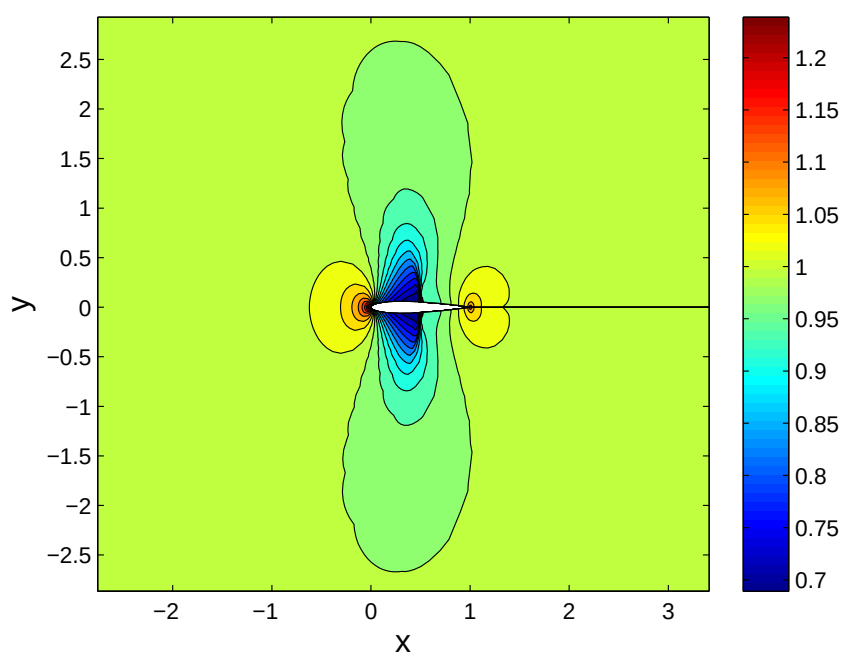


Figura 9.36: Massa específica - Malha C - Sem ângulo de ataque

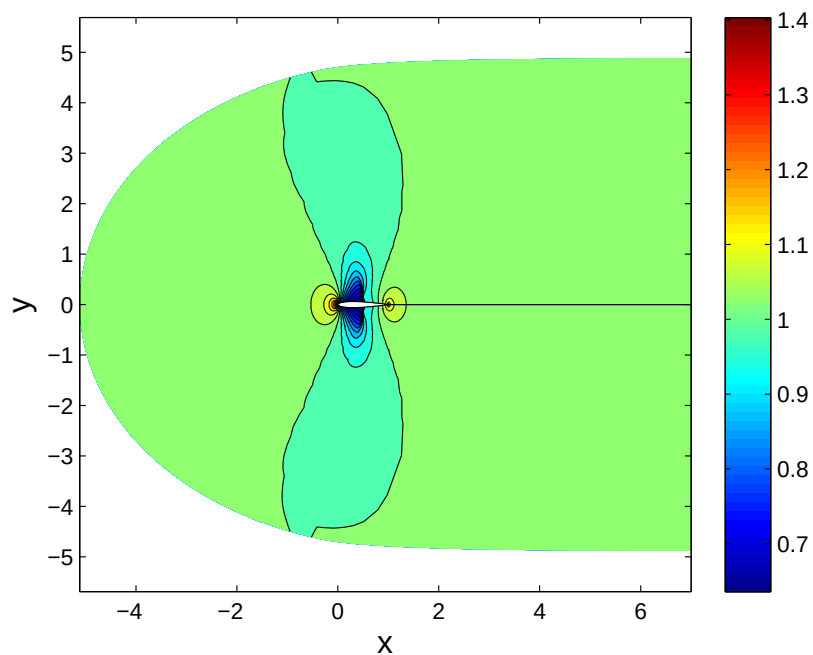


Figura 9.37: Pressão - Malha C - Sem ângulo de ataque

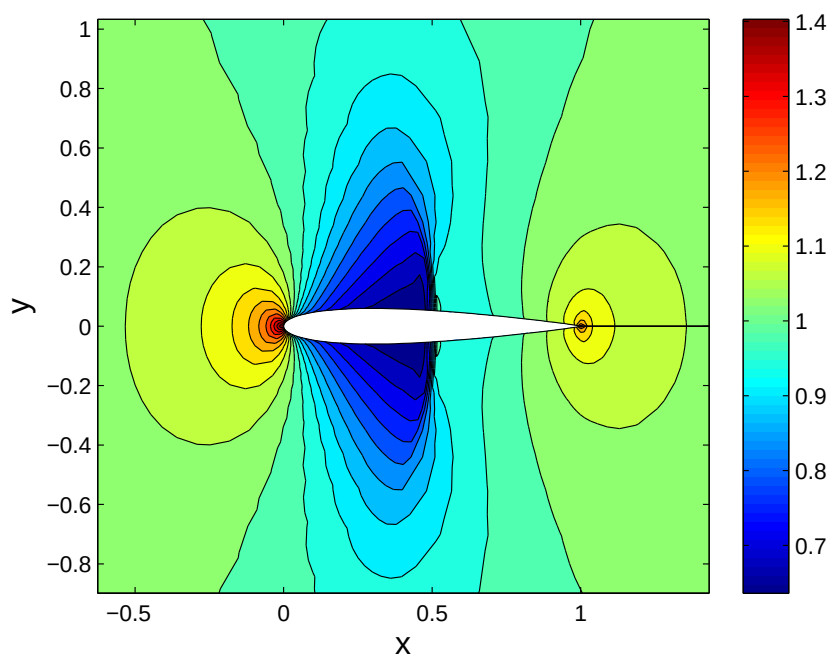


Figura 9.38: Ampliação da pressão - Malha C - Sem ângulo de ataque

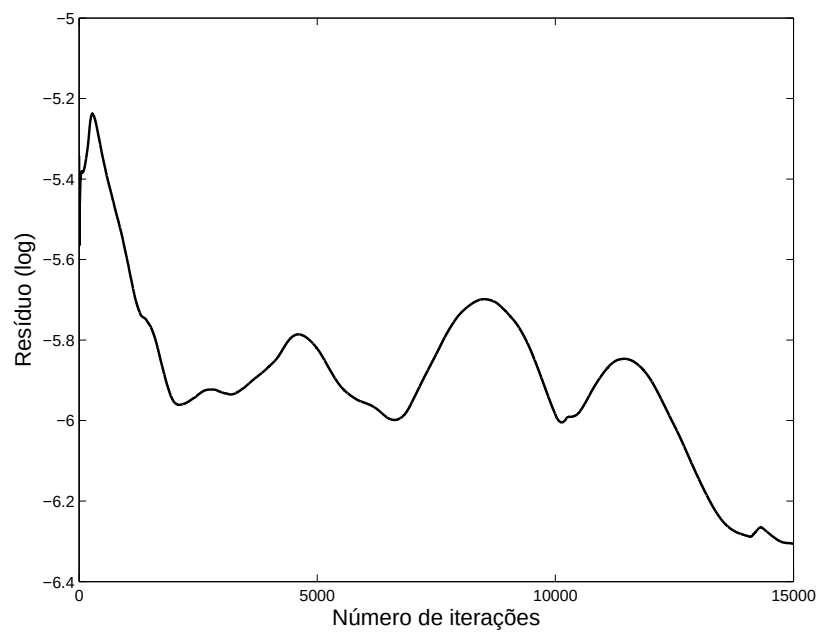


Figura 9.39: Resíduo L2 - Malha C - Sem ângulo de ataque

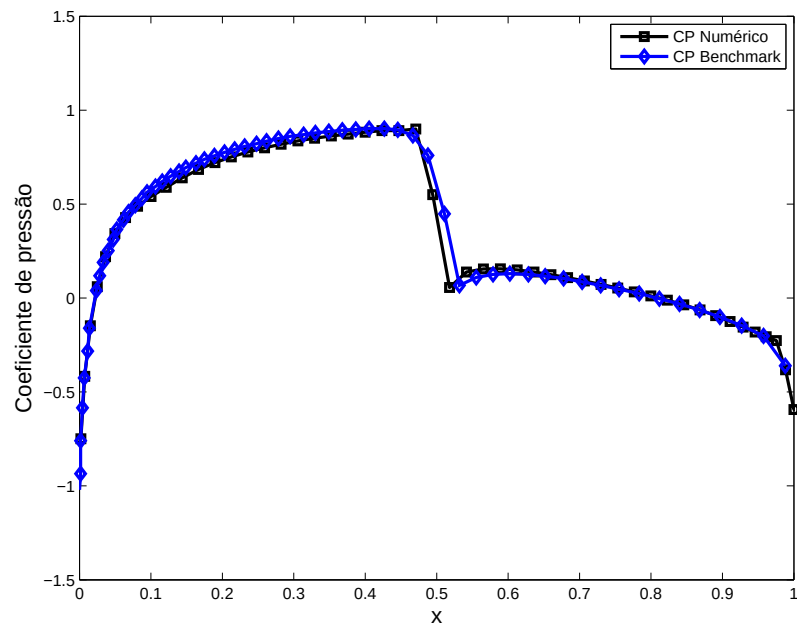


Figura 9.40: Coeficiente de pressão - Malha C - Sem ângulo de ataque

De acordo com os resultados do escoamento dados pelas Figs. ??, ??, ??, ??, ?? e ?? nota-se o desempenho foi semelhante ao apresentado pela malha O, com todos casos tendo isolinhas simétricas no extradorso e no intradorso. O gráfico do coeficiente de pressão, Fig. ??, teve um desempenho ligeiramente melhor do que o obtido com a malha O, essas

diferenças se devem à melhor regularidade na distribuição dos volumes em termos de manutenção da ortogonalidade na malha C e a maior proximidade dos nós da malha à superfície do corpo. O método apresentou pequenas oscilações o ciclo iterativo, o que não afetou a estabilidade do método, conforme mostrado pela Fig. ??.

## 9.7 Aerofólio NACA 0012 com Ângulo de Ataque de $1,25^\circ$

### 9.7.1 Resultados para Malha do Tipo O

Nesta seção, será analisada a solução numérica utilizando malhas do tipo O para um caso com ângulo de ataque de  $1,25$  graus entre o escoamento e o aerofólio.

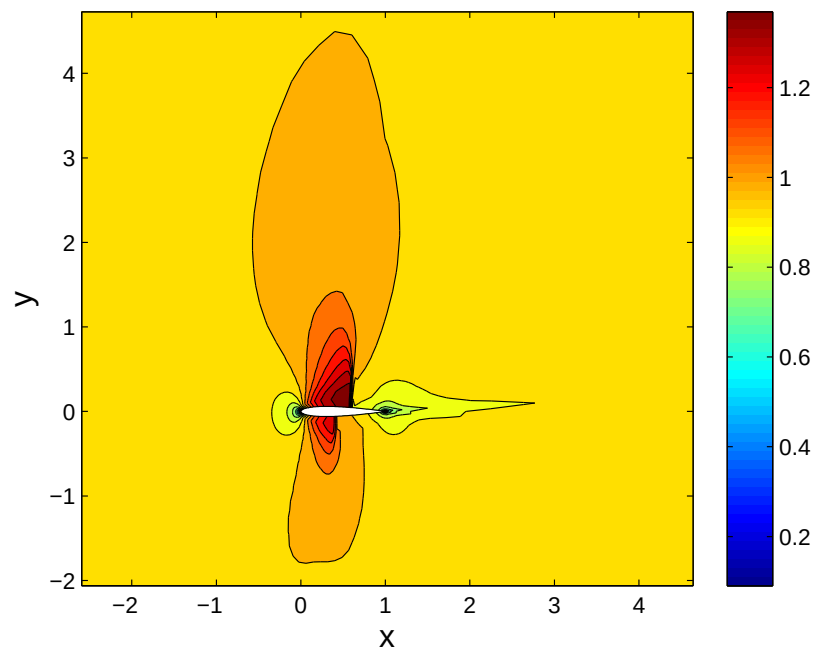
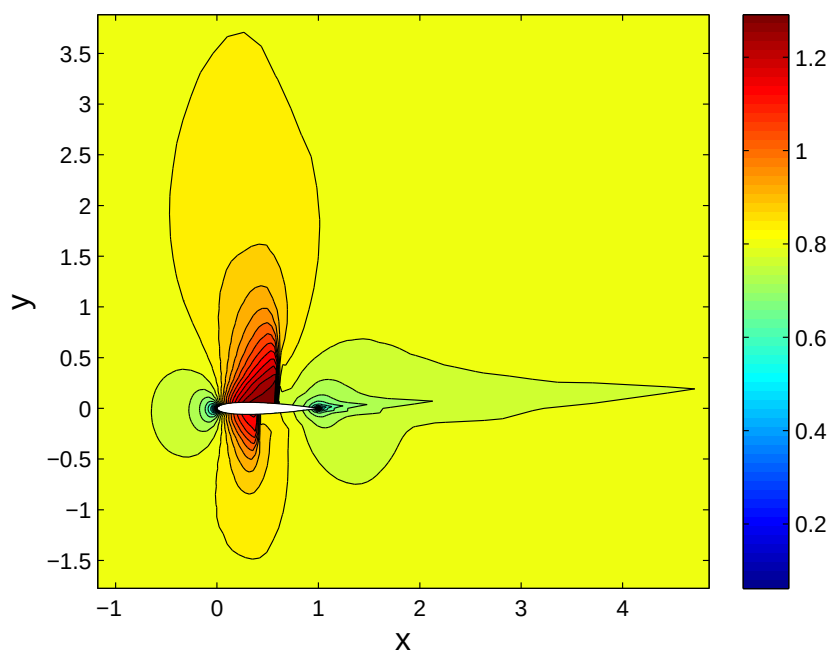
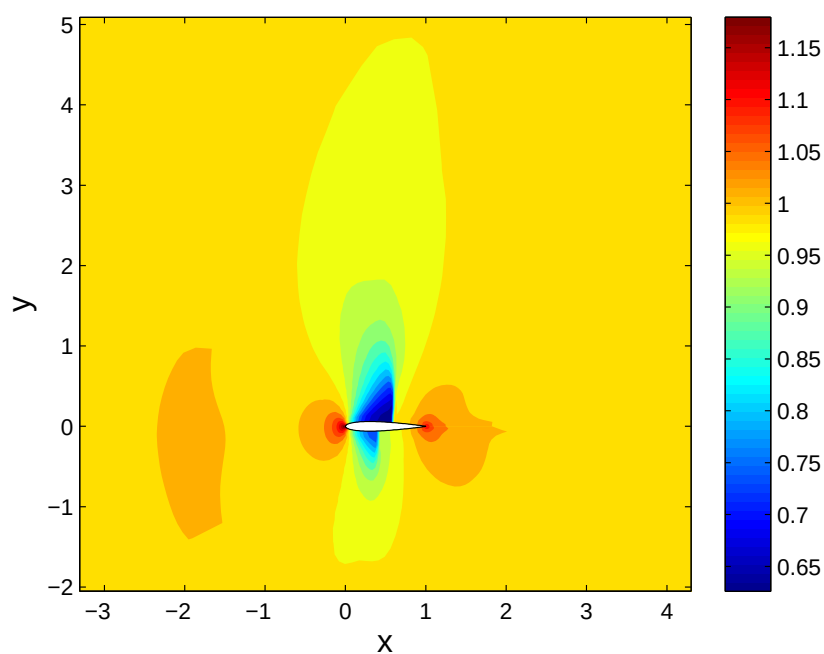
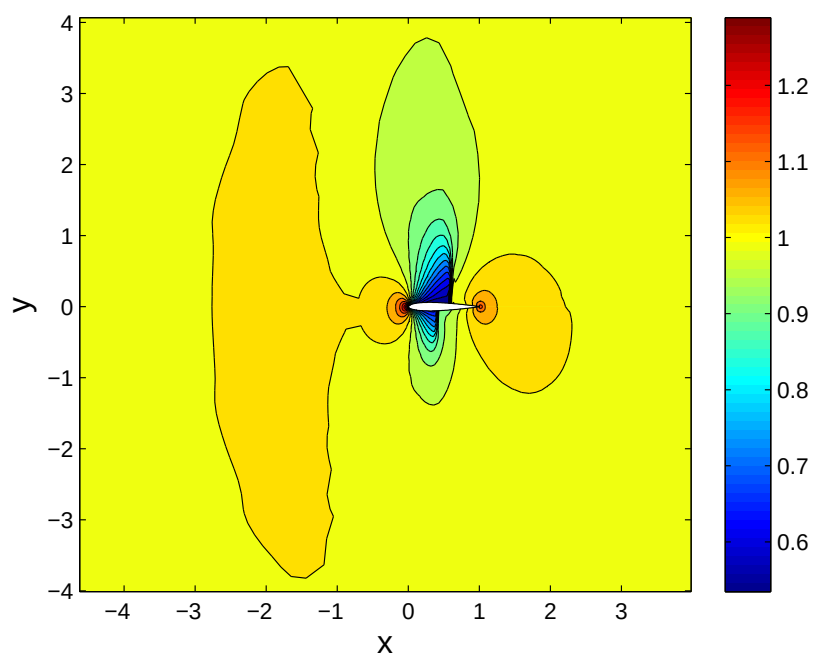
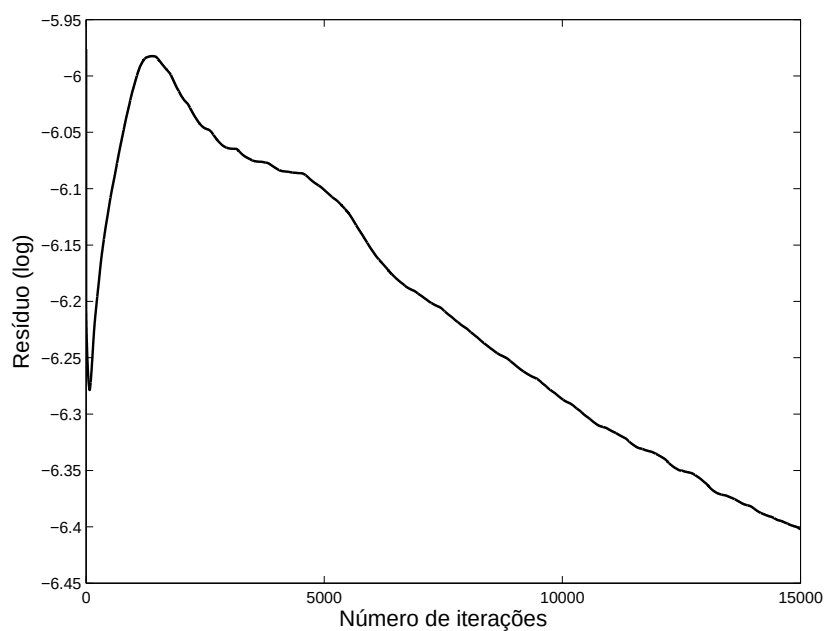


Figura 9.41: Campo de velocidade - Malha O - Ângulo de ataque de  $1,25^\circ$

Figura 9.42: Número de Mach - Malha O - Ângulo de ataque de  $1,25^\circ$ Figura 9.43: Massa específica - Malha O - Ângulo de ataque de  $1,25^\circ$

Figura 9.44: Pressão - Malha O - Ângulo de ataque de  $1,25^\circ$ Figura 9.45: Resíduo L2 - Malha O - Ângulo de ataque de  $1,25^\circ$

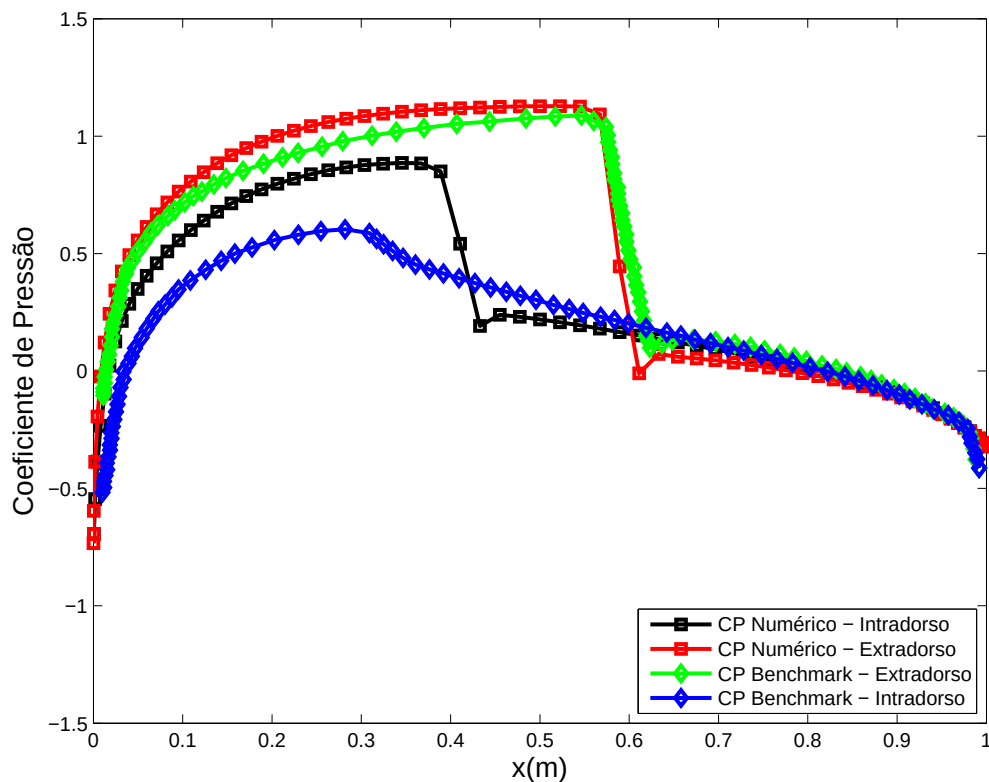
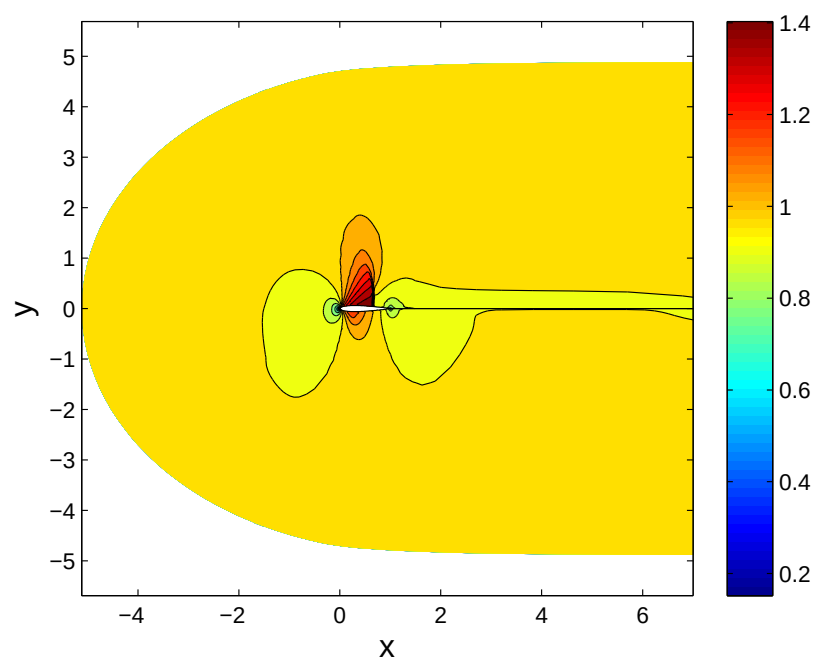
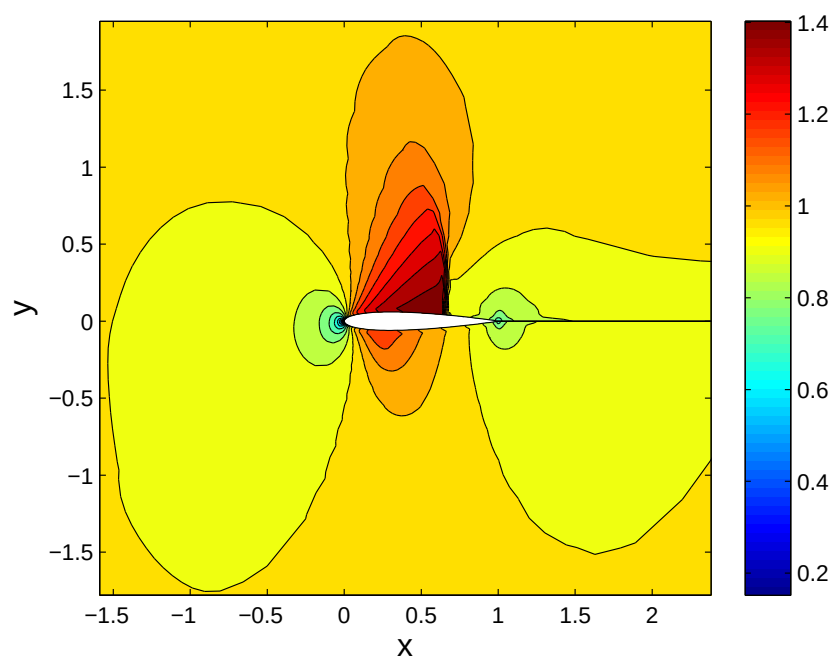


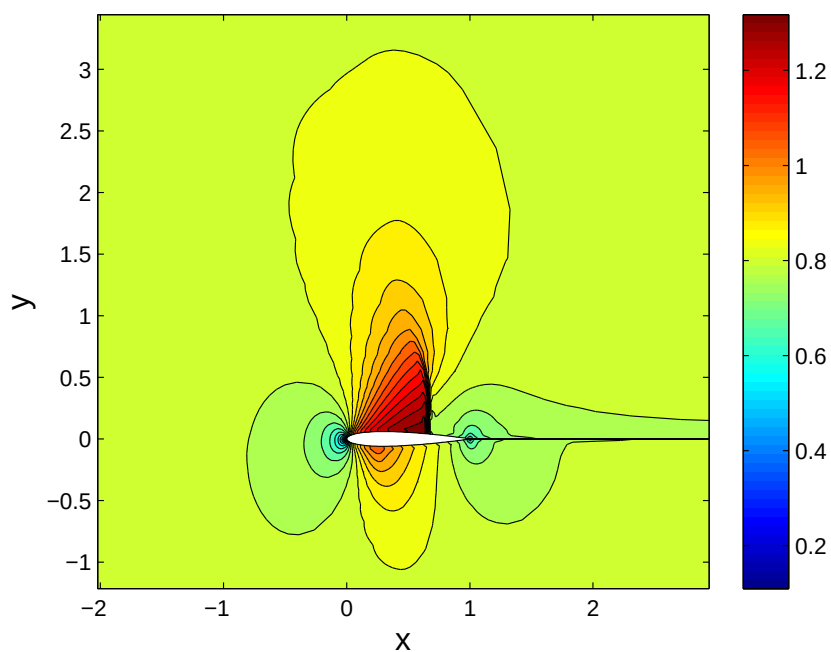
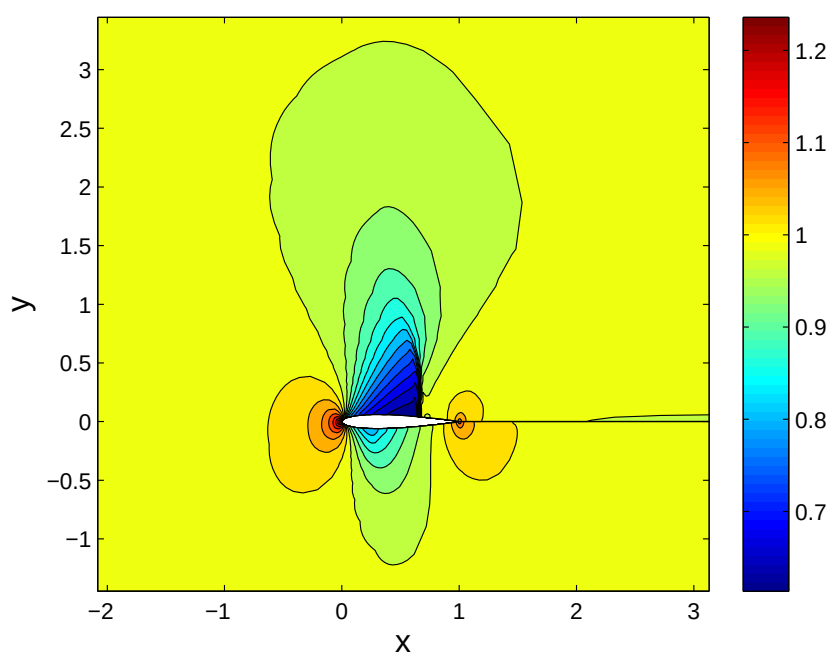
Figura 9.46: Coeficiente de pressão - Malha O - Ângulo de ataque de  $1,25^\circ$

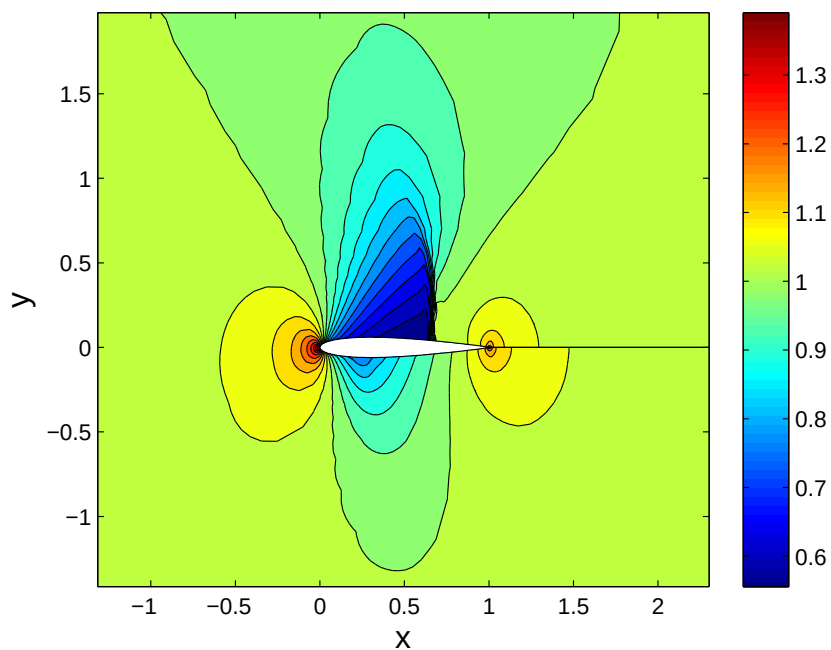
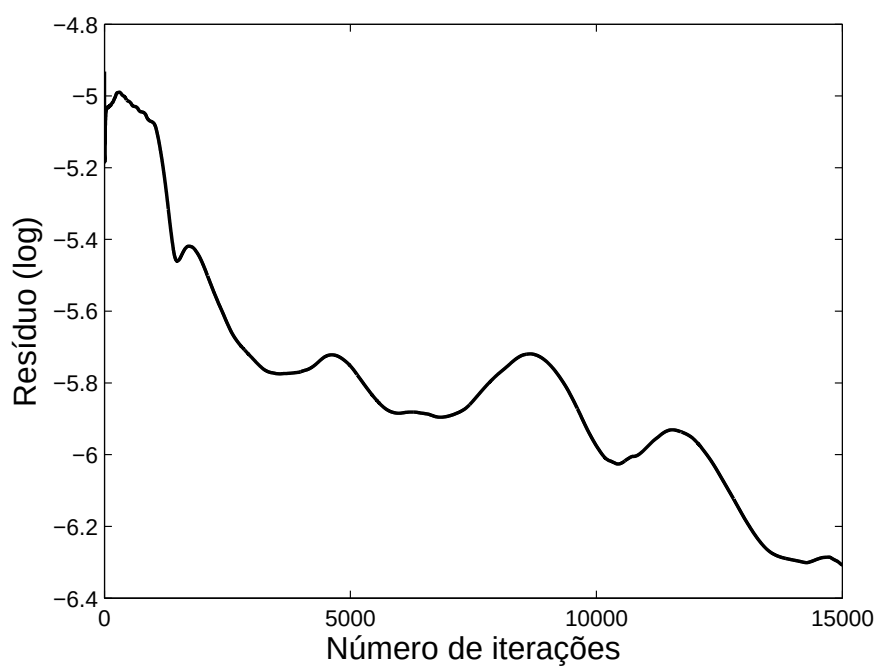
Os resultados das Figs. ??, ??, ?? e ?? mostram que foi capturada uma onda de choque principal no extradorso e uma secundário no intradorso, sendo esta de menor intensidade, porém ao se analisar o gráfico do coeficiente de pressão, Fig. ??, nota-se que a onda do extradorso está de acordo com o caso base, porém a onda do intradorso encontra-se muito distante de sua referência. Essa majoração pode ser causada pela combinação da distância dos nós da malha a superfície do corpo com o ângulo de ataque do escoamento, de maneira análoga ao que foi observado no caso sem ângulo de ataque. Assim como para o caso sem ângulo de ataque com esta malha, o ciclo iterativo se manteve estável durante toda a execução conforme mostrado pela Fig. ??.

### 9.7.2 Resultados para Malha do Tipo C

De maneira análoga à Seção ??, agora será utilizada uma malha C para o cálculo do escoamento.

Figura 9.47: Velocidade - Malha C - Ângulo de ataque de  $1,25^\circ$ Figura 9.48: Ampliação da velocidade - Malha C - Ângulo de ataque de  $1,25^\circ$

Figura 9.49: Número de Mach - Malha C - Ângulo de ataque de  $1,25^\circ$ Figura 9.50: Massa específica - Malha C - Ângulo de ataque de  $1,25^\circ$

Figura 9.51: Pressão - Malha C - Ângulo de ataque de  $1,25^\circ$ Figura 9.52: Resíduo - Malha C - Ângulo de ataque de  $1,25^\circ$

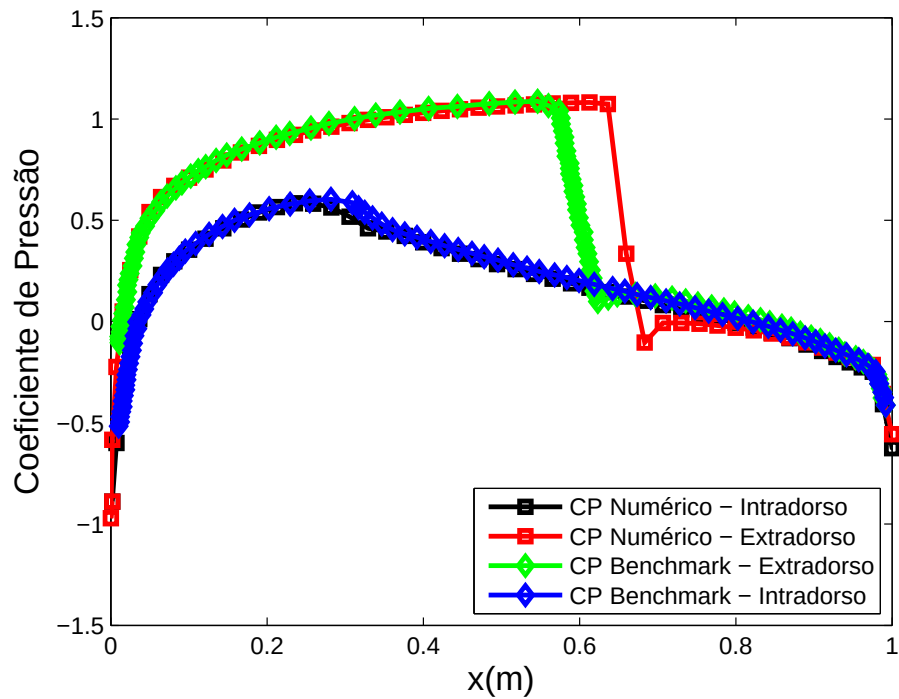


Figura 9.53: Coeficiente de pressão - Malha C - Ângulo de ataque de  $1,25^\circ$

Ao se observar as Figs. ??, ??, ??, ?? e ??, é possível ver que com a malha C, o choque na região do intradorso apareceu com uma menor intensidade do que o calculado através da malha O de acordo com o *benchmark*. Porém a onda de choque no extradorso não foi capturada na posição correta, o que novamente indica que a combinação da influência da malha com o ângulo de ataque está interferindo no resultado numérico. Assim como para o caso sem ângulo de ataque, o gráfico do resíduo, Fig. ??, não apresentou oscilações espúrias nem picos de aumento do resíduo.

# Capítulo 10

## Conclusões

Neste capítulo serão apresentadas as conclusões obtidas à partir das simulações realizadas para os casos quasi 1D e 2D e também sugestões para trabalhos futuros que possam estender o escopo das análises realizadas nesta dissertação.

### 10.1 Conclusões

A utilização do método TVD para a solução dos escoamentos propostos se mostrou eficaz na produção de resultados com um qualidade muito satisfatória das equações de Euler tanto nos casos quase 1D como nos casos 2D.

Para os casos quase 1D, as análise sem e com limitador de fluxo tiveram resultados praticamente iguais para situações simples, como mostrado na Seção ???. Porém, para os casos com entrada e saída supersônica e com formação de onda de choque, a influência dos limitadores de fluxo pode ser percebida mais claramente. Sendo assim, conforme foi aumenta a complexidade das características dos escoamento e da geometria, maiores foram os efeitos causados pelos limitadores de fluxo. Este comportamento pode ser visto com mais detalhes em [?].

Na simulação dos casos 2D, mostrou-se o mapeamento do domínio 2D, o que organiza as variáveis do problema em vetor unidimensional, permitindo um ganho na eficiência computacional. Apesar desta abordagem ser mais vantajosa com relação ao custo computacional, o desenvolvedor do código deve estar atento à organização do código para as condições de contorno sejam definidas da maneira correta e não existam inconsistências durante os ciclos iterativos.

Os resultados para a malha O, apresentaram uma boa precisão na captura da posição

da onda de choque, porém apresentarem dificuldades na captura de onda de choque na região do intradorso quando existia um ângulo de ataque entre o escoamento e o aerofólio, devido à combinação entre as características da malha e o ângulo de ataque.

Os resultados obtidos através do uso da malha C, foram capazes de capturar o choque e os valores do coeficiente de pressão com grande precisão para o caso sem ângulo de ataque, mas quando passou a existir um ângulo de ataque, a onda de choque da região do extradorso foi capturada com a intensidade correta porém ligeiramente fora de posição.

Sendo assim, percebe-se que o método TVD é muito eficiente para a captura de ondas de choque com alta resolução sem apresentar difusão e dispersão na solução, porém deve-se estar atento aos limitadores e às características da malha utilizada, pois estes fatores podem provocar a ocorrência de soluções incorretas.

## 10.2 Sugestões para Futuros Trabalhos

À seguir sugere-se alguns tópicos para futuros trabalhos,

1. Analisar o desempenhos de outros limitadores de fluxo nas geometrias quasi 1D

Neste trabalho foram analisados casos sem limitador e com os limitadores Yee Eq. (??) e Superbee Eq. (??), sendo assim, sugere-se a análise se outros limitadores para a verificação do desempenho na captura da onda de onda de choque e na eliminação dos efeitos de segunda ordem.

2. Pesquisa e desenvolvimento de novos limitadores de fluxo

Os limitadores de fluxo podem apresentar efeitos adversos dependendo das características da geometria e do escoamento. Sendo assim, o desenvolvimento de novos limitadores pode ser uma maneira de mitigar esses efeitos e melhorar o resultado numérico.

3. Desenvolvimento de uma malha adaptativa

Para os casos do aerofólio NACA 0012, pode-se perceber uma diferença considerável no desempenho das malhas dos tipo O e C, sendo o desenvolvimento de uma malha que possua as melhores características de cada um dos dois tipos pode contribuir para que o método numérico possa reproduzir fielmente os dados de referência.

#### 4. Utilização de uma malha não-estruturada

Deve-se avaliar se a utilização de uma malha não-estruturada, pode contribuir para que o resultado numérico se aproxime dos dados de referência.

## APÊNDICE A - Bocal Convergente/Divergente - Entrada e Saída Subsônica

Neste apêndice será mostrado o procedimento de cálculo analítico-discreto para o caso de um bocal convergente/divergente com velocidades de entrada e saída subsônicas, através do uso das tabelas de escoamento isentrópico e choque normal, acarretando desta maneira na formação de uma onda de choque.

### A.1 Geometria e Dados de Entrada

A equação da relação de área que define a geometria do bocal é dada por

$$A(x) = 1 - 0,8 \cdot x \cdot (1 - x) \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Posição do choque} = 4,6875 \text{ m} \quad / \quad P_0 = 101,3250 \text{ kPa} \quad / \quad \rho_0 = 1,2040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

### A.2 Relações de Área nos Pontos de Interesse

$$A_{en} = 1,0000 - 0,8000 \cdot 0,0000 \cdot (1 - 0,0000) = 1,0000$$

De maneira análoga,

$$A_g^* = 0,8000 \quad / \quad A_{ch} = 0,8500 \quad / \quad A_s = 1,0000$$

### A.3 Valores na Entrada do Bocal

A relação de área na entrada do bocal é dada por

$$\frac{A_{en}}{A_1^*} = \frac{1,0000}{0,8000} = 1,2500$$

e portanto, considerando a tabela de escoamento isentrópico de [?], pode-se calcular o valores do número de Mach, pressão e massa específica.

### A.3.1 Número de Mach na Entrada do Bocal

| Mach     | —— | $\frac{A}{A^*}$ |
|----------|----|-----------------|
| 0,5400   | —— | 1,2703          |
| x        | —— | 1,2500          |
| 0,5600   | —— | 1,2403          |
|          |    |                 |
| 0,5400-x | —— | 1,2703-1,2500   |
| x-0,5600 | —— | 1,2500-1,2403   |

$$0,0097 \cdot (0,5400 - x) = 0,0203 \cdot (x - 0,5600)$$

$$-0,030 \cdot x = -0,0166$$

$$x = 0,5533$$

portanto,

$$M_{en} = 0,5533 \text{ Mach}$$

### A.3.2 Pressão na Entrada do Bocal

| $\frac{P_0}{P}$ | —— | $\frac{A}{A^*}$ |
|-----------------|----|-----------------|
| 1,2194          | —— | 1,2703          |
| x               | —— | 1,2500          |
| 1,2373          | —— | 1,2403          |

portanto,

$$P_{en} = 82,370 \text{ KPa}$$

### A.3.3 Massa Específica na Entrada do Bocal

| $\frac{\rho_0}{\rho}$ | —— | $\frac{A}{A^*}$ |
|-----------------------|----|-----------------|
| 1,1522                | —— | 1,2703          |
| x                     | —— | 1,2500          |
| 1,1642                | —— | 1,2403          |

portanto,

$$\rho_{en} = 1,0379 \text{ kg/m}^3$$

## A.4 Valores Imediatamente Antes do Choque

A relação de área no ponto imediatamente antes do choque é dada por

$$\frac{A_{ac}}{A_1^*} = \frac{0,8500}{0,8000} = 1,0625$$

e portanto, considerando a tabela de escoamento isentrópico de [?], pode-se calcular o valores do número de Mach, pressão e massa específica.

### A.4.1 Número de Mach Imediatamente Antes do Choque

| Mach   | —— | $\frac{A}{A^*}$ |
|--------|----|-----------------|
| 1,2800 | —— | 1,0581          |
| x      | —— | 1,0625          |
| 1,3000 | —— | 1,0663          |

portanto,

$$M_{en} = 1,2967 \text{ Mach}$$

### A.4.2 Pressao Imediatamente Antes do Choque

| $\frac{P_0}{P}$ | —— | $\frac{A}{A^*}$ |
|-----------------|----|-----------------|
| 2,6967          | —— | 1,0581          |
| x               | —— | 1,0625          |
| 2,7707          | —— | 1,0663          |

portanto,

$$P_{ac} = 37,0923 \text{ KPa}$$

### A.4.3 Massa Específica Imediatamente Antes do Choque

| $\frac{\rho_0}{\rho}$ | —— | $\frac{A}{A^*}$ |
|-----------------------|----|-----------------|
| 2,0311                | —— | 1,0581          |
| x                     | —— | 1,0625          |
| 2,0708                | —— | 1,0663          |

portanto,

$$\rho_{ac} = 0,5877 \text{ kg/m}^3$$

## A.5 Valores Imediatamente Após o Choque

Nesta etapa do processo, devido à existência de um choque normal, as relações de escoamento isentrópico não são mais válidas. Desta maneira, será calculado através da tabela de choque normal o número de Mach após o choque e a relação entre as pressões de estagnação antes e depois do choque, para que assim possa ser determinada a área da segunda garganta e seja possível utilizar novamente a tabela de escoamento isentrópico para o cálculo da pressão e da massa específica.

### A.5.1 Número de Mach Imediatamente Após o Choque

Utilizando a tabela de choque normal de [?], têm-se

|        |    |        |
|--------|----|--------|
| $M_1$  | —— | $M_2$  |
| 1,2800 | —— | 0,7963 |
| 1,2902 | —— | x      |
| 1,3000 | —— | 0,7860 |

portanto,

$$M_{dc} = 0,7900 \text{ Mach}$$

### A.5.2 Relação das Pressões de Estagnação Antes e Depois do Choque

|        |    |                         |
|--------|----|-------------------------|
| $M$    | —— | $\frac{P_{02}}{P_{01}}$ |
| 1,2800 | —— | 0,9827                  |
| 1,2902 | —— | x                       |
| 1,3000 | —— | 0,9794                  |

portanto,

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = 0,981$$

### A.5.3 Cálculo da Área da Segunda Garganta

Utilizando a Eq. (??), têm-se

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{A_1^*}{A_2^*} \quad \therefore \quad A_2^* = 0,8155$$

### A.5.4 Relação de Área entre o Ponto Imediatamente Após o Choque e a Segunda Garganta

$$\frac{A_{dc}}{A_2^*} = \frac{0,8500}{0,8155} = 1,0423$$

À partir deste ponto, será utilizado somente o valor da área da segunda garganta.

### A.5.5 Pressão Imediatamente Após o Choque

| $\frac{P_0}{P}$ | —— | $\frac{A}{A^*}$ |
|-----------------|----|-----------------|
| 1,4947          | —— | 1,0470          |
| x               | —— | 1,0423          |
| 1,5243          | —— | 1,0382          |

portanto,

$$P_{dc} = 67,0405 \text{ KPa}$$

### A.5.6 Massa Específica Imediatamente Após o Choque

| $\frac{\rho_0}{\rho}$ | —— | $\frac{A}{A^*}$ |
|-----------------------|----|-----------------|
| 1,3325                | —— | 1,0470          |
| x                     | —— | 1,0423          |
| 1,3514                | —— | 1,0382          |

portanto,

$$\rho_{dc} = 0,8979 \text{ kg/m}^3$$

## A.6 Valores na Saída do Bocal

A relação de área na saída do bocal é dada por

$$\frac{A_s}{A_{2g}^*} = \frac{1,0000}{0,8155} = 1,2262$$

e portanto, considerando a tabela de escoamento isentrópico de [?], pode-se calcular o valores do número de Mach, pressão e massa específica.

### A.6.1 Número de Mach na Saída do Bocal

| Mach   | —— | $\frac{A}{A^*}$ |
|--------|----|-----------------|
| 0,5600 | —— | 1,2403          |
| x      | —— | 1,2262          |
| 0,5800 | —— | 1,2130          |

portanto,

$$M_s = 0,5714 \text{ Mach}$$

### A.6.2 Pressão na Saída do Bocal

| $\frac{P_0}{P}$ | —— | $\frac{A}{A^*}$ |
|-----------------|----|-----------------|
| 1,2373          | —— | 1,2403          |
| x               | —— | 1,2262          |
| 1,2560          | —— | 1,2130          |

portanto,

$$P_s = 81,3594 \text{ KPa}$$

### A.6.3 Massa Específica na Saída do Bocal

| $\frac{\rho_0}{\rho}$ | —— | $\frac{A}{A^*}$ |
|-----------------------|----|-----------------|
| 1,1642                | —— | 1,2403          |
| x                     | —— | 1,2262          |
| 1,1768                | —— | 1,2130          |

portanto,

$$\rho_s = 1,0304 \text{ kg/m}^3$$

## APÊNDICE B - Equação Modificada da Equação da Advecção - Esquema FTCS estabilizado

Neste apêndice será demonstrado a obtenção da equação modificada da equação de advecção.

Considerando a Eq. (??) e reescrevendo-a da seguinte maneira

$$\frac{u_j^{t+\Delta t} - \frac{u_{j+1}^t - u_{j-1}^t}{2}}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^t - u_{j-1}^t}{2\Delta x} = 0 \quad (\text{B.1})$$

e expandindo os seus termos em série de Taylor, têm-se:

$$u_j^{t+\Delta t} = u_j^t + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^t \Delta t + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^t \frac{(\Delta t)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_j^t \frac{(\Delta t)^3}{6} + \dots \quad (\text{B.2})$$

$$u_{j+1}^t = u_j^t + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^t \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^t \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^t \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (\text{B.3})$$

$$u_{j-1}^t = u_j^t - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^t \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^t \frac{(\Delta x)^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^t \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (\text{B.4})$$

Substituindo as Eqs. (??), (??) e (??) na Eq. (??), e omitindo os índices t e j, têm-se

$$\frac{u_j^t}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{(\Delta t)^2}{6} - \frac{u_j^t}{\Delta t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} + a \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{3} = O(\Delta x, \Delta t) \quad (\text{B.5})$$

e reorganizando a Eq. (??)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2} - \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{(\Delta t)^2}{6} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} - a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{6} + O(\Delta x, \Delta t) \quad (\text{B.6})$$

A próxima etapa é substituir as derivadas temporais no lado direito da Eq. (??) por derivadas espaciais.

O primeiro passo é derivar a Eq. (??) com relação ao tempo, obtendo-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\Delta t}{2} - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \frac{(\Delta t)^2}{6} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} - a \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} \frac{(\Delta x)^2}{6} + O(\Delta x, \Delta t) \quad (\text{B.7})$$

Em seguida, deriva-se a Eq. (??) no espaço e multiplica-se todos os termos por a

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \frac{(\Delta x)^2}{6} - a \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \frac{\Delta t}{2} - a \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} \frac{(\Delta t)^2}{6} + a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} + O(\Delta x, \Delta t) \quad (\text{B.8})$$

Subtraindo a Eq. (??) da Eq. (??), têm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\Delta t}{2} - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \frac{(\Delta t)^2}{6} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} - a \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} \frac{(\Delta x)^2}{3} \\ & + a \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \frac{\Delta t}{2} + a \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} \frac{(\Delta t)^2}{6} - a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \frac{(\Delta x)^2}{6} + O(\Delta x, \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Reorganizando a Eq. (??) e desprezando os termos de alta ordem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\Delta t}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} + a \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \frac{\Delta t}{2} - a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} + O(\Delta x, \Delta t) \quad (\text{B.10})$$

Para tratar o segundo termo da Eq. (??), deriva-se o mesmo em relação ao tempo, obtendo-se

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = a^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + O(\Delta x, \Delta t) \quad (\text{B.11})$$

Derivando-se a Eq. (??) em relação a x e multiplicando por a e desprezando os termos de alta ordem, têm-se

$$a^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = O(\Delta x, \Delta t) \quad (\text{B.12})$$

Somando as Eqs. (??) e (??), resulta

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = -a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x, \Delta t) \quad (\text{B.13})$$

Derivando a Eq. (??) com relação a x, obtêm-se

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = a^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x, \Delta t) \quad (\text{B.14})$$

Rearranjando a Eq. (??), têm-se

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(\Delta x, \Delta t) \quad (\text{B.15})$$

Substituindo a Eq. (??) na Eq. (??), resulta em

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = -a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x, \Delta t) \quad (\text{B.16})$$

Substituindo as Eqs. (??),(??) e (??) na Eq. (??), obtêm-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta t - a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} + O(\Delta x, \Delta t) \quad (\text{B.17})$$

Substituindo as Eqs. (??),(??) na Eq. (??), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = & -a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\Delta t}{2} - a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta t)^2}{4} + a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{4} - a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta t)^2}{4} + a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{4} \\ & + a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta t)^2}{6} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} - a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{6} + O(\Delta x, \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Reorganizando a Eq. (??), têm-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a\Delta x}{2} \left( \frac{\Delta x}{a\Delta t} - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a(\Delta x)^2}{3} \left( 1 - \left( a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x, \Delta t) \quad (\text{B.19})$$

## APÊNDICE C - Formulação Implícita do Esquema TVD para Leis de Conservação Escalares

Neste apêndice será demonstrado o procedimento para a montagem da formulação implícita do esquema TVD para Leis de conservação escalares não-lineares.

Considerando a família de um parâmetro para esquemas explícitos e implícitos dada por

$$u_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \theta \left( \tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tilde{f}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - \theta) \left( \tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^n - \tilde{f}_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (\text{C.1})$$

onde, para  $\theta = 1$ , têm-se

$$u_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tilde{f}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) = u_j^n \quad (\text{C.2})$$

Sendo  $\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$  e  $\tilde{f}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}$  dados por

$$\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1}) + \frac{1}{2} \left[ g_i + g_{i+1} - \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i+\frac{1}{2}} u \right] \quad (\text{C.3})$$

$$\tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2} (f_{i-1} + f_i) + \frac{1}{2} \left[ g_{i-1} + g_i - \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i-\frac{1}{2}} u \right] \quad (\text{C.4})$$

e substituindo as Eqs. (??) e (??) na Eq. (??), têm-se

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \bar{f}_{j+1} - \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i+\frac{1}{2}} u \right]^{n+1} \\ - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \bar{f}_{i-1} - \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i-\frac{1}{2}} u \right]^{n+1} = u_j^n \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

onde

$$\bar{f}_{i+1} = (f_i + f_{i+1}) + (g_i + g_{i+1}) \quad (\text{C.6})$$

$$\bar{f}_{i-1} = (f_{i-1} + f_i) + (g_{i-1} + g_i) \quad (\text{C.7})$$

Usando série de Taylor para realizar a linearização das Eqs. (??) e (??), têm-se

$$\bar{f}_{i+1}^{n+1} = \bar{f}_{i+1}^n + \bar{a}_{i+1}^n (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n) \quad (\text{C.8})$$

$$\bar{f}_{i-1}^{n+1} = \bar{f}_{i-1}^n + \bar{a}_{i-1}^n (u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n) \quad (\text{C.9})$$

sendo

$$\bar{a}_i = \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial u_i} \quad (\text{C.10})$$

Desta maneira, substituindo as Eqs. (??) e (??), têm-se

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{f}_{i+1}^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{a}_{i+1}^n (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{f}_{i-1}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{a}_{i-1}^n (u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n) \quad (\text{C.11}) \\ - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i+\frac{1}{2}} u \right]^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i-\frac{1}{2}} u \right]^n = u_i^n \end{aligned}$$

Nesta etapa, os termos  $\Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i+\frac{1}{2}} u$  e  $\Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i-\frac{1}{2}} u$  serão somados e subtraídos no nível de tempo  $n$ , de modo a deixar os lados direito e esquerdo do sistema de equações balanceados e também será realizada a linearização local da função  $\Psi$ , reduzindo o nível de tempo  $n+1$  para  $n$ , de modo a obter a forma LCI. Portanto,

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{f}_{i+1}^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{a}_{i+1}^n (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{f}_{i-1}^n \\ - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{a}_{i-1}^n (u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} u \\ - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i+\frac{1}{2}}^n u + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i+\frac{1}{2}}^n u \quad (\text{C.12}) \\ + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} u + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i-\frac{1}{2}}^n u \\ - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i-\frac{1}{2}}^n u = u_i^n \end{aligned}$$

onde

$$\Delta_{i+\frac{1}{2}} = u_{i+1} - u_i \quad (\text{C.13})$$

$$\Delta_{i-\frac{1}{2}} = u_i - u_{i-1} \quad (\text{C.14})$$

Desta maneira, reorganizando a Eq. (??), têm-se

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{a}_{i+1} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{a}_{i-1} (u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n) \\ - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) \left( \Delta_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} u - \Delta_{i+\frac{1}{2}}^n u \right) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \left( \Delta_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} u - \Delta_{i-\frac{1}{2}}^n u \right) = \\ - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{f}_{i+1}^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{f}_{i-1}^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i+\frac{1}{2}}^n u - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i-\frac{1}{2}}^n u \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

e prosseguindo com a reorganização da Eq. (??), obtêm-se

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{a}_{i+1} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{a}_{i-1} (u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n) \\ - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} - u_{i+1}^n + u_i^n) \\ + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} - u_i^n + u_{i-1}^n) = - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{f}_{i+1}^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{f}_{i-1}^n \\ + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i+\frac{1}{2}}^n u - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta_{i-\frac{1}{2}}^n u \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

e sendo a forma delta dada por

$$d_{i-1} = u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n \quad (\text{C.17})$$

$$d_i = u_i^{n+1} - u_i^n \quad (\text{C.18})$$

$$d_{i+1} = u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n \quad (\text{C.19})$$

a Eq. (??) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 d_i + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{a}_{i+1} d_{i+1} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{a}_{i-1} d_{i-1} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) d_{i+1} \\
 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) d_i + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) d_i \\
 - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Psi^n \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) d_{i-1} = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( \tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}^n \right)
 \end{aligned} \tag{C.20}$$

Montando a Eq. (??) na forma de um sistema de equações, têm-se

$$E_1 d_{i-1} + E_2 d_i + E_3 d_{i+1} = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( \tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \tag{C.21}$$

onde

$$E_1 = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \bar{a}_{i-1} + \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \right]^n \tag{C.22}$$

$$E_2 = 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) + \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i-\frac{1}{2}} \right) \right]^n \tag{C.23}$$

$$E_3 = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \bar{a}_{i+1} - \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \right) \right]^n \tag{C.24}$$

## APÊNDICE D - Linearização do Esquema Implícito para um Sistema de Leis de Conservação Hiperbólicas

Neste apêndice será demonstrada a linearização do esquema implícito para um sistema de Leis de conservação hiperbólicas.

Considerando a equação de Euler em sua forma quasi-unidimensional dada pela Eq. (??) e aproximando as derivadas por diferenças finitas, obtêm-se:

$$\frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{F}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tilde{F}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x} + H^{n+1} = 0$$

$$Q_j^{n+1} - Q_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \tilde{F}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tilde{F}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) + \Delta t \cdot H^{n+1} = 0 \quad (\text{D.1})$$

Sendo

$$\tilde{F}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2} \left( F_j^{n+1} + F_{j+1}^{n+1} + \left( R_{j+\frac{1}{2}}^l \Phi_{j+\frac{1}{2}}^l \right)^{n+1} \right) \quad (\text{D.2})$$

$$\tilde{F}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2} \left( F_{j-1}^{n+1} + F_j^{n+1} + \left( R_{j-\frac{1}{2}}^l \Phi_{j-\frac{1}{2}}^l \right)^{n+1} \right) \quad (\text{D.3})$$

e sabendo que o limitador de fluxo  $\Phi$  é um vetor com três componentes, isto é,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 \end{bmatrix}^T \quad (\text{D.4})$$

e cada uma das suas componentes para o caso “upwind” é dada por

$$\phi_{j+\frac{1}{2}}^l = \sum_{l=1}^m \left[ \frac{1}{2} \Psi \left( a_{j+\frac{1}{2}}^l \right) (g_j^l + g_{j+1}^l) - \Psi \left( a_{j+\frac{1}{2}}^l + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^l \right) \alpha_{j+\frac{1}{2}}^l \right] \quad (\text{D.5})$$

$$\phi_{j-\frac{1}{2}}^l = \sum_{l=1}^m \left[ \frac{1}{2} \Psi \left( a_{j-\frac{1}{2}}^l \right) (g_{j-1}^l + g_j^l) - \Psi \left( a_{j-\frac{1}{2}}^l + \gamma_{j-\frac{1}{2}}^l \right) \alpha_{j-\frac{1}{2}}^l \right] \quad (\text{D.6})$$

Utilizando série de Taylor para realizar a linearização no tempo, têm-se:

$$F_j^{n+1} = F_j^n + \frac{\partial F}{\partial Q} \Delta Q \quad (\text{D.7})$$

$$H_j^{n+1} = H_j^n + \frac{\partial H}{\partial Q} \Delta Q \quad (\text{D.8})$$

Desta maneira,

$$F_j^{n+1} = F_j^n + A_j (Q_j^{n+1} - Q_j^n) = F_j^n + A_j D_j \quad (\text{D.9})$$

$$F_{j+1}^{n+1} = F_{j+1}^n + A_{j+1} (Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n) = F_{j+1}^n + A_{j+1} D_{j+1} \quad (\text{D.10})$$

$$F_{j-1}^{n+1} = F_{j-1}^n + A_{j-1} (Q_{j-1}^{n+1} - Q_{j-1}^n) = F_{j-1}^n + A_{j-1} D_{j-1} \quad (\text{D.11})$$

$$H_j^{n+1} = H_j^n + B_j (Q_j^{n+1} - Q_j^n) = H_j^n + B_j D_j \quad (\text{D.12})$$

e sendo  $\alpha$  dado por

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}} = R_{j+\frac{1}{2}}^{-1} \Delta_{j+\frac{1}{2}} Q \quad (\text{D.13})$$

$$\alpha_{j-\frac{1}{2}} = R_{j-\frac{1}{2}}^{-1} \Delta_{j-\frac{1}{2}} Q \quad (\text{D.14})$$

onde

$$\Delta_{i+\frac{1}{2}} Q = Q_{i+1} - Q_i \quad (\text{D.15})$$

$$\Delta_{i-\frac{1}{2}}Q = Q_i - Q_{i-1} \quad (\text{D.16})$$

Substituindo as eqs. (??), (??), (??), (??), (??), (??), (??) e (??) nas eqs. (??), (??), têm-se

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2} & \left( F_i^n + A_i (Q_i^{n+1} - Q_i^n) + F_{i+1}^n + A_{i+1} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n) \right. \\ & + \sum_{l=1}^m \left[ R_{i+\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}}^l \right) (g_i^l + g_{i+1}^l) \right]^{n+1} \\ & \left. - \sum_{l=1}^m \left[ R_{i+\frac{1}{2}}^l \cdot \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}}^l + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^l \right) R_{i+\frac{1}{2}}^{-1l} \Delta_{i+\frac{1}{2}} Q \right]^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2} & \left( F_{i-1}^n + A_{i-1} (Q_{i-1}^{n+1} - Q_{i-1}^n) + F_i^n + A_i (Q_i^{n+1} - Q_i^n) \right. \\ & + \sum_{l=1}^m \left[ R_{i-\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}}^l \right) (g_{i-1}^l + g_i^l) \right]^{n+1} \\ & \left. - \sum_{l=1}^m \left[ R_{i-\frac{1}{2}}^l \cdot \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}}^l + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^l \right) R_{i-\frac{1}{2}}^{-1l} \Delta_{i-\frac{1}{2}} Q \right]^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Substituindo as Eqs. (??), (??) e (??) na Eq. (??), têm-se

$$\begin{aligned} Q_i^{n+1} - Q_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} & \left( F_i + A_i (Q_i^{n+1} - Q_i^n) + F_{i+1} \right. \\ & + A_{i+1} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n) + \sum_{l=1}^m \left[ R_{i+\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}}^l \right) (g_i^l + g_{i+1}^l) \right]^{n+1} \\ & - \sum_{l=1}^m \left[ R_{i+\frac{1}{2}}^l \cdot \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}}^l + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^l \right) \cdot R_{i+\frac{1}{2}}^{-1l} \Delta_{i+\frac{1}{2}} Q \right]^{n+1} - F_{i-1} - A_{i-1} (Q_{i-1}^{n+1} - Q_{i-1}^n) \\ & - F_i - A_i (Q_i^{n+1} - Q_i^n) - \sum_{l=1}^m \left[ R_{i-\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}}^l \right) (g_{i-1}^l + g_i^l) \right]^{n+1} \\ & + \sum_{l=1}^m \left[ R_{i-\frac{1}{2}}^l \cdot \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}}^l + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^l \right) \cdot R_{i-\frac{1}{2}}^{-1l} \Delta_{i-\frac{1}{2}} Q \right]^{n+1} \Big) \\ & + \Delta t [H_i + B_i (Q_i^{n+1} - Q_i^n)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

onde

$$\Omega_{i+\frac{1}{2}}^l = R_{i+\frac{1}{2}}^l \cdot \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}}^l + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^l \right) \cdot R_{i+\frac{1}{2}}^{-1l} \quad (\text{D.20})$$

$$\Omega_{i-\frac{1}{2}}^l = R_{i-\frac{1}{2}}^l \cdot \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}}^l + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^l \right) \cdot R_{i-\frac{1}{2}}^{-1l} \quad (\text{D.21})$$

Nesta etapa, os termos  $R_{i+\frac{1}{2}}^l \cdot \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}}^l + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^l \right) \cdot R_{i+\frac{1}{2}}^{-1l} \Delta_{i+\frac{1}{2}} Q$  e  $R_{i-\frac{1}{2}}^l \cdot \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}}^l + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^l \right) \cdot R_{i-\frac{1}{2}}^{-1l} \Delta_{i-\frac{1}{2}} Q$  serão somados e subtraídos no nível de tempo  $n$ , de modo a deixar os lados direito e esquerdo do sistema de equações balanceados e também será realizada a linearização local da função  $\Psi$ , reduzindo o nível de tempo  $n+1$  para  $n$ , de modo a obter a forma LCI. Portanto, a Eq. (??) será reescrita da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} Q_i^{n+1} - Q_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} & \left[ A_i (Q_i^{n+1} - Q_i^n) + A_{i+1} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n) - \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i+\frac{1}{2}}^l \right]^n \Delta_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} Q \right. \\ & - \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i+\frac{1}{2}}^l \right]^n \Delta_{i+\frac{1}{2}}^n Q + \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i+\frac{1}{2}}^l \right]^n \Delta_{i+\frac{1}{2}}^n Q - A_{i-1} (Q_{i-1}^{n+1} - Q_{i-1}^n) - A_i (Q_i^{n+1} - Q_i^n) \\ & + \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i-\frac{1}{2}}^l \right]^n \Delta_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} Q + \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i-\frac{1}{2}}^l \right]^n \Delta_{i-\frac{1}{2}}^n Q - \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i-\frac{1}{2}}^l \right]^n \Delta_{i-\frac{1}{2}}^n Q \left. \right] + \Delta t \\ & \cdot B_i (Q_i^{n+1} - Q_i^n) = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( F_i + F_{i+1} + \sum_{l=1}^m \left[ R_{i+\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}}^l \right) (g_i^l + g_{i+1}^l) \right]^n - F_{i-1} \right. \\ & \quad \left. - F_i - \sum_{l=1}^m \left[ R_{i-\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}}^l \right) (g_{i-1}^l + g_i^l) \right]^n \right) - \Delta t \cdot H_i \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Continuando a reorganização da Eq. (??), têm-se

$$\begin{aligned} Q_i^{n+1} - Q_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} & \left[ A_i (Q_i^{n+1} - Q_i^n) + A_{i+1} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n) \right. \\ & - \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i+\frac{1}{2}}^l \right] (Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1} - Q_{i+1}^n + Q_i^n) - A_{i-1} (Q_{i-1}^{n+1} - Q_{i-1}^n) \\ & - A_i (Q_i^{n+1} - Q_i^n) + \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i-\frac{1}{2}}^l \right] (Q_i^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1} - Q_i^n + Q_{i-1}^n) + \Delta t \cdot B_i (Q_i^{n+1} - Q_i^n) \left. \right] = \\ & -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( F_i + F_{i+1} + \sum_{l=1}^m \left[ R_{i+\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2}}^l \right) (g_i^l + g_{i+1}^l) \right]^n - \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i+\frac{1}{2}}^l \right] \Delta_{i+\frac{1}{2}}^n Q \right. \\ & \quad \left. - F_{i-1} - F_i - \sum_{l=1}^m \left[ R_{i-\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2}}^l \right) (g_{i-1}^l + g_i^l) \right]^n + \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i-\frac{1}{2}}^l \right] \Delta_{i-\frac{1}{2}}^n Q \right) - \Delta t \cdot H_i \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

e sendo

$$D_{i-1} = Q_{i-1}^{n+1} - Q_{i-1}^n \quad (\text{D.24})$$

$$D_i = Q_i^{n+1} - Q_i^n \quad (\text{D.25})$$

$$D_{i+1} = Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n \quad (\text{D.26})$$

pode-se reorganizar a Eq. (??) da seguinte forma

$$\begin{aligned} D_i + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ A_i D_i + A_{i+1} D_{i+1} - \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i+\frac{1}{2}}^l \right] (D_{i+1} - D_i) - A_{i-1} D_{i-1} - A_i D_i \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i-\frac{1}{2}}^l \right] (D_i - D_{i-1}) \right] + \Delta t \cdot B_i D_i = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ F_{i+\frac{1}{2}}^{\tilde{n}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{\tilde{n}} \right] - \Delta t \cdot H_i \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Reorganizando a Eq. (??) no formato de um sistema de equações, têm-se

$$E_1 D_{i-1} + E_2 D_i + E_3 D_{i+1} = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ F_{i+\frac{1}{2}}^{\tilde{n}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{\tilde{n}} \right] - \Delta t \cdot H_i \quad (\text{D.28})$$

onde

$$E_1 = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( A_{i-1} + \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i-\frac{1}{2}}^l \right] \right) \quad (\text{D.29})$$

$$E_2 = I + \Delta t \cdot B_i + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i+\frac{1}{2}}^l \right] + \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i-\frac{1}{2}}^l \right] \right) \quad (\text{D.30})$$

$$E_3 = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( A_{i+1} - \sum_{l=1}^m \left[ \Omega_{i+\frac{1}{2}}^l \right] \right) \quad (\text{D.31})$$

## APÊNDICE E - Equação de Euler em Coordenadas Generalizadas

As equações de Euler em coordenadas cartesianas podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0 \quad (\text{E.1})$$

e as coordenadas generalizadas são dadas por

$$\xi = \xi(x, y, t) \quad (\text{E.2})$$

$$\eta = \eta(x, y, t) \quad (\text{E.3})$$

$$\sigma = t \quad (\text{E.4})$$

Utilizando a regra da cadeia para expandir as derivadas em coordenadas cartesianas em termos de coordenadas generalizadas, têm-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\text{E.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\text{E.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\text{E.7})$$

e as métricas  $\xi_x$ ,  $\xi_y$ ,  $\xi_t$ ,  $\eta_x$ ,  $\eta_y$  e  $\eta_t$  pode ser calculadas seguindo as etapas à seguir:

Os diferenciais em cada eixo coordenado e no tempo, no domínio transformado, são dados por

$$d\sigma = \sigma_t dt + \sigma_x dx + \sigma_y dy \quad (\text{E.8})$$

$$d\xi = \xi_t dt + \xi_x dx + \xi_y dy \quad (\text{E.9})$$

$$d\eta = \eta_t dt + \eta_x dx + \eta_y dy \quad (\text{E.10})$$

que podem ser escritos na forma matricial

$$\begin{bmatrix} d\sigma \\ d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_t & \sigma_x & \sigma_y \\ \xi_t & \xi_x & \xi_y \\ \eta_t & \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dt \\ dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (\text{E.11})$$

ou, na forma indicial

$$[d^T] = [A] [d^F] \quad (\text{E.12})$$

De maneira análoga, os diferenciais em cada eixo coordenado e no tempo, no domínio cartesiano, são dados por

$$dt = t_\sigma d\sigma + t_\xi d\xi + t_\eta d\eta \quad (\text{E.13})$$

$$dx = x_\sigma d\sigma + x_\xi d\xi + x_\eta d\eta \quad (\text{E.14})$$

$$dy = y_\sigma d\sigma + y_\xi d\xi + y_\eta d\eta \quad (\text{E.15})$$

que na forma matricial se torna

$$\begin{bmatrix} dt \\ dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_\sigma & t_\xi & t_\eta \\ x_\sigma & x_\xi & x_\eta \\ y_\sigma & y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma \\ d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (\text{E.16})$$

ou, na forma indicial

$$[d_F] = [B] [d_T] \quad (\text{E.17})$$

Desta maneira, têm-se:

$$[A] = [B]^{-1} \quad (\text{E.18})$$

$$[B] = [A]^{-1} \quad (\text{E.19})$$

A matriz  $[A]$  é a matriz jacobiana da transformação de coordenadas cartesianas em coordenadas generalizadas e  $[B]$  é a matriz jacobiana da transformação de coordenadas generalizadas em coordenadas cartesianas.

Desta maneira, pode-se afirmar que

$$J = \det [A] = \frac{1}{\det [B]} \quad (\text{E.20})$$

ou

$$J = [t_\sigma x_\xi y_\eta + t_\xi (x_\eta y_\sigma - x_\sigma y_\eta) + t_\eta (x_\sigma y_\xi - x_\xi y_\sigma) - t_\sigma x_\eta y_\xi]^{-1} \quad (\text{E.21})$$

porém, como

$$\sigma_x = \sigma_y = t_\xi = t_\eta = 0$$

e

$$t_\sigma = \sigma_t = 1$$

têm-se

$$J = (\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x) = \frac{1}{(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)} \quad (\text{E.22})$$

Para determinar as métricas da transformação do sistema cartesiano para o generalizado, deve-se calcular a inversa da matriz  $[B]$  e compará-la com a matriz  $[A]$ . A matriz inversa de  $[B]$  é calculada da seguinte maneira

$$[B]^{-1} = \frac{1}{\det [B]} \text{adj} [B] \quad (\text{E.23})$$

e sendo a matriz adjunta a transposta da matriz cofator, deve-se calcular os cofatores dos nove elementos de  $[B]$  para obter-se a matriz inversa. Sendo

$$C_B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{E.24})$$

tem-se

$$B_{11} = + \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

$$B_{12} = - \begin{vmatrix} x_\sigma & x_\eta \\ y_\sigma & y_\eta \end{vmatrix} = -x_\sigma y_\eta + x_\eta y_\sigma$$

$$B_{13} = + \begin{vmatrix} x_\sigma & x_\xi \\ y_\sigma & y_\xi \end{vmatrix} = x_\sigma y_\xi - x_\xi y_\sigma$$

$$B_{21} = - \begin{vmatrix} t_\xi & t_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix} = -t_\xi y_\eta + t_\eta y_\xi = 0$$

$$B_{22} = + \begin{vmatrix} t_\sigma & t_\eta \\ y_\sigma & y_\eta \end{vmatrix} = t_\sigma y_\eta - t_\eta y_\sigma = y_\eta$$

$$B_{23} = - \begin{vmatrix} t_\sigma & t_\xi \\ y_\sigma & y_\xi \end{vmatrix} = -t_\sigma y_\xi + t_\xi y_\sigma = -y_\xi$$

$$B_{31} = + \begin{vmatrix} t_\xi & t_\eta \\ x_\xi & x_\eta \end{vmatrix} = t_\xi x_\eta - t_\eta x_\xi = 0$$

$$B_{32} = - \begin{vmatrix} t_\sigma & t_\eta \\ x_\sigma & x_\eta \end{vmatrix} = -t_\sigma x_\eta + t_\eta x_\sigma = -x_\eta$$

$$B_{33} = + \begin{vmatrix} t_\sigma & t_\xi \\ x_\sigma & x_\xi \end{vmatrix} = t_\sigma x_\xi - t_\xi x_\sigma = x_\xi$$

Portanto, a matriz dos cofatores pode ser reescrita como

$$C_B = \begin{bmatrix} x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi & -x_\sigma y_\eta + x_\eta y_\sigma & x_\sigma y_\xi - x_\xi y_\sigma \\ 0 & y_\eta & -y_\xi \\ 0 & -x_\eta & x_\xi \end{bmatrix} \quad (\text{E.25})$$

Formando-se a transposta da matriz dos cofatores, obtêm-se a matriz adjunta de  $[B]$ .

$$adj[B] = \begin{bmatrix} x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi & 0 & 0 \\ -x_\sigma y_\eta + x_\eta y_\sigma & y_\eta & -x_\eta \\ x_\sigma y_\xi - x_\xi y_\sigma & -y_\xi & x_\xi \end{bmatrix} \quad (E.26)$$

Utilizando (??) e (??), pode-se escrever

$$[A] = [B]^{-1} = J \begin{bmatrix} x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi & 0 & 0 \\ -x_\sigma y_\eta + x_\eta y_\sigma & y_\eta & -x_\eta \\ x_\sigma y_\xi - x_\xi y_\sigma & -y_\xi & x_\xi \end{bmatrix} \quad (E.27)$$

obtendo-se assim as métricas da transformação

$$\xi_t = J(-x_\sigma y_\eta + x_\eta y_\sigma) \quad (E.28)$$

$$\xi_x = Jy_\eta \quad (E.29)$$

$$\xi_y = -Jx_\eta \quad (E.30)$$

$$\eta_t = J(x_\sigma y_\xi - x_\xi y_\sigma) \quad (E.31)$$

$$\eta_x = -Jy_\xi \quad (E.32)$$

$$\eta_y = Jx_\xi \quad (E.33)$$

De maneira análoga, pode-se calcular as métricas da transformação do sistema generalizado para o cartesiano

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} adj[A] \quad (E.34)$$

Sendo

$$C_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (E.35)$$

tem-se

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} \xi_t & \xi_y \\ \eta_t & \eta_y \end{vmatrix} = -\xi_t \eta_y + \xi_y \eta_t$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} \xi_t & \xi_x \\ \eta_t & \eta_x \end{vmatrix} = \xi_t \eta_x - \xi_x \eta_t$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = -\sigma_x \eta_y + \sigma_y \eta_x = 0$$

$$A_{22} = + \begin{vmatrix} \sigma_t & \sigma_y \\ \eta_t & \eta_y \end{vmatrix} = \sigma_t \eta_y - \sigma_y \eta_t = \eta_y$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} \sigma_t & \sigma_x \\ \eta_t & \eta_x \end{vmatrix} = -\sigma_t \eta_x + \sigma_x \eta_t = -\eta_x$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_y \\ \xi_x & \xi_y \end{vmatrix} = \sigma_x \xi_y - \sigma_y \xi_x = 0$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} \sigma_t & \sigma_y \\ \xi_t & \xi_y \end{vmatrix} = -\sigma_t \xi_y + \sigma_y \xi_t = -\xi_y$$

$$A_{33} = + \begin{vmatrix} \sigma_t & \sigma_x \\ \xi_t & \xi_x \end{vmatrix} = \sigma_t \xi_x - \sigma_x \xi_t = \xi_x$$

Portanto, a matriz dos cofatores pode ser reescrita como

$$C_A = \begin{bmatrix} \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x & -\xi_t \eta_y + \xi_y \eta_t & \xi_t \eta_x - \xi_x \eta_t \\ 0 & \eta_y & -\eta_x \\ 0 & -\xi_y & \xi_x \end{bmatrix} \quad (\text{E.36})$$

Formando-se a transposta da matriz dos cofatores, obtêm-se a matriz adjunta de [A].

$$\text{adj}[A] = \begin{bmatrix} \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x & 0 & 0 \\ -\xi_t \eta_y + \xi_y \eta_t & \eta_y & -\xi_y \\ \xi_t \eta_x - \xi_x \eta_t & -\eta_x & \xi_x \end{bmatrix} \quad (\text{E.37})$$

Utilizando (??) e (??), pode-se escrever

$$[B] = [A]^{-1} = J \begin{bmatrix} \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x & 0 & 0 \\ -\xi_t \eta_y + \xi_y \eta_t & \eta_y & -\xi_y \\ \xi_t \eta_x - \xi_x \eta_t & -\eta_x & \xi_x \end{bmatrix} \quad (\text{E.38})$$

obtendo-se assim as métricas da transformação

$$x_\sigma = \frac{1}{J} (\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x) \quad (\text{E.39})$$

$$x_\xi = \frac{1}{J} \eta_y \quad (\text{E.40})$$

$$x_\eta = -\frac{1}{J} \xi_y \quad (\text{E.41})$$

$$y_\sigma = \frac{1}{J} (\xi_t \eta_x - \xi_x \eta_t) \quad (\text{E.42})$$

$$y_\xi = -\frac{1}{J} \eta_x \quad (\text{E.43})$$

$$y_\eta = \frac{1}{J} \xi_x \quad (\text{E.44})$$

Substituindo (??), (??) e (??) em (??), tem-se

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \xi} \xi_t + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \eta_t + \frac{\partial F}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial F}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial G}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial G}{\partial \eta} \eta_y = 0 \quad (\text{E.45})$$

Multiplicando (??) por  $J^{-1}$  e utilizando a regra da cadeia, têm-se:

$$J^{-1} k_m \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial k} (J^{-1} k_m \phi) - \phi \frac{\partial}{\partial k} (J^{-1} k_m) \quad (\text{E.46})$$

onde

$$k = \xi, \eta, \sigma \quad (\text{E.47})$$

$$m = x, y, t \quad (\text{E.48})$$

$$\phi = Q, F, G \quad (\text{E.49})$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \sigma} [J^{-1}Q] + \frac{\partial}{\partial \xi} [J^{-1}(\xi_t Q + \xi_x F + \xi_y G)] + \frac{\partial}{\partial \eta} [J^{-1}(\eta_t Q + \eta_x F + \eta_y G)] \\
 & - Q \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} (J^{-1}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (J^{-1}\xi_t) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J^{-1}\eta_t) \right] \\
 & - F \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (J^{-1}\xi_x) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J^{-1}\eta_x) \right] - G \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (J^{-1}\xi_y) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J^{-1}\eta_y) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{E.50}$$

Do quarto ao sexto colchete, os termos são invariantes da transformação e são identicamente iguais a zero.

Reescrevendo (??), em relação ao sistema de coordenadas generalizadas, têm-se:

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \eta} = 0 \tag{E.51}$$

onde

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{J} \tag{E.52}$$

$$\tilde{F} = \frac{1}{J} (\xi_t Q + \xi_x F + \xi_y G) \tag{E.53}$$

$$\tilde{G} = \frac{1}{J} (\eta_t Q + \eta_x F + \eta_y G) \tag{E.54}$$

Os vetores  $Q$ ,  $F$  e  $G$  na equação de Euler escrita em coordenadas cartesianas são dados por:

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} \tag{E.55}$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (e + P)u \end{bmatrix} \tag{E.56}$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ (e + P) v \end{bmatrix} \quad (\text{E.57})$$

e

$$P = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2} \right] \quad (\text{E.58})$$

usando (??), (??), (??), (??), (??) e (??), pode-se reescrever os vetores  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{F}$  e  $\tilde{G}$  como

$$\tilde{Q} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} \quad (\text{E.59})$$

$$\tilde{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho (\xi_t + \xi_x u + \xi_y v) \\ \rho u (\xi_t + \xi_x u + \xi_y v) + \xi_x P \\ \rho v (\xi_t + \xi_x u + \xi_y v) + \xi_y P \\ (e + P) (\xi_t + \xi_x u + \xi_y v) - \xi_t P \end{bmatrix} \quad (\text{E.60})$$

$$\tilde{G} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho (\eta_t + \eta_x u + \eta_y v) \\ \rho u (\eta_t + \eta_x u + \eta_y v) + \eta_x P \\ \rho v (\eta_t + \eta_x u + \eta_y v) + \eta_y P \\ (e + P) (\eta_t + \eta_x u + \eta_y v) - \eta_t P \end{bmatrix} \quad (\text{E.61})$$

Como no presente trabalho, não será utilizada móvel, isto é, uma malha que se altera ao longo do tempo, os termos temporais de (??) e (??) deverão ser iguais a zero.

## APÊNDICE F – Autovalores da Equação de Euler em Coordenadas Generalizadas

As equações de Euler em coordenadas cartesianas podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (\text{F.1})$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (e + P)u \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ (e + P)v \end{bmatrix} \quad (\text{F.2})$$

e a pressão é dada por

$$P = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right] \quad (\text{F.3})$$

De maneira similar, considerando a transformação para coordenadas generalizadas dadas por:

$$\xi = \xi(x, y) \quad (\text{F.4})$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (\text{F.5})$$

a equação de Euler passa a ser escrita como

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{F.6})$$

onde

$$\tilde{Q} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} = \frac{Q}{J} \quad (\text{F.7})$$

$$\tilde{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho (\xi_x u + \xi_y v) \\ \rho u (\xi_x u + \xi_y v) + \xi_x P \\ \rho v (\xi_x u + \xi_y v) + \xi_y P \\ (e + P) (\xi_x u + \xi_y v) \end{bmatrix} = \frac{1}{J} (\xi_x F + \xi_y G) \quad (\text{F.8})$$

$$\tilde{G} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho (\eta_x u + \eta_y v) \\ \rho u (\eta_x u + \eta_y v) + \eta_x P \\ \rho v (\eta_x u + \eta_y v) + \eta_y P \\ (e + P) (\eta_x u + \eta_y v) \end{bmatrix} = \frac{1}{J} (\eta_x F + \eta_y G) \quad (\text{F.9})$$

As matrizes jacobianas em coordenadas cartesianas são obtidas à partir de:

$$F = \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{F.10})$$

$$G = \frac{\partial G}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (\text{F.11})$$

onde

$$A = \frac{\partial F}{\partial Q} \quad (\text{F.12})$$

$$B = \frac{\partial G}{\partial Q} \quad (\text{F.13})$$

são as matrizes jacobianas em coordenadas cartesianas.

De maneira análoga, as matrizes jacobianas em coordenadas generalizadas são dadas por:

$$\tilde{F} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \xi} \quad (\text{F.14})$$

$$\tilde{G} = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \quad (\text{F.15})$$

onde

$$\tilde{A} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q} \quad (\text{F.16})$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{\partial}{\partial Q} (J^{-1} (\xi_x F + \xi_y G)) \\ &= \frac{1}{J} \left( \xi_x \frac{\partial F}{\partial Q} + \xi_y \frac{\partial G}{\partial Q} \right) \\ &= \frac{1}{J} (\xi_x A + \xi_y B) \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

$$\tilde{B} = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial Q} \quad (\text{F.18})$$

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \frac{\partial}{\partial Q} (J^{-1} (\eta_x F + \eta_y G)) \\ &= \frac{1}{J} \left( \eta_x \frac{\partial F}{\partial Q} + \eta_y \frac{\partial G}{\partial Q} \right) \\ &= \frac{1}{J} (\eta_x A + \eta_y B) \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

Desta maneira, é necessário calcular as matrizes jacobianas em coordenadas cartesianas A e B para se determinar as matrizes jacobianas em coordenadas generalizadas  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$ .

As matrizes jacobianas A e B são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} & \frac{\partial F_1}{\partial Q_3} & \frac{\partial F_1}{\partial Q_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial Q_1} & \frac{\partial F_2}{\partial Q_2} & \frac{\partial F_2}{\partial Q_3} & \frac{\partial F_2}{\partial Q_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial Q_1} & \frac{\partial F_3}{\partial Q_2} & \frac{\partial F_3}{\partial Q_3} & \frac{\partial F_3}{\partial Q_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial Q_1} & \frac{\partial F_4}{\partial Q_2} & \frac{\partial F_4}{\partial Q_3} & \frac{\partial F_4}{\partial Q_4} \end{bmatrix} \quad (\text{F.20})$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial G_1}{\partial Q_2} & \frac{\partial G_1}{\partial Q_3} & \frac{\partial G_1}{\partial Q_4} \\ \frac{\partial G_2}{\partial Q_1} & \frac{\partial G_2}{\partial Q_2} & \frac{\partial G_2}{\partial Q_3} & \frac{\partial G_2}{\partial Q_4} \\ \frac{\partial G_3}{\partial Q_1} & \frac{\partial G_3}{\partial Q_2} & \frac{\partial G_3}{\partial Q_3} & \frac{\partial G_3}{\partial Q_4} \\ \frac{\partial G_4}{\partial Q_1} & \frac{\partial G_4}{\partial Q_2} & \frac{\partial G_4}{\partial Q_3} & \frac{\partial G_4}{\partial Q_4} \end{bmatrix} \quad (\text{F.21})$$

Reescrevendo as matrizes  $Q$ ,  $F$  e  $G$  como

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix} \quad (\text{F.22})$$

pode-se reescrever os termos das matrizes  $F$  e  $G$  em relação a  $Q_1$ ,

Desta maneira, têm-se:

$$F_1 = Q_2$$

$$F_2 = \frac{Q_2^2}{Q_1} + (\gamma - 1) \left[ Q_4 - \frac{1}{2} \left( \frac{Q_2^2}{Q_1} + \frac{Q_3^2}{Q_1} \right) \right]$$

$$F_3 = \frac{Q_2 Q_3}{Q_1}$$

$$F_4 = \frac{Q_2 Q_4}{Q_1} + (\gamma - 1) \left( \frac{Q_2 Q_4}{Q_1} - \frac{1}{2} \left[ \frac{Q_2^3}{Q_1^2} + \frac{Q_2 Q_3^2}{Q_1} \right] \right)$$

$$G_1 = Q_3$$

$$G_2 = \frac{Q_2 Q_3}{Q_1}$$

$$G_3 = \frac{Q_3^2}{Q_1} + (\gamma - 1) \left[ Q_4 - \frac{1}{2} \left( \frac{Q_2^2}{Q_1} + \frac{Q_3^2}{Q_1} \right) \right]$$

$$G_4 = \frac{Q_3 Q_4}{Q_1} + (\gamma - 1) \left( \frac{Q_3 Q_4}{Q_1} - \frac{1}{2} \left[ \frac{Q_2^2 Q_3}{Q_1} + \frac{Q_3^3}{Q_1} \right] \right)$$

Sendo assim, as matrizes  $F$  e  $G$  são dadas por

$$F = \begin{bmatrix} Q_2 \\ \frac{Q_2^2}{Q_1} + (\gamma - 1) \left[ Q_4 - \frac{1}{2} \left( \frac{Q_2^2}{Q_1} + \frac{Q_3^2}{Q_1} \right) \right] \\ \frac{Q_2 Q_3}{Q_1} \\ \frac{Q_2 Q_4}{Q_1} + (\gamma - 1) \left( \frac{Q_2 Q_4}{Q_1} - \frac{1}{2} \left[ \frac{Q_2^3}{Q_1} + \frac{Q_2 Q_3^2}{Q_1} \right] \right) \end{bmatrix} \quad (\text{F.23})$$

$$G = \begin{bmatrix} Q_3 \\ \frac{Q_2 Q_3}{Q_1} \\ \frac{Q_3^2}{Q_1} + (\gamma - 1) \left[ Q_4 - \frac{1}{2} \left( \frac{Q_2^2}{Q_1} + \frac{Q_3^2}{Q_1} \right) \right] \\ \frac{Q_3 Q_4}{Q_1} + (\gamma - 1) \left( \frac{Q_3 Q_4}{Q_1} - \frac{1}{2} \left[ \frac{Q_2^2 Q_3}{Q_1} + \frac{Q_3^3}{Q_1} \right] \right) \end{bmatrix} \quad (\text{F.24})$$

agora derivando-se os termos da matriz F com relação aos termos da matriz Q, têm-se:

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q_1} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q_2} = 1$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q_3} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q_4} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial Q_1} = \frac{(\gamma - 1)}{2} \left( \frac{Q_2^2}{Q_1} + \frac{Q_3^2}{Q_1} \right) - \frac{Q_2^2}{Q_1} = \frac{(\gamma - 1)}{2} (u^2 + v^2) - u^2$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial Q_2} = \frac{2Q_2}{Q_1} - (\gamma - 1) \frac{Q_2}{Q_1} = u(3 - \gamma)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial Q_3} = -\frac{Q_3}{Q_1} (\gamma - 1) = -v(\gamma - 1)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial Q_4} = \gamma - 1$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial Q_1} = -\frac{Q_2 Q_3}{Q_1^2} = -uv$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial Q_2} = \frac{Q_3}{Q_1} = v$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial Q_3} = \frac{Q_2}{Q_1} = u$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial Q_4} = 0$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial Q_1} = (\gamma - 1) \left( \frac{Q_2^3}{Q_1^3} + \frac{Q_2 Q_3^2}{Q_1^3} - \frac{Q_2 Q_4}{Q_1^2} \right) - \frac{Q_2 Q_4}{Q_1^2} = (\gamma - 1) \left( u^3 + uv^2 - \frac{ue}{\rho} \right) - \frac{ue}{\rho}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial Q_2} = \frac{Q_4}{Q_1} - (\gamma - 1) \left( \frac{3Q_2^2}{2Q_1^2} - \frac{Q_4}{Q_1} + \frac{Q_3^2}{2Q_1^2} \right) = \frac{e}{\rho} - (\gamma - 1) \left( \frac{3}{2}u^2 - \frac{e}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right)$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial Q_3} = -(\gamma - 1) \frac{Q_2 Q_3}{Q_1^2} = -(\gamma - 1) uv$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial Q_4} = \frac{Q_2}{Q_1} + \frac{Q_2}{Q_1} (\gamma - 1) = u\gamma$$

Da mesma maneira, derivando-se os termos da matriz F com relação aos termos da matriz Q, têm-se:

$$\frac{\partial G_1}{\partial Q_1} = 0$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial Q_2} = 0$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial Q_3} = 1$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial Q_4} = 0$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial Q_1} = -\frac{Q_2 Q_3}{Q_1^2} = -uv$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial Q_2} = \frac{Q_3}{Q_1} = v$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial Q_3} = \frac{Q_2}{Q_1} = u$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial Q_4} = 0$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial Q_1} = \frac{(\gamma - 1)}{2} \left( \frac{Q_2^2}{Q_1^2} + \frac{Q_3^2}{Q_1^2} \right) - \frac{Q_3^2}{Q_1^2} = \frac{(\gamma - 1)}{2} (u^2 + v^2) - v^2$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial Q_2} = -\frac{Q_2}{Q_1} (\gamma - 1) = -u (\gamma - 1)$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial Q_3} = \frac{2Q_3}{Q_1} - \frac{Q_3}{Q_1} (\gamma - 1) = v (3 - \gamma)$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial Q_4} = (\gamma - 1)$$

$$\frac{\partial G_4}{\partial Q_1} = (\gamma - 1) \left( \frac{Q_3^3}{Q_1^3} + \frac{Q_2^2 Q_3}{Q_1^3} - \frac{Q_3 Q_4}{Q_1^2} \right) - \frac{Q_3 Q_4}{Q_1^2} = (\gamma - 1) \left( v^3 + u^2 v - \frac{ve}{\rho} \right) - \frac{ve}{\rho}$$

$$\frac{\partial G_4}{\partial Q_2} = -\frac{Q_2 Q_3}{Q_1^2} (\gamma - 1) = -uv (\gamma - 1)$$

$$\frac{\partial G_4}{\partial Q_3} = \frac{Q_4}{Q_1} - (\gamma - 1) \left( \frac{Q_2^2}{2Q_1^2} - \frac{Q_4}{Q_1} + \frac{3}{2} \frac{Q_3^2}{Q_1^2} \right) = \frac{e}{\rho} - (\gamma - 1) \left( \frac{u^2}{2} - \frac{e}{\rho} + \frac{3}{2} v^2 \right)$$

$$\frac{\partial G_4}{\partial Q_4} = \frac{Q_3}{Q_1} + \frac{Q_3}{Q_1} (\gamma - 1) = v\gamma$$

Sabendo que

$$P = \rho \varepsilon (\gamma - 1) \quad (\text{F.25})$$

$$e = \rho \left[ \varepsilon + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right] \quad (\text{F.26})$$

$$a^2 = \gamma \frac{P}{\rho} \quad (\text{F.27})$$

Rearranjando as eqs. (??) e (??), têm-se

$$\frac{P}{\rho} = \varepsilon (\gamma - 1) \quad (\text{F.28})$$

$$\varepsilon = \frac{e}{\rho} - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad (\text{F.29})$$

e substituindo a Eq. (??) na Eq. (??), têm-se

$$\frac{P}{\rho} = \left[ \frac{e}{\rho} - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right] (\gamma - 1) \quad (\text{F.30})$$

e substituindo a Eq. (??) na Eq. (??), têm-se

$$e = \rho \left[ \frac{a^2}{\gamma (\gamma - 1)} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right] \quad (\text{F.31})$$

sendo esta equação utilizada para facilitar o cálculo dos autovalores.

Desta maneira, os termos da matriz jacobiana que possuem a variável energia, deverão ser reescritos considerando-se a Eq. (??). Sendo assim, têm-se:

$$\frac{\partial F_4}{\partial Q_1} = \gamma \left( \frac{u^3}{2} + \frac{uv^2}{2} \right) - uv^2 - u^3 - \frac{a^2 u}{\gamma - 1}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial Q_2} = \frac{a^2}{\gamma - 1} - \gamma u^2 + \frac{3u^2}{2} + \frac{v^2}{2}$$

$$\frac{\partial G_4}{\partial Q_1} = (\gamma - 1) \left( u^2 v - v \left( \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma (\gamma - 1)} \right) + v^3 \right) - v \left( \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma (\gamma - 1)} \right)$$

$$\frac{\partial G_4}{\partial Q_3} = \frac{u^2}{2} - \left( v^2 - \frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} \right) (\gamma-1) + \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)}$$

Assim, as matrizes A e B são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(\gamma-1)}{2} (u^2 + v^2) - u^2 & u(3-\gamma) & -v(\gamma-1) & \gamma-1 \\ -uv & v & u & 0 \\ \gamma \left( \frac{u^3}{2} + \frac{uv^2}{2} \right) - uv^2 - u^3 - \frac{a^2 u}{\gamma-1} & \frac{a^2}{\gamma-1} - \gamma u^2 + \frac{3u^2}{2} + \frac{v^2}{2} & -(\gamma-1)uv & u\gamma \end{bmatrix} \quad (\text{F.32})$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -uv & v \\ \frac{(\gamma-1)}{2} (u^2 + v^2) - v^2 & -u(\gamma-1) \\ (\gamma-1) \left( u^2 v - v \left( \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} \right) + v^3 \right) - v \left( \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} \right) & -uv(\gamma-1) \\ 1 & 0 \\ u & 0 \\ v(3-\gamma) & \gamma-1 \\ \frac{u^2}{2} - \left( v^2 - \frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} \right) (\gamma-1) + \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} & v\gamma \end{bmatrix} \quad (\text{F.33})$$

Desta maneira, utilizando as eqs. (??) e (??), têm-se

$$\tilde{A} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & \xi_x \\ \xi_x \left( \frac{1}{2} (u^2 + v^2) (\gamma-1) - u^2 \right) - \xi_y uv & \xi_y v - \xi_x u (\gamma-3) \\ \xi_y \left( \frac{1}{2} (u^2 + v^2) (\gamma-1) - v^2 \right) - \xi_x uv & \xi_x v - \xi_y u (\gamma-1) \\ \frac{(\xi_x u + \xi_y v)(-2a^2 + (u^2 + v^2)(\gamma-1)(\gamma-2))}{2(\gamma-1)} & \xi_x \left( \frac{a^2}{(\gamma-1)} - \gamma u^2 + \frac{3u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) - \xi_y uv (\gamma-1) \\ \xi_y & 0 \\ \xi_y u - \xi_x v (\gamma-1) & \xi_x (\gamma-1) \\ \xi_x u - \xi_y v (\gamma-3) & \xi_y (\gamma-1) \\ \frac{\xi_y u^2}{2} - \gamma (\xi_y v^2 + \xi_x uv) + \frac{3}{2} \xi_y v^2 + \frac{a^2 \xi_y}{\gamma-1} + \xi_x uv & \gamma (\xi_x u + \xi_y v) \end{bmatrix} \quad (\text{F.34})$$

$$\tilde{B} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & \eta_x & & & & \\ \eta_x \left( \frac{1}{2} (u^2 + v^2) (\gamma - 1) - u^2 \right) - \eta_y uv & \eta_y v - \eta_x u (\gamma - 3) & & & & \\ \eta_y \left( \frac{1}{2} (u^2 + v^2) (\gamma - 1) - v^2 \right) - \eta_x uv & \eta_x v - \eta_y u (\gamma - 1) & & & & \\ \frac{(\eta_x u + \eta_y v)(-2a^2 + (u^2 + v^2)(\gamma - 1)(\gamma - 2))}{2(\gamma - 1)} & \eta_x \left( \frac{a^2}{(\gamma - 1)} - \gamma u^2 + \frac{3u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) - \eta_y uv (\gamma - 1) & & & & \\ & \eta_y & 0 & & & \\ & \eta_y u - \eta_x v (\gamma - 1) & \eta_x (\gamma - 1) & & & \\ & \eta_x u - \eta_y v (\gamma - 3) & \eta_y (\gamma - 1) & & & \\ \frac{\eta_y u^2}{2} - \gamma (\eta_y v^2 + \eta_x uv) + \frac{3}{2} \eta_y v^2 + \frac{a^2 \eta_y}{\gamma - 1} + \eta_x uv & \gamma (\eta_x u + \eta_y v) & & & & \end{bmatrix} \quad (\text{F.35})$$

Desta maneira, utilizando o Matlab<sup>®</sup>, [?], podemos calcular os autovalores de  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$

$$\left( \tilde{A}^1, \tilde{A}^2, \tilde{A}^3, \tilde{A}^4 \right) = \begin{pmatrix} \xi_x u + \xi_y v \\ \xi_x u + \xi_y v \\ \xi_x u + \xi_y v + a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \\ \xi_x u + \xi_y v - a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \end{pmatrix} \quad (\text{F.36})$$

$$\left( \tilde{B}^1, \tilde{B}^2, \tilde{B}^3, \tilde{B}^4 \right) = \begin{pmatrix} \eta_x u + \eta_y v \\ \eta_x u + \eta_y v \\ \eta_x u + \eta_y v + a \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \\ \eta_x u + \eta_y v - a \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \end{pmatrix} \quad (\text{F.37})$$

e considerando,

$$\tilde{U} = \xi_x u + \xi_y v \quad (\text{F.38})$$

$$\tilde{V} = \eta_x u + \eta_y v \quad (\text{F.39})$$

têm-se

$$\left(\tilde{A}^1, \tilde{A}^2, \tilde{A}^3, \tilde{A}^4\right) = \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U} \\ \tilde{U} + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \\ \tilde{U} - a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \end{pmatrix} \quad (\text{F.40})$$

$$\left(\tilde{B}^1, \tilde{B}^2, \tilde{B}^3, \tilde{B}^4\right) = \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{V} \\ \tilde{V} + a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \\ \tilde{V} - a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \end{pmatrix} \quad (\text{F.41})$$

## APÊNDICE G - Demonstração da Abordagem do Pseudo Volume Finito

Considerando as equações de Euler em coordenadas generalizadas dadas por

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{G.1})$$

onde

$$\hat{Q} = \frac{Q}{J} \quad (\text{G.2})$$

$$\hat{F} = \frac{(\xi_x F + \xi_y F)}{J} \quad (\text{G.3})$$

$$\hat{G} = \frac{(\eta_x F + \eta_y F)}{J} \quad (\text{G.4})$$

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \quad (\text{G.5})$$

e sendo

$$A = \frac{\partial F}{\partial Q} \quad (\text{G.6})$$

$$B = \frac{\partial G}{\partial Q} \quad (\text{G.7})$$

têm-se

$$\hat{A} = \xi_x A + \xi_y B \quad (\text{G.8})$$

$$\hat{B} = \eta_x A + \eta_y B \quad (\text{G.9})$$

Sendo assim, a Eq. (??) pode ser escrita na forma de um esquema TVD implícito, conforme mostrado a seguir

$$\hat{Q}_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} [\tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}] + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} [\tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}] = \hat{Q}_{i,j}^n \quad (\text{G.10})$$

Deste ponto em diante, o símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  será suprimido e deve-se lembrar que todos os termos estão representados em coordenadas generalizadas.

As funções de fluxo numérico são dadas por

$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ F_{i,j}^{n+1} + F_{i+1,j}^{n+1} + \frac{\left( RA_{i+\frac{1}{2},j}^l \Phi A_{i+\frac{1}{2},j}^l \right)^{n+1}}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \right] \quad (\text{G.11})$$

$$\tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ F_{i-1,j}^{n+1} + F_{i,j}^{n+1} + \frac{\left( RA_{i-\frac{1}{2},j}^l \Phi A_{i-\frac{1}{2},j}^l \right)^{n+1}}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \right] \quad (\text{G.12})$$

$$\tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ G_{i,j+1}^{n+1} + G_{i,j}^{n+1} + \frac{\left( RB_{i,j+\frac{1}{2}}^l \Phi B_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right)^{n+1}}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} \right] \quad (\text{G.13})$$

$$\tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ G_{i,j}^{n+1} + G_{i,j-1}^{n+1} + \frac{\left( RB_{i,j-\frac{1}{2}}^l \Phi B_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right)^{n+1}}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right] \quad (\text{G.14})$$

onde

$$J_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} [J_{i+1,j} + J_{i,j}] \quad (\text{G.15})$$

e sabendo que os limitadores de fluxo  $\Phi A$  e  $\Phi B$  são vetores com quatro componentes, isto é,

$$\Phi A = \begin{bmatrix} \phi a^1 & \phi a^2 & \phi a^3 & \phi a^4 \end{bmatrix}^T \quad e \quad \Phi B = \begin{bmatrix} \phi b^1 & \phi b^2 & \phi b^3 & \phi b^4 \end{bmatrix}^T$$

Os elementos de  $\Phi A$  são denotados por  $\phi a^l$ , sendo  $l = 1, \dots, m$ ; onde para o caso 2D,

$m = 4$ . Assim escreve-se:

$$\phi a_{i+\frac{1}{2},j}^l = \sum_{l=1}^m \left[ \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) (ga_{i,j}^l + ga_{i+1,j}^l) - \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2},j}^l + \gamma a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) \alpha a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right] \quad (\text{G.16})$$

$$\phi a_{i-\frac{1}{2},j}^l = \sum_{l=1}^m \left[ \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right) (ga_{i-1,j}^l + ga_{i,j}^l) - \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2},j}^l + \gamma a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right) \alpha a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right] \quad (\text{G.17})$$

e de maneira análoga, os elementos de  $\phi b^l$  são dados por

$$\phi b_{i,j+\frac{1}{2}}^l = \sum_{l=1}^m \left[ \frac{1}{2} \Psi \left( b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right) (gb_{i,j}^l + gb_{i,j+1}^l) - \Psi \left( b_{i,j+\frac{1}{2}}^l + \gamma b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right) \alpha b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right] \quad (\text{G.18})$$

$$\phi b_{i,j-\frac{1}{2}}^l = \sum_{l=1}^m \left[ \frac{1}{2} \Psi \left( b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right) (gb_{i,j-1}^l + gb_{i,j}^l) - \Psi \left( b_{i,j-\frac{1}{2}}^l + \gamma b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right) \alpha b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right] \quad (\text{G.19})$$

Sendo  $\alpha a$  e  $\alpha b$  dado por

$$\alpha a_{i+\frac{1}{2},j}^l = RA_{i+\frac{1}{2},j}^{-1} \Delta_{i+\frac{1}{2},j} Q \quad (\text{G.20})$$

$$\alpha a_{i-\frac{1}{2},j}^l = RA_{i-\frac{1}{2},j}^{-1} \Delta_{i-\frac{1}{2},j} Q \quad (\text{G.21})$$

$$\alpha b_{i,j+\frac{1}{2}}^l = RB_{i,j+\frac{1}{2}}^{-1} \Delta_{i,j+\frac{1}{2}} Q \quad (\text{G.22})$$

$$\alpha b_{i,j-\frac{1}{2}}^l = RB_{i,j-\frac{1}{2}}^{-1} \Delta_{i,j-\frac{1}{2}} Q \quad (\text{G.23})$$

onde

$$\Delta_{i+\frac{1}{2},j} Q = Q_{i+1,j} - Q_{i,j} \quad (\text{G.24})$$

$$\Delta_{i-\frac{1}{2},j}Q = Q_{i,j} - Q_{i-1,j} \quad (\text{G.25})$$

$$\Delta_{i,j+\frac{1}{2}}Q = Q_{i,j+1} - Q_{i,j} \quad (\text{G.26})$$

$$\Delta_{i,j-\frac{1}{2}}Q = Q_{i,j} - Q_{i,j-1} \quad (\text{G.27})$$

Usando série de Taylor para realizar a linearização no tempo, têm-se

$$F_{i,j}^{n+1} = F_{i,j}^n + \frac{\partial F}{\partial Q} \Delta Q \quad (\text{G.28})$$

$$G_{i,j}^{m+1} = G_{i,j}^m + \frac{\partial G}{\partial Q} \Delta Q \quad (\text{G.29})$$

desta maneira,

$$F_{i,j}^{n+1} = F_{i,j}^n + A_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) \quad (\text{G.30})$$

$$F_{i+1,j}^{n+1} = F_{i+1,j}^n + A_{i+1,j} (Q_{i+1,j}^{n+1} - Q_{i+1,j}^n) \quad (\text{G.31})$$

$$F_{i-1,j}^{n+1} = F_{i-1,j}^n + A_{i-1,j} (Q_{i-1,j}^{n+1} - Q_{i-1,j}^n) \quad (\text{G.32})$$

$$G_{i,j}^{m+1} = G_{i,j}^m + B_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) \quad (\text{G.33})$$

$$G_{i,j+1}^{m+1} = G_{i,j+1}^m + B_{i,j+1} (Q_{i,j+1}^{n+1} - Q_{i,j+1}^n) \quad (\text{G.34})$$

$$G_{i,j-1}^{m+1} = G_{i,j-1}^m + B_{i,j-1} (Q_{i,j-1}^{n+1} - Q_{i,j-1}^n) \quad (\text{G.35})$$

Substituindo as Eqs. (??), (??), (??) e (??), na Eq. (??) e omitindo o sinal ^ à partir deste ponto, têm-se

$$\begin{aligned}
 F_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \frac{1}{2} & \left( F_{i,j}^n + A_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) + F_{i+1,j}^n + A_{i+1,j} (Q_{i+1,j}^{n+1} - Q_{i+1,j}^n) \right. \\
 & + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ RA_{i+\frac{1}{2},j}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) (ga_{i+1,j}^l + ga_{i,j}^l) \right]^{n+1}}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \\
 & \left. - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ RA_{i+\frac{1}{2},j}^l \cdot \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2},j}^l + \gamma a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) \cdot RA_{i+\frac{1}{2},j}^{-1l} \Delta_{i+\frac{1}{2},j} Q \right]^{n+1}}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \right) \quad (G.36)
 \end{aligned}$$

e de modo análogo para as eqs. (??), (??) e (??)

$$\begin{aligned}
 F_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} = \frac{1}{2} & \left( F_{i-1,j}^n + A_{i-1,j} (Q_{i-1,j}^{n+1} - Q_{i-1,j}^n) + F_{i,j}^n + A_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) \right. \\
 & + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ RA_{i-\frac{1}{2},j}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right) (ga_{i-1,j}^l + ga_{i,j}^l) \right]^{n+1}}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \\
 & \left. - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ RA_{i-\frac{1}{2},j}^l \cdot \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2},j}^l + \gamma a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right) \cdot RA_{i-\frac{1}{2},j}^{-1l} \Delta_{i-\frac{1}{2},j} Q \right]^{n+1}}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \right) \quad (G.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2} & \left( G_{i,j+1}^n + B_{i,j+1} (Q_{i,j+1}^{n+1} - Q_{i,j+1}^n) + G_{i,j}^n + B_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) \right. \\
 & + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ RB_{i,j+\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right) (gb_{i,j+1}^l + gb_{i,j}^l) \right]^{n+1}}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} \\
 & \left. - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ RB_{i,j+\frac{1}{2}}^l \cdot \Psi \left( b_{i,j+\frac{1}{2}}^l + \gamma b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right) \cdot RB_{i,j+\frac{1}{2}}^{-1l} \Delta_{i,j+\frac{1}{2}} Q \right]^{n+1}}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) \quad (G.38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{i,j-\frac{1}{2}}^{m+1} = \frac{1}{2} & \left( G_{i,j}^n + B_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) + G_{i,j-1}^n + B_{i,j-1} (Q_{i,j-1}^{n+1} - Q_{i,j-1}^n) \right. \\
 & + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ RB_{i,j-\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right) (gb_{i,j-1}^l + gb_{i,j}^l) \right]^{n+1}}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \quad (G.39) \\
 & \left. - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ RB_{i,j-\frac{1}{2}}^l \cdot \Psi \left( b_{i,j-\frac{1}{2}}^l + \gamma b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right) \cdot RB_{i,j-\frac{1}{2}}^{-1l} \Delta_{i,j-\frac{1}{2}} Q \right]^{n+1}}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right)
 \end{aligned}$$

Sendo,

$$\Omega a_{i+\frac{1}{2},j} = RA_{i+\frac{1}{2},j}^l \cdot \text{diag} \left[ \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2},j}^l + \gamma a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) \right] \cdot RA_{i+\frac{1}{2},j}^{-1l} \quad (G.40)$$

$$\Omega a_{i-\frac{1}{2},j} = RA_{i-\frac{1}{2},j}^l \cdot \text{diag} \left[ \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2},j}^l + \gamma a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right) \right] \cdot RA_{i-\frac{1}{2},j}^{-1l} \quad (G.41)$$

$$\Omega b_{i,j+\frac{1}{2}} = RB_{i,j+\frac{1}{2}}^l \cdot \text{diag} \left[ \Psi \left( b_{i,j+\frac{1}{2}}^l + \gamma b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right) \right] \cdot RB_{i,j+\frac{1}{2}}^{-1l} \quad (G.42)$$

$$\Omega b_{i,j-\frac{1}{2}} = RB_{i,j-\frac{1}{2}}^l \cdot \text{diag} \left[ \Psi \left( b_{i,j-\frac{1}{2}}^l + \gamma b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right) \right] \cdot RB_{i,j-\frac{1}{2}}^{-1l} \quad (G.43)$$

Desta maneira, substituindo as Eqs. (??), (??), (??), (??), (??), (??), (??), (??) na Eq. (??), resulta em

$$\begin{aligned}
 & Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n \\
 & + \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left[ F_{i,j}^n + A_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) + F_{i+1,j}^n + A_{i+1,j} (Q_{i+1,j}^{n+1} - Q_{i+1,j}^n) \right. \\
 & + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ R A_{i+\frac{1}{2},j}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) (g a_{i+1,j}^l + g a_{i,j}^l) \right]^{n+1}}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \\
 & - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right]^{n+1} \Delta_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} Q}{J_{i+\frac{1}{2},j}} - F_{i-1,j}^n \\
 & - A_{i-1,j} (Q_{i-1,j}^{n+1} - Q_{i-1,j}^n) - F_{i,j}^n - A_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) \\
 & - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ R A_{i-\frac{1}{2},j}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right) (g a_{i-1,j}^l + g a_{i,j}^l) \right]^{n+1}}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \\
 & \left. + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right]^{n+1} \Delta_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} Q}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \right] \\
 & + \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left[ G_{i,j+1}^n + B_{i,j+1} (Q_{i,j+1}^{n+1} - Q_{i,j+1}^n) + G_{i,j}^n + B_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) \right. \\
 & + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ R B_{i,j+\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right) (g b_{i,j+1}^l + g b_{i,j}^l) \right]^{n+1}}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} \\
 & - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right]^{n+1} \Delta_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} Q}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} - G_{i,j}^n \\
 & - B_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) - G_{i,j-1}^n - B_{i,j-1} (Q_{i,j-1}^{n+1} - Q_{i,j-1}^n) \\
 & - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ R B_{i,j-\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right) (g b_{i,j-1}^l + g b_{i,j}^l) \right]^{n+1}}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \\
 & \left. + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right]^{n+1} \Delta_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} Q}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{G.44}$$

Utilizando o mesmo procedimento para o balanceamento dos lados esquerdo e direito do sistema de equações e realizando a linearização local, conforme foi feito no caso quasi 1D, têm-se

$$\begin{aligned}
 & Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left[ A_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) + A_{i+1,j} (Q_{i+1,j}^{n+1} - Q_{i+1,j}^n) \right. \\
 & - \frac{\sum_{l=1}^m [\Omega a_{i+\frac{1}{2},j}^l]^{n+1} \Delta_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} Q}{J_{i+\frac{1}{2},j}} - \frac{\sum_{l=1}^m [\Omega a_{i+\frac{1}{2},j}^l]^n \Delta_{i+\frac{1}{2},j}^n Q}{J_{i+\frac{1}{2},j}} + \frac{\sum_{l=1}^m [\Omega a_{i+\frac{1}{2},j}^l]^n \Delta_{i+\frac{1}{2},j}^n Q}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \\
 & - A_{i-1,j} (Q_{i-1,j}^{n+1} - Q_{i-1,j}^n) - A_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) + \frac{\sum_{l=1}^m [\Omega a_{i-\frac{1}{2},j}^l]^{n+1} \Delta_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} Q}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \\
 & \left. + \frac{\sum_{l=1}^m [\Omega a_{i-\frac{1}{2},j}^l]^n \Delta_{i-\frac{1}{2},j}^n Q}{J_{i-\frac{1}{2},j}} - \frac{\sum_{l=1}^m [\Omega a_{i-\frac{1}{2},j}^l]^n \Delta_{i-\frac{1}{2},j}^n Q}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \right] + \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left[ B_{i,j+1} (Q_{i,j+1}^{n+1} - Q_{i,j+1}^n) \right. \\
 & + B_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) - \frac{\sum_{l=1}^m [\Omega b_{i,j+\frac{1}{2}}^l]^{n+1} \Delta_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} Q}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} - \frac{\sum_{l=1}^m [\Omega b_{i,j+\frac{1}{2}}^l]^n \Delta_{i,j+\frac{1}{2}}^n Q}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} \\
 & + \frac{\sum_{l=1}^m [\Omega b_{i,j+\frac{1}{2}}^l]^n \Delta_{i,j+\frac{1}{2}}^n Q}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} - B_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) - B_{i,j-1} (Q_{i,j-1}^{n+1} - Q_{i,j-1}^n) \\
 & \left. + \frac{\sum_{l=1}^m [\Omega b_{i,j-\frac{1}{2}}^l]^{n+1} \Delta_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} Q}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} + \frac{\sum_{l=1}^m [\Omega b_{i,j-\frac{1}{2}}^l]^n \Delta_{i,j-\frac{1}{2}}^n Q}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} - \frac{\sum_{l=1}^m [\Omega b_{i,j-\frac{1}{2}}^l]^n \Delta_{i,j-\frac{1}{2}}^n Q}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right] = \\
 & - \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left[ F_{i,j}^n + F_{i+1,j}^n + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ R A_{i+\frac{1}{2},j}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) (g a_{i+1,j}^l + g a_{i,j}^l) \right]^{n+1}}{J_{i+\frac{1}{2},j}} - F_{i-1,j}^n \right. \\
 & \left. - F_{i,j}^n - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ R A_{i+\frac{1}{2},j}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) (g a_{i+1,j}^l + g a_{i,j}^l) \right]^{n+1}}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \right] \\
 & - \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left[ G_{i,j}^n + G_{i+1,j}^n + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ R B_{i,j+\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right) (g b_{i,j+1}^l + g b_{i,j}^l) \right]^{n+1}}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} - G_{i,j-1}^n \right. \\
 & \left. - G_{i,j}^n - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ R B_{i,j-\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right) (g b_{i,j-1}^l + g b_{i,j}^l) \right]^{n+1}}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right] \\
 & \tag{G.45}
 \end{aligned}$$

Dando prosseguimento na reorganização da Eq. (??), têm-se

$$\begin{aligned}
 & Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left[ A_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) + A_{i+1,j} (Q_{i+1,j}^{n+1} - Q_{i+1,j}^n) \right. \\
 & - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right] (Q_{i+1,j}^{n+1} - Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i+1,j}^n + Q_{i,j}^n)}{J_{i+\frac{1}{2},j}} - A_{i-1,j} (Q_{i-1,j}^{n+1} - Q_{i-1,j}^n) \\
 & \left. - A_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right] (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i-1,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n + Q_{i-1,j}^n)}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \right] \\
 & + \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left[ B_{i,j+1} (Q_{i,j+1}^{n+1} - Q_{i,j+1}^n) + B_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) \right. \\
 & - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right] (Q_{i,j+1}^{n+1} - Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j+1}^n + Q_{i,j}^n)}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} - B_{i,j} (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n) \\
 & \left. - B_{i,j-1} (Q_{i,j-1}^{n+1} - Q_{i,j-1}^n) + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right] (Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j-1}^{n+1} - Q_{i,j}^n + Q_{i,j-1}^n)}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right] = \\
 & - \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left[ F_{i,j}^n + F_{i+1,j}^n - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right] \Delta_{i+\frac{1}{2},j}^n Q}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \right. \\
 & + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ R A_{i+\frac{1}{2},j}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) (g a_{i+1,j}^l + g a_{i,j}^l) \right]^n}{J_{i+\frac{1}{2},j}} - F_{i-1,j}^n - F_{i,j}^n \\
 & + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right] \Delta_{i-\frac{1}{2},j}^n Q}{J_{i-\frac{1}{2},j}} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ R A_{i-\frac{1}{2},j}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right) (g a_{i,j}^l + g a_{i-1,j}^l) \right]^n}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \left. \right] \\
 & - \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left[ G_{i,j}^n + G_{i,j+1}^n - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right] \Delta_{i,j+\frac{1}{2}}^n Q}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} \right. \\
 & + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ R B_{i,j+\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right) (g b_{i,j+1}^l + g b_{i,j}^l) \right]^n}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} - G_{i,j}^n - G_{i,j-1}^n \\
 & + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right] \Delta_{i,j-\frac{1}{2}}^n Q}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ R B_{i,j-\frac{1}{2}}^l \cdot \frac{1}{2} \Psi \left( b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right) (g b_{i,j}^l + g b_{i,j-1}^l) \right]^n}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \left. \right] \\
 & \tag{G.46}
 \end{aligned}$$

Sendo

$$D_{i,j} = Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n \quad (\text{G.47})$$

$$D_{i-1,j} = Q_{i-1,j}^{n+1} - Q_{i-1,j}^n \quad (\text{G.48})$$

$$D_{i+1,j} = Q_{i+1,j}^{n+1} - Q_{i+1,j}^n \quad (\text{G.49})$$

$$D_{i,j-1} = Q_{i,j-1}^{n+1} - Q_{i,j-1}^n \quad (\text{G.50})$$

$$D_{i,j+1} = Q_{i,j+1}^{n+1} - Q_{i,j+1}^n \quad (\text{G.51})$$

Substituindo as Eqs. (??), (??), (??), (??), (??), (??), (??), (??), (??) na Eq. (??), obtêm-se

$$\begin{aligned} D_{i,j} + \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} & \left[ A_{i,j}D_{i,j} + A_{i+1,j}D_{i+1,j} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right] (D_{i+1,j} - D_{i,j})}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \right. \\ & \left. - A_{i-1,j}D_{i-1,j} - A_{i,j}D_{i,j} + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right] (D_{i,j} - D_{i-1,j})}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \right] \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left[ B_{i,j}D_{i,j} + B_{i,j+1}D_{i,j+1} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right] (D_{i,j+1} - D_{i,j})}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} - B_{i,j}D_{i,j} - B_{i,j-1}D_{i,j-1} \right. \\ & \left. + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right] (D_{i,j} - D_{i,j-1})}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right] = -\frac{\Delta t}{\Delta\xi} \left( \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta\eta} \left( \tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) \end{aligned} \quad (\text{G.52})$$

e continuando a reestruturação da Eq. (??), resulta

$$\begin{aligned} & \left[ I + \frac{\Delta t}{\Delta\xi} \left( H_{i+\frac{1}{2},j}^\xi - H_{i-\frac{1}{2},j}^\xi \right) + \frac{\Delta t}{\Delta\eta} \left( H_{i,j+\frac{1}{2}}^\eta - H_{i,j-\frac{1}{2}}^\eta \right) \right] \\ & = -\frac{\Delta t}{\Delta\xi} \left( \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta\eta} \left( \tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) \end{aligned} \quad (\text{G.53})$$

onde

$$H_{i+\frac{1}{2},j}^{\xi} D_{i,j} = \frac{1}{2} \left[ A_{i+1,j} D_{i+1,j} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right] \Delta_{i+\frac{1}{2},j} D}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \right] \quad (\text{G.54})$$

$$H_{i-\frac{1}{2},j}^{\xi} D_{i,j} = \frac{1}{2} \left[ A_{i-1,j} D_{i-1,j} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right] \Delta_{i-\frac{1}{2},j} D}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \right] \quad (\text{G.55})$$

$$H_{i,j+\frac{1}{2}}^{\eta} D_{i,j} = \frac{1}{2} \left[ B_{i,j+1} D_{i,j+1} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right] \Delta_{i,j+\frac{1}{2}} D}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} \right] \quad (\text{G.56})$$

$$H_{i,j-\frac{1}{2}}^{\eta} D_{i,j} = \frac{1}{2} \left[ B_{i,j-1} D_{i,j-1} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right] \Delta_{i,j-\frac{1}{2}} D}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right] \quad (\text{G.57})$$

## APÊNDICE H - Construção do Método de Fatoração LU

A construção da equação de acordo o método da fatoração LU segue o mesmo procedimento mostrado no apêndice G, portanto a demonstração será iniciada à partir da Eq. (??), que será renumerada neste apêndice.

$$\begin{aligned}
 D_{i,j} + \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left[ A_{i,j}D_{i,j} + A_{i+1,j}D_{i+1,j} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right] D_{i+1,j}}{J_{i+\frac{1}{2},j}} + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right] D_{i,j}}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \right. \\
 \left. - A_{i-1,j}D_{i-1,j} - A_{i,j}D_{i,j} + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right] D_{i,j}}{J_{i-\frac{1}{2},j}} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right] D_{i-1,j}}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \right] \\
 + \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left[ B_{i,j}D_{i,j} + B_{i,j+1}D_{i,j+1} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right] D_{i,j+1}}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right] D_{i,j}}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} \right. \\
 \left. - B_{i,j}D_{i,j} - B_{i,j-1}D_{i,j-1} + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right] D_{i,j}}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right] D_{i,j-1}}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right] = \\
 - \frac{\Delta t}{\Delta\xi} \left( \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta\eta} \left( \tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right)
 \end{aligned} \tag{H.1}$$

Fatorando a Eq. (??) em dois blocos triangulares, têm-se uma equação para a varredura inferior

$$\begin{aligned}
 \left[ I + \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left( A_{i,j} + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right]}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \right) + \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left( B_{i,j} + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right]}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right) \right] D_{i,j}^* \\
 = - \frac{\Delta t}{\Delta\xi} \left( \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta\eta} \left( \tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
 + \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left( A_{i-1,j} + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i-\frac{1}{2},j}^l \right]}{J_{i-\frac{1}{2},j}} \right) D_{i-1,j}^* + \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left( B_{i,j-1} + \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j-\frac{1}{2}}^l \right]}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \right) D_{i,j-1}^*
 \end{aligned} \tag{H.2}$$

e outra equação para a varredura superior

$$\begin{aligned}
 & \left[ I - \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left( A_{i,j} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right]}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left( B_{i,j} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right]}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) \right] D_{i,j} \\
 &= D_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left( A_{i+1,j} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right]}{J_{i+\frac{1}{2},j}} \right) D_{i+1,j} \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left( B_{i,j+1} - \frac{\sum_{l=1}^m \left[ \Omega b_{i,j+\frac{1}{2}}^l \right]}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) D_{i,j+1}
 \end{aligned} \tag{H.3}$$

## APÊNDICE I - Cálculo da Pressão na Superfície do Corpo

Considerando as componentes da equação do momento na direção x e y,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = 0 \quad (\text{I.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + P) = 0 \quad (\text{I.2})$$

Considerando que o fluxo de massa através de uma superfície é dado por,

$$\dot{m} = \rho \vec{V} \hat{n} \quad (\text{I.3})$$

e é igual a zero para uma superfície não-porosa. Detalhando os termos da Eqs. (??), onde

$$\hat{n} = \frac{\nabla \eta}{|\nabla \eta|} \quad \therefore \quad \hat{n} = \nabla \eta \quad (\text{I.4})$$

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} \quad (\text{I.5})$$

e aplicando a transformação de coordenadas dada pelas Eqs. (??) e (??), a Eq. (??) pode ser reescrita como,

$$\nabla \eta = \eta_x \hat{i} + \eta_y \hat{j} = J \left( -y_\xi \hat{i} + x_\xi \hat{j} \right) \quad (\text{I.6})$$

Substituindo as Eqs. (??) e (??) na Eq. (??), têm-se,

$$0 = \rho \left( u\hat{i} + v\hat{j} \right) \left[ J \left( -y_\xi \hat{i} + x_\xi \hat{j} \right) \right]$$

resultando em,

$$\rho v x_\xi - \rho u y_\xi = 0 \quad (\text{I.7})$$

Derivando a Eq. (??) no tempo, têm-se

$$x_\xi \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) - y_\xi \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) = 0 \quad (\text{I.8})$$

o sistema de coordenadas é constante com o tempo. Multiplicando a Eq. (??) por  $y_\xi$  e subtraindo o produto de  $x_\xi$  multiplicado pela Eq. (??), resulta em,

$$y_\xi \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + P) + y_\xi \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) - x_\xi \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) - x_\xi \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + P) = 0 \quad (\text{I.9})$$

que pode ser reescrita como,

$$y_\xi \left( \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - x_\xi \left( \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -y_\xi \frac{\partial P}{\partial x} + x_\xi \frac{\partial P}{\partial y} \quad (\text{I.10})$$

considerando as Eqs. (??) e (??), a Eq. (??) pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} y_\xi [\rho u (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta) + \rho v (\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta)] - x_\xi [\rho u (\xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta) + \rho v (\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta)] \\ = -y_\xi (\xi_x P_\xi + \eta_x P_\eta) + x_\xi (\xi_y P_\xi + \eta_y P_\eta) \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

e na seqüência, utilizando-se as métricas da transformação dadas pelas Eqs. (??), (??), (??) e (??) e a Eq. (??), na Eq.(??), obtêm-se a seguinte equação,

$$-\rho (u_\xi \eta_x + v_\xi \eta_y) (\xi_y v + \xi_x u) = (\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y) P_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) P_\eta \quad (\text{I.12})$$

e considerando a Eq. (??), a Eq. (??) é reescrita da seguinte forma,

$$-\rho U (u_\xi \eta_x + v_\xi \eta_y) = (\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y) P_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) P_\eta \quad (\text{I.13})$$

## APÊNDICE J - Geração de Malha no Sistema de Coordenadas Generalizadas

Considerando as equações geradoras,

$$\nabla^2 \xi = P(\xi, \eta) \quad (\text{J.1})$$

$$\nabla^2 \eta = Q(\xi, \eta) \quad (\text{J.2})$$

e sendo as equações que fazem a transformação do sistema de coordenadas cartesianas com o sistema de coordenadas generalizadas,

$$\xi = \xi(x, y) \quad (\text{J.3})$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (\text{J.4})$$

Para o cálculo das derivadas de primeira e segunda ordem de uma função genérica  $f$ , é utilizada a regra da cadeia, sendo assim, as derivadas de primeira ordem são dadas por,

$$f_x = f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x \quad (\text{J.5})$$

$$f_y = f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y \quad (\text{J.6})$$

e utiliza-se o seguinte procedimento para as derivadas de segunda ordem.

Derivando a eq.(?) novamente em relação a  $x$ , têm-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (\text{J.7})$$

e a eq.(??) pode ser dividida da seguinte maneira,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (\text{J.8})$$

e aplicando a regra da cadeia na eq.(??), têm-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (\text{J.9})$$

Considerando os seguintes termos,

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (\text{J.10})$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{J.11})$$

e aplicando o teorema de Schwarz [?], nas Eqs. (??) e (??), têm-se

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \xi \partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (\text{J.12})$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \eta \partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{J.13})$$

e sabendo que nos termos onde as variáveis independentes  $(\xi, \eta)$  são derivadas em relação a elas mesmas, o valor destes termos será igual a zero. Sendo assim, as Eqs. (??) e (??) poder ser reescritas da seguinte maneira,

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (\text{J.14})$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{J.15})$$

Substituindo as Eqs. (??) e (??) na eq.(??), têm-se,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (\text{J.16})$$

reorganizando a eq.(?) têm-se,

$$f_{xx} = f_{\xi}\xi_{xx} + f_{\eta}\eta_{xx} + \xi_x^2 f_{\xi\xi} + \eta_x^2 f_{\eta\eta} + 2\xi_x\eta_x f_{\xi\eta} \quad (\text{J.17})$$

e de maneira análoga obtêm-se,

$$f_{yy} = f_{\xi}\xi_{yy} + f_{\eta}\eta_{yy} + \xi_y^2 f_{\xi\xi} + \eta_y^2 f_{\eta\eta} + 2\xi_y\eta_y f_{\xi\eta} \quad (\text{J.18})$$

Nas Eqs. (??) e (??) deve-se substituir  $f$  por  $x$  e  $y$ , fazendo com que cada equação individualmente dê origem a um sistema de equações. Para a eq.(?) têm-se,

$$0 = x_{\xi}\xi_{xx} + x_{\eta}\eta_{xx} + E_1 \quad (\text{J.19})$$

$$0 = y_{\xi}\xi_{xx} + y_{\eta}\eta_{xx} + F_1 \quad (\text{J.20})$$

onde  $E_1$  e  $F_1$  são dados por,

$$E_1 = \xi_x^2 x_{\xi\xi} + \eta_x^2 x_{\eta\eta} + 2\xi_x\eta_x x_{\xi\eta} \quad (\text{J.21})$$

$$F_1 = \xi_x^2 y_{\xi\xi} + \eta_x^2 y_{\eta\eta} + 2\xi_x\eta_x y_{\xi\eta} \quad (\text{J.22})$$

na forma matricial as Eqs. (??) e (??) podem ser escritas como,

$$\begin{pmatrix} x_{\xi} & x_{\eta} \\ y_{\xi} & y_{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{xx} \\ \eta_{xx} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E_1 \\ F_1 \end{pmatrix} \quad (\text{J.23})$$

De forma análoga para a eq.(?), têm-se,

$$0 = x_{\xi}\xi_{yy} + x_{\eta}\eta_{yy} + E_2 \quad (\text{J.24})$$

$$0 = y_{\xi}\xi_{yy} + y_{\eta}\eta_{yy} + F_2 \quad (\text{J.25})$$

onde  $E_2$  e  $F_2$  são dados por,

$$E_2 = \xi_y^2 x_{\xi\xi} + \eta_y^2 x_{\eta\eta} + 2\xi_y \eta_y x_{\xi\eta} \quad (\text{J.26})$$

$$F_2 = \xi_y^2 y_{\xi\xi} + \eta_y^2 y_{\eta\eta} + 2\xi_y \eta_y y_{\xi\eta} \quad (\text{J.27})$$

na forma matricial as Eqs. (??) e (??) podem ser escritas como,

$$\begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{yy} \\ \eta_{yy} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E_2 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (\text{J.28})$$

Resolvendo os sistemas de equações dados pelas Eqs. (??) e (??), obtêm-se,

$$\xi_{xx} = - (E_1 \xi_x + F_1 \xi_y) \quad (\text{J.29})$$

$$\eta_{xx} = - (E_1 \eta_x + F_1 \eta_y) \quad (\text{J.30})$$

$$\xi_{yy} = - (E_2 \xi_x + F_2 \xi_y) \quad (\text{J.31})$$

$$\eta_{yy} = - (E_2 \eta_x + F_2 \eta_y) \quad (\text{J.32})$$

As Eqs. (??), (??), (??) e (??) devem ser substituídas nas Eqs. (??) e (??), desta maneira,

$$- (E_1 + E_2) \xi_x - (F_1 + F_2) \xi_y = P(\xi, \eta) \quad (\text{J.33})$$

$$- (E_1 + E_2) \eta_x - (F_1 + F_2) \eta_y = Q(\xi, \eta) \quad (\text{J.34})$$

e fazendo a seguinte consideração

$$E_1 + E_2 = E \quad (\text{J.35})$$

$$F_1 + F_2 = F \quad (\text{J.36})$$

e portanto, as Eqs. (??) e (??) poder ser escritas na forma de uma matriz,

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \quad (\text{J.37})$$

e resolvendo o sistema dado pela eq.(??), têm-se os seguintes valores para  $E$  e  $F$ ,

$$E = -\frac{P\eta_y - Q\xi_y}{J} \quad (\text{J.38})$$

$$F = \frac{P\eta_x - Q\xi_x}{J} \quad (\text{J.39})$$

Substituindo as Eqs. (??), (??) e (??) na eq.(??), obtêm-se,

$$\xi_x^2 x_{\xi\xi} + \eta_x^2 x_{\eta\eta} + 2\xi_x \eta_x x_{\xi\eta} + \xi_y^2 x_{\xi\xi} + \eta_y^2 x_{\eta\eta} + 2\xi_y \eta_y x_{\xi\eta} = -\frac{P\eta_y - Q\xi_y}{J} \quad (\text{J.40})$$

e de maneira análoga, substituindo as Eqs. (??), (??) e (??) na eq.(??), obtêm-se,

$$\xi_x^2 y_{\xi\xi} + \eta_x^2 y_{\eta\eta} + 2\xi_x \eta_x y_{\xi\eta} + \xi_y^2 y_{\xi\xi} + \eta_y^2 y_{\eta\eta} + 2\xi_y \eta_y y_{\xi\eta} = \frac{P\eta_x - Q\xi_x}{J} \quad (\text{J.41})$$

e considerando,

$$a = \xi_x^2 + \xi_y^2 \quad (\text{J.42})$$

$$b = \eta_x^2 + \eta_y^2 \quad (\text{J.43})$$

$$c = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \quad (\text{J.44})$$

as Eqs. (??) e J41 podem ser reescritas conforme mostrado abaixo,

$$ax_{\xi\xi} + bx_{\eta\eta} + 2cx_{\xi\eta} = -\frac{P\eta_y - Q\xi_y}{J} \quad (\text{J.45})$$

$$ay_{\xi\xi} + by_{\eta\eta} + 2cy_{\xi\eta} = \frac{P\eta_x - Q\xi_x}{J} \quad (\text{J.46})$$

aplicando as transformação de coordenadas dadas pelas Eqs. (??), (??), (??) e (??), nas Eqs. (??), (??), (??), (??) e (??), obtêm-se,

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + \left(\frac{1}{J^2}\right)(Px_\xi + Qx_\eta) = 0 \quad (\text{J.47})$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + \left(\frac{1}{J^2}\right)(Py_\xi + Qy_\eta) = 0 \quad (\text{J.48})$$

onde

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad (\text{J.49})$$

$$\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \quad (\text{J.50})$$

$$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \quad (\text{J.51})$$

Como não serão utilizados termos fontes na geração das malhas, os termos  $P$  e  $Q$  são iguais a zero, o que faz com que as Eqs. (??) e (??) assumam a seguinte forma,

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0 \quad (\text{J.52})$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0 \quad (\text{J.53})$$

Na seqüência, as Eqs. (??) e (??), serão discretizadas através do método das diferenças finitas, conforme mostrado em [?].

Considerando as Eqs. (??) e (??) com uma variável genérica  $\phi$  que representa as direções  $x$  e  $y$ , pode-se escrever,

$$\alpha\phi_{\xi\xi} - 2\beta\phi_{\xi\eta} + \gamma\phi_{\eta\eta} = 0 \quad (\text{J.54})$$

e aproximando os termos da Eq. (??) por diferenças finitas centradas de segunda ordem,

$$\phi_{\xi\xi} = \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{(\Delta\xi)^2} \quad (\text{J.55})$$

$$\phi_{\eta\eta} = \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta\eta)^2} \quad (\text{J.56})$$

$$\phi_{\xi\eta} = \frac{\phi_{i+1,j+1} + \phi_{i-1,j-1} - \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j+1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \quad (\text{J.57})$$

$$\alpha = \left( \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right)^2 + \left( \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right)^2 \quad (\text{J.58})$$

$$\gamma = \left( \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \right)^2 + \left( \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \right)^2 \quad (\text{J.59})$$

$$\beta = \left( \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \right) \left( \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right) + \left( \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \right) \left( \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right) \quad (\text{J.60})$$

sendo  $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ , e substituindo as Eqs. (??) a (??) na Eq. (??), resulta em,

$$x_{i,j} = \frac{\alpha (x_{i+1,j} + x_{i-1,j}) + \gamma (x_{i,j+1} + x_{i,j-1})}{2(\alpha + \gamma)} - \frac{\beta (x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j+1})}{4(\alpha + \gamma)} \quad (\text{J.61})$$

$$y_{i,j} = \frac{\alpha (y_{i+1,j} + y_{i-1,j}) + \gamma (y_{i,j+1} + y_{i,j-1})}{2(\alpha + \gamma)} - \frac{\beta (y_{i+1,j+1} + y_{i-1,j-1} - y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j+1})}{4(\alpha + \gamma)} \quad (\text{J.62})$$

Para que as Eqs. (??) e (??) que estão escritas na forma do método de Gauss-Seidel convirjam mais rapidamente, será utilizado o método da sobre-relaxação sucessiva (SOR), [?], o que fará com que as equações sejam reescritas da seguinte maneira.

$$x_{i,j} = (1 - \omega) x_{i,j} + \frac{\omega}{2(\alpha + \gamma)} \left[ \alpha (x_{i+1,j} + x_{i-1,j}) + \gamma (x_{i,j+1} + x_{i,j-1}) - \frac{\beta}{2} (x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j+1}) \right] \quad (\text{J.63})$$

$$y_{i,j} = (1 - \omega) y_{i,j} + \frac{\omega}{2(\alpha + \gamma)} \left[ \alpha (y_{i+1,j} + y_{i-1,j}) + \gamma (y_{i,j+1} + y_{i,j-1}) - \frac{\beta}{2} (y_{i+1,j+1} + y_{i-1,j-1} - y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j+1}) \right] \quad (\text{J.64})$$

# Referências

- [1] J. E. Tomayko, “Computers in the Spaceflight: The NASA Experience,” *NASA Contractor Report 182505*, 1988.
- [2] J. C. Hunt, “Lewis Fry Richardson and his Contributions to Mathematics, Meteorology and Models of Conflict,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 30, pp. xiii–xxxvi, 1998.
- [3] “Without These Women, “Man” Would Never Have Made it to the Moon.” <http://www.nationalgeographic.com.au/history/without-these-women-man-would-never-have-made-it-to-mars.aspx>. Acessado em 22/02/2017.
- [4] S. McBeath, *Competition Car Aerodynamics*. Haynes Publishing, 2006.
- [5] W. Stallings, *Computer Organization and Architecture: Designing for Performance*. Pearson Education, 9<sup>a</sup> ed., 2013.
- [6] A. de Oliveira Fortuna, *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*. Editora da Universidade de São Paulo, 2<sup>a</sup> ed., 2012.
- [7] L. C. de Castro Santos, “Métodos Numéricos para Escoamentos em Alta Velocidade,” in *22º Colóquio Brasileiro de Matemática*. IMPA, 1999.
- [8] R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [9] D. C. Lobão, *High Resolution Schemes Applied to the Euler Equations*. PhD thesis, University of Bristol, United Kingdom, 1992.
- [10] D. de Jesus Bezerra, “Métodos Numéricos para Leis de Conservação,” Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 2003.
- [11] D. Kröner, *Numerical Schemes for Conservation Laws*. John Wiley and Sons, 1997.
- [12] H. C. Yee, “Upwind and Symmetric Shock-Capturing Schemes,” *NASA Technical Memorandum 89464*, 1987.
- [13] C. Hirsch, *Numerical Computational of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, vol. 1. Butterworth-Heinemann, 2 ed., 2007.
- [14] F. M. White, *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, 4 ed., 2003.
- [15] R. J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser Basel, 1992.

- [16] E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer, 1999.
- [17] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, 2 ed., 1994.
- [18] F. Acker and F. Dickstein, *Uma Introdução à Análise Convexa*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.
- [19] H. C. Yee, R. F. Warming, and A. Harten, “Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady-State Calculations,” *Journal of Computational Physics*, no. 57, pp. 327–360, 1985.
- [20] J. D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill Education, 5 ed., 2010.
- [21] R. H. Pletcher, J. C. Tannehill, and D. Anderson, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. CRC Press, 3 ed., 2012.
- [22] J. D. Anderson, *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*. McGraw-Hill, 2 ed., 1995.
- [23] C. B. Laney, *Computational Gasdynamics*. Cambridge University Press, 1998.
- [24] H. W. Liepmann and A. Roshko, *Elements of Gasdynamics*. Dover Publications, 2001.
- [25] P. H. Oosthuizen and W. E. Carscallen, *Introduction to Compressible Fluid Flow*. CRC Press, 2 ed., 2013.
- [26] J. D. Anderson, *Modern Compressible Flow: With Historical Perspective*. McGraw-Hill, 2 ed., 1990.
- [27] P. J. Pritchard, *Fox and McDonald’s Introduction to Fluid Mechanics*. John Wiley and Sons, 8 ed., 2010.
- [28] J. J. Bertin and R. M. Cummings, *Aerodynamics for Engineers*. Pearson Education International, 5 ed., 2009.
- [29] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Haas, and F. R. Giordano, *Thomas’ Calculus Early Transcendentals*. Pearson Education, 11 ed., 2006.
- [30] B. van Leer, “Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov’s Method,” *Journal of Computational Physics*, vol. 32, pp. 101–136, 1979.
- [31] K. A. Hoffmann and S. T. Chiang, *Computational Fluid Dynamics*, vol. 1. Engineering Education System, 4 ed., 2000.
- [32] A. Harten, “High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws,” *Journal of Computational Physics*, no. 49, pp. 357–393, 1983.
- [33] H. C. Yee, “A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods,” *NASA Technical Memorandum*, no. 101088, 1989.

- [34] H. C. Yee, “Linearized Form of Implicit TVD Schemes for the Multidimensional Euler and Navier-Stokes Equations,” *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 12, pp. 413–432, 1986.
- [35] L. Eça and M. Hoekstra, “On the Influence of the Iterative Error in the Numerical Uncertainty of Ship Viscous Flow Calculations,” *26th Symposium on Naval Hydrodynamics*, September 2006.
- [36] H. Anton and C. Rorres, *Álgebra Linear com Aplicações*. Bookman, 8 ed., 2001.
- [37] H. C. Yee, “Construction of Explicit and Implicit Symmetric TVD Schemes and their Applications,” *Journal of Computational Physics*, vol. 68, pp. 151–179, 1987.
- [38] P. L. Roe, “Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes,” *Journal of Computational Physics*, vol. 135, pp. 250–258, 1997.
- [39] K. A. Hoffmann and S. T. Chiang, *Computational Fluid Dynamics*, vol. 2. Engineering Education System, 4 ed., 2000.
- [40] J. D’Errico, “Block Tri-Diagonal Matrices.” <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/10603>. Acessado em 22/02/2017.
- [41] H. C. Yee and A. Harten, “Implicit TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws in Curvilinear Coordinates,” *AIAA Journal*, vol. 25, no. 2, pp. 266–274, 1987.
- [42] A. Jameson and E. Turkel, “Implicit Schemes and LU Decompositions,” *Mathematics of Computation*, vol. 37, no. 156, pp. 385–397, 1981.
- [43] C. R. Maliska, *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. Livros Técnicos e Científicos, 2 ed., 2004.
- [44] J. Blazek, *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. Elsevier, 2001.
- [45] J. O. de Almeida, “Solução Numérica por Diferenças Finitas em Malha Estruturada Multibloco das Equações de Navier-Stokes para Escoamento Compressível,” Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense, 2015.
- [46] C. Hirsch, *Numerical Computational of Internal and External Flows: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, vol. 2. John Wiley and Sons, 1990.
- [47] C. A. J. Fletcher, *Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques for Different Flow Categories*, vol. 2. Springer-Verlag, 1988.
- [48] J. F. Thompson, B. K. Soni, and N. P. Weatherill, *Handbook of Grid Generation*. CRC Press, 1999.
- [49] R. L. Burden and J. D. Faires, *Análise Numérica*. Pioneira Thomson Learning, 2003.
- [50] R. M. de Oliveira e Silva, “Estudo do Escoamento Potencial Incompressível sobre Aerofólio Fino Simétrico,” trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal Fluminense, 2009.

- 
- [51] “Inviscid Bump in a Channel.” [https://su2code.github.io/tutorials/Inviscid\\_Bump/](https://su2code.github.io/tutorials/Inviscid_Bump/). Acessado em 07/01/2018.
- [52] R.-H. Ni, “A Multiple Grid Scheme to Solve the Euler Equations,” *AIAA Journal*, vol. 20, no. 11, pp. 1565–1571, 1982.
- [53] A. Madadi, M. J. Kermani, and H. Khazaei, “Improvement of a Solution of Inviscid Compressible Flows Using a Mixed Wall Boundary Condition,” *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, vol. 9, no. 1, pp. 126–138, 2015.
- [54] M. Vinokur, “On One-Dimensional Stretching Functions for Finite-Difference Calculations,” *NASA Contractor Report 3313*, 1980.
- [55] A. Dervieux, B. V. Leer, J. Periaux, and A. Rizzi, “Numerical Simulation of Compressible Euler Flows,” *GAMM Workshop*, vol. 26, 1989.
- [56] J. Sinclair and X. Cui, “A Theoretical Approximation of the Shock Stand-Off Distance for the Flows Around a Circular Cylinder,” *Physics of Fluids*, no. 29, 2017.
- [57] L. A. Carlson, “Test Problems for Inviscid Transonic Flow,” *NASA Contractor Report 162138*, 1979.
- [58] R. M. de Oliveira e Silva, D. C. Lobão, P. R. Bermudez, and G. B. Alvarez, “Flux Limiters Comparison for Resolution of Euler Equation by TVD Method in Quasi One-Dimensional Nozzles with Subsonic-Supersonic Flow,” *XXXVIII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, November 2017.
- [59] S. C. Chapra, *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers & Scientists*. McGraw-Hill, 3 ed., 2012.
- [60] R. Courant, *Differential & Integral Calculus*, vol. 2. Blackie & Son Limited, 1936.