

Universidade Federal Fluminense

WILLIAN DOS SANTOS PANNI

Existência, comportamento assintótico e análise  
numérica da solução da equação de viga de 4<sup>a</sup> ordem  
não linear com dissipação forte e perturbação de  
ordem inferior do tipo  $p(x)$ -Laplaciano

VOLTA REDONDA

2020

WILLIAN DOS SANTOS PANNI

**Existência, comportamento assintótico e análise numérica da solução da equação de viga de 4ª ordem não linear com dissipação forte e perturbação de ordem inferior do tipo  $p(x)$ -Laplaciano**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados à Engenharia e Ciência.

Orientador:

Prof. D.Sc. Jorge Ferreira

Coorientador:

Prof. D.Sc. Emerson Souza Freire

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

VOLTA REDONDA

2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BEM  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

P194e Panni, Willian dos Santos  
Existência, comportamento assintótico e análise numérica da solução da equação de viga de 4ª ordem não linear com dissipação forte e perturbação de ordem inferior do tipo  $p(x)$ -Laplaciano / Willian dos Santos Panni ; Jorge Ferreira, orientador ; Emerson Souza Freire, coorientador. Volta Redonda, 2020.  
123 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2020.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPG-MCCT.2020.m.12854960785>

1. Equação diferencial parcial não-linear. 2. Método de Galerkin. 3. Método dos elementos finitos. 4. Análise numérica. 5. Produção intelectual. I. Ferreira, Jorge, orientador. II. Freire, Emerson Souza, coorientador. III. Universidade Federal Fluminense. Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda. IV. Título.

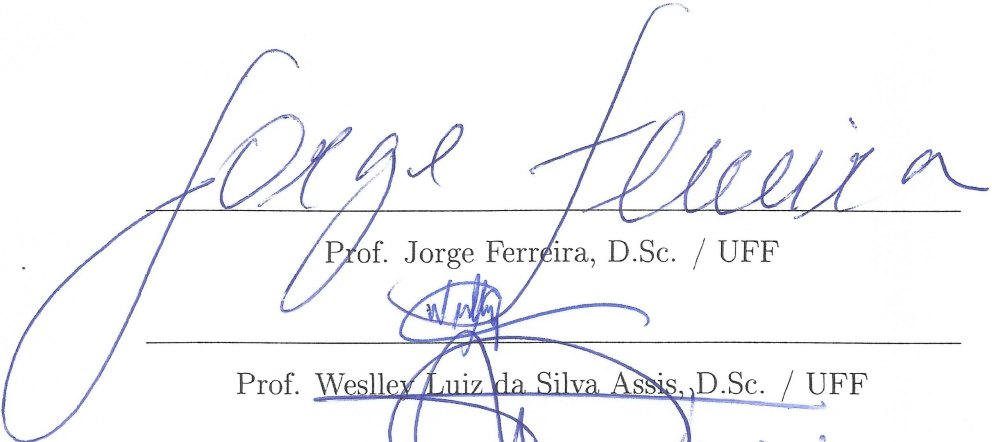
CDD -

Existência, comportamento assintótico e análise numérica da solução da equação de viga de 4ª ordem não linear com dissipação forte e perturbação de ordem inferior do tipo  $p(x)$ -Laplaciano

Willian dos Santos Panni

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados à Engenharia e Ciência.

Aprovada por:



Prof. Jorge Ferreira, D.Sc. / UFF



Prof. Wesley Luiz da Silva Assis, D.Sc. / UFF

Prof. Renato Fabrício Costa Lobato, D.Sc. / UFPA



Prof. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro, D.Sc. / UFPA

Volta Redonda, 9 de Junho de 2020.

*“Os números governam o mundo.”*

Platão.

# Agradecimentos

A minha família, em especial a minha esposa, a minha mãe, ao meu pai, ao meu irmão e a minha irmã pelo carinho e incentivo.

Ao meu orientador Prof. D.Sc. Jorge Ferreira que realizou reuniões onde transmitiu os conhecimentos necessários para o desenvolvimento e conclusão dessa pesquisa. Ele não mediu esforços para me auxiliar, pois mesmo com o braço quebrado e afastado de suas atividades científicas e acadêmicas, ele se dispôs a continuar me orientando através de reuniões em sua residência. Além de me incentivar a participar de vários congressos e eventos nas áreas de Análise e Equações Diferenciais Parciais [60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68].

Ao meu amigo João Paulo Andrade que me indicou a linguagem de computação Python e o software FEniCS que foram extremamente úteis nas simulações computacionais. Além disso, agradeço também por me auxiliar a analisar computacionalmente os resultados obtidos.

A todos que contribuíram de alguma forma, implicitamente ou explicitamente, para a conclusão dessa dissertação.

# Resumo

Nesta dissertação demonstramos a existência e o comportamento assintótico da solução fraca da equação de viga de quarta ordem não linear com dissipação forte e perturbação de ordem inferior do tipo  $p(x)$ -Laplaciano definida por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta (|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u) - \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + f \left( x, t, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = g(x, t) & \text{em } Q_T, \\ u = 0, \Delta u = 0 & \text{em } \partial Q_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , é um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  regular,  $0 < T < \infty$ ,  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  e  $\partial Q_T = \partial\Omega \times (0, T)$ .

Para demonstrar a existência da solução fraca utilizamos o método de Faedo-Galerkin acoplado com resultados clássicos de Análise Funcional, espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis.

Aplicamos uma técnica desenvolvida por Nakao [58] e obtivemos o decaimento exponencial e polinomial da solução fraca, onde o referido decaimento depende do expoente variável.

Finalmente, analisamos numericamente um caso particular do problema onde foi aplicado o método de elementos finitos nas coordenadas espaciais e o método das diferenças finitas na coordenada temporal. Obtivemos os resultados computacionais para três simulações realizadas através da linguagem de computação Python com o software FEniCS onde foram alterados o particionamento da malha, o tempo final e as condições iniciais.

# Abstract

In this dissertation we demonstrate the existence and asymptotic behavior of the weak solution of the nonlinear fourth-order beam equation with strong dissipation and lower order perturbation of the type  $p(x)$ -Laplacian defined by

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta (|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u) - \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + f \left( x, t, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = g(x, t) & \text{in } Q_T, \\ u = 0, \Delta u = 0 & \text{on } \partial Q_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Where  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , is a bounded domain with smooth boundary  $\partial\Omega$ ,  $0 < T < \infty$ ,  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  and  $\partial Q_T = \partial\Omega \times (0, T)$ .

To demonstrate the existence of the weak solution we used the Faedo-Galerkin method coupled with classical results of Functional Analysis, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents.

We applied a technique developed by Nakao [58] and obtained the exponential and polynomial decay of the weak solution where the said decay depends on the variable exponent.

Finally, we analyze numerically a particular case of the problem where the finite element method was applied to the spatial coordinates and the finite difference method to the temporal coordinate. We obtained the computational results for three simulations performed using the Python computing language with the FEniCS software where the mesh partitioning, the final time and the initial conditions were changed.

# Palavras-chave

1.  $p(x)$ -Laplaciano
2. Existência de solução fraca
3. Comportamento assintótico
4. Método de elementos finitos
5. Método das diferenças finitas

# Glossário

$d(x, y)$	:	Distância do ponto $x$ até $y$ dada pela métrica $d$
$(X, d)$	:	Espaço métrico
$\mathcal{C}[a, b]$	:	Espaço das funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f$ é contínua em $[a, b]$
$\ \cdot\ _X$	:	Norma definida no espaço $X$
$(X, \ \cdot\ _X)$	:	Espaço normado
$(X, \tau)$	:	Espaço topológico do conjunto $X$ pela topologia $\tau$
$X'$	:	Espaço dual de $X$
$X''$	:	Espaço bidual de $X$
$\rightharpoonup$	:	Convergência fraca
$\xrightarrow{*}$	:	Convergência fraca estrela
$\sigma(X, X')$	:	Topologia fraca
$\sigma(X', X)$	:	Topologia fraca estrela
$\text{supp}(\varphi)$	:	Conjunto de pontos do domínio de $\varphi$ , em que esta não se anula
$C_0^\infty(\Omega)$	:	Espaço das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto contido em $\Omega$
q.t.p.	:	Quase em todo ponto
q.s.	:	Quase sempre
$L^2(\Omega)$	:	Espaço de Lebesgue das funções quadrado integráveis
$L^p(\Omega)$	:	Espaço de Lebesgue das funções $p$ integráveis
$L^\infty(\Omega)$	:	Espaço de Lebesgue das funções essencialmente limitadas
$L_{loc}^p(\Omega)$	:	Espaço de Lebesgue das funções localmente integráveis

# Glossário

- $\mathcal{D}(\Omega)$  : Espaço topológico formado por  $C_0^\infty(\Omega)$  munido da convergência dada pela definição (2.6.1)
- $\mathcal{D}'(\Omega)$  : Espaço das distribuições sobre  $\Omega$
- $W^{m,p}(\Omega)$  : Espaço de Sobolev das funções  $u \in L^p(\Omega)$  tais que  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ , onde  $|\alpha| \leq m$
- $W_0^{m,p}(\Omega)$  : Fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  no espaço  $W^{m,p}(\Omega)$
- $W^{-m,p'}(\Omega)$  : Espaço dual de  $W_0^{m,p}(\Omega)$
- $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  : Espaço de medida
- $p(x)$  : Expoente variável
- $L^{p(x)}(\Omega)$  : Espaço de Lebesgue de expoente variável
- $W^{m,p(x)}(\Omega)$  : Espaço de Sobolev de expoente variável
- $\Delta_p$  : Operador  $p$ -Laplaciano
- $\Delta_{p(x)}$  : Operador  $p(x)$ -Laplaciano

# Sumário

<b>Lista de figuras</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>12</b>
1.1 Objetivos . . . . .	14
1.1.1 Objetivos gerais . . . . .	14
1.1.2 Objetivos específicos . . . . .	14
1.2 Estrutura da dissertação . . . . .	14
<b>2 Fundamentação teórica</b>	<b>16</b>
2.1 Espaços métricos . . . . .	16
2.1.1 Espaços métricos completos . . . . .	20
2.2 Espaços normados . . . . .	21
2.3 Espaços topológicos . . . . .	23
2.3.1 Espaço dual . . . . .	24
2.3.2 Espaço reflexivo . . . . .	25
2.4 Suporte de função, desigualdade de Young e teorema da convergência dominada . . . . .	26
2.5 O espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ . . . . .	28
2.6 Distribuições escalares . . . . .	31
2.7 O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	33
2.8 Espaços $L^p(0, T; X)$ e as distribuições vetoriais . . . . .	34
2.9 O espaço de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ . . . . .	37

---

2.10	O espaço de Sobolev $W^{m,p(x)}(\Omega)$ . . . . .	39
2.11	Operadores limitados, contínuos, monótonos e hemicontínuos . . . . .	41
2.11.1	O operador $p$ –Laplaciano . . . . .	42
2.11.2	O operador $p(x)$ –Laplaciano . . . . .	43
2.12	Outros resultados importantes . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Equação de viga não linear envolvendo o operador <math>p(x)</math>–Laplaciano</b>	<b>47</b>
3.1	Existência de solução fraca . . . . .	48
3.2	Comportamento assintótico . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Análise numérica</b>	<b>82</b>
4.1	Simulações computacionais . . . . .	85
4.1.1	Simulação 1 . . . . .	89
4.1.2	Simulação 2 . . . . .	95
4.1.3	Simulação 3 . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuros</b>	<b>112</b>
5.1	Conclusões . . . . .	112
5.2	Recomendações para trabalhos futuros . . . . .	113
	<b>Referências</b>	<b>114</b>

# Lista de figuras

4.1	Malha computacional particionada em $5 \times 5$ . . . . .	86
4.2	Simulação 1: $t = 0$ . . . . .	89
4.3	Simulação 1: $t = 0,009$ . . . . .	90
4.4	Simulação 1: $t = 0,02$ . . . . .	90
4.5	Simulação 1: $t = 0,031$ . . . . .	91
4.6	Simulação 1: $t = 0,047$ . . . . .	91
4.7	Simulação 1: $t = 0,067$ . . . . .	92
4.8	Simulação 1: $t = 0,1$ . . . . .	92
4.9	Simulação 1: $t = 0,141$ . . . . .	93
4.10	Simulação 1: $t = 0,189$ . . . . .	93
4.11	Simulação 1: $t = 0,224$ . . . . .	94
4.12	Simulação 1: $t = T = 0,3$ . . . . .	94
4.13	Simulação 2: $t = 0$ . . . . .	95
4.14	Simulação 2: $t = 0,0032$ . . . . .	96
4.15	Simulação 2: $t = 0,0080$ . . . . .	96
4.16	Simulação 2: $t = 0,0112$ . . . . .	97
4.17	Simulação 2: $t = 0,0160$ . . . . .	97
4.18	Simulação 2: $t = 0,0208$ . . . . .	98
4.19	Simulação 2: $t = 0,0256$ . . . . .	98
4.20	Simulação 2: $t = 0,0336$ . . . . .	99
4.21	Simulação 2: $t = 0,0432$ . . . . .	99
4.22	Simulação 2: $t = 0,0512$ . . . . .	100

---

4.23	Simulação 2: $t = 0,0864$ .	100
4.24	Simulação 2: $t = 0,1152$ .	101
4.25	Simulação 2: $t = 0,1984$ .	101
4.26	Simulação 2: $t = 0,2864$ .	102
4.27	Simulação 2: $t = T = 0,4$ .	102
4.28	Simulação 3: $t = 0$ .	103
4.29	Simulação 3: $t = 0,00375$ .	104
4.30	Simulação 3: $t = 0,00875$ .	104
4.31	Simulação 3: $t = 0,01625$ .	105
4.32	Simulação 3: $t = 0,02375$ .	105
4.33	Simulação 3: $t = 0,03$ .	106
4.34	Simulação 3: $t = 0,04125$ .	106
4.35	Simulação 3: $t = 0,05250$ .	107
4.36	Simulação 3: $t = 0,06125$ .	107
4.37	Simulação 3: $t = 0,08250$ .	108
4.38	Simulação 3: $t = 0,11625$ .	108
4.39	Simulação 3: $t = 0,14250$ .	109
4.40	Simulação 3: $t = 0,19375$ .	109
4.41	Simulação 3: $t = 0,23250$ .	110
4.42	Simulação 3: $t = 0,24875$ .	110
4.43	Simulação 3: $t = 0,29375$ .	111
4.44	Simulação 3: $t = T = 0,5$ .	111

# Capítulo 1

## Introdução

Nas últimas décadas as equações diferenciais parciais envolvendo expoentes variáveis tem atraído a atenção de diversos pesquisadores, principalmente os matemáticos. As referidas equações são munidas de operadores denominados  $p$ -Laplaciano,  $p(x)$ -Laplaciano,  $p(x, t)$ -Laplaciano ou  $p(u)$ -Laplaciano. Definimos cada um deles, respectivamente, por

$$\Delta_p u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

$$\Delta_{p(x)} u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

$$\Delta_{p(x,t)} u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p(x,t)-2} \nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(x,t)-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

$$\Delta_{p(u)} u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p(u)-2} \nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(u)-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

O interesse em estudar problemas envolvendo os aludidos operadores foi estimulado por suas aplicações em processos de filtração em meios porosos não homogêneos [16, 19], equações de onda [5, 9, 35, 41, 42, 55, 56, 57, 59, 72, 76], equações de vigas não lineares [21, 53], elasticidade não linear [1, 30, 78], restauração e segmentos de imagens [4, 22, 23, 25, 73, 74], fluxo de fluidos eletro reológicos ou termo reológicos [2, 15, 17, 18, 32, 33, 71], equações de placa com viscoelasticidade, termo elasticidade ou termo viscoelasticidade [6, 11, 38, 46].

Existe uma literatura suficientemente grande sobre a existência, a unicidade e o comportamento assintótico das soluções de equações diferenciais envolvendo o operador  $p$ -Laplaciano. Nessa literatura destaca-se o artigo de Ferreira, Raposo e Santos [39] onde

foi estudado a existência de soluções fracas para a seguinte equação hiperbólica sobre um domínio cilíndrico

$$\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \Delta u_t = f(x, t) & \text{em } Q_T = \Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } x \in \Omega, \\ u|_{\Gamma_T} = 0 & \text{em } \Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

Autuori, Pucci e Salvatori [20] discutiram a estabilidade assintótica das soluções para sistemas de Kirchhoff com expoentes variáveis do tipo

$$\begin{cases} u_{tt} - M(\mathcal{F}u(t)) \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + Q(x, t, u, u_t) + f(x, u) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_0^+ \times \Omega, \\ u(x, t) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_0^+ \times \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $M(\tau) = a + b\tau^{\gamma-1}$ ,  $\tau \geq 0$  com  $a, b \geq 0$ ,  $\gamma > 1$  e  $\mathcal{F}u(t) = \int_{\Omega} \left( \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} \right) dx$ .

O pioneiro nos estudos de problemas hiperbólicos com o operador  $p(x, t)$ -Laplaciano foi o matemático russo Antontsev [9] analisando a existência de soluções locais, globais e o *blow-up* para o seguinte problema

$$\begin{cases} u_{tt} = \operatorname{div}(a(x, t)|\nabla u|^{p(x,t)-2}\nabla u) + \alpha\Delta u_t + b(x, t)|u|^{\sigma(x,t)-2}u + f(x, t) & \text{em } Q_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } x \in \Omega, \\ u|_{\Gamma_T} = 0 & \text{em } \Gamma_T, \end{cases}$$

onde  $Q_T = \Omega \times [0, T]$  e  $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ .

Além desse trabalho, destacam-se na literatura de expoentes variáveis os artigos de Ferreira e Messaoudi [38], Antontsev e Ferreira [10, 11]. O operador  $p(x, t)$ -Laplaciano é uma generalização natural dos operadores  $p$ -Laplaciano e  $p(x)$ -Laplaciano, porém seu nível de complexidade é suficientemente maior.

O primeiro trabalho envolvendo o operador  $p(u)$ -Laplaciano foi desenvolvido pelos pesquisadores Andreianov, Bendahmane e Ouaro [8]. Recentemente, Chipot e Oliveira [27] desenvolveram um artigo envolvendo o referido operador onde foi estudado o seguinte problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Os autores destacaram que a grande dificuldade em analisar problemas com o operador  $p(u)$ -Laplaciano se baseia no fato de que nem a formulação fraca de (1.1) pode ser escrita como igualdade em termos de dualidade em espaços de Banach.

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivos gerais

Neste trabalho abordamos uma equação de viga de quarta ordem não linear com dissipação forte e perturbação de ordem inferior do tipo  $p(x)$ -Laplaciano em um domínio limitado.

Demonstramos a existência de solução fraca e o comportamento assintótico da referida solução.

Analisamos numericamente um caso particular do aludido problema e o simulamos computacionalmente.

### 1.1.2 Objetivos específicos

Demonstrar que a referida equação possui uma solução fraca através do método de Faedo-Galerkin com resultados clássicos de Análise Funcional, espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis.

Através do lema de Nakao [58] concluir que a solução fraca possui um comportamento assintótico exponencial ou polinomial, dependendo do expoente variável.

Analisar numericamente um caso particular de nosso problema sobre um domínio bi-dimensional. Aplicar o método de elementos finitos nas coordenadas espaciais e o método das diferenças finitas na coordenada temporal.

Realizar três simulações computacionais através da linguagem de computação Python e do software FEniCS. Obter os resultados computacionais para três simulações alterando o particionamento da malha, o tempo final e as condições iniciais para o aludido problema.

## 1.2 Estrutura da dissertação

No segundo capítulo, apresentamos os principais conceitos e definições sobre Análise Funcional, espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis, também são definidos os operadores  $p$ -Laplaciano e  $p(x)$ -Laplaciano que são necessários para a melhor compreensão do problema abordado na referida dissertação.

No capítulo 3, enunciamos as hipóteses fundamentais sobre o aludido problema para

---

as demonstrações da existência e do comportamento assintótico da solução fraca.

No quarto capítulo foram realizadas a análise numérica e três simulações computacionais de um caso particular de nosso problema através da linguagem de computação Python com o software FEniCS.

Finalmente, no capítulo 5, apresentamos as conclusões dessa dissertação e as recomendações para os trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Fundamentação teórica

Neste capítulo apresentamos uma breve revisão sobre os espaços métricos, normados e topológicos, além disso, dissertamos sobre o espaço dual e o espaço reflexivo. Revisamos os conceitos e teoremas fundamentais de Análise Funcional, tais como o suporte de uma função, a desigualdade de Young, a desigualdade de Hölder e o teorema da convergência dominada. Posteriormente, definimos os espaços de Lebesgue com expoente constante e logo após iniciamos os estudos das distribuições escalares com o objetivo de explicitar os espaços de Sobolev com expoente constante. Em seguida, explicitamos as distribuições vectoriais, os espaços de Lebesgue e Sobolev de expoente variável. Finalmente, enunciamos as principais propriedades dos operadores  $p$ -Laplaciano e  $p(x)$ -Laplaciano. Para mais detalhes, indicamos as referências [3, 18, 24, 26, 28, 33, 34, 36, 40, 44, 47, 51, 54, 70, 77].

### 2.1 Espaços métricos

Iniciamos essa primeira seção definindo uma métrica sobre um conjunto  $X$ .

**Definição 2.1.1** *Suponhamos que  $X$  seja um conjunto não vazio, chamamos de uma métrica sobre  $X$  uma função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as seguintes condições para quaisquer  $x, y, z \in X$ :*

*i)  $d(x, y) \geq 0$ ;*

*ii)  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ ;*

*iii)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;*

$$iv) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

As propriedades (i) e (ii) caracterizam a métrica como sendo uma função não negativa. A propriedade (iii) estabelece que  $d$  é uma função simétrica nas variáveis  $x$  e  $y$ . Finalmente, denominamos a propriedade (iv) como sendo a desigualdade triangular.

Duas métricas  $d_1$  e  $d_2$  definidas sobre um conjunto  $X$  são denominadas equivalentes se existir uma constante  $c > 0$  tal que  $d_1(x, y) \leq cd_2(x, y)$  para todo  $x, y \in X$ .

Definimos um espaço métrico como sendo um par  $(X, d)$ , onde  $X$  é um conjunto não vazio e  $d$  uma métrica. Quando não houver ambiguidade, chamamos de espaço métrico simplesmente o conjunto  $X$ .

**Exemplo 2.1.1** *Suponhamos que  $X = \mathcal{C}[a, b]$ , onde*

$$\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua em } [a, b]\}.$$

*Notemos que  $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$d(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$$

*é uma métrica em  $X$ .*

**Demonstração:** Sejam  $x, y, z \in X$  arbitrários.

$$i) d(x, y) \geq 0.$$

De fato, para todo  $t \in [a, b]$ , temos  $|x(t) - y(t)| \geq 0$ , sendo assim,

$$\max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| \geq 0.$$

$$ii) d(x, y) = 0 \text{ se, e somente se, } x = y.$$

Suponhamos que  $d(x, y) = 0$ . Assim, para todo  $t \in [a, b]$  temos

$$0 = d(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|.$$

Isso implica que

$$0 = |x(t) - y(t)|, \forall t \in [a, b].$$

Consequentemente,  $x(t) = y(t) \forall t \in [a, b]$ .

Por outro lado, suponhamos que  $x(t) = y(t) \forall t \in [a, b]$ , então

$$d(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - x(t)| = 0.$$

Portanto,  $d(x, y) = 0$ .

iii)  $d(x, y) = d(y, x)$ .

De fato, para todo  $t \in [a, b]$ , segue que

$$d(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| = \max_{t \in [a, b]} |y(t) - x(t)| = d(y, x).$$

Logo,  $d(x, y) = d(y, x)$ .

iv)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Notemos que,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \max_{t \in [a, b]} |x(t) - z(t)|. \\ &= \max_{t \in [a, b]} |x(t) - z(t) + y(t) - y(t)|. \\ &= \max_{t \in [a, b]} |[x(t) - y(t)] + [y(t) - z(t)]|. \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} \{|x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)|\}. \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| + \max_{t \in [a, b]} |y(t) - z(t)|. \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Ou seja,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Portanto, de (i), (ii), (iii) e (iv), concluímos que  $d$  é uma métrica definida em  $X$ . Consequentemente,  $(X, d)$  é um espaço métrico. ■

**Exemplo 2.1.2** *Sejam  $X = \mathcal{C}[a, b]$  e  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt.$$

*Notemos que  $d$  é uma métrica em  $X$ .*

**Demonstração:** Sejam  $x, y, z \in X$  arbitrários.

i)  $d(x, y) \geq 0$ .

De fato, para todo  $t \in [a, b]$ , temos  $|x(t) - y(t)| \geq 0$ , sendo assim,

$$\int_a^b |x(t) - y(t)| dt \geq 0.$$

*ii)*  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ .

Suponhamos que  $d(x, y) = 0$ , assim

$$0 = d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$$

e como  $|x(t) - y(t)| \geq 0$  para todo  $t \in [a, b]$ , isto implica que  $|x(t) - y(t)| = 0 \forall t \in [a, b]$ , conseqüentemente  $x(t) = y(t) \forall t \in [a, b]$ .

Por outro lado, suponhamos que  $x(t) = y(t) \forall t \in [a, b]$ , então  $|x(t) - y(t)| = 0$ .

Daí,

$$d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt = \int_a^b 0 dt = 0.$$

Portanto,  $d(x, y) = 0$ .

*iii)*  $d(x, y) = d(y, x)$ .

De fato, para todo  $t \in [a, b]$ , segue que

$$d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt = \int_a^b |y(t) - x(t)| dt = d(y, x).$$

Logo,  $d(x, y) = d(y, x)$ .

*iv)*  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Notemos que,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \int_a^b |x(t) - z(t)| dt. \\ &= \int_a^b |x(t) - z(t) + y(t) - y(t)| dt. \\ &= \int_a^b |[x(t) - y(t)] + [y(t) - z(t)]| dt. \\ &\leq \int_a^b |x(t) - y(t)| dt + \int_a^b |y(t) - z(t)| dt. \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Ou seja,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Portanto, de (i), (ii), (iii) e (iv), concluímos que  $d$  é uma métrica definida em  $X$ . Consequentemente  $(X, d)$  é um espaço métrico. ■

### 2.1.1 Espaços métricos completos

Seja  $(X, d)$  um espaço métrico.

**Definição 2.1.2** Uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $X$  é denominada de sequência de Cauchy quando, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que se  $m > N$  e  $n > N$ , então  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ .

**Exemplo 2.1.3** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico onde  $X = \mathbb{R}$  e  $d(x, y) = |x - y|$ . A sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dada por  $x_n = \frac{1}{n}$  com  $n > 0$  é de Cauchy em  $X$ .

**Demonstração:** De fato, para todo  $\varepsilon > 0$  basta considerarmos  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N > \frac{1}{\varepsilon}$ , ou seja,  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ .

Suponhamos  $m > N$  e  $n > N$ , sem perda de generalidade podemos considerar  $n > m$ , assim temos que  $n > m > N > \frac{1}{\varepsilon}$  e então

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Portanto,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em  $X$ . ■

**Exemplo 2.1.4** Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.

**Demonstração:** De fato, suponhamos um espaço métrico  $(X, d)$ . Sejam  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $X$  e  $x \in X$  tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

ou seja, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que se  $n > N$  então  $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Se  $m, n \in \mathbb{N}$  com  $m > N$  e  $n > N$  então  $d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ , então

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x) + d(x, x_n). \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ , consequentemente,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy. ■

**Exemplo 2.1.5** *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

**Demonstração:** Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de Cauchy, isto é, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que se  $m > N$  e  $n > N$ , então  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ .

Notemos que, o conjunto  $\{x_n; n > N\}$  está contido na bola  $\mathcal{B}(x_{N+1}, \varepsilon)$ , logo é limitado. Além disso, o conjunto  $\{x_n; n \leq N\}$  é finito e, conseqüentemente, é limitado.

Portanto, o conjunto  $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} = \{x_n; n \leq N\} \cup \{x_n; n > N\}$  é limitado. ■

**Definição 2.1.3** *Um espaço métrico  $(X, d)$  é dito completo se toda sequência de Cauchy converge em  $X$ .*

**Exemplo 2.1.6** *Suponhamos que  $(X, d)$  seja um espaço métrico onde  $X = (0, 1]$  com a métrica euclidiana  $d(x, y) = |x - y|$ . Afirmamos que  $(X, d)$  não é completo.*

**Demonstração:** Com efeito, seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dada por  $x_n = \frac{1}{n}$  com  $n > 0$ . Demonstramos no exemplo (2.1.3) que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy. Porém, notemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \notin X.$$

Portanto,  $(x_n)$  não converge em  $X$ , logo o espaço métrico  $(X, d)$  não é completo. ■

## 2.2 Espaços normados

Nesta seção definimos a norma e um espaço normado. Posteriormente, explicitamos as definições de espaço de Banach e espaço de Hilbert.

**Definição 2.2.1** *Suponhamos que  $X$  seja um espaço vetorial real. Uma norma em  $X$  é uma aplicação  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as seguintes condições para todo  $x, y \in X$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ :*

- i)  $\|x\| \geq 0$ ;
- ii)  $\|x\| = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ ;
- iii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ;
- iv)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

As propriedades (i) e (ii) caracterizam a norma como sendo uma função não negativa. A propriedade (iii) é conhecida como dilatação da norma. Finalmente, denominamos a propriedade (iv) como sendo a desigualdade triangular.

Definimos um espaço normado como sendo um par  $(X, \|\cdot\|)$ , onde  $X$  é um espaço vetorial real e  $\|\cdot\|$  uma norma. Quando não houver ambiguidade, chamamos de espaço normado simplesmente o conjunto  $X$ .

**Exemplo 2.2.1** *Seja  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço normado. Afirmamos que  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $d(x, y) = \|x - y\|$  é uma métrica em  $X$ .*

**Demonstração:** De fato, supondo que  $(X, \|\cdot\|)$  seja um espaço normado, então é necessário demonstrar que  $d$  define uma métrica em  $X$ , para isto, as quatro condições da definição (2.1.1) devem ser satisfeitas. Suponhamos  $x, y, z \in X$  arbitrários e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , assim:

$$i) \ d(x, y) \geq 0.$$

Com efeito,  $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$  pois  $(X, \|\cdot\|)$  é um espaço normado e consequentemente a condição (i) da definição (2.2.1) é válida, isto é,  $\|x - y\| \geq 0$ .

$$ii) \ d(x, y) = 0 \text{ se, e somente se, } x = y.$$

Suponhamos que  $d(x, y) = 0$ . Assim,

$$0 = d(x, y) = \|x - y\|.$$

Logo,  $\|x - y\| = 0$ . Usando o fato de que  $(X, \|\cdot\|)$  é um espaço normado, então usando a condição (ii) da definição (2.2.1) segue que

$$x - y = 0 \implies x = y.$$

Por outro lado, consideremos que  $x = y$ , assim  $x - y = 0$ . Novamente, pelo fato de que  $(X, \|\cdot\|)$  é um espaço normado, podemos utilizar a condição (ii) da definição (2.2.1) e consequentemente  $\|x - y\| = 0$ . Sendo assim,  $0 = \|x - y\| = d(x, y)$ .

$$iii) \ d(x, y) = d(y, x).$$

Trivial, notemos que

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &= \|x - y\|. \\
 &= \|(-1)(y - x)\|. \\
 &= |-1|\|y - x\|. \\
 &= \|y - x\|. \\
 &= d(y, x).
 \end{aligned}$$

Dessa maneira,  $d(x, y) = d(y, x)$ .

*iv*)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Observemos que,

$$\begin{aligned}
 d(x, z) &= \|x - z\|. \\
 &= \|x - z + y - y\|. \\
 &= \|(x - y) + (y - z)\|. \\
 &\leq \|x - y\| + \|y - z\|. \\
 &= d(x, y) + d(y, z).
 \end{aligned}$$

Logo,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Portanto, de (i), (ii), (iii) e (iv), concluímos que  $d(x, y) = \|x - y\|$  é uma métrica definida em  $X$ . ■

Dizemos que a métrica  $d(x, y) = \|x - y\|$  é induzida pela norma e conseqüentemente todo espaço normado é, em particular, um espaço métrico. A recíproca não é válida.

**Definição 2.2.2** *Um espaço de Banach é um espaço normado  $(X, \|\cdot\|)$  completo com relação a métrica induzida pela norma.*

**Definição 2.2.3** *Um espaço vetorial normado  $(X, \|\cdot\|)$  denomina-se espaço de Hilbert, se  $X$  é um espaço de Banach e a norma é induzida por um produto interno.*

## 2.3 Espaços topológicos

Antes de explicitar o conceito de espaço topológico, enunciamos a definição de topologia em um conjunto  $X$ .

**Definição 2.3.1** *Uma topologia em um conjunto  $X$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de  $X$ , chamados subconjuntos abertos segundo a topologia  $\tau$ , satisfazendo as seguintes propriedades:*

- i)  $X$  e o subconjunto  $\emptyset$  são abertos;*
- ii) A união de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;*
- iii) A interseção finita de uma família de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.*

Definimos um espaço topológico como sendo um par  $(X, \tau)$ , onde  $X$  é um conjunto e  $\tau$  uma topologia. Quando não houver ambiguidade, chamamos de espaço topológico simplesmente o conjunto  $X$ .

**Exemplo 2.3.1** *Seja  $X$  um conjunto qualquer. Considerando todos os subconjuntos de  $X$  como abertos de  $X$ , temos que a família de todos esses subconjuntos forma uma topologia em  $X$ , chamada topologia discreta. Para que  $X$  seja um espaço métrico, basta considerar a métrica  $d(x, y) = 1$  se  $x \neq y$  e  $0$  caso contrário.*

**Exemplo 2.3.2** *A família que consiste apenas dos subconjuntos  $\emptyset$  e  $X$  também constitui uma topologia  $\tau$  em  $X$ , denominada topologia caótica.*

Para que duas métricas definam o mesmo espaço topológico é necessário e suficiente que elas sejam equivalentes.

### 2.3.1 Espaço dual

**Definição 2.3.2** *Denotamos por  $X'$  o conjunto das funções  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  que são lineares e contínuas, isto é,*

$$X' = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ é linear e contínua}\}.$$

*O conjunto  $X'$  é denominado o espaço dual de  $X$  e a norma nesse espaço é dada por*

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\|x\|_X < 1} |f(x)|.$$

Denotamos por  $f(x) = \langle f, x \rangle$ , quando  $f \in X'$  e  $x \in X$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno pela dualidade  $X', X$ .

**Proposição 2.3.1** *Uma aplicação linear  $f$  é contínua se, e somente se, ela é limitada.*

**Demonstração:** Com efeito, pela continuidade de  $f$  temos que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|x\| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon.$$

Isso significa que para cada  $x \in X$ ,  $\frac{\delta}{\|x\|}x$  satisfaz a condição  $\left\| \frac{\delta}{\|x\|}x \right\| \leq \delta$ , assim temos que

$$\left| f\left(\frac{\delta}{\|x\|}x\right) \right| < \varepsilon \implies |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\|x\|.$$

Consequentemente, concluímos que  $f$  é uma função limitada.

De maneira recíproca, supondo que  $f$  seja limitada, então é necessário demonstrar que  $f$  é contínua. Lembremos que,  $f$  é limitada se existe  $c > 0$  tal que  $|f(x)| \leq c\|x\|$ . Portanto, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $\|x - y\| < \delta$  então  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Basta tomarmos  $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$  e aplicar a linearidade de  $f$ . ■

## 2.3.2 Espaço reflexivo

**Definição 2.3.3** *Denotamos por  $X''$  o conjunto das funções  $f : X' \rightarrow \mathbb{R}$  que são lineares e contínuas, isto é,*

$$X'' = \{f : X' \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ é linear e contínua}\}.$$

*O conjunto  $X''$  é denominado o espaço bidual de  $X$  e a norma nesse espaço é dada por*

$$\|f\|_{X''} = \sup_{g \in X', \|g\|_{X'} \leq 1} |f(g)|.$$

Em geral, dado um espaço vetorial  $X$  qualquer, podemos definir o espaço dual  $X'$  e o espaço bidual  $X''$ . Inclusive podemos relacionar o espaço  $X$  com o bidual  $X''$  através da aplicação  $J : X \rightarrow X''$  dada pela definição (2.3.4).

**Definição 2.3.4** *Sejam  $x \in X$  fixo e a aplicação  $f \rightarrow \langle f, x \rangle$  de  $X'$  em  $\mathbb{R}$ . A aplicação  $f$  é um elemento de  $X''$ . Definimos de forma natural*

$$\langle J(x), f \rangle = \langle f, x \rangle = f(x), \quad \forall x \in X, \quad \forall f \in X'.$$

**Definição 2.3.5** *Seja  $X$  um espaço de Banach, dizemos que  $X$  é um espaço reflexivo, quando a aplicação  $J$  definida acima é sobrejetora.*

**Definição 2.3.6** Dizemos que um espaço normado  $X$  é separável, se existe um subconjunto enumerável e denso em  $X$ .

Nas seguintes definições (2.3.7) e (2.3.8), enunciamos dois tipos de convergências que são utilizadas durante toda a dissertação, são elas a convergência fraca e a convergência fraca estrela, denotadas respectivamente por  $\rightharpoonup$  e  $\overset{*}{\rightharpoonup}$ .

**Definição 2.3.7 (Convergência fraca)** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de  $X$ . Então  $u_n \rightharpoonup u$  se, e somente se,  $\langle \varphi, u_n \rangle \longrightarrow \langle \varphi, u \rangle, \forall \varphi \in X'$ .

**Definição 2.3.8 (Convergência fraca estrela)** Suponhamos que  $X$  seja um espaço de Banach,  $\varphi \in X'$  e  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de  $X'$ . Diz-se que  $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$  se, e somente se,  $\langle \varphi_n, u \rangle \longrightarrow \langle \varphi, u \rangle, \forall u \in X$ .

**Definição 2.3.9** Seja  $X$  um espaço de Banach e  $f \in X'$ . Denotamos por  $\phi_f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  o funcional linear definido como  $\phi_f(x) = \langle f, x \rangle$ . Com  $f$  percorrendo o conjunto  $X'$  nós obtemos uma coleção  $(\phi_f)_{f \in X'}$  de funções de  $X$  em  $\mathbb{R}$ .

Enunciamos nas seguintes definições (2.3.10) e (2.3.11) os conceitos de topologias que são fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

**Definição 2.3.10** A topologia fraca, denotada por  $\sigma(X, X')$  em  $X$ , é a topologia mais fina associada a coleção  $(\phi_f)_{f \in X'}$ .

Analogamente, podemos definir a topologia fraca estrela.

**Definição 2.3.11** A topologia fraca estrela, denotada por  $\sigma(X', X)$  em  $X'$ , é a topologia mais fina associada a coleção  $(\phi_x)_{x \in X}$ .

## 2.4 Suporte de função, desigualdade de Young e teorema da convergência dominada

Fizemos as seções subsequentes baseadas na dissertação de mestrado defendida por Dos Santos, em 2008, para mais detalhes indicamos [34].

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , aberto, limitado e  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Denominamos suporte de  $\varphi$ , ao fecho, em  $\Omega$ , do conjunto dos pontos  $x$  pertencentes a  $\Omega$  onde  $\varphi$  não se anula. Denota-se o suporte de  $\varphi$  por  $\text{supp}(\varphi)$ . Simbolicamente, tem-se

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Destacamos as funções  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , com suporte compacto contido em  $\Omega$ , que sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse intuito, definamos o espaço  $C_0^\infty(\Omega)$  como sendo o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto contido em  $\Omega$ . Os elementos de  $C_0^\infty(\Omega)$  são denominados funções testes em  $\Omega$ . Simbolicamente temos,

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ com } \text{supp}(\varphi) \text{ compacto em } \Omega\}.$$

**Proposição 2.4.1 (Desigualdade de Young)** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $p$  e  $q$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , então

$$|a||b| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}. \quad (2.1)$$

A igualdade ocorre se, e somente se,  $|a|^p = |b|^q$ .

**Demonstração:** Se  $\varphi(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda \implies \varphi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$  e se  $\lambda - 1 < 0$  temos que:

- $\varphi'(t) < 0$  para  $t < 1$ ;
- $\varphi'(t) > 0$  para  $t > 1$ .

Logo para  $t \neq 1$ , temos  $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$ , de onde  $(1 - \lambda) + \lambda t \geq t^\lambda$  (a igualdade só vale se  $t = 1$ ).

Se  $b \neq 0$  a desigualdade segue substituindo  $t$  por  $\frac{|a|^p}{|b|^q}$ . Por outro lado, se  $b = 0$  a proposição é trivial. ■

**Teorema 2.4.1 (Convergência Dominada de Lebesgue)** Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de funções reais definidas em  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , integráveis tais que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , q.t.p. em  $\Omega$ . Se existe uma função  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , integrável, tal que para todo  $n$  temos  $|f_n(x)| \leq g(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ , então

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

**Demonstração:** Ver [24]. ■

## 2.5 O espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Nesta seção exibimos as principais definições e teoremas sobre os espaços de Lebesgue, para mais detalhes indicamos as referências [33, 47, 54].

Suponhamos um conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $p \in \mathbb{R}$  de forma que  $1 \leq p < \infty$ , os espaços denotados por  $L^p(\Omega)$  são espaços vetoriais formados pelas classes de funções mensuráveis  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx$  é finita, ou seja,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mensuráveis; } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

O espaço vetorial acima torna-se um espaço normado quando o munimos com a seguinte norma  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida por

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por outro lado, o espaço vetorial  $L^\infty(\Omega)$  é formado pelas classes de funções  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que são essencialmente limitadas, ou seja,

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mensuráveis; } \exists c \geq 0, |u(x)| \leq c \text{ q.t.p. em } \Omega \right\}.$$

O espaço vetorial  $L^\infty(\Omega)$  torna-se um espaço normado quando o munimos com a seguinte norma  $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)} : L^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida por

$$\|u\|_\infty = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ c; |u(x)| \leq c \text{ q.s. em } \Omega \}.$$

O teorema (2.5.1) explicita as importantes propriedades dos espaços de Lebesgue.

**Teorema 2.5.1** *Sejam um conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $p \in \mathbb{R}$  de forma que  $1 \leq p \leq \infty$ , então*

- i)  $L^p(\Omega)$  é um espaço de Banach;*
- ii) Se  $1 < p < \infty$ , então  $L^p(\Omega)$  é um espaço reflexivo e uniformemente convexo;*
- iii) Se  $1 \leq p < \infty$ , então  $L^p(\Omega)$  é separável.*

**Demonstração:** Ver [24]. ■

Se  $1 \leq p \leq \infty$  denotamos por  $q$  o número definido por:

$$i) \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ se } 1 < p < \infty;$$

ii)  $q = 1$ , se  $p = \infty$  e, analogamente,  $q = \infty$  se  $p = 1$ .

O número  $p$  é denominado expoente conjugado de  $q$ .

**Teorema 2.5.2 (Representação de Riesz)** *Sejam  $1 \leq p \leq \infty$  e  $q$  seu expoente conjugado. Se  $\varphi \in [L^p(\Omega)]'$ , então existe um único  $v \in L^q(\Omega)$  tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall u \in L^p(\Omega).$$

Além disso, temos que  $\|v\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}$ .

**Demonstração:** Ver [70]. ■

O teorema (2.5.2) permite-nos identificar  $[L^p(\Omega)]' \cong L^q(\Omega)$  onde  $1 \leq p \leq \infty$  e

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Teorema 2.5.3 (Desigualdade de Hölder)** *Sejam  $1 \leq p \leq \infty$  e  $q$  seu expoente conjugado, se  $u \in L^p(\Omega)$  e  $v \in L^q(\Omega)$ , então  $uv \in L^1(\Omega)$  e além disso*

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx \leq \|u(x)\|_p \|v(x)\|_q. \quad (2.2)$$

**Demonstração:** Os casos em que  $p = 1$  ou  $p = \infty$  seguem de modo imediato. Se  $1 < p < \infty$ , então utilizando a desigualdade de Young (2.1) temos que

$$|u(x)||v(x)| \leq \frac{1}{p}|u(x)|^p + \frac{1}{q}|v(x)|^q.$$

Assim,

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx \leq \frac{1}{p}\|u(x)\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{q}\|v(x)\|_{L^q(\Omega)}^q.$$

Consequentemente, segue que  $uv \in L^1(\Omega)$ . Substituindo  $u$  por  $\lambda u$  onde  $\lambda > 0$ , então

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|u(x)\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{\lambda q}\|v(x)\|_{L^q(\Omega)}^q.$$

Por outro lado, minimizando o lado direito da desigualdade acima para  $\lambda \in (0, \infty)$ , temos que o mínimo ocorre quando  $\lambda = \|u(x)\|_{L^p(\Omega)}^{-1} \|v(x)\|_{L^q(\Omega)}^{q/p}$  como queríamos demonstrar. ■

**Corolário 1** (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*) Se  $p = 2$  e  $q = 2$ , então a desigualdade (2.2) é denominada desigualdade de Cauchy-Schwarz e definida como

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u(x)\|_2 \|v(x)\|_2. \quad (2.3)$$

**Demonstração:** Ver [45]. ■

Um resultado importante demonstrado em [45] é dado por

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \right|^2 \leq \int_{\Omega} |u(x)v(x)|^2 dx \leq \|u(x)\|_2^2 \|v(x)\|_2^2. \quad (2.4)$$

**Observação 2.5.1** Quando  $p = 2$ , o espaço  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert, isto é, um espaço de Banach com um produto interno definido por

$$(u, v)_2 = (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

Notemos que pela desigualdade de Hölder (2.2) a integral acima é finita.

Outros espaços clássicos em Análise Funcional são os espaços localmente integráveis  $L^p_{loc}(\Omega)$ , que são constituídos pelas classes de funções  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que para todo compacto  $K \subset \Omega$  tem-se

$$\int_K |u(x)|^p dx < \infty.$$

Notemos que se  $1 \leq p \leq \infty$ , então  $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$ .

**Lema 2.5.1** (*Du Bois-Reymond*) Seja  $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ , com

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

então  $u(x) = 0$  q.t.p. em  $\Omega$ .

**Demonstração:** Ver [3]. ■

Dizemos que uma sequência  $(u_n)$  converge para  $u$  em  $L^p(\Omega)$  se  $\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . A proposição (2.5.1) estabelece que a convergência em  $L^p(\Omega)$  resulta na origem de uma convergência pontual.

**Proposição 2.5.1** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $u \in L^p(\Omega)$  e  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $L^p(\Omega)$  convergindo para  $u$  em  $L^p(\Omega)$ . Então existe uma subsequência de  $(u_k)$ , ainda denotada por  $(u_k)$ , tal que:

i)  $u_k(x) \rightarrow u(x)$ , *q.s. em*  $\Omega$ ;

ii)  $|u_k(x)| \leq h(x)$ , *q.s. em*  $\Omega$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , com  $h \in L^p(\Omega)$ .

**Demonstração:** Ver [24]. ■

## 2.6 Distribuições escalares

Suponhamos  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  um multi-índice de números inteiros não negativos. Denotamos por  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  a ordem do multi-índice e por  $D^\alpha$  a derivada parcial de ordem  $|\alpha|$  de uma função da seguinte maneira

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Se  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ , então por definição  $D^0 u = u$ .

A seguir na definição (2.6.1), enunciamos a convergência no espaço das classes de funções que são infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contido em  $\Omega$ , ou seja, estabelecemos a convergência em  $C_0^\infty(\Omega)$  e com isso tornamos-o um espaço vetorial topológico.

**Definição 2.6.1** *Seja  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de funções em  $C_0^\infty(\Omega)$ . Dizemos que  $(\varphi_n)$  converge para  $\varphi$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  e denotamos por*

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ em } C_0^\infty(\Omega)$$

*se existe um compacto  $K$  tal que  $\text{supp}(\varphi) \subset K$ ,  $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$  para todo  $n$  e*

$$D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi, \text{ uniformemente em } K \text{ para todo multi-índice } \alpha.$$

Indicamos por  $\mathcal{D}(\Omega)$  o espaço vetorial topológico formado por  $C_0^\infty(\Omega)$  munido da convergência dada pela definição (2.6.1).

**Definição 2.6.2** *Uma distribuição  $T$  sobre  $\Omega$  é um funcional linear definido em  $\mathcal{D}(\Omega)$ , tal que*

$$\lim_n \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

*para qualquer sequência  $(\varphi_n)$  convergindo para  $\varphi$  em  $\mathcal{D}(\Omega)$ .*

Notemos que uma distribuição é um elemento do espaço dual de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Denotamos por  $\mathcal{D}'(\Omega)$  o espaço de todas as distribuições sobre  $\Omega$ .

**Exemplo 2.6.1** *Seja  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ , definamos  $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx.$$

*Nessas condições, observemos que  $T_u$  é um funcional linear. Devido a unicidade da integral está bem definido e como*

$$\begin{aligned} \langle T_u, \alpha\varphi_1 + \varphi_2 \rangle &= \int_{\Omega} u(x) (\alpha\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) dx. \\ &= \int_{\Omega} \alpha u(x)\varphi_1(x)dx + \int_{\Omega} u(x)\varphi_2(x)dx. \\ &= \alpha \langle T_u, \varphi_1 \rangle + \langle T_u, \varphi_2 \rangle. \end{aligned}$$

*Então  $T_u$  é linear e além disso, se  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ , então  $\text{supp}(\varphi_n - \varphi) \subset K \subset \Omega$ , para algum  $K$  e daí*

$$|\langle T_u, \varphi_n - \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} u(x) (\varphi_n(x) - \varphi(x)) dx \right| \leq \max_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \int_K |u(x)| dx.$$

*Assim, se  $n \rightarrow \infty$ , então  $\max_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \rightarrow 0$  e portanto  $|\langle T_u, \varphi_n - \varphi \rangle| \rightarrow 0$ , isto é*

$$\lim_n \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Na definição (2.6.3) enunciamos o conceito generalizado de derivada, ou seja, a derivada de uma distribuição.

**Definição 2.6.3** *Sejam  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $\alpha$  um multi-índice. A derivada (no sentido das distribuições) de ordem  $\alpha$  de  $T$  é definida como sendo o funcional linear*

$$D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

*tal que*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Definição 2.6.4** *Seja  $(T_n)$  uma sequência de distribuições em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , dizemos que  $(T_n)$  converge para  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , quando  $n \rightarrow \infty$  e denotamos por*

$$T_n \rightarrow T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

se, e somente se,

$$\lim_n \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

## 2.7 O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Os espaços de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  são subespaços dos espaços de Lebesgue  $L^p(\Omega)$ , cujos elementos possuem derivadas no sentido das distribuições ainda nos espaços  $L^p(\Omega)$ , isto é, se  $\Omega$  é um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ ,  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $1 \leq p \leq \infty$  e  $m$  um inteiro não negativo, definimos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

onde  $D^\alpha$  é a derivada no sentido das distribuições.

**Observação 2.7.1** Ao mencionarmos que a derivada,  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ , de  $u$  é no sentido das distribuições, significa que existe uma função  $v = D^\alpha u \in L^p(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} v(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x)D^\alpha \varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Se  $1 \leq p < \infty$ , então definimos nos espaços de Sobolev uma norma que leva em consideração as derivadas das funções

$$\|u\|_{m,p} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se  $p = \infty$ , então munimos os espaços de Sobolev com a seguinte norma

$$\|u\|_{m,\infty} = \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

**Teorema 2.7.1** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $1 \leq p \leq \infty$  e  $m$  um número inteiro não negativo, então*

- i)  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach;
- ii) Se  $1 \leq p < \infty$ , então  $W^{m,p}(\Omega)$  é separável;
- iii) Se  $1 < p < \infty$ , então  $W^{m,p}(\Omega)$  é uniformemente convexo.

**Demonstração:** Ver [3].

■

Definimos o espaço  $W_0^{1,p}(\Omega)$  como sendo o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  no espaço  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Denotamos o dual topológico de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  por  $W^{-1,p'}(\Omega)$  onde  $p$  é o expoente conjugado de  $p'$ , isto é,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

Podemos realizar uma caracterização de  $W^{-1,p'}(\Omega)$  com o seguinte teorema (2.7.2).

**Teorema 2.7.2** *Se  $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ , então existem  $f_0, f_1, \dots, f_n$  em  $L^{p'}(\Omega)$  tais que*

$$\langle f, u \rangle = \int_{\Omega} f_0(x)u(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} dx, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Demonstração:** Ver [26]. ■

Notemos que, no sentido das distribuições temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_i(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx &= - \int_{\Omega} -f_i(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx. \\ &= \langle D(-f_i), \varphi \rangle. \\ &= - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$f = f_0 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

A relação acima justifica a notação de  $W^{-1,p'}(\Omega)$  para o dual topológico de  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

## 2.8 Espaços $L^p(0, T; X)$ e as distribuições vetoriais

Antes de definirmos as distribuições vetoriais, enunciaremos alguns resultados relevantes para o que se segue.

**Definição 2.8.1** *A tripla  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  é um espaço de medida se:*

i)  $\mathcal{M}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$ , ou seja,

(a)  $\emptyset \in \mathcal{M}$ .

(b)  $A \in \mathcal{M} \implies A^c \in \mathcal{M}$ .

(c)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$  sempre que  $A_n \in \mathcal{M}, \forall n$ .

ii)  $\mu$  é uma medida,  $\mu: \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$  ou seja,

$$(a) \mu(\emptyset) = 0.$$

(b)  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$  sempre que  $(A_n)$  é uma família de membros disjuntos em  $\mathcal{M}$ .

iii)  $\Omega$  é  $\sigma$ -finito, isto é, existe uma família enumerável  $(\Omega_n)$  em  $\mathcal{M}$  tal que  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$  e  $\mu(\Omega_n) < \infty, \forall n$ .

Como exemplos de medidas, podemos citar a distância em  $\mathbb{R}$  e a área em  $\mathbb{R}^2$ . Os conjuntos de  $E \in \mathcal{M}$  que satisfazem a propriedade  $\mu(E) = 0$  são chamados conjuntos de medida nula. Como exemplos de conjuntos de medida nula, em  $(a, b)$ , podemos tomar o conjunto  $E$  como sendo um conjunto enumerável de pontos de  $(a, b)$ , e outro exemplo de conjunto de medida nula, em  $\mathbb{Q} := [a, b] \times [a, b]$ , como sendo um conjunto enumerável de retas contidas em  $\mathbb{Q}$ .

**Definição 2.8.2** *Sejam  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida e  $X$  um espaço de Banach de norma  $\|\cdot\|_X$ . Uma função vetorial  $\varphi : \Omega \rightarrow X$  é dita simples se existe somente um número finito  $n$  de  $M_i \in \mathcal{M}$  disjuntos, com  $\mu(\bigcup M_i) < \infty$  tais que  $\varphi(t) = \varphi_i$  constante e diferente de zero em  $M_i$  e  $\varphi(t) = 0$  em  $\Omega \setminus \bigcup M_i$ , além disso, sua integral é definida como sendo o vetor de  $X$  dado por*

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(M_i) \varphi_i.$$

**Definição 2.8.3** *Sejam  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida e  $X$  um espaço de Banach de norma  $\|\cdot\|_X$  e dual  $X'$ . Uma função  $\varphi : \Omega \rightarrow X$  é dita fracamente mensurável se para toda  $f \in X'$  a função*

$$t \mapsto \langle f, \varphi(t) \rangle$$

*é mensurável.*

**Definição 2.8.4** *Sejam  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida e  $X$  um espaço de Banach de norma  $\|\cdot\|_X$ . Uma função  $\varphi : \Omega \rightarrow X$  é dita fortemente mensurável ou apenas mensurável se existe uma sequência de funções simples convergindo fortemente para  $\varphi$  em q.t.p.*

Lembremos que uma sequência  $(\varphi_n)$  em um espaço de Banach de norma  $\|\cdot\|_X$  converge fortemente para o elemento  $\varphi \in X$  se  $\|\varphi_n - \varphi\|_X \rightarrow 0$ .

**Definição 2.8.5** *Sejam  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida e  $X$  um espaço de Banach de norma  $\|\cdot\|_X$ . Uma função  $\varphi : \Omega \rightarrow X$  é dita Bochner integrável ou apenas integrável se existe uma sequência de funções simples  $\varphi_n : \Omega \rightarrow X$  tal que, para todo  $n$ , a função*

$$t \mapsto \|\varphi_n(t) - \varphi(t)\|_X$$

*é integrável e além disso*

$$\lim_n \int_{\Omega} \|\varphi_n(t) - \varphi(t)\|_X d\mu = 0.$$

**Teorema 2.8.1 (de Bochner):** *Sejam  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida e  $X$  um espaço de Banach de norma  $\|\cdot\|_X$ . Uma função fortemente mensurável  $\varphi : \Omega \rightarrow X$  é Bochner integrável se, e somente se,  $\|\varphi\|_X$  é integrável em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Ver [24]. ■

Suponhamos  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $X$  um espaço de Banach e  $1 \leq p < \infty$ . Os espaços denotados por  $L^p(a, b; X)$  são constituídos pelas classes de funções fortemente mensuráveis  $u : (a, b) \rightarrow X$  tais que a função  $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$  é integrável a Lebesgue em  $(a, b)$  e são munidos pela norma

$$\|u\|_{L^p(a, b; X)} = \left( \int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por outro lado, espaço denotado por  $L^\infty(a, b; X)$  é formado pelas classes de funções fortemente mensuráveis que são essencialmente limitadas no intervalo  $(a, b)$  tais que a função  $t \mapsto \|u(t)\|_X^p \in L^\infty(a, b)$ . A norma em  $L^\infty(a, b; X)$  é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(a, b; X)} = \sup_{t \in (a, b)} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Quando  $X$  é reflexivo e separável com  $1 \leq p < \infty$ , então  $L^p(0, T; X)$  é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach  $L^{p'}(0, T; X')$ , onde  $p$  e  $p'$  são expoentes conjugados, isto é,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Se  $p = 1$ , então o dual topológico do espaço  $L^1(0, T; X)$  se identifica ao espaço  $L^\infty(0, T; X')$  e a dualidade entre esses espaços é dada na forma integral

$$\langle u, v \rangle_{(L^p(0, T; X))' \times L^p(0, T; X)} = \langle u, v \rangle_{L^{p'}(0, T; X') \times L^p(0, T; X)}.$$

Se  $p = 2$  e  $H$  é um espaço de Hilbert, então  $L^2(a, b; H)$  é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(u, v)_{L^2(a, b; H)} = \int_a^b (u(t), v(t))_H dt.$$

**Observação 2.8.1** *Se  $1 \leq p \leq \infty$ , então  $L^p(0, T; H)$  é um espaço de Banach.*

**Definição 2.8.6** *Uma distribuição vetorial sobre  $(a, b)$ , com valores em um espaço de Banach  $X$ , é uma transformação linear*

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(a, b) &\longrightarrow X, \\ \varphi &\longmapsto \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

*contínua em  $\mathcal{D}(a, b)$ , ou seja, para toda sequência  $(\varphi_n)$  com  $\varphi_n \longrightarrow \varphi$  em  $\mathcal{D}(a, b)$  então*

$$\lim_n \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle \text{ em } X.$$

Por  $\mathcal{D}'(a, b; X)$  denotamos o espaço das distribuições vetoriais sobre o intervalo  $(a, b)$  com valores em  $X$ .

**Definição 2.8.7** *Seja  $T \in \mathcal{D}'(a, b; X)$ . A derivada de ordem  $n$  é definida como sendo a distribuição vetorial sobre  $(a, b)$  com valores em  $X$  dada por*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a, b).$$

## 2.9 O espaço de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$

Nesta seção explicitamos as principais propriedades dos espaços generalizados de Lebesgue  $L^{p(x)}(\Omega)$ , para mais detalhes indicamos as referências [18, 24, 33, 36, 44].

Suponhamos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  seja um conjunto aberto e mensurável. A função mensurável  $p(x) : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$  é denominada de expoente variável.

O espaço generalizado de Lebesgue é formado pelas classes de funções mensuráveis  $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $\int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx$  é finita, ou seja,

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mensuráveis; } \rho(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}.$$

Munimos o referido espaço com a norma de Luxemburg

$$\|u\|_{p(x)} = \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0; \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}. \quad (2.5)$$

Denotamos por

$$p^- = \inf_{x \in \Omega} \text{ess } p(x)$$

e

$$p^+ = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } p(x).$$

Se  $p^+$  é finito, então o expoente variável  $p(x)$  é limitado e além disso temos as seguintes relações

$$\min \left\{ \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}, \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+} \right\} \leq \rho(u) \leq \max \left\{ \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}, \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+} \right\}. \quad (2.6)$$

A afirmação (2.6) pode ser representada de forma equivalente por

$$\min \left\{ \rho(u)^{\frac{1}{p^-}}, \rho(u)^{\frac{1}{p^+}} \right\} \leq \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \max \left\{ \rho(u)^{\frac{1}{p^-}}, \rho(u)^{\frac{1}{p^+}} \right\}. \quad (2.7)$$

**Teorema 2.9.1** *O espaço  $L^{p(x)}(\Omega)$  munido com a norma de Luxemburg dada pela equação (2.5) é um espaço de Banach. Se  $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ , então  $L^{p(x)}(\Omega)$  é reflexivo e separável.*

**Demonstração:** Ver [18, 36]. ■

O espaço dual  $(L^{p(x)}(\Omega))'$  é identificado por  $L^{p'(x)}(\Omega)$  onde  $p(x)$  e  $p'(x)$  são expoentes conjugados tais que  $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ .

No espaço de expoente variável de Lebesgue, a desigualdade de Hölder é válida.

**Teorema 2.9.2 (Desigualdade de Hölder)** *Suponhamos que  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ,  $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$  e  $1 < p(x) < \infty$ , então*

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \left( \frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p')^-} \right) \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \|v\|_{L^{p'(x)}(\Omega)} \leq 2 \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \|v\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}. \quad (2.8)$$

**Demonstração:** Ver [18]. ■

**Teorema 2.9.3** *Se  $p(x)$  e  $q(x)$  são expoentes variáveis tais que  $p(x) \geq q(x)$  q.s. em  $\Omega$ , então  $L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ .*

**Demonstração:** Ver [18, 36]. ■

**Teorema 2.9.4 (Representação de Riesz)** *Suponhamos que  $p^- > 1$ . Se  $p(x)$  e  $p'(x)$  são expoentes conjugados, então para toda  $f \in L^{p(x)}(\Omega)$  existe um único  $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$  tal que*

$$\langle f, u \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad \forall u \in L^{p(x)}(\Omega). \quad (2.9)$$

**Demonstração:** Ver [36]. ■

## 2.10 O espaço de Sobolev $W^{m,p(x)}(\Omega)$

Os espaços generalizados de Sobolev  $W^{m,p(x)}(\Omega)$  são os subespaços dos espaços de Lebesgue com expoente variável  $L^{p(x)}(\Omega)$ , cujos elementos possuem derivadas no sentido das distribuições ainda nos espaços  $L^{p(x)}(\Omega)$ , isto é, se  $\Omega$  é um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ ,  $p(x) : \Omega \rightarrow [1, \infty)$  e  $m$  um inteiro não negativo, definimos o espaço de Sobolev com expoente variável por

$$W^{m,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega); D^\alpha u \in L^{p(x)}(\Omega) \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

onde  $D^\alpha$  é a derivada no sentido das distribuições.

Nesse espaço está definido a norma

$$\|u\|_{m,p(x)} = \|u\|_{W^{m,p(x)}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p(x)} \right)^{\frac{1}{p(x)}}.$$

O espaço  $W^{m,p(x)}(\Omega)$  munido da norma acima é um espaço de Banach.

Se  $m = 1$ , então

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p(x)}(\Omega) \forall j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

onde  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  é a  $i$ -ésima derivada de  $u$  no sentido das distribuições, isto é,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Também podemos definir o espaço  $W^{1,p(x)}(\Omega)$  por

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega); |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\},$$

onde  $\nabla u$  é o vetor gradiente, isto é,

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Ainda em  $W^{1,p(x)}(\Omega)$  temos que as seguintes normas são equivalentes

$$\|u\|_{1,p(x)} = \|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$$

e

$$\|u\|_{1,p(x)} = \|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}.$$

**Teorema 2.10.1** *Se  $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ , então  $W^{m,p(x)}(\Omega)$  é separável e reflexivo.*

**Demonstração:** Ver [18]. ■

**Definição 2.10.1** *Denotamos por  $W_0^{m,p(x)}(\Omega)$  o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  sobre  $W^{m,p(x)}(\Omega)$ .*

**Teorema 2.10.2** *Se  $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ , então  $W_0^{m,p(x)}(\Omega)$  é um espaço de Banach, separável e reflexivo.*

**Demonstração:** Ver [18]. ■

**Teorema 2.10.3 (Desigualdade de Poincaré)** *Sejam  $\Omega$  limitado,  $p(x) \in C(\overline{\Omega})$  com  $p^- > 1$ . Então existe  $c > 0$ , tal que*

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega). \quad (2.10)$$

**Demonstração:** Ver [33]. ■

Dizemos que a função de expoente variável  $p(x) : \Omega \rightarrow (1, \infty)$  é log-Hölder contínua se existe uma constante positiva  $c$  tal que

$$|p(x) - p(y)| \log |x - y| \leq c, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

**Teorema 2.10.4** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado com fronteira suave. Suponhamos que  $p(x) : \Omega \rightarrow (1, \infty)$  seja uma função limitada e log-Hölder contínua.*

*Se  $q(x) : \Omega \rightarrow (1, \infty)$ , com  $q^+ < n$ , é uma função limitada e mensurável com*

$$q(x) \leq p^* = \frac{np(x)}{n - 2p(x)}, \quad \forall x \in \Omega.$$

*Então existe uma imersão contínua*

$$W^{2,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega).$$

**Demonstração:** Ver [33]. ■

**Teorema 2.10.5** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado com fronteira suave. Suponhamos que  $p(x) : \Omega \rightarrow (1, \infty)$  seja uma função limitada e log-Hölder contínua em  $\overline{\Omega}$ . Nessas condições, existe uma constante  $c$  tal que para cada  $u \in W_0^{2,p(x)}(\Omega)$  temos*

$$\|u\|_{W_0^{2,p(x)}(\Omega)} \leq c \|\Delta u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}.$$

**Demonstração:** Ver [77]. ■

**Proposição 2.10.1** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado e  $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$  uma base ortonormal em  $L^2(\Omega)$ , então para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe uma constante  $N_\varepsilon > 0$  tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \left( \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left( \int_{\Omega} u \omega_i dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

para todo  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  onde  $2 \leq p < \infty$ .

**Demonstração:** Ver [18, 28]. ■

O teorema (2.10.6) é de extrema importância pois relaciona a convergência com a convergência fraca.

**Teorema 2.10.6** *Seja  $p(x) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função log-Hölder contínua e limitada por  $p^- > 1$ . Se  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  é limitada em  $L^{p(x)}(Q_T)$  e  $u_n \rightarrow u$  quase sempre em  $Q_T$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então existe uma subsequência de  $\{u_n\}$ , ainda denotada por  $\{u_n\}$ , tal que  $u_n \rightharpoonup u$  fracamente em  $L^{p(x)}(Q_T)$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

**Demonstração:** Ver [40]. ■

## 2.11 Operadores limitados, contínuos, monótonos e hemicontínuos

Nesta seção exibimos os principais resultados sobre os operadores  $p$ -Laplaciano e  $p(x)$ -Laplaciano, para mais detalhes aconselhamos as referências [18, 34, 44].

Suponhamos que  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  sejam dois espaços normados. Denominamos de operador  $T$  toda aplicação

$$T : X \rightarrow Y$$

e denotamos por  $T(x)$  o valor de  $T$  no ponto  $x \in X$ .

**Definição 2.11.1** Dizemos que o operador  $T : X \longrightarrow Y$  é limitado, se existe uma constante positiva  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Se  $T : X \longrightarrow Y$  é limitado, então definimos sua norma por

$$\|T\| = \sup_{x \in X} \left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}; x \neq 0 \right\}.$$

**Definição 2.11.2** Um operador  $T : X \longrightarrow Y$  é contínuo no ponto  $x_0 \in X$ , se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que

$$\forall x \in X, \|x - x_0\|_X < \delta \implies \|T(x) - T(x_0)\|_Y < \varepsilon.$$

Dizemos que  $T$  é um operador contínuo, se  $T$  é contínuo em todo  $x \in X$ .

**Definição 2.11.3** Sejam  $X$  um espaço normado e  $X'$  seu dual topológico. Um operador  $T : X \longrightarrow X'$  é monótono, se

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in X.$$

Se

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle > 0, \quad \forall x, y \in X \text{ com } x \neq y$$

então o operador  $T$  é denominado estritamente monótono.

**Definição 2.11.4** Um operador  $T : X \longrightarrow X'$  é hemicontínuo se a função real

$$\lambda \longmapsto \langle T(\lambda x + y), z \rangle$$

é contínua para quaisquer  $x, y, z \in X$ .

**Proposição 2.11.1** Se o operador  $T : X \longrightarrow X'$  é contínuo, então é hemicontínuo.

**Demonstração:** Ver [34]. ■

### 2.11.1 O operador $p$ -Laplaciano

O operador  $p$ -Laplaciano é denotado por

$$\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$$

e definido por

$$-\Delta_p u = -\operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u). \quad (2.11)$$

Notemos que, a equação (2.11) é equivalente a

$$-\Delta_p u = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right). \quad (2.12)$$

Observemos que, se  $p = 2$ , então obtemos o operador Laplaciano. De fato,

$$\Delta_2 u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{2-2} \nabla u) = \operatorname{div} (|\nabla u|^0 \nabla u) = \operatorname{div} (\nabla u) = \Delta u,$$

ou ainda,

$$\Delta_2 u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{2-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Delta u.$$

Destacamos que, as igualdades definidas pelas equações (2.11) e (2.12) não ocorrem no sentido literal, pois  $-\operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$  é uma função definida em  $\Omega$  e não um funcional, porém esta função implica na origem um funcional definido por

$$\langle -\Delta_p u, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Teorema 2.11.1** *O operador  $p$ -Laplaciano é limitado, contínuo, monótono e hemicontínuo.*

**Demonstração:** Ver [44]. ■

### 2.11.2 O operador $p(x)$ -Laplaciano

Nesta seção generalizamos o operador  $p$ -Laplaciano, para tanto, suponhamos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $p(x) : \Omega \rightarrow (1, \infty)$ . O operador  $p(x)$ -Laplaciano é denotado por

$$\Delta_p : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow (W_0^{1,p}(\Omega))'$$

e definido por

$$-\Delta_{p(x)} u = -\operatorname{div} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u). \quad (2.13)$$

Notemos que, a equação (2.13) é equivalente a

$$-\Delta_{p(x)}u = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right). \quad (2.14)$$

Analogamente ao operador  $p$ -Laplaciano, temos que para cada  $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$  o operador  $p(x)$ -Laplaciano implica na origem um funcional definido

$$\langle -\Delta_{p(x)}u, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

**Teorema 2.11.2** *O operador  $p(x)$ -Laplaciano é limitado, contínuo, monótono e hemi-contínuo.*

**Demonstração:** Ver [44]. ■

## 2.12 Outros resultados importantes

Nesta seção enunciamos outros resultados importantes de Análise Funcional que são fundamentais no desenvolvimento da dissertação.

**Definição 2.12.1** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Denominamos por base Hilbertiana de  $H$  uma sequência de elementos  $(\omega_n)$  de  $H$  tais que:*

- i)  $|\omega_n| = 1 \quad \forall n$ , e  $(\omega_n, \omega_m) = 0 \quad \forall n, m$ , onde  $m \neq n$ ;*
- ii) O espaço gerado pela  $(\omega_n)$  é denso em  $H$ .*

**Lema 2.12.1 (Gronwall)** *Sejam  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas e não negativas. Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) ds$$

*com  $\alpha \geq 0$ , então*

$$\varphi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \psi(s) ds}, \quad \forall t \in [a, b].$$

*Em particular, se  $\varphi(t)$  é limitada e se  $\alpha = 0$ , então  $\varphi \equiv 0$ .*

**Demonstração:** Ver [51]. ■

**Lema 2.12.2** *Seja  $\varphi(t)$  contínua e não negativa em  $[0, T]$ . Se*

$$\varphi(t) \leq c_1 + c_2 \int_a^t [\varphi(s) + \varphi^2(s)] ds,$$

com  $0 \leq t \leq T$  e  $c_1, c_2 \geq 0$ , então existem  $T_0 > 0$  e  $c > 0$  tais que

$$\varphi(t) \leq c, \quad \forall t \in [0, T_0].$$

**Demonstração:** Ver [51]. ■

**Teorema 2.12.1 (Peano)** *Suponhamos que  $I = [a, b]$  seja um intervalo real,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua. Se  $(t_0, x_0) \in I \times D$  e  $C > 0$  e  $T > 0$  são tais que  $[t_0 - T, t_0 + T] \times \mathcal{B}(x_0, C) \subseteq I \times D$  onde  $\mathcal{B}(x_0, C)$  é a bola com raio  $C$  e centrada no ponto  $x_0$ , então o sistema*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.15)$$

com  $t \in [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$ , possui pelo menos uma solução  $x$ , onde  $\gamma \leq \min \left\{ T, \frac{C}{M} \right\}$  e

$$M = \max_{(t,x) \in [t_0-T, t_0+T] \times B(x_0, C)} |f(t, x)|.$$

**Demonstração:** Ver [69]. ■

**Teorema 2.12.2 (Arzela-Ascoli)** *Se a sequência  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada e equicontínua, então existe uma subsequência de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que converge uniformemente.*

**Demonstração:** Ver [43]. ■

**Teorema 2.12.3 (Vitali)** *Suponhamos que a sequência  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é equi-integrável, limitada e  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  q.s. quando  $n \rightarrow \infty$ , então  $f \in L^1$  e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| dx = 0.$$

**Demonstração:** Ver [75]. ■

**Lema 2.12.3 (Nakao)** *Seja  $\Psi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função não negativa e limitada. Se existem duas constantes  $\alpha > 0$  e  $\beta \geq 0$  tais que*

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} \Psi^{1+\beta}(s) \leq \alpha [\Psi(t) - \Psi(t+1)], \quad \forall t \geq 0. \quad (2.16)$$

Então existem constantes positivas  $C$  e  $\gamma$  tais que

$$\begin{cases} \Psi(t) \leq Ce^{-\gamma t}, & \forall t \geq 0, & \text{quando } \beta = 0, \\ \Psi(t) \leq C(t+1)^{-\frac{1}{\beta}}, & \forall t \geq 0, & \text{quando } \beta > 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

**Demonstração:** Ver [58].

■

# Capítulo 3

## Equação de viga não linear envolvendo o operador $p(x)$ –Laplaciano

Neste capítulo enunciamos as hipóteses necessárias para demonstrarmos a existência e o comportamento assintótico da solução fraca da equação de viga de quarta ordem não linear com dissipação forte e perturbação de ordem inferior do tipo  $p(x)$ –Laplaciano definida por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta (|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u) - \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + f \left( x, t, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = g(x, t) & \text{em } Q_T, \\ u = 0, \Delta u = 0 & \text{em } \partial Q_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , é um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  regular,  $0 < T < \infty$ ,  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $\partial Q_T = \partial\Omega \times (0, T)$  e as funções  $p$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $u_0$  e  $u_1$  satisfazem as seguintes hipóteses:

**(H.1)**  $p : \bar{\Omega} \rightarrow (1, \infty)$  é log-Hölder contínua, isto é, existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$|p(x) - p(y)| \log |x - y| \leq c, \quad \forall x, y \in \bar{\Omega}$$

e satisfaz

$$1 < p^- = \inf_{\bar{\Omega}} p(x) \leq p^+ = \sup_{\bar{\Omega}} p(x) < \frac{N}{2}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

onde  $\bar{\Omega}$  denota o fecho de  $\Omega$ ;

**(H.2)**  $f(x, t, s) \in C(\Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R})$  e existem constantes positivas  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  tais

que

$$\begin{cases} f(x, t, s) s \geq c_1 |s|^{q(x)} - c_2, \\ |f(x, t, s)| \leq c_3 \left( |s|^{q(x)-1} + 1 \right), \end{cases} \quad (3.2)$$

para todo  $(x, t, s) \in \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}$ , onde  $q : \bar{\Omega} \rightarrow (1, \infty)$  é log-Hölder contínua satisfazendo

$$1 < q^- = \inf_{\bar{\Omega}} q(x) \leq q(x) < \frac{Np(x)}{N - 2p(x)}, \quad \forall x \in \bar{\Omega};$$

**(H.3)**  $u_0 \in W^{2,p(x)}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ ,  $u_1 \in L^2(\Omega)$  e  $g \in L^{q'(x)}(Q_T)$  onde

$$\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (3.3)$$

### 3.1 Existência de solução fraca

Iniciamos essa seção definindo o conceito de solução fraca para o problema (3.1).

**Definição 3.1.1** A função  $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução fraca do problema (3.1) se

$$u \in L^\infty(0, T; W_0^{2,p(x)}(\Omega)) \cap C(0, T; W_0^{1,2}(\Omega)), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^{q(x)}(Q_T) \quad (3.5)$$

e

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \varphi(x, 0) dx - \int_{Q_T} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \int_{Q_T} |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \Delta \varphi dx dt \quad (3.6)$$

$$+ \int_{Q_T} \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \nabla \varphi dx dt + \int_{Q_T} f\left(x, t, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \varphi dx dt = \int_{Q_T} g(x, t) \varphi dx dt,$$

para todo  $\varphi \in C^1(0, T; C_0^\infty(\Omega))$  com  $\varphi(x, T) = 0$ .

Nesta dissertação, aplicamos o método de Faedo-Galerkin no problema (3.1) e determinamos a existência de soluções fracas, para tanto, suponhamos que a sequência  $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$  seja uma base Hilbertiana em  $L^2(\Omega)$  e que

$$V_n = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n].$$

Além disso, seja

$$C_0^\infty(\Omega) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n}^{C^2(\bar{\Omega})}.$$

Devido ao fato de que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$  é denso em  $C^2(\overline{\Omega})$  então temos o seguinte lema (3.1.1).

**Lema 3.1.1** *Se  $u_0 \in W^{2,p(x)}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ , então existe  $\psi_n \in V_n$  tal que*

$$\psi_n \longrightarrow u_0 \text{ em } W^{2,p(x)}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$$

quando  $n \longrightarrow \infty$ .

**Demonstração:** Ver [48]. ■

Multiplicando a equação (3.1) por uma função arbitrária  $v \in V_n$  e integrando sobre  $\Omega$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta (|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u) - \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + f \left( x, t, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] v dx &= \int_{\Omega} g(x, t) v dx. \\ \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v + \Delta (|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u) v - \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) v + f \left( x, t, \frac{\partial u}{\partial t} \right) v dx &= \int_{\Omega} g(x, t) v dx. \\ \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dx + \int_{\Omega} \Delta (|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u) v dx - \int_{\Omega} \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) v dx + \int_{\Omega} f \left( x, t, \frac{\partial u}{\partial t} \right) v dx &= \int_{\Omega} g(x, t) v dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Utilizando a fórmula de Green no segundo termo da equação (3.7), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta (|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u) v dx &= \int_{\Omega} |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial (|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u)}{\partial \hat{n}} v dx \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \hat{n}} (|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u) dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Onde  $\hat{n}$  representa o vetor unitário normal externo a  $\Omega$ . Por hipótese, as condições de contorno são  $u = \Delta u = 0$  em  $\partial\Omega$ , então a equação (3.8) assume a seguinte forma

$$\int_{\Omega} \Delta (|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u) v dx = \int_{\Omega} |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \Delta v dx. \quad (3.9)$$

Aplicando a fórmula de Green no terceiro termo da equação (3.7), temos

$$- \int_{\Omega} \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) v dx = \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) v dx. \quad (3.10)$$

Utilizando novamente o fato de que as condições de contorno são nulas em  $\partial\Omega$ , então a equação (3.10) torna-se

$$- \int_{\Omega} \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) v dx = \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \nabla v dx. \quad (3.11)$$

Substituindo as equações (3.9) e (3.11) na equação (3.7), segue que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dx + \int_{\Omega} |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \Delta v dx + \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \nabla v dx + \int_{\Omega} f \left( x, t, \frac{\partial u}{\partial t} \right) v dx = \int_{\Omega} g(x, t) v dx.$$

O método de Faedo-Galerkin consiste em determinar uma sequência de soluções sob a forma

$$u_n(x, t) = \sum_{j=1}^n \eta_{nj}(t) \omega_j(x) \in V_n \quad (3.12)$$

de modo que satisfaça o seguinte problema aproximado

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} v dx + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \Delta v dx + \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla v dx + \int_{\Omega} f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) v dx = \int_{\Omega} g_n(x, t) v dx \quad (3.13)$$

para toda  $v \in V_n$  com  $g_n \in C_0^\infty(Q_T)$  e  $g_n \rightarrow g$  em  $L^{q'}(Q_T)$ .

Substituindo a equação (3.12) em (3.13) e supondo, sem perda de generalidade,  $v = \omega_i$  com  $1 \leq i \leq n$ , temos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \eta_{nj}''(t) \omega_j(x) \omega_i(x) dx + \int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^n \eta_{nj}(t) \Delta \omega_j(x) \right|^{p(x)-2} \left( \sum_{j=1}^n \eta_{nj}(t) \Delta \omega_j(x) \right) \Delta \omega_i(x) dx + \\ & \int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^n \eta_{nj}'(t) \nabla \omega_j(x) \right) \nabla \omega_i(x) dx + \int_{\Omega} f \left( x, t, \sum_{j=1}^n \eta_{nj}'(t) \omega_j(x) \right) \omega_i(x) dx = \int_{\Omega} g_n(x, t) \omega_i(x) dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\text{Onde } \eta_{nj}'(t) = \frac{\partial \eta_{nj}}{\partial t} \text{ e } \eta_{nj}''(t) = \frac{\partial^2 \eta_{nj}}{\partial t^2}.$$

Notemos que, quando  $i = 1$  o primeiro termo da equação (3.14) torna-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \eta_{nj}''(t) \omega_j(x) \omega_1(x) dx &= \int_{\Omega} \eta_{n1}''(t) \omega_1(x) \omega_1(x) + \eta_{n2}''(t) \omega_2(x) \omega_1(x) + \dots + \eta_{nn}''(t) \omega_n(x) \omega_1(x) dx. \\ &= \int_{\Omega} \eta_{n1}''(t) \omega_1(x) \omega_1(x) dx + \int_{\Omega} \eta_{n2}''(t) \omega_2(x) \omega_1(x) dx + \dots + \\ & \quad \int_{\Omega} \eta_{nn}''(t) \omega_n(x) \omega_1(x) dx. \\ &= \eta_{n1}''(t) \int_{\Omega} \omega_1(x) \omega_1(x) dx + \eta_{n2}''(t) \int_{\Omega} \omega_2(x) \omega_1(x) dx + \dots + \\ & \quad \eta_{nn}''(t) \int_{\Omega} \omega_n(x) \omega_1(x) dx. \end{aligned}$$



Suponhamos que

$$\begin{aligned} X(t) &= \eta'(t), \\ Y(t) &= (\eta(t), X(t)) \end{aligned}$$

e

$$Z_n(t) = (X(t), G_n(t) - P_n(t, \eta(t), X(t))),$$

então o sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem na variável  $t$  dado pela equação (3.17) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} Y'(t) = Z_n(t, Y(t)), \\ Y(0) = (U_{0n}, U_{1n}). \end{cases} \quad (3.18)$$

Notemos que, nosso problema foi reduzido a um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem na variável  $t$ . Antes de demonstrarmos a solução desse sistema, façamos algumas observações.

### Observação 3.1.1

$$\int_{\Omega} f\left(x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right) \frac{\partial u_n}{\partial t} dx \geq c_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx - c_4. \quad (3.19)$$

**Demonstração:** De fato, utilizando a limitação inferior da função  $f$  dada na hipótese (H.2) pela equação (3.2), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f\left(x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right) \frac{\partial u_n}{\partial t} dx &\geq \int_{\Omega} \left( c_1 \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} - c_2 \right) dx. \\ &= c_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx - c_2 \int_{\Omega} dx. \\ &= c_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx - c_4. \end{aligned}$$

Onde  $c_4 = c_2 \int_{\Omega} dx \geq 0$ . ■

### Observação 3.1.2

$$\int_{\Omega} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} dx = \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx. \quad (3.20)$$

**Demonstração:** Com efeito, notemos que

$$\int_{\Omega} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} dx = \int_{\Omega} \left( \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx.$$

Ou seja,

$$\int_{\Omega} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} dx = \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx.$$

■

### Observação 3.1.3

$$\int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \Delta \frac{\partial u_n}{\partial t} dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx. \quad (3.21)$$

**Demonstração:** Utilizando a regra da Cadeia, obtemos que

$$\frac{d}{dt} |\Delta u_n|^{p(x)} = p(x) |\Delta u_n|^{p(x)-1} \frac{1}{2 |\Delta u_n|} 2 \Delta u_n \Delta \frac{\partial u_n}{\partial t}.$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt} |\Delta u_n|^{p(x)} = p(x) |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \Delta \frac{\partial u_n}{\partial t}.$$

Com isso, concluímos que

$$\int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \Delta \frac{\partial u_n}{\partial t} dx = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \frac{d}{dt} |\Delta u_n|^{p(x)} dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx.$$

■

### Observação 3.1.4

$$P_n(t, \eta, \eta') \eta' \geq \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx + \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + c_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx - c_4. \quad (3.22)$$

**Demonstração:** Utilizando a equação (3.15) tem-se

$$P_n(t, \eta, \eta') \eta' = \left[ \int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^n \eta_{nj} \Delta \omega_j \right|^{p(x)-2} \left( \sum_{j=1}^n \eta_{nj} \Delta \omega_j \right) \Delta \omega_i dx + \int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^n \eta'_{nj} \nabla \omega_j \right) \nabla \omega_i dx + \int_{\Omega} f \left( x, t, \sum_{j=1}^n \eta'_{nj} \omega_j \right) \omega_i dx \right] (\eta'_{n1}, \eta'_{n2}, \dots, \eta'_{nn})$$

onde  $i = 1, 2, \dots, n$ . Daí,

$$P_n(t, \eta, \eta') \eta' = \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \sum_{i=1}^n \Delta \omega_i \eta'_{ni} dx + \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla \sum_{i=1}^n \omega_i \eta'_{ni} dx + \int_{\Omega} f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \sum_{i=1}^n \omega_i \eta'_{ni} dx.$$

Logo,

$$P_n(t, \eta, \eta')\eta' = \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \Delta \frac{\partial u_n}{\partial t} dx + \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} dx + \int_{\Omega} f\left(x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right) \frac{\partial u_n}{\partial t} dx. \quad (3.23)$$

Substituindo as equações (3.19), (3.20) e (3.21) respectivamente no primeiro, segundo e terceiro termo da equação (3.23), demonstramos que

$$P_n(t, \eta, \eta')\eta' \geq \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx + \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + c_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx - c_4. \quad \blacksquare$$

Retornando ao sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem dado por (3.18), temos

$$Y' = Z_n.$$

Compondo-o com  $Y$  e aplicando o produto interno, segue

$$\begin{aligned} Y'Y &= Z_n Y. \\ Y'Y &= (X, G_n - P_n)(\eta, X). \\ Y'Y &= (\eta', G_n - P_n)(\eta, \eta'). \\ Y'Y &= \eta'\eta + G_n\eta' - P_n\eta'. \\ Y'Y - \eta'\eta - G_n\eta' &= -P_n\eta'. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Aplicando a inequação (3.22) na equação (3.24), tem-se

$$Y'Y - \eta'\eta - G_n\eta' \leq -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx - \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx - c_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx + c_4.$$

Consequentemente,

$$Y'Y + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx + \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + c_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx \leq \eta'\eta + G_n\eta' + c_4. \quad (3.25)$$

Notemos que

$$\eta'\eta \leq |\eta'|\eta. \quad (3.26)$$

Aplicando a desigualdade de Young (2.1) na inequação (3.26), então

$$\eta'\eta \leq |\eta'|\eta \leq \frac{1}{2}|\eta'|^2 + \frac{1}{2}|\eta|^2. \quad (3.27)$$

Analogamente, pela desigualdade de Young (2.1), temos

$$G_n \eta' \leq \frac{1}{2} |G_n|^2 + \frac{1}{2} |\eta'|^2. \quad (3.28)$$

Substituindo as inequações (3.27) e (3.28) em (3.25) resulta em

$$Y'Y + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx + \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + c_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx \leq \frac{1}{2} |\eta'|^2 + \frac{1}{2} |\eta|^2 + \frac{1}{2} |G_n|^2 + \frac{1}{2} |\eta'|^2 + c_4. \quad (3.29)$$

Por outro lado, como  $Y(t) = (\eta(t), \eta'(t))$ , então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |Y|^2 &= \frac{1}{2} \langle (\eta, \eta'), (\eta, \eta') \rangle. \\ &= \frac{1}{2} \langle \eta^2 + \eta'^2 \rangle. \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\eta^2 + \eta'^2|^2 dx. \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\eta^2|^2 + |\eta'^2|^2 dx. \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\eta^2|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\eta'^2|^2 dx. \\ &= \frac{1}{2} |\eta|^2 + \frac{1}{2} |\eta'|^2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2} |Y|^2 = \frac{1}{2} |\eta|^2 + \frac{1}{2} |\eta'|^2. \quad (3.30)$$

Além disso, como  $\frac{1}{2} |\eta|^2 \geq 0$ , então

$$\frac{1}{2} |\eta'|^2 \leq \frac{1}{2} |Y|^2. \quad (3.31)$$

Usando a equação (3.30), podemos reescrever a inequação (3.29) como sendo

$$Y'Y + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx + \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + c_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx \leq \frac{1}{2} |Y|^2 + \frac{1}{2} |G_n|^2 + \frac{1}{2} |\eta'|^2 + c_4. \quad (3.32)$$

Notemos que

$$\frac{1}{2} |G_n|^2 = \frac{1}{2} \langle G_n, G_n \rangle.$$

$$\frac{1}{2} |G_n|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |g_n \omega_i|^2 dx, \text{ onde } 1 \leq i \leq n.$$

Usando o fato de que  $(\omega_i)$  é uma base Hilbertiana, então

$$\frac{1}{2}|G_n|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |g_n|^2 dx. \quad (3.33)$$

Substituindo (3.33) em (3.32), segue que

$$Y'Y + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx + \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + c_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx \leq \frac{1}{2}|Y|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |g_n|^2 dx + \frac{1}{2}|\eta'|^2 + c_4. \quad (3.34)$$

Usando a inequação (3.31) em (3.34), obtém-se que

$$Y'Y + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx + \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + c_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx \leq \frac{1}{2}|Y|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |g_n|^2 dx + \frac{1}{2}|Y|^2 + c_4.$$

Logo,

$$Y'Y + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx + \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + c_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx \leq |Y|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |g_n|^2 dx + c_4. \quad (3.35)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Y|^2 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle Y, Y \rangle. \\ &= \frac{1}{2} \left( \left\langle \frac{d}{dt} Y, Y \right\rangle + \left\langle Y, \frac{d}{dt} Y \right\rangle \right). \\ &= \frac{1}{2} (\langle Y', Y \rangle + \langle Y, Y' \rangle). \\ &= \frac{1}{2} (\langle Y', Y \rangle + \langle Y', Y \rangle). \\ &= \frac{1}{2} (2 \langle Y', Y \rangle). \\ &= \langle Y', Y \rangle. \\ &= Y'Y. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Y|^2 = Y'Y. \quad (3.36)$$

Fazendo a substituição da equação (3.36) em (3.35) implica que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Y|^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx + \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + c_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx \leq |Y|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |g_n|^2 dx + c_4. \quad (3.37)$$

Integrando a inequação (3.37) de 0 até  $t$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t |Y|^2 dt + \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n(x, 0)|^{p(x)}}{p(x)} dx + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} \right|^2 dx ds \\ + c_1 \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} \right|^{q(x)} dx ds \leq \int_0^t |Y(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |g_n|^2 dx ds + c_4 t. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Como  $t \leq T$ , então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t |Y|^2 dt + \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n(x, 0)|^{p(x)}}{p(x)} dx + \int_0^T \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx dt \\ + c_1 \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx dt \leq \int_0^t |Y(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |g_n|^2 dx ds + c_4 T. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Através do lema (3.1.1), sabemos que  $u_n(x, 0)$  converge fortemente nos espaços  $W^{2,p(x)}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ , então  $|\Delta u_n(x, 0)|$  é limitado por uma constante  $c_5 \geq 0$ , ou seja,

$$|\Delta u_n(x, 0)| \leq c_5. \quad (3.40)$$

Além disso, temos as seguintes limitações

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx dt = \left\| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq c_6, \quad (3.41)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx dt = \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{L^{q(x)}(Q_T)}^{q(x)} \leq c_7 \quad (3.42)$$

e

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |g_n|^2 dx ds \leq c_8. \quad (3.43)$$

Substituindo as inequações (3.40), (3.41), (3.42) e (3.43) em (3.39), segue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t |Y|^2 dt + \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx - c_5 + c_6 + c_1 c_7 \leq \int_0^t |Y(s)|^2 ds + c_8 + c_4 T.$$

Definindo  $c_9(T) = c_8 + c_4 T + c_5 - c_6 - c_1 c_7$ , então

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t |Y|^2 dt + \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx \leq \int_0^t |Y(s)|^2 ds + c(T).$$

Aplicando o lema de Gronwall, obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t |Y|^2 dt + \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx \leq c_{10}(T). \quad (3.44)$$

Em **(H.1)** nós supomos que a função de expoente variável é definida como sendo  $p(x) : \bar{\Omega} \rightarrow (1, \infty)$ , isso implica que

$$\int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx \leq \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx. \quad (3.45)$$

Assim, a inequação (3.44) torna-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t |Y|^2 dt + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx \leq c_{10}(T). \quad (3.46)$$

Como  $\int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx \geq 0$ , então

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t |Y|^2 dt \leq c_{10}(T).$$

Dessa maneira, temos

$$\frac{d}{dt} \int_0^t |Y|^2 dt \leq c_{10}(T).$$

Usando o teorema fundamental do Cálculo, obtém-se

$$|Y(t)|^2 - |Y(0)|^2 \leq c_{10}(T).$$

Consequentemente,

$$|Y(t) - Y(0)|^2 \leq c_{10}(T).$$

Portanto,

$$|Y(t) - Y(0)| \leq \sqrt{c(T)},$$

onde  $c(T) = c_{10}(T)$ .

Denotamos por

$$M_n = \max_{(t,Y) \in [0,T] \times B(Y(0), \sqrt{c(T)})} |Z_n(t, Y)|$$

e por

$$\gamma_n \leq \min \left\{ T, \frac{\sqrt{c(T)}}{M_n} \right\}$$

onde  $\mathcal{B}(Y(0), \sqrt{c(T)})$  é a bola de raio  $\sqrt{c(T)}$  centrada no ponto  $Y(0) \in \mathbb{R}^{2N}$ . Por definição,  $Z_n(t, Y)$  é contínua em relação a  $(t, Y)$ .

Aplicando o teorema de Peano, isto é, através do teorema (2.12.1) segue que o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (3.18) possui solução  $C^1$  sobre o intervalo  $[0, \gamma_n]$ , esse fato implica que o sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda (3.17) possui solução  $C^2$  sobre o intervalo  $[0, \gamma_n]$  denotada por  $\eta_n^1(t)$ .

Considerando que  $\eta(\gamma_n)$  e  $\frac{\partial \eta(\gamma_n)}{\partial t}$  são os valores iniciais de (3.17), então podemos repetir o processo anterior e consequentemente obtemos uma solução  $C^2$  sobre o intervalo  $[\gamma_n, 2\gamma_n]$  denotada por  $\eta_n^2(t)$ .

Sem perda de generalidade, suponhamos que

$$T = \left[ \frac{T}{\gamma_n} \right] \gamma_n + \left( \frac{T}{\gamma_n} \right) \gamma_n, \text{ com } 0 < \left( \frac{T}{\gamma_n} \right) < 1$$

onde

$$\begin{aligned} \left[ \frac{T}{\gamma_n} \right] & \text{ é a parte inteira de } \frac{T}{\gamma_n}, \\ \left( \frac{T}{\gamma_n} \right) & \text{ é a parte decimal de } \frac{T}{\gamma_n}. \end{aligned}$$

Se dividirmos o intervalo  $[0, T]$  em  $[(i-1)\gamma_n, i\gamma_n]$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$  e  $[L\gamma_n, T]$  onde  $L = \left[ \frac{T}{\gamma_n} \right]$ , então existe uma solução  $C^2$  sobre o intervalo  $[(i-1)\gamma_n, i\gamma_n]$  denotada por  $\eta_n^i(t)$  e existe  $\eta_n^{L+1}(t)$  sobre  $[L\gamma_n, T]$ . Portanto, obtemos uma solução  $\eta_n(t) \in C^2((0, T])$  da seguinte forma

$$\eta_n(t) = \begin{cases} \eta_n^1(t), & \text{se } t \in [0, \gamma_n], \\ \eta_n^2(t), & \text{se } t \in (\gamma_n, 2\gamma_n], \\ \vdots & \\ \eta_n^L(t), & \text{se } t \in ((L-1)\gamma_n, L\gamma_n], \\ \eta_n^{L+1}(t), & \text{se } t \in (L\gamma_n, T]. \end{cases} \quad (3.47)$$

Dessa maneira, concluímos que o problema (3.1) possui soluções locais. Nosso próximo objetivo é demonstrar que essas soluções são globais, antes disso enunciamos os lemas (3.1.2) e (3.1.3) que auxiliam no desenvolvimento da dissertação.

**Lema 3.1.2** *As seguintes estimativas são uniformes em relação a  $n$  para todo  $t \in [0, T]$*

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \leq C_1, \quad (3.48)$$

$$\int_{Q_T} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx dt + \int_{Q_T} |\Delta u_n|^{p(x)} dx dt + \int_{Q_T} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx dt \leq C_2. \quad (3.49)$$

**Demonstração:** Na equação (3.46) tem-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |Y|^2 dt + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx \leq c_{10}(T).$$

Consequentemente,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |Y|^2 dt + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx \leq c(T).$$

$$|Y(t)|^2 - |Y(0)|^2 + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx \leq c(T).$$

$$|Y(t)|^2 + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx \leq c(T) + |Y(0)|^2.$$

Devido ao fato de que  $|Y(0)|^2$  é limitado, então

$$|Y(t)|^2 + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx \leq C_1.$$

Sabemos que  $|Y(t)|^2 = \langle Y(t), Y(t) \rangle$ , ou seja,

$$\langle Y(t), Y(t) \rangle + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx \leq C_1.$$

Lembrando que  $Y(t) = (\eta(t), \eta'(t))$ , então

$$\langle (\eta(t), \eta'(t)), (\eta(t), \eta'(t)) \rangle + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx \leq C_1.$$

$$\int_{\Omega} |\eta^2 + (\eta')^2| dx + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx \leq C_1. \quad (3.50)$$

Notemos que por (3.12), segue que

$$u_n = \sum_{j=1}^n \eta_{nj}(t) \omega_j(x),$$

então

$$\begin{aligned}
|u_n|^2 &= \langle u_n, u_n \rangle. \\
|u_n|^2 &= \left\langle \sum_{j=1}^n \eta_{nj}(t) \omega_j(x), \sum_{j=1}^n \eta_{nj}(t) \omega_j(x) \right\rangle. \\
|u_n|^2 &= \sum_{j=1}^n \eta_{nj}^2(t) \omega_j^2(x).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Usando o fato de que  $\omega_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  é uma base Hilbertiana, então a equação (3.51) torna-se

$$\begin{aligned}
|u_n|^2 &= \sum_{j=1}^n \eta_{nj}^2(t). \\
|u_n|^2 &= \eta^2.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Analogamente, usando (3.12), segue que

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \eta'_{nj}(t) \omega_j(x),$$

então

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 &= \sum_{j=1}^n (\eta'_{nj}(t))^2. \\
\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 &= (\eta')^2.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Substituindo as equações (3.52) e (3.53) em (3.50) obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u_n|^2 + \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx &\leq C_1. \\
\int_{\Omega} |u_n|^2 dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx &\leq C_1.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré (2.10), temos

$$c_{11} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx \leq C_1.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx \leq C_1.$$

Portanto, demonstramos que a estimativa (3.48) é válida.

Por outro lado, na inequação (3.37), temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Y|^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx + \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + c_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx \leq |Y|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |g_n|^2 dx + c_4.$$

Como  $|Y|^2$  e  $\int_{\Omega} |g_n|^2 dx$  são limitados, então

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx + \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + c_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx \leq c_{12}.$$

Integrando de 0 até  $T$ ,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx dt + c_1 \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx dt \leq c_{13}.$$

Usando o fato de que  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ , segue que

$$\int_{Q_T} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx dt + \int_{Q_T} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx dt + c_1 \int_{Q_T} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx dt \leq c_{13}.$$

De (3.45) obtém-se

$$\int_{Q_T} |\Delta u_n|^{p(x)} dx dt + \int_{Q_T} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx dt + c_1 \int_{Q_T} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx dt \leq c_{13}.$$

Por hipótese  $c_1 \geq 0$ ,

$$\int_{Q_T} |\Delta u_n|^{p(x)} dx dt + \int_{Q_T} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx dt + \int_{Q_T} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx dt \leq C_2.$$

Portanto demonstramos que a estimativa (3.49) é válida.

Por outro lado, para cada  $t \in [0, T]$  temos

$$u_n(x, t) - u_n(x, 0) = \int_0^t \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} ds. \quad (3.54)$$

Aplicando o operador gradiente na equação (3.54), segue que

$$\nabla (u_n(x, t) - u_n(x, 0)) = \nabla \left( \int_0^t \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} ds \right).$$

$$\nabla u_n(x, t) - \nabla u_n(x, 0) = \int_0^t \nabla \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} ds.$$

$$\nabla u_n(x, t) = \int_0^t \nabla \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} ds + \nabla u_n(x, 0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\nabla u_n(x, t)| &= \left| \int_0^t \nabla \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} ds + \nabla u_n(x, 0) \right|, \\ |\nabla u_n(x, t)|^2 &= \left| \int_0^t \nabla \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} ds + \nabla u_n(x, 0) \right|^2. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Lembrando que  $|a + b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$ .

Se tomarmos  $a = \int_0^t \nabla \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} ds$  e  $b = \nabla u_n(x, 0)$ , então a equação (3.55), assume a seguinte forma

$$|\nabla u_n(x, t)|^2 = 2 \left| \int_0^t \nabla \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} ds \right|^2 + 2 |\nabla u_n(x, 0)|^2. \quad (3.56)$$

Sabemos que  $t \leq T$ , então

$$\left| \int_0^t \nabla \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} ds \right|^2 \leq \left| \int_0^T \nabla \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} 1 dt \right|^2.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (2.3), segue que

$$\left| \int_0^T \nabla \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} 1 dt \right|^2 \leq \int_0^T \left| \nabla \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} \right|^2 dt \int_0^T |1|^2 dt,$$

ou seja,

$$\left| \int_0^T \nabla \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} 1 dt \right|^2 \leq T \int_0^T \left| \nabla \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} \right|^2 dt. \quad (3.57)$$

Substituindo a inequação (3.57) em (3.56), obtemos

$$|\nabla u_n(x, t)|^2 = 2T \int_0^t \left| \nabla \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} \right|^2 dt + 2 |\nabla u_n(x, 0)|^2.$$

Integrando sobre  $\Omega$ , concluímos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n(x, t)|^2 dx = 2T \int_{\Omega} \int_0^t \left| \nabla \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} \right|^2 dt dx + 2 \int_{\Omega} |\nabla u_n(x, 0)|^2 dx \leq C_3.$$

■

**Lema 3.1.3** *A seguinte estimativa é uniforme em relação à  $n$ ,*

$$\| |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \|_{L^{p'(x)}(Q_T)} + \left\| f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \right\|_{L^{q'(x)}(Q_T)} \leq C_4. \quad (3.58)$$

**Demonstração:** Pelo lema (3.1.2), obtemos

$$\int_{Q_T} \left| |\Delta u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \right|^{p'(x)} \leq \int_{Q_T} |\nabla u_n|^{p(x)} \leq c_{14}.$$

Então,

$$\left\| |\Delta u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \right\|_{L^{p'(x)}(Q_T)} \leq \max \left\{ \left( \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx \right)^{\frac{p^- - 1}{p^-}}, \left( \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx \right)^{\frac{p^+ - 1}{p^+}} \right\},$$

ou seja,

$$\left\| |\Delta u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \right\|_{L^{p'(x)}(Q_T)} \leq c_{15}. \quad (3.59)$$

Usando (H.2), segue que

$$\left\| f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \right\|_{L^{q'(x)}(Q_T)} \leq c_{16}. \quad (3.60)$$

Das inequações (3.59) e (3.60) concluímos que

$$\left\| |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \right\|_{L^{p'(x)}(Q_T)} + \left\| f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \right\|_{L^{q'(x)}(Q_T)} \leq C_4.$$

Portanto, demonstramos que a estimativa (3.58) é válida. ■

O teorema (3.1.1) garante a existência de soluções globais fracas para o referido problema (3.1).

**Teorema 3.1.1** (*Existência de soluções globais*) *Sob as hipóteses (H.1), (H.2) e (H.3), o problema (3.1) possui solução fraca.*

**Demonstração:** De fato, utilizando os lemas (3.1.2) e (3.1.3) existe uma subsequência

de  $\{u_n\}$  (ainda denotada por  $\{u_n\}$ ) e  $u$  tais que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u_n}{\partial t} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{\partial u}{\partial t} & \text{em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{em } L^\infty(0, T; W_0^{2,p(x)}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; W_0^{1,2}(\Omega)), \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} & \text{em } L^{q(x)}(Q_T) \cap L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega)), \\ |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \rightharpoonup \xi & \text{em } L^{p'(x)}(Q_T), \\ f\left(x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right) \rightharpoonup f\left(x, t, \frac{\partial u}{\partial t}\right) & \text{em } L^{q'(x)}(Q_T). \end{array} \right.$$

Nosso próximo objetivo é demonstrar que existe uma subsequência de  $\{u_n\}$  (ainda denotada por  $\{u_n\}$ ), tal que

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \text{ em } L^2(\Omega)$$

e

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^{q(x)}(Q_T).$$

Notemos que por (3.12), segue que

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \eta'_{nj} \omega_j.$$

Compondo com  $\omega_j$  e aplicando o produto interno, temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, \sum_{j=1}^n \omega_j \right\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n \eta'_{nj} \omega_j, \sum_{j=1}^n \omega_j \right\rangle. \\ \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial t} \sum_{j=1}^n \omega_j dx &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \eta'_{nj} \omega_j^2 dx. \end{aligned}$$

Usando o fato de que  $(\omega_j)_{j=1}^n$  é uma base Hilbertiana, então

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial t} \sum_{j=1}^n \omega_j dx = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \eta'_{nj} dx.$$

Daí,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial t} \omega_j dx = \eta'_{nj}. \quad (3.61)$$

Consequentemente

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \omega_j dx = \eta''_{nj}. \quad (3.62)$$

Através do lema (3.1.2), segue que  $\eta'_{nj}(t)$  é uniformemente limitada em  $[0, T]$ . Consideremos  $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$  e integrando (3.17) em relação à  $t$  de  $t_1$  até  $t_2$ , tem-se

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \eta''(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} P_n(t, \eta(t), \eta'(t)) dt &= \int_{t_1}^{t_2} G_n(t) dt. \\ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \omega_j dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \Delta \omega_j dx dt &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla \omega_j dx dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} f\left(x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right) \omega_j dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} g_n \omega_j dx dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u_n(x, t_2)}{\partial t} \omega_j dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n(x, t_1)}{\partial t} \omega_j dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \Delta \omega_j dx dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla \omega_j dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} f\left(x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right) \omega_j dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} g_n \omega_j dx dt. \end{aligned}$$

Por simplificação, definamos  $Q_{t_1}^{t_2} = \Omega \times [t_1, t_2]$ , assim temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u_n(x, t_2)}{\partial t} \omega_j dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n(x, t_1)}{\partial t} \omega_j dx + \int_{Q_{t_1}^{t_2}} |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \Delta \omega_j dx dt \\ + \int_{Q_{t_1}^{t_2}} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla \omega_j dx dt + \int_{Q_{t_1}^{t_2}} f\left(x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right) \omega_j dx dt &= \int_{Q_{t_1}^{t_2}} g_n \omega_j dx dt. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Usando a desigualdade de Hölder (2.8), segue que

$$\int_{Q_{t_1}^{t_2}} |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \Delta \omega_j dx dt \leq 2 \|\Delta u_n\|_{L^{p'(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \|\Delta \omega_j\|_{L^{p(x)}(Q_{t_1}^{t_2})}. \quad (3.64)$$

Aplicando novamente a desigualdade de Hölder (2.8), temos

$$\int_{Q_{t_1}^{t_2}} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla \omega_j dx dt \leq 2 \left\| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{L^2(Q_{t_1}^{t_2})} \|\nabla \omega_j\|_{L^2(Q_{t_1}^{t_2})}. \quad (3.65)$$

Ainda com a desigualdade de Hölder (2.8), obtemos que

$$\int_{Q_{t_1}^{t_2}} f\left(x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right) \omega_j dx dt \leq 2 \left\| f\left(x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right) \right\|_{L^{q'(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \|\omega_j\|_{L^{q(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \quad (3.66)$$

e que

$$\int_{Q_{t_1}^{t_2}} g_n \omega_j dx dt \leq 2 \|g_n\|_{L^{q'(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \|\omega_j\|_{L^{q(x)}(Q_{t_1}^{t_2})}. \quad (3.67)$$

Além disso, notemos que por (3.61) temos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_n(x, t_2)}{\partial t} \omega_j dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n(x, t_1)}{\partial t} \omega_j dx = \eta'_{nj}(t_2) - \eta'_{nj}(t_1),$$

que implica em

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_n(x, t_2)}{\partial t} \omega_j dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n(x, t_1)}{\partial t} \omega_j dx \leq |\eta'_{nj}(t_2) - \eta'_{nj}(t_1)|. \quad (3.68)$$

Substituindo (3.64), (3.65), (3.66), (3.67) e (3.68) em (3.63) segue que

$$\begin{aligned} |\eta'_{nj}(t_1) - \eta'_{nj}(t_2)| &\leq 2 \|\Delta u_n\|_{L^{p'(x)}(Q_{t_1}^{t_2})}^{p(x)-2} \|\Delta u_n\|_{L^{p'(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \|\Delta \omega_j\|_{L^{p(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \\ &\quad + 2 \left\| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{L^2(Q_{t_1}^{t_2})} \|\nabla \omega_j\|_{L^2(Q_{t_1}^{t_2})} \\ &\quad + 2 \left\| f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \right\|_{L^{q'(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \|\omega_j\|_{L^{q(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \\ &\quad - 2 \|g_n\|_{L^{q'(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \|\omega_j\|_{L^{q(x)}(Q_{t_1}^{t_2})}. \end{aligned}$$

Como  $\|g_n\|_{L^{q'(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \|\omega_j\|_{L^{q(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \geq 0$ , então

$$\begin{aligned} |\eta'_{nj}(t_1) - \eta'_{nj}(t_2)| &\leq 2 \|\Delta u_n\|_{L^{p'(x)}(Q_{t_1}^{t_2})}^{p(x)-2} \|\Delta u_n\|_{L^{p'(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \|\Delta \omega_j\|_{L^{p(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \\ &\quad + 2 \left\| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{L^2(Q_{t_1}^{t_2})} \|\nabla \omega_j\|_{L^2(Q_{t_1}^{t_2})} \\ &\quad + 2 \left\| f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \right\|_{L^{q'(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \|\omega_j\|_{L^{q(x)}(Q_{t_1}^{t_2})}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré (2.10), temos

$$\begin{aligned}
|\eta_{m_j}(t_1) - \eta_{m_j}(t_2)| &\leq 2 \left\| |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \right\|_{L^{p'(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \left\| \Delta \omega_j \right\|_{L^{p(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \\
&\quad + 2 \left\| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{L^2(Q_{t_1}^{t_2})} \left\| \nabla \omega_j \right\|_{L^2(Q_{t_1}^{t_2})} \\
&\quad + 2 \left\| f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \right\|_{L^{q'(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \left\| \omega_j \right\|_{L^{q(x)}(Q_{t_1}^{t_2})}.
\end{aligned}$$

Notemos que pelos lemas (3.1.2) e (3.1.3) temos  $\left\| |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \right\|_{L^{p'(x)}(Q_{t_1}^{t_2})}$  é limitado. Também temos que  $\left\| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{L^2(Q_{t_1}^{t_2})}$  é limitado e que  $\left\| f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \right\|_{L^{q'(x)}(Q_{t_1}^{t_2})}$  é limitado, ou seja,

$$|\eta_{m_j}(t_1) - \eta_{m_j}(t_2)| \leq c_{17} \left( \left\| \Delta \omega_j \right\|_{L^{p(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} + \left\| \nabla \omega_j \right\|_{L^2(Q_{t_1}^{t_2})} + \left\| \omega_j \right\|_{L^{q(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \right).$$

Através dos teoremas (2.9.3), (2.10.4) e (2.10.5), segue que

$$|\eta_{m_j}(t_1) - \eta_{m_j}(t_2)| \leq c_{18} \left( \left\| \Delta \omega_j \right\|_{L^{p(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} + \left\| \Delta \omega_j \right\|_{L^2(Q_{t_1}^{t_2})} + \left\| \Delta \omega_j \right\|_{L^{q(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \right). \quad (3.69)$$

Usando (2.7), temos

$$\begin{aligned}
\left\| \Delta \omega_j \right\|_{L^{p(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} &\leq \max \left\{ \left( \int_{Q_{t_1}^{t_2}} |\Delta \omega_j|^{p(x)} dx dt \right)^{\frac{1}{p^-}}, \left( \int_{Q_{t_1}^{t_2}} |\Delta \omega_j|^{p(x)} dx dt \right)^{\frac{1}{p^+}} \right\}. \\
&= \max \left\{ \left( \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |\Delta \omega_j|^{p(x)} dx dt \right)^{\frac{1}{p^-}}, \left( \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |\Delta \omega_j|^{p(x)} dx dt \right)^{\frac{1}{p^+}} \right\}. \\
&= \max \left\{ \left( \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} |\Delta \omega_j|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^-}}, \left( \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} |\Delta \omega_j|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^+}} \right\}. \\
&\leq \max \left\{ \left( |t_2 - t_1| \int_{\Omega} |\Delta \omega_j|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^-}}, \left( |t_2 - t_1| \int_{\Omega} |\Delta \omega_j|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^+}} \right\}. \\
&= \max \left\{ |t_2 - t_1|^{\frac{1}{p^-}} \left( \int_{\Omega} |\Delta \omega_j|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^-}}, |t_2 - t_1|^{\frac{1}{p^+}} \left( \int_{\Omega} |\Delta \omega_j|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^+}} \right\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\Delta\omega_j\|_{L^{p(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \leq \max \left\{ |t_2 - t_1|^{\frac{1}{p^-}} \left( \int_{\Omega} |\Delta\omega_j|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^-}}, |t_2 - t_1|^{\frac{1}{p^+}} \left( \int_{\Omega} |\Delta\omega_j|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^+}} \right\}. \quad (3.70)$$

Analogamente,

$$\|\Delta\omega_j\|_{L^2(Q_{t_1}^{t_2})} \leq \max \left\{ |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\Delta\omega_j|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\Delta\omega_j|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Isto é,

$$\|\Delta\omega_j\|_{L^2(Q_{t_1}^{t_2})} \leq \max \left\{ |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\Delta\omega_j|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.71)$$

e

$$\|\Delta\omega_j\|_{L^{q(x)}(Q_{t_1}^{t_2})} \leq \max \left\{ |t_2 - t_1|^{\frac{1}{q^-}} \left( \int_{\Omega} |\Delta\omega_j|^{q(x)} dx \right)^{\frac{1}{q^-}}, |t_2 - t_1|^{\frac{1}{q^+}} \left( \int_{\Omega} |\Delta\omega_j|^{q(x)} dx \right)^{\frac{1}{q^+}} \right\}. \quad (3.72)$$

Substituindo (3.70), (3.71) e (3.72) em (3.69)

$$\begin{aligned} |\eta_{n_j}(t_1) - \eta_{n_j}(t_2)| &\leq c_{18} \max \left\{ |t_2 - t_1|^{\frac{1}{p^-}} \left( \int_{\Omega} |\Delta\omega_j|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^-}}, |t_2 - t_1|^{\frac{1}{p^+}} \left( \int_{\Omega} |\Delta\omega_j|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^+}} \right\} \\ &\quad + \max \left\{ |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\Delta\omega_j|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\quad + \max \left\{ |t_2 - t_1|^{\frac{1}{q^-}} \left( \int_{\Omega} |\Delta\omega_j|^{q(x)} dx \right)^{\frac{1}{q^-}}, |t_2 - t_1|^{\frac{1}{q^+}} \left( \int_{\Omega} |\Delta\omega_j|^{q(x)} dx \right)^{\frac{1}{q^+}} \right\}. \end{aligned}$$

Assim, a sequência  $\{\eta_{n_j}(t)\}_{n=1}^{\infty}$  é uniformemente limitada e equicontínua para  $j$  fixo e  $n \geq j$  em  $[0, T]$ . Usando o teorema de Arzela-Ascoli, ou seja o teorema (2.12.2), existe uma subsequência de  $\{\eta_{n_j}(t)\}$ , ainda denotada por  $\{\eta_{n_j}(t)\}$ , tal que  $\{\eta_{n_j}(t)\}$  converge uniformemente em  $[0, T]$  para alguma função contínua  $\eta_j(t)$  para cada  $j = 1, 2, \dots$  fixados.

Definamos

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(t) \omega_j(x),$$

então para cada  $j \in \mathbb{N}$ , segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial t} \omega_j dx = \int_{\Omega} \bar{u} \omega_j dx$$

uniformemente em  $[0, T]$ . Com a completude de  $\{\omega_j\}$  obtemos que

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} \rightharpoonup \bar{u} \text{ em } L^2(\Omega)$$

e uniformemente em  $[0, T]$  quando  $n \rightarrow \infty$ , além disso verifica-se que  $\bar{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ .

Usando o lema (3.1.2) e o teorema (2.4.1) da convergência dominada de Lebesgue, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \omega_j dx \right)^2 dt = 0.$$

Através da proposição (2.10.1) existe um número positivo  $N_\varepsilon$  independente de  $n$  tal que

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(Q_T)} \leq 2 \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \int_0^T \left( \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \omega_j dx \right)^2 dt + 2\varepsilon^2 \int_0^T \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 dt.$$

Além disso, pelo lema (3.1.2), obtemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(Q_T)} \leq c_{19} \varepsilon^2.$$

A arbitrariedade de  $\varepsilon$  implica que

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \text{ em } L^2(Q_T).$$

Consequentemente, existe uma subsequência de  $\{u_n\}$ , ainda denotada por  $\{u_n\}$ , tal que

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \text{ q.s. em } Q_T.$$

Pela continuidade de  $f$ , nós temos

$$f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \rightarrow f \left( x, t, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \text{ q.s. em } Q_T.$$

Agora, nosso objetivo é demonstrar que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^{q(x)}(Q_T)$ . Sabemos que  $u_n \in W^{1,2}(Q_T)$  e do teorema (2.10.4) podemos obter uma subsequência de  $\{u_n\}$ , ainda denotada por  $\{u_n\}$ , tal que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^2(Q_T) \text{ e q.s. em } Q_T.$$

Usando **(H.1)** segue que  $p(x) \leq \frac{N}{2}$ . Com o lema (3.1.2) e o teorema (2.10.4) obtemos

$$\int_{\Omega} |u_n|^{\frac{Np(x)}{N-2p(x)}} dx \leq c_{20}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Isso implica em

$$\int_0^T \int_{\Omega} |u_n|^{\frac{Np(x)}{N-2p(x)}} dx dt \leq c_{21}.$$

Para qualquer subconjunto mensurável  $V \in Q_T$ , usando a desigualdade de Hölder (2.8) e  $q(x) < p^* = \frac{Np(x)}{N-2p(x)}$ , temos

$$\int_V |u_n|^{q(x)} dx dt \leq 2 \| |u_n| \|_{L^{\frac{p^*(x)}{q(x)}}(Q_T)} \| 1 \|_{L^{\frac{p^*(x)}{p^*(x)-q(x)}}(V)} \leq \| 1 \|_{L^{\frac{p^*(x)}{p^*(x)-q(x)}}(V)}.$$

Portanto, a sequência  $\{|u_n|^{q(x)}\}_{n=1}^{\infty}$  é equi-integrável em  $L^1(Q_T)$ . O teorema da convergência de Vitali, ou seja, o teorema (2.12.3) implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} |u_n - u|^{q(x)} dx dt = 0.$$

Logo,

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^{q(x)}(Q_T).$$

Nosso próximo objetivo é demonstrar que  $\xi = |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u$ . Sabemos que para todo  $\varphi \in C^1(0, T; C_0^\infty(\Omega))$  podemos escolher uma sequência  $\varphi_k \in C^1(0, T; V_k)$  tal que  $\varphi_k \longrightarrow \varphi$  em  $C^{1,2}(Q_T)$ , onde para qualquer  $u \in C^{1,2}(Q_T)$  sua norma é dada por

$$\|u\| = \sup_{|\alpha| \leq 2, (x,t) \in \overline{Q_T}} \left\{ |D^\alpha u|, \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \right\}.$$

Para todo  $\tau \in [0, T]$ , temos

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \varphi_k dx dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} \frac{\partial u_n(x, \tau)}{\partial t} \varphi_k(x, \tau) dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial t} \varphi_k(x, 0) dx \right) \\
&\quad - \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_\tau} \frac{\partial u_n}{\partial t} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} dx dt. \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} \bar{u}(x, \tau) \varphi_k(x, \tau) dx - \int_{\Omega} u_1 \varphi_k(x, 0) dx - \int_{Q_\tau} \frac{\partial u_n}{\partial t} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} dx dt \right). \\
&= \int_{\Omega} \bar{u}(x, \tau) \varphi(x, \tau) dx - \int_{\Omega} u_1 \varphi(x, 0) dx - \int_{Q_\tau} \frac{\partial u_n}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt. \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \varphi dx dt.
\end{aligned}$$

Onde  $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau)$ . Por (3.13), segue que

$$\int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \varphi_k dx dt + \int_{Q_\tau} |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \Delta \varphi_k + \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla \varphi_k + f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \varphi_k dx dt = \int_{Q_\tau} g_n \varphi_k dx dt.$$

Isso implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \varphi dx dt = \int_{Q_\tau} g \varphi - \xi \Delta \varphi - \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \nabla \varphi + f \left( x, t, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \varphi dx dt. \quad (3.73)$$

Além disso, para qualquer  $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ , temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\bar{u}(x, \tau) - u_1) \varphi dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_n(x, \tau)}{\partial t} - \frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial t} \right) \psi(x) dx. \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\tau \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \psi(x) dx dt. \\
&= \int_{Q_\tau} g \varphi - \xi \Delta \varphi - \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \nabla \varphi + f \left( x, t, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \varphi dx dt \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quando  $\tau \longrightarrow 0$ . Consequentemente,  $\bar{u}(x, t)$  é fracamente contínua em  $L^2(\Omega)$ , ou seja,  $\bar{u}(x, t) \in C_w(0, T; L^2(\Omega))$ .

Para todo  $\eta \in C^1([0, T])$  com  $\eta(T) = 0$  e  $\eta(0) = 1$ , tem-se

$$\int_{Q_\tau} \frac{\partial u_n}{\partial t} \eta(t) \omega_i dx dt = - \int_{\Omega} u_n(x, 0) \eta(0) \omega_i dx - \int_{Q_\tau} u_n(x, t) \eta'(t) \omega_i dx dt.$$

Se  $n \rightarrow \infty$ , então

$$\int_{\Omega} (u(x, 0) - u_0) \omega_i dx = 0, \text{ com } i = 1, 2, \dots$$

Pela completude de  $\{\omega_i\}$  em  $L^2(\Omega)$ , concluí-se que  $u(x, 0) = u_0$ .

Devido a  $\nabla u_n \rightharpoonup^* \nabla u$  em  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  e  $\frac{\partial u_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t}$  em  $L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega))$ , então assim como feito em [50] podemos assumir que  $u \in C(0, T; W_0^{1,2}(\Omega))$  e que existe uma subsequência de  $\{u_n\}$ , ainda denotada por  $\{u_n\}$ , tal que  $\nabla u_n(x, T) \rightharpoonup \nabla u(x, T)$  em  $(L^2(\Omega))^N$ . Então,

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x, T)|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n(x, T)|^2 dx. \quad (3.74)$$

Sem perda de generalidade, tomemos  $\varphi = u_k$  na equação (3.73) e se  $k \rightarrow \infty$ , então

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{u}(x, T) u(x, T) dx - \int_{\Omega} u_1 u_0 dx - \int_{Q_T} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt + \int_{Q_T} \xi \Delta u + \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \nabla u dx dt \\ & + \int_{Q_T} f \left( x, t, \frac{\partial u}{\partial t} \right) u dx dt = \int_{Q_T} g u dx dt. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Multiplicando (3.17) por  $\eta_{nj}$ , somando  $j$  de 1 até  $n$ , e integrando em  $t$  sobre o intervalo  $[0, T]$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} u_n dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} + \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla u_n + f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) u_n dx dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} g_n(x, t) u_n dx dt. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^T \int_{\Omega} (|\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n - |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u) (\Delta u_n - \Delta u) dx dt. \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} g_n u_n - f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) u_n - \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla u_n dx dt - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n(x, T)}{\partial t} u_n(x, T) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial t} u_n(x, 0) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx dt \\
&\quad - \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \Delta u + |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u (\Delta u_n - \Delta u) dx dt.
\end{aligned}$$

Pela equação (3.75), temos

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \Delta u + |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u (\Delta u_n - \Delta u) dx dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\Omega} g u - f \left( x, t, \frac{\partial u}{\partial t} \right) u - \xi \Delta u dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x, T)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x, 0)|^2 dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \bar{u}(x, T) u(x, T) dx + \int_{\Omega} u_1 u_0 dx + \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt. \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, segue-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} (|\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n - |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u) (\Delta u_n - \Delta u) dx dt = 0.$$

Definamos

$$Q_1 = \{(x, t) \in Q_T; p(x) \geq 2\}$$

e

$$Q_2 = \{(x, t) \in Q_T; 1 < p(x) < 2\}$$

então quando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\int_{Q_1} |\Delta u_n - \Delta u|^{p(x)} dx dt \leq c_{22} \int_{Q_1} (|\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n - |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u) (\Delta u_n - \Delta u) dx dt \rightarrow 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_{Q_2} |\Delta u_n - \Delta u|^{p(x)} dx dt &\leq c_{23} \left\| \left[ (|\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n - |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u) (\Delta u_n - \Delta u) \right]^{\frac{p(x)}{2}} \right\|_{L^{\frac{2}{p(x)}}(Q_2)} \\ &\left\| (|\Delta u_n|^{p(x)} + |\Delta u|^{p(x)})^{\frac{2-p(x)}{2}} \right\|_{L^{\frac{2}{2-p(x)}}(Q_2)} \\ &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, nós obtemos  $\Delta u_n \rightarrow \Delta u$  em  $L^{p(x)}(Q_T)$ . Então, existe uma subsequência de  $\{u_n\}$ , ainda denotada por  $\{u_n\}$ , tal que  $\Delta u_n \rightarrow \Delta u$  quase sempre em  $Q_T$ . Além disso,

$$|\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \rightarrow |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \text{ q.s. para } (x, t) \in Q_T.$$

Usando o teorema (2.10.6), concluímos que  $\xi = |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u$ .

Portanto, demonstramos o teorema da existência de soluções globais.  $\blacksquare$

Substituímos as condições de crescimento da função  $f$  em **(H.2)** por novas limitações dadas por:

**(H.4)**  $f(x, t, s) \in C(\Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R})$  e existem constantes positivas  $c_{24}$  e  $c_{25}$  tais que

$$\begin{cases} f(x, t, s) s \geq c_{24} |s|^{q(x)}, \\ |f(x, t, s)| \leq c_{25} |s|^{q(x)-1}, \end{cases} \quad (3.77)$$

para todo  $(x, t, s) \in \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}$ , onde  $q : \bar{\Omega} \rightarrow (1, \infty)$  é log-Hölder contínua satisfazendo

$$1 < q^- = \inf_{\bar{\Omega}} q(x) \leq q(x) < \frac{Np(x)}{N - 2p(x)}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

**Corolário 2** *Sejam as hipóteses **(H.1)**, **(H.3)** e **(H.4)** e supondo que  $g(x, t) \equiv 0$ . Então para cada  $u_0 \in W^{2,p(x)}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ , existe  $u(x, t) : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\forall T > 0$  tem-se*

$$u \in L^\infty(0, T; W_0^{2,p(x)}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; W_0^{1,2}(\Omega)), \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^{q(x)}(Q_T) \quad (3.79)$$

e

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \varphi(x, 0) dx - \int_{Q_T} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \int_{Q_T} |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \Delta \varphi dx dt \\ & + \int_{Q_T} \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \nabla \varphi dx dt + \int_{Q_T} f\left(x, t, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \varphi dx dt = 0, \end{aligned} \quad (3.80)$$

para todo  $\varphi \in C^1(0, T; C_0^\infty(\Omega))$  com  $\varphi(x, T) = 0$ .

**Demonstração:** Usando a equação do problema aproximado (3.13), temos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \frac{\partial u_n}{\partial t} dx + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \Delta \frac{\partial u_n}{\partial t} + \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} + f\left(x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right) \frac{\partial u_n}{\partial t} dx = 0.$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \frac{\partial u_n}{\partial t} dx + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)-2} \Delta u_n \Delta \frac{\partial u_n}{\partial t} + \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 + f\left(x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right) \frac{\partial u_n}{\partial t} dx = 0. \quad (3.81)$$

Integrando a equação (3.81) com respeito à  $t$  de 0 até  $\tau$  onde  $\tau \in (0, T]$ , usando (H.4) e o fato de que  $u_n(x, 0) \rightarrow u_0$  em  $W^{2,p(x)}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$  segue que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n(x, \tau)}{\partial t} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n(x, \tau)|^{p(x)}}{p(x)} dx + \int_0^\tau \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx dt \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial t} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n(x, 0)|^{p(x)}}{p(x)} dx \leq c_{26}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Onde  $c_{26}$  é uma constante independente de  $n$  e  $\tau$ . Sendo assim, podemos prolongar as soluções para o intervalo  $[0, \infty)$  e, em seguida, usando os mesmos procedimentos do teorema (3.1.1) demonstramos o referido corolário.  $\blacksquare$

## 3.2 Comportamento assintótico

Nesta seção, com o auxílio do lema de Nakao, determinamos o comportamento assintótico das soluções fracas obtidas pelo corolário (2).

**Teorema 3.2.1** *Seja  $p^- > \max\left\{1, \frac{2N}{N+2}\right\}$ . Então existem constantes  $C > 0$  e  $\gamma > 0$  tais que as soluções fracas obtidas pelo corolário (2) satisfazem:*

*Se  $q^- \geq 2$ , então*

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|^2 + |\Delta u(x, t)|^{p(x)} dx \leq \begin{cases} Ce^{-\gamma t}, & \forall t \geq 0, \text{ se } p^+ = 2, \\ C(t+1)^{-\frac{p^+}{p^+-2}}, & \forall t \geq 0, \text{ se } p^+ > 2. \end{cases} \quad (3.83)$$

*Se  $1 < q^- < 2$ , então*

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|^2 + |\Delta u(x, t)|^{p(x)} dx \leq \begin{cases} C(t+1)^{-\frac{p^+(q^- - 1)}{p^+ - q^-}}, & \forall t \geq 0, \text{ se } p^+ < q^-, \\ Ce^{-\gamma t}, & \forall t \geq 0, \text{ se } p^+ \geq q^-. \end{cases} \quad (3.84)$$

**Demonstração:** Definamos

$$I_n(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx.$$

A definição de  $I_n(t)$  e a desigualdade (3.82) implicam que  $I_n(t)$  é não negativo e uniformemente limitado. Assim, existe  $M > 0$  independente de  $n$  tal que  $I_n(t) \leq M$  para todo  $t \geq 0$ . Sem perda de generalidade, se fixarmos  $t$ , então de (3.81) e **(H.4)** temos

$$\frac{d}{dt} I_n(t) + \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx + c_{24} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx \leq 0. \quad (3.85)$$

Isso implica que  $I_n(t)$  é uma função não crescente. Denotando por

$$J_n^2(t) = I_n(t) - I_n(t+1)$$

e integrando (3.85) sobre  $(t, t+1)$ , segue que

$$\begin{aligned} J_n^2(t) &\geq \int_t^{t+1} \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} \right|^2 + c_{24} \left| \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} \right|^{q(x)} dx ds. \\ J_n^2(t) &\geq c_{26} \int_t^{t+1} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} \right|^2 dx ds. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Onde  $c_{26} > 0$  é a constante de imersão de  $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ . Usando o teorema do valor médio e (3.86), existem  $t_1 \in \left[ t, t + \frac{1}{3} \right]$  e  $t_2 \in \left[ t + \frac{2}{3}, t + 1 \right]$  tais que

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n(x, t_i)}{\partial t} \right|^2 dx \leq \frac{1}{c_{26}} J_n^2(t), \quad i = 1, 2.$$

Por (3.13), temos

$$\int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} u_n + \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla u_n + f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) u_n dx. \quad (3.87)$$

Integrando a equação (3.87) de  $t_1$  até  $t_2$ , segue

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx dt &= - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n(x, t_2)}{\partial t} u_n(x, t_2) dx + \int_{\Omega} \frac{\partial u_n(x, t_1)}{\partial t} u_n(x, t_1) dx \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^2 dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla u_n dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) u_n dx dt. \end{aligned} \quad (3.88)$$

A desigualdade de Hölder (2.8), o teorema (2.10.4) de imersão de Sobolev e o fato de

$I_n(t)$  ser não crescente implicam em

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} \frac{\partial u_n(x, t_i)}{\partial t} u_n(x, t_i) dx \right| &\leq \|u_n(x, t_i)\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial u_n(x, t_i)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad i = 1, 2. \\
&\leq c_{27} \|\Delta u_n(x, t_i)\|_{L^{p(x)}(\Omega)} J_n(t). \\
&\leq c_{28} \left( \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n(x, t_i)|^{p(x)}}{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^+}} J_n(t). \\
&\leq c_{28} (I_n(t))^{\frac{1}{p^+}} J_n(t). \tag{3.89}
\end{aligned}$$

Onde a terceira desigualdade em (3.89) é obtida por

$$\begin{aligned}
\|\Delta u_n(x, t_i)\|_{L^{p(x)}(\Omega)} &\leq (p^+)^{\frac{1}{p^-}} \max \left\{ \left( \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n(x, t_i)|^{p(x)}}{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^-}}, \left( \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n(x, t_i)|^{p(x)}}{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^+}} \right\}. \\
&\leq (p^+)^{\frac{1}{p^-}} \max \left\{ M, M^{\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+}} \right\} \left( \int_{\Omega} \frac{|\Delta u_n(x, t_i)|^{p(x)}}{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p^+}}, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Analogamente, usando o fato de que  $\nabla u_n \in (L^2(\Omega))^N$ ,  $p^- > \frac{2N}{N+2}$  e o teorema (2.10.5), então

$$\begin{aligned}
\left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial u_n}{\partial t} \nabla u_n dx dt \right| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left\| \nabla \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} \right\|_{L^2(\Omega)} \sup_{t \leq s \leq t+1} \|\nabla u_n(x, s)\|_{L^2(\Omega)} ds. \\
&\leq c_{29} (I_n(t))^{\frac{1}{p^+}} J_n(t). \tag{3.90}
\end{aligned}$$

Usando **(H.4)**, a desigualdade de Hölder (2.8), a desigualdade (3.86) e as limitações de  $I_n$  e  $J_n$  obtemos

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) u_n dx dt \right| \\
& \leq 2c_{25} \int_{t_1}^{t_2} \left\| \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)-1} \right\|_{L^{\frac{q(x)}{q(x)-1}}(\Omega)} \|u_n\|_{L^{q(x)}(\Omega)} dt. \\
& \leq c_{30} \int_{t_1}^{t_2} \max \left\{ \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx \right)^{\frac{q^- - 1}{q^-}}, \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx \right)^{\frac{q^+ - 1}{q^+}} \right\} dt (I_n(t))^{\frac{1}{p^+}}. \\
& \leq c_{30} \left[ \left( \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx dt \right)^{\frac{q^- - 1}{q^-}} + \left( \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^{q(x)} dx dt \right)^{\frac{q^+ - 1}{q^+}} \right] (I_n(t))^{\frac{1}{p^+}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} f \left( x, t, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) u_n dx dt \right| \leq c_{31} (J_n(t))^{\frac{2(q^- - 1)}{q^-}} (I_n(t))^{\frac{1}{p^+}}. \quad (3.91)$$

De (3.88), (3.89), (3.90) e (3.91) segue que

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |\Delta u_n|^{p(x)} dx dt \leq \frac{1}{c_{26}} J_n^2(t) + (2c_{28} + c_{29}) J_n(t) (I_n(t))^{\frac{1}{p^+}} + c_{31} (J_n(t))^{\frac{2(q^- - 1)}{q^-}} (I_n(t))^{\frac{1}{p^+}}.$$

Então,

$$\int_{t_1}^{t_2} I_n(t) dt \leq c_{32} J_n^2(t) + c_{33} \left[ J_n(t) (I_n(t))^{\frac{1}{p^+}} + (J_n(t))^{\frac{2(q^- - 1)}{q^-}} (I_n(t))^{\frac{1}{p^+}} \right].$$

De  $I_n(t+1) \leq 3 \int_{t_1}^{t_2} I_n(t) dt$ ,  $I_n(t+1) = I_n(t) - J_n^2(t)$  e a desigualdade de Young (2.1), obtemos

$$I_n(t) \leq c_{34} J_n^2(t) + c_{35} \left[ (J_n(t))^{\frac{2p^+(q^- - 1)}{q^-(p^+ - 1)}} + (J_n(t))^{\frac{p^+}{p^+ - 1}} \right]. \quad (3.92)$$

Se  $q^+ \geq 2$ , então

$$\frac{2p^+(q^- - 1)}{q^-(p^+ - 1)} \geq \frac{p^+}{p^+ - 1}.$$

Pela limitação de  $J_n(t)$  e por (3.92) segue que

$$I_n(t) \leq c_{34} J_n^2(t) + c_{36} (J_n(t))^{\frac{p^+}{p^+ - 1}}.$$

Além disso, se  $p^+ = 2$ , então

$$I_n(t) \leq c_{37} J_n^2(t).$$

Como  $I_n(t)$  é não crescente, pelo lema de Nakao (2.12.3), existem duas constantes  $C > 0$  e  $\gamma > 0$  tais que

$$I_n(t) \leq C e^{-\gamma t}, \quad \forall t > 0.$$

Se  $n \rightarrow \infty$ , então

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |\Delta u|^{p(x)} dx \leq C e^{-\gamma t}, \quad \forall t > 0.$$

Se  $p^+ > 2$ , então

$$I_n(t) \leq c_{38} (J_n(t))^{\frac{p^+}{p^+-1}}.$$

Pelo lema de Nakao (2.12.3), existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$I_n(t) \leq C(t+1)^{-\frac{p^+}{p^+-2}}.$$

Se  $n \rightarrow \infty$ , então

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |\Delta u|^{p(x)} dx \leq C(t+1)^{-\frac{p^+}{p^+-2}}, \quad \forall t > 0.$$

Se  $1 < q^- < 2$ , então

$$\frac{2p^+(q^- - 1)}{q^-(p^+ - 1)} < \frac{p^+}{p^+ - 1}.$$

Pela limitação de  $J_n(t)$  e por (3.92) segue que

$$I_n(t) \leq c_{34} J_n^2(t) + c_{39} (J_n(t))^{\frac{2p^+(q^- - 1)}{q^-(p^+ - 1)}}.$$

Se  $q^- \geq p^+$ , então

$$I_n(t) \leq c_{40} J_n^2(t).$$

Novamente, pelo lema de Nakao (2.12.3), segue que existem duas constantes  $C > 0$  e  $\gamma > 0$  tais que

$$I_n(t) \leq C e^{-\gamma t}, \quad \forall t > 0.$$

Se  $n \rightarrow \infty$ , então

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |\Delta u|^{p(x)} dx \leq C e^{-\gamma t}, \quad \forall t > 0.$$

Se  $q^- < p^+$ , então

$$I_n(t) \leq c_{40} (J_n(t))^{\frac{2p^+(q^- - 1)}{q^-(p^+ - 1)}}.$$

Usando o lema de Nakao (2.12.3), temos

$$I_n(t) \leq C(t+1)^{-\frac{p^+(q^- - 1)}{p^+ - q^-}}, \quad \forall t > 0.$$

Se  $n \rightarrow \infty$ , então

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |\Delta u|^{p(x)} dx \leq C(t+1)^{-\frac{p^+(q^- - 1)}{p^+ - q^-}}, \quad \forall t > 0.$$

■

# Capítulo 4

## Análise numérica

Devido ao fato de não existir resultados na literatura referentes à análise numérica e as simulações computacionais para problemas hiperbólicos com expoente variável, estudamos um caso particular do problema (3.1) supondo  $p(x) = 2$ ,  $f \equiv 0$  e  $g \equiv 0$ . Note que, se  $p(x) = 2$ , então o termo envolvendo expoente variável no aludido problema (3.1) passa a ser

$$\Delta (|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u) = \Delta (|\Delta u|^{2-2} \Delta u) = \Delta (\Delta u) = \Delta^2 u.$$

Essas suposições simplificam análise numérica e a implementação computacional, pois o referido problema (3.1) assume a seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u - \Delta \frac{\partial u}{\partial t} = 0, & \text{em } Q_T, \\ u = 0, \Delta u = 0, & \text{em } \partial Q_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

Onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  regular,  $0 < T < \infty$ , com  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  e  $\partial Q_T = \partial\Omega \times (0, T)$ .

Aplicamos o método de elementos finitos na parte espacial e o método das diferenças finitas na parte temporal do problema (4.1) quando o analisamos numericamente.

Por simplificação, suponhamos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v. \quad (4.2)$$

Essa mudança de variável, transforma nossa equação diferencial parcial de segunda ordem em relação ao tempo (4.1) para o seguinte sistema equivalente de equações dife-

renciais de primeira ordem em relação ao tempo

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \Delta^2 u - \Delta v = 0 & \text{em } Q_T, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - v = 0 & \text{em } Q_T, \\ u = 0, \Delta u = 0 & \text{em } \partial Q_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.3)$$

Transformamos o problema (4.3) em um problema variacional supondo que  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sejam duas funções testes. Multiplicando a primeira equação por  $\varphi_1$  e a segunda equação por  $\varphi_2$  e integrando ambas sobre  $\Omega$  segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \Delta^2 u - \Delta v \right) \varphi_1 dx &= \int_{\Omega} 0 \varphi_1 dx. \\ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - v \right) \varphi_2 dx &= \int_{\Omega} 0 \varphi_2 dx. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) \varphi_1 dx + \int_{\Omega} (\Delta^2 u) \varphi_1 dx - \int_{\Omega} (\Delta v) \varphi_1 dx &= 0 \int_{\Omega} \varphi_1 dx. \\ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \varphi_2 dx - \int_{\Omega} v \varphi_2 dx &= 0 \int_{\Omega} \varphi_2 dx. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) \varphi_1 dx + \int_{\Omega} (\Delta^2 u) \varphi_1 dx - \int_{\Omega} (\Delta v) \varphi_1 dx = 0. \quad (4.4)$$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \varphi_2 dx - \int_{\Omega} v \varphi_2 dx = 0. \quad (4.5)$$

Notemos que, utilizando a fórmula de Green no segundo termo de (4.4), segue que

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u) \varphi_1 dx = \int_{\Omega} \Delta u \Delta \varphi_1 dx + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial (\Delta u)}{\partial \hat{n}} \varphi_1 dx - \int_{\partial \Omega} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{n}} \right) (\Delta u) dx. \quad (4.6)$$

Onde  $\hat{n}$  representa o vetor unitário normal externo à  $\Omega$ . Por hipótese, a função teste  $\varphi_1$  é nula na fronteira  $\partial \Omega$ , então a equação (4.6) assume a seguinte forma

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u) \varphi_1 dx = \int_{\Omega} \Delta u \Delta \varphi_1 dx. \quad (4.7)$$

Analogamente, aplicando a fórmula de Green no terceiro termo de (4.4) obtemos

$$-\int_{\Omega} (\Delta v) \varphi_1 dx = \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi_1 dx - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial \hat{n}} \right) \varphi_1 dx. \quad (4.8)$$

Utilizando novamente o fato de que as condições de contorno da função teste  $\varphi_1$  são nulas na fronteira  $\partial\Omega$ , então a equação (4.8) passa a ser

$$-\int_{\Omega} (\Delta v) \varphi_1 dx = \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi_1 dx. \quad (4.9)$$

Substituindo as equações (4.7) e (4.9) em (4.4), obtemos que

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) \varphi_1 dx + \int_{\Omega} \Delta u \Delta \varphi_1 dx + \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi_1 dx = 0. \quad (4.10)$$

As referidas equações (4.5) e (4.10) resultam em nosso problema variacional associado ao sistema (4.3) que consiste em determinar  $u$  e  $v$  tais que, para quaisquer funções testes  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  temos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) \varphi_1 dx + \int_{\Omega} \Delta u \Delta \varphi_1 dx + \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi_1 dx = 0 & \text{em } Q_T, \\ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \varphi_2 dx - \int_{\Omega} v \varphi_2 dx = 0 & \text{em } Q_T, \\ u = 0, \Delta u = 0 & \text{em } \partial Q_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Podemos aproximar as derivadas temporais como sendo

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^k - u^{k-1}}{\delta t} \quad (4.12)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{v^k - v^{k-1}}{\delta t}. \quad (4.13)$$

Onde definimos  $\delta t = t^k - t^{k-1}$ . Além disso,  $u^k$  e  $v^k$  indicam a solução no tempo  $t^k$  e, analogamente,  $u^{k-1}$  e  $v^{k-1}$  indicam a solução no tempo  $t^{k-1}$ . Substituindo as aproximações temporais dadas por (4.12) e (4.13) no problema variacional (4.11), obtemos o seguinte

problema numérico

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Omega} \left( \frac{v^k - v^{k-1}}{\delta t} \right) \varphi_1 dx + \int_{\Omega} \Delta u^k \Delta \varphi_1 dx + \int_{\Omega} \nabla v^k \nabla \varphi_1 dx = 0 & \text{em } Q_T, \\ \int_{\Omega} \left( \frac{u^k - u^{k-1}}{\delta t} \right) \varphi_2 dx - \int_{\Omega} v^k \varphi_2 dx = 0 & \text{em } Q_T, \\ u = 0, \Delta u = 0, & \text{em } \partial Q_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

## 4.1 Simulações computacionais

Nesta seção exibimos as simulações computacionais resultantes do código implementado na linguagem de computação Python com o software FEniCS. A escolha de programar usando essa linguagem e o software é justificada devido ao fato do FEniCS ser baseado no método de elementos finitos. Para mais detalhes sobre o FEniCS indicamos as referências [49, 52].

As simulações computacionais foram executadas em um notebook Acer, modelo Aspire A515-52, Windows 10, 64 bits, memória RAM 8 GB e processador Intel Core i5-8265U. Foi necessário ativar o subsistema Windows para Linux e instalar o Ubuntu 20.04 LTS.

Suponhamos que o domínio computacional seja  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ . Subdividimos o domínio em uma malha particionada  $N \times N$  onde  $N$  é um número natural. Essa malha é formada por células que são triângulos retângulos, ou seja, utilizamos uma malha triangular.

Para exemplificar, suponhamos que  $N = 5$ , ou seja, nossa malha computacional foi particionada em  $5 \times 5$  conforme a figura (4.1).

Notemos que o comprimento de cada intervalo ao longo do eixo  $x$  é dado por

$$\delta x = \frac{1}{N}. \quad (4.15)$$

Analogamente, comprimento de cada intervalo ao longo do eixo  $y$  é dado por

$$\delta y = \frac{1}{N}. \quad (4.16)$$

Suponhamos que  $T$  represente o tempo final, então cada intervalo de tempo é definido como sendo

$$\delta t = \frac{T}{N}. \quad (4.17)$$

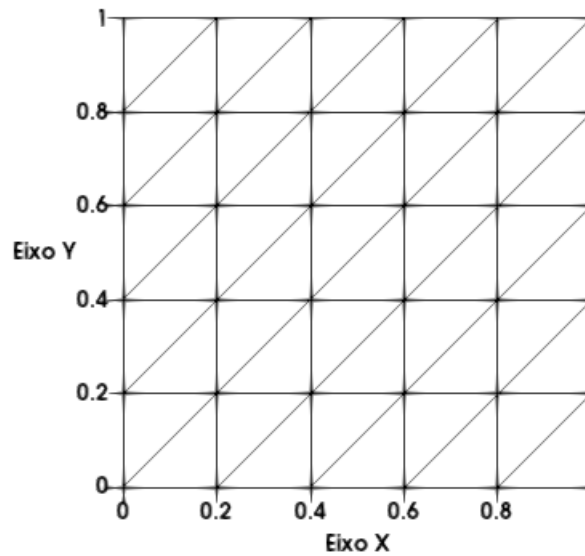


Figura 4.1: Malha computacional particionada em  $5 \times 5$ .

Destacamos que, devido ao fato de estarmos utilizando o método de Euler explícito, então a condição de convergência de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) deve ser obrigatoriamente satisfeita, isto é,

$$\frac{\delta t}{\delta x} + \frac{\delta t}{\delta y} \leq 1. \quad (4.18)$$

As equações (4.15) e (4.16) implicam que  $\delta x = \delta y$ , então a condição de convergência (4.18) passa a ser

$$\frac{\delta t}{\delta x} + \frac{\delta t}{\delta x} \leq 1,$$

ou seja,

$$\frac{2\delta t}{\delta x} \leq 1. \quad (4.19)$$

Substituindo as equações (4.15) e (4.17) em (4.19), segue que

$$2 \frac{T}{\frac{N}{1}} \leq 1. \quad (4.20)$$

Logo,

$$2 \frac{T}{N} \leq 1. \quad (4.21)$$

Portanto, concluímos que a condição de convergência de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) para nosso problema é dada por

$$2T \leq 1. \quad (4.22)$$

O algoritmo (1) apresenta o pseudocódigo com as principais etapas do código implementado na linguagem de computação Python com o software FEniCS. O algoritmo procede da seguinte maneira:

1. Inicialmente, são declarados  $N$  e  $T$  que representam, respectivamente, o particionamento da malha e o tempo final.
2. Usando os valores de  $N$  e  $T$ , então determinamos o intervalo de tempo dado pela equação (4.17).
3. Construímos uma malha computacional sobre  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  onde a referida malha possui o particionamento  $N \times N$  e suas células são triângulos retângulos, ou seja, construímos uma malha triangular.
4. Definimos o espaço de funções de elementos finitos, que para nosso problema consiste de um espaço de funções misto.
5. Criamos  $u^k, u^{k-1}, v^k, v^{k-1}$  e as funções testes  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  que pertencem ao espaço de funções de elementos finitos.
6. Definimos cada uma das equações do problema numérico (4.14).
7. Aplicamos as condições iniciais sobre nosso problema numérico (4.14).
8. Definimos as condições de fronteira para o referido problema numérico (4.14).
9. Iniciamos a variável temporal  $t$  sendo nula.
10. Criamos uma estrutura de repetição na qual enquanto  $t \leq T$  faça:
11. Resolvemos o problema numérico (4.14) e obtemos  $u^k$  e  $v^k$ .
12. Plotamos as soluções  $u^k$  e  $v^k$ . Além disso optamos por salvar tais soluções em um arquivo externo.
13. Atualizamos as soluções, isto é:

$$\begin{aligned} u^{k-1} &\leftarrow u^k \\ v^{k-1} &\leftarrow v^k \end{aligned}$$

14. Atualizamos a variável temporal, ou seja,  $t \leftarrow t + \delta t$ .
15. Encerramos a estrutura de repetição e o código computacional.

---

**Algoritmo 1**

---

- 1: Declarar  $N$  e  $T$
  - 2: Calcular  $\delta t$
  - 3: Construir a malha
  - 4: Definir o espaço de funções de elementos finitos
  - 5: Criar os vetores que representam as soluções e as funções testes sobre o espaço de funções de elementos finitos
  - 6: Definir o sistema de equações
  - 7: Aplicar as condições iniciais no sistema
  - 8: Definir as condições de fronteira
  - 9: Declarar  $t = 0$
  - 10: **enquanto**  $t \leq T$  **faça**
  - 11:   Resolver o sistema
  - 12:   Plotar a solução
  - 13:   Atualizar a solução
  - 14:    $t \leftarrow t + \delta t$
  - 15: **fim enquanto**
- 

Uma das aplicações físicas de nosso problema consiste em considerarmos o domínio como sendo uma placa constituída de um material genérico completamente rígido e estático, ou seja, a placa não se deforma e não se desloca. Aplicamos uma força (carregamento) sobre a placa no tempo  $t = 0$  e retiramos a referida força imediatamente sobre a placa. Os resultados obtidos nas simulações contabilizam a distribuição de força sobre a placa. Vale ressaltar que no descarregamento, isto é, na retirada da força, a placa permanece intacta porém a distribuição de força sobre o material foi contabilizada.

Destacamos que não foi necessário transformar as equações nosso problema para equações adimensionais, visto que o FEniCS nos permite utilizar escalas genéricas para as coordenadas espaciais, para a coordenada temporal e para a unidade de força.

Por questões de tempo computacional, optamos por escolher o particionamento da malha, isto é, os valores de  $N$  como sendo 300, 250 e 400, respectivamente para as simulações 1, 2 e 3.

### 4.1.1 Simulação 1

Nesta primeira simulação computacional consideramos que  $N = 300$ , isso implica que a malha foi particionada em  $300 \times 300$ . Fixamos o tempo final em  $T = 0,3$  e consequentemente o intervalo de tempo é dado por

$$\delta t = \frac{0,3}{300}$$

ou seja,

$$\delta t = 0,001.$$

Destacamos que, a condição de convergência CFL em (4.22) para essa simulação é dada por

$$2(0,3) \leq 1$$

isto é,

$$0,6 \leq 1.$$

Notemos que a condição CFL é satisfeita.

Além disso, suponhamos que as condições iniciais no tempo  $t = 0$  são

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

e

$$v(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

No tempo  $t = 0$  obtivemos que nosso problema se comporta da seguinte maneira:

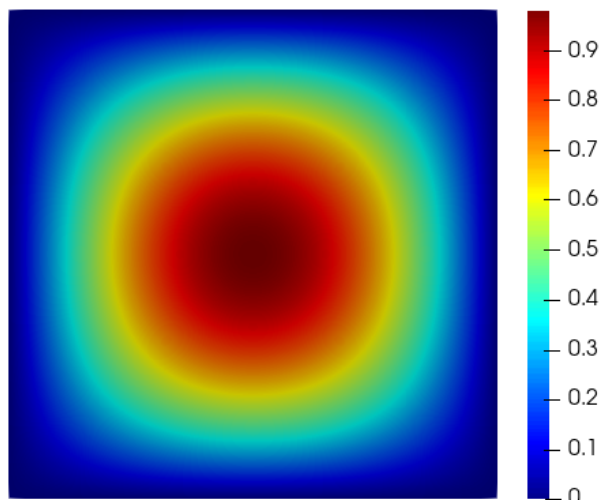


Figura 4.2: Simulação 1:  $t = 0$ .

Quando o tempo assume o valor  $t = 0,009$  então o código retorna o seguinte resultado:

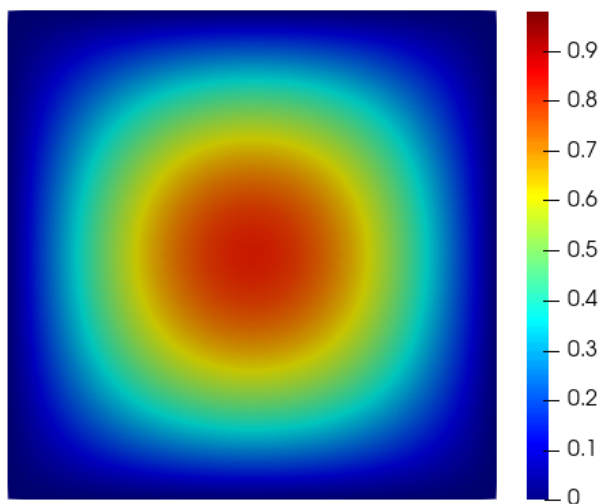


Figura 4.3: Simulação 1:  $t = 0,009$ .

Para  $t = 0,02$  a placa assume a forma:

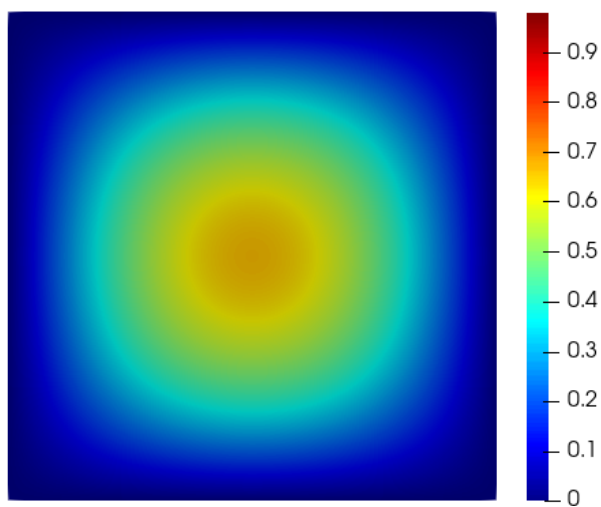


Figura 4.4: Simulação 1:  $t = 0,02$ .

Quando  $t = 0,031$  o resultado do código fornecido é dado por:

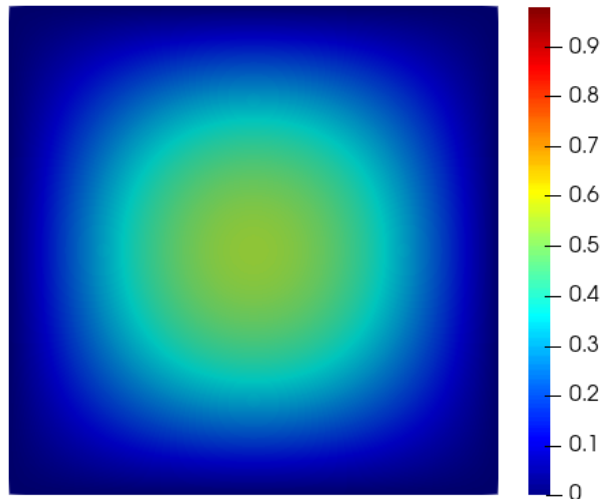


Figura 4.5: Simulação 1:  $t = 0,031$ .

Evoluindo o tempo para  $t = 0,047$  obtemos:

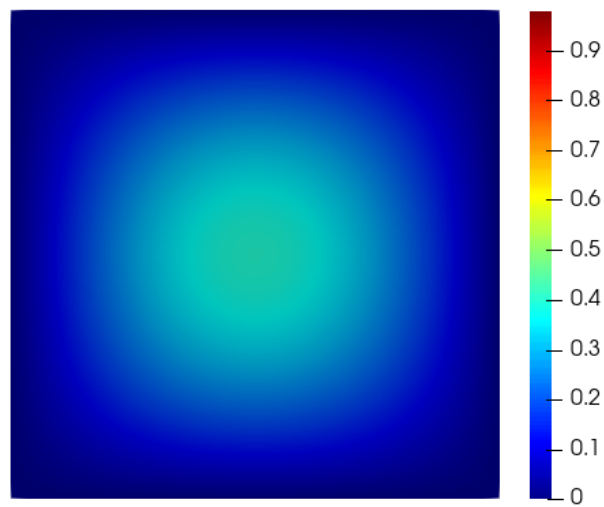


Figura 4.6: Simulação 1:  $t = 0,047$ .

Se  $t = 0,067$  então o código resulta em:

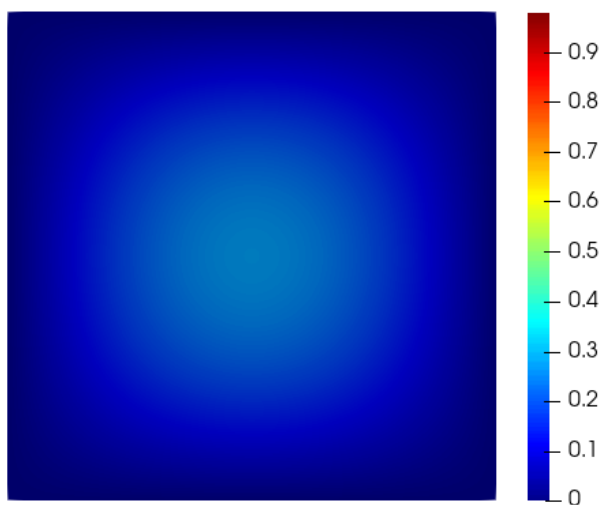


Figura 4.7: Simulação 1:  $t = 0,067$ .

Quando  $t = 0,1$  a placa assume a forma:

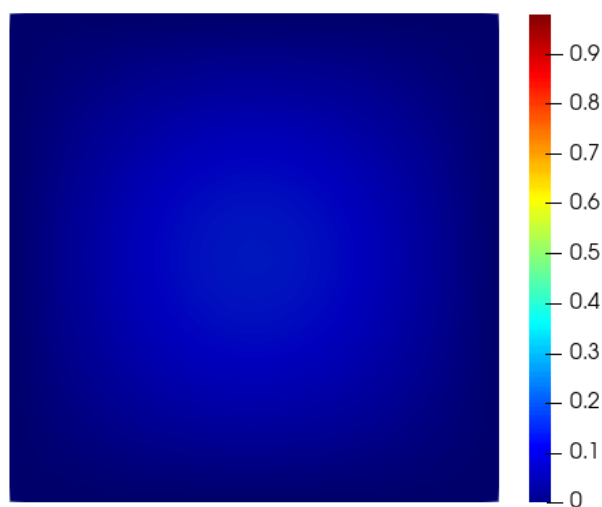


Figura 4.8: Simulação 1:  $t = 0,1$ .

Com o tempo  $t = 0,141$  o código retorna o seguinte resultado:

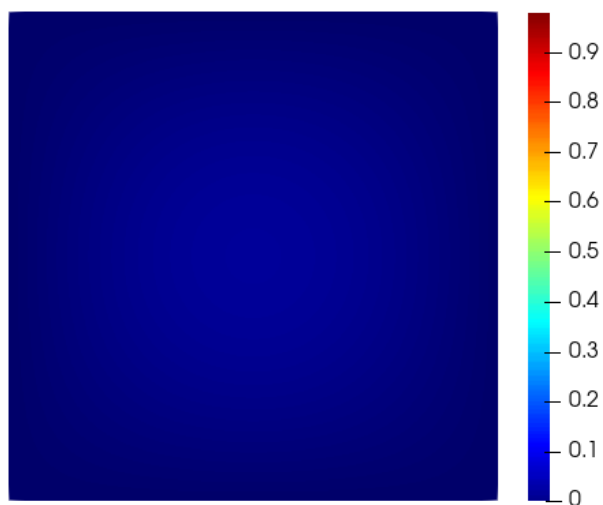


Figura 4.9: Simulação 1:  $t = 0,141$ .

Se  $t = 0,189$  obtemos:

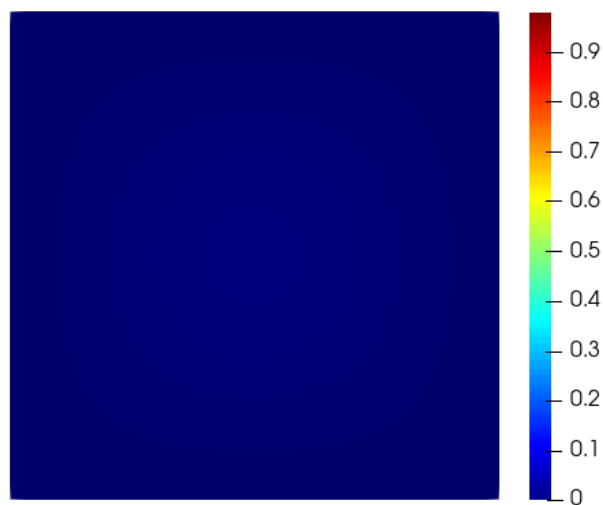


Figura 4.10: Simulação 1:  $t = 0,189$ .

Considerando  $t = 0,224$  a placa assume a seguinte forma:

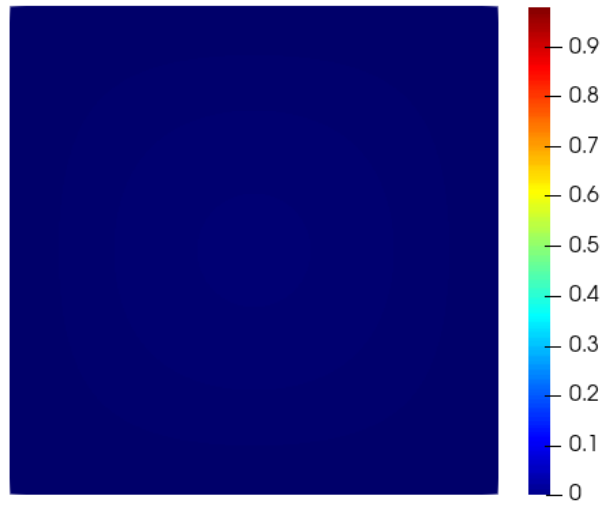


Figura 4.11: Simulação 1:  $t = 0,224$ .

Finalmente, quando  $t = T = 0,3$  a placa não sofre a ação de forças:

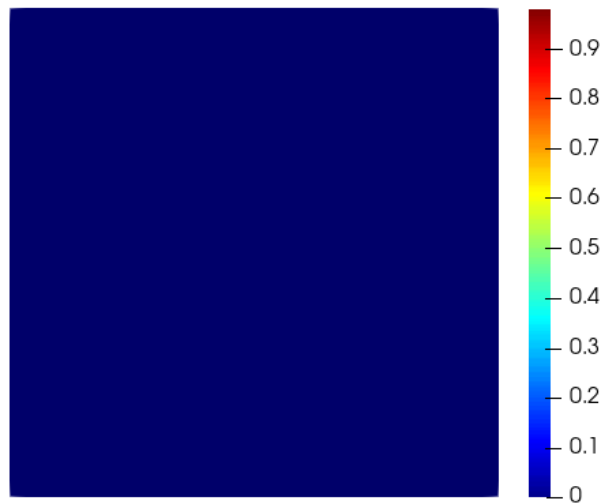


Figura 4.12: Simulação 1:  $t = T = 0,3$ .

### 4.1.2 Simulação 2

Nesta segunda simulação a malha computacional foi particionada em  $250 \times 250$ , isto é, o valor de  $N = 250$ . O tempo final foi estabelecido como sendo  $T = 0,4$  isso implica que o intervalo de tempo foi dado por

$$\delta t = \frac{0,4}{250}$$

ou seja,

$$\delta t = 0,0016.$$

Verificamos se a condição de convergência CFL dada por (4.22) para a referida simulação foi cumprida

$$2(0,4) \leq 1$$

isto é,

$$0,8 \leq 1.$$

Logo, a condição CFL foi satisfeita.

Nessa simulação, as condições iniciais no tempo  $t = 0$  foram

$$u(x, y, 0) = x$$

e

$$v(x, y, 0) = y.$$

Quando  $t = 0$  o código computacional gerou o seguinte resultado:

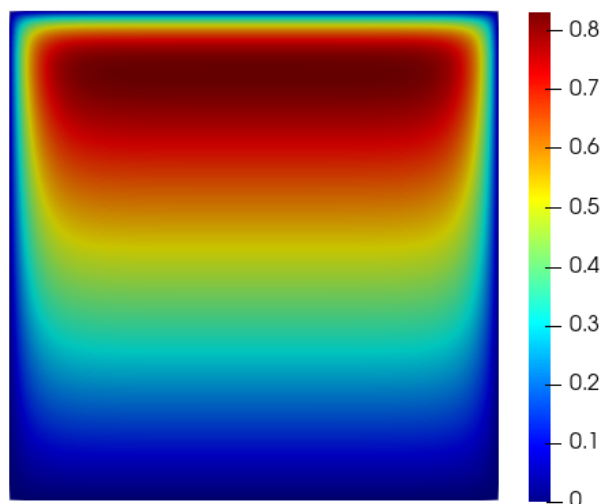


Figura 4.13: Simulação 2:  $t = 0$ .

Para  $t = 0,0032$  obtemos:

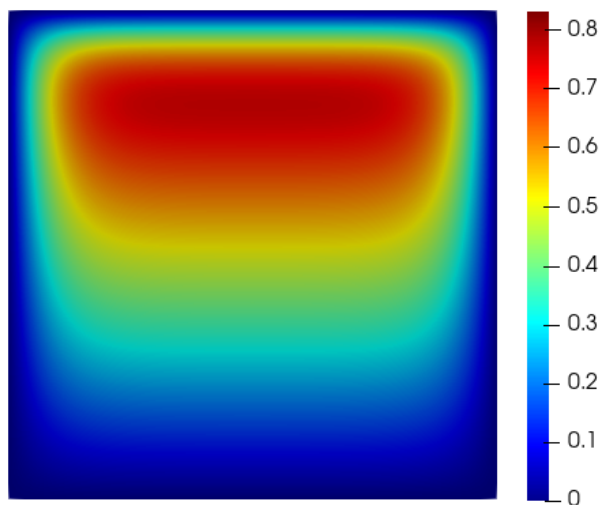


Figura 4.14: Simulação 2:  $t = 0,0032$ .

Se  $t = 0,0080$  então a distribuição da força sobre a placa foi dada por:

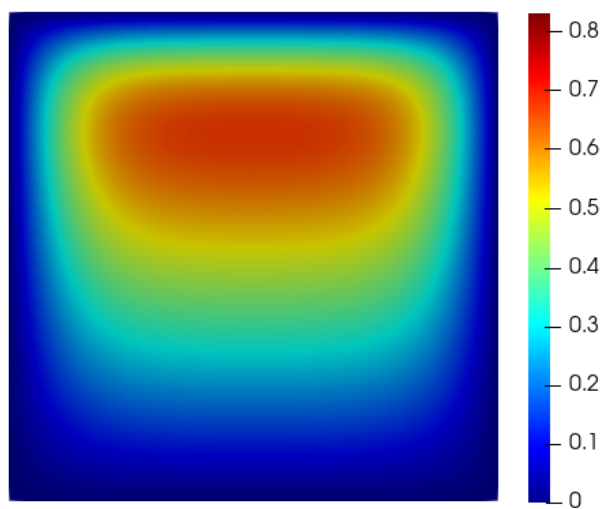


Figura 4.15: Simulação 2:  $t = 0,0080$ .

Para  $t = 0,0112$  segue o resultado obtido:

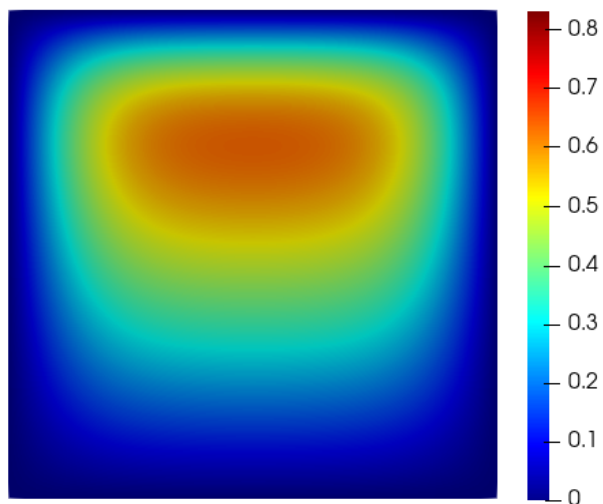


Figura 4.16: Simulação 2:  $t = 0,0112$ .

Considerando  $t = 0,0160$  o código retorna como resultado:

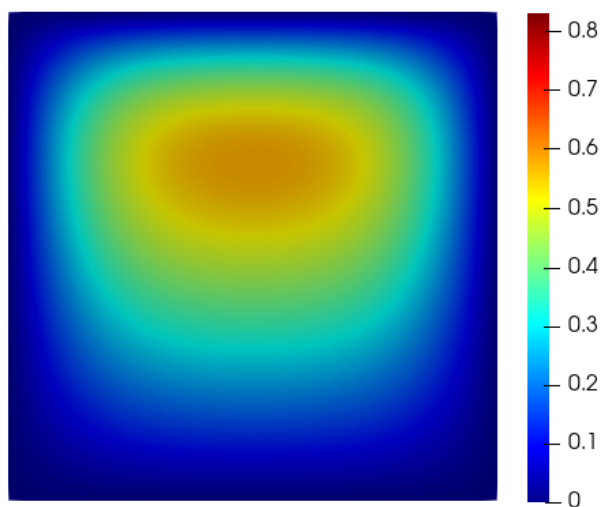


Figura 4.17: Simulação 2:  $t = 0,0160$ .

Para  $t = 0,0208$  obtemos:

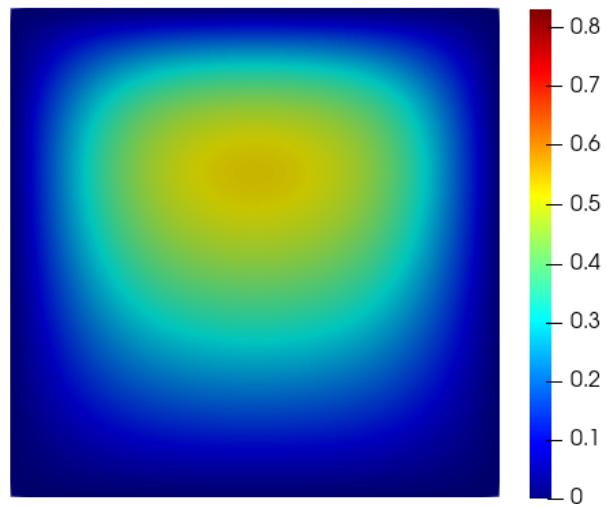


Figura 4.18: Simulação 2:  $t = 0,0208$ .

Evoluindo o tempo para  $t = 0,0256$  o código resulta em:

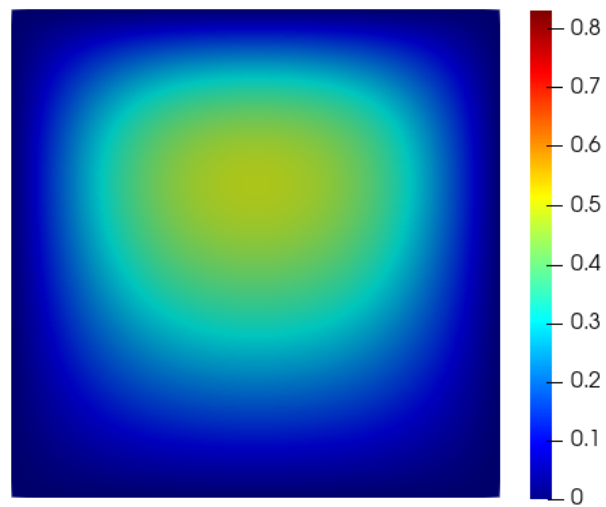


Figura 4.19: Simulação 2:  $t = 0,0256$ .

Assumindo que  $t = 0,0336$  segue que:

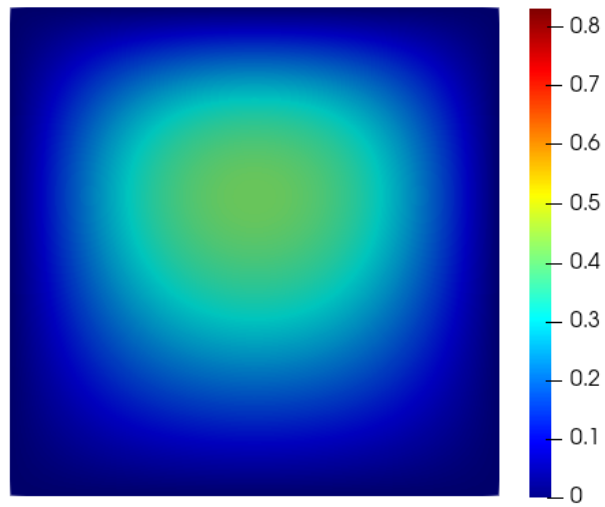


Figura 4.20: Simulação 2:  $t = 0,0336$ .

Quando  $t = 0,0432$  obtemos como resultado:

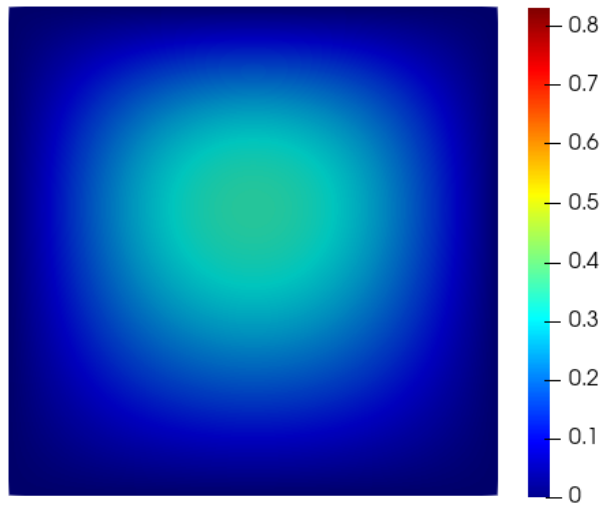


Figura 4.21: Simulação 2:  $t = 0,0432$ .

Para  $t = 0,0512$  o código gerou o seguinte resultado:

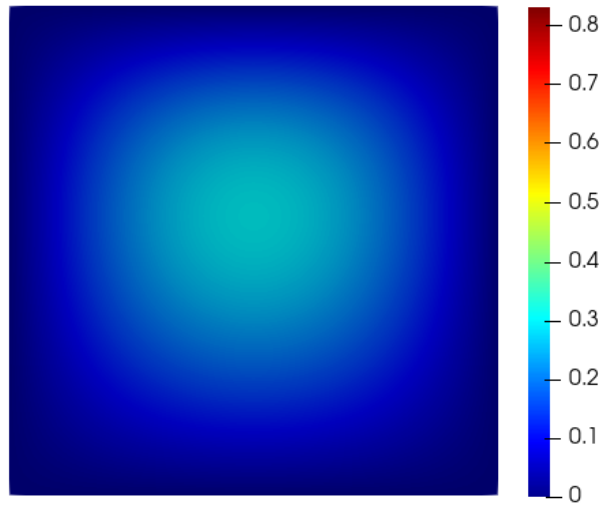


Figura 4.22: Simulação 2:  $t = 0,0512$ .

Suponhondo que  $t = 0,0864$  então obtemos:

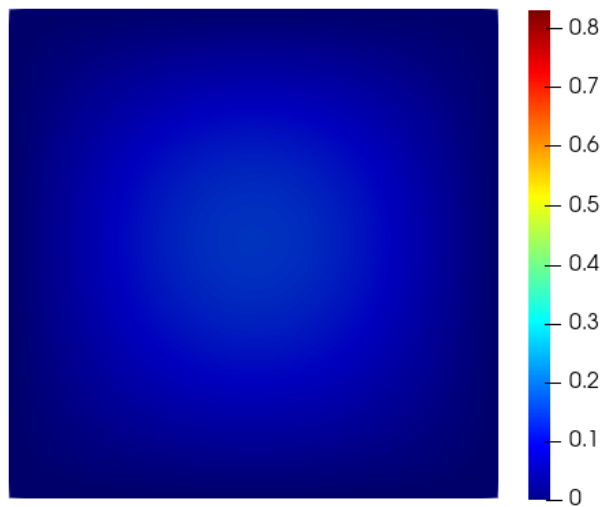


Figura 4.23: Simulação 2:  $t = 0,0864$ .

Caso  $t = 0,1152$  então o código fornece como resultado:

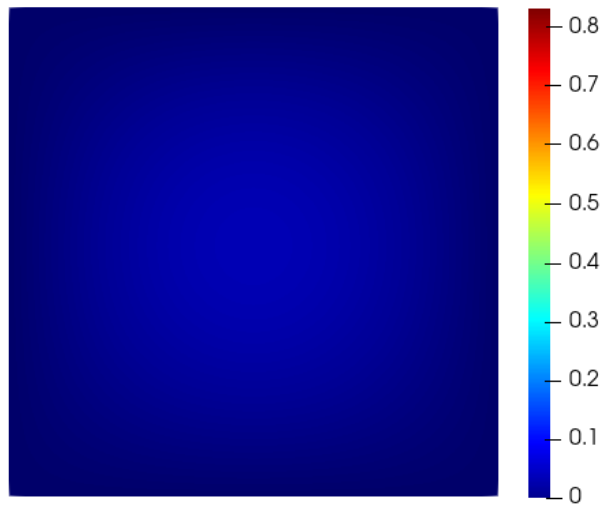


Figura 4.24: Simulação 2:  $t = 0,1152$ .

Quando  $t = 0,1984$  segue que o resultado obtido foi:

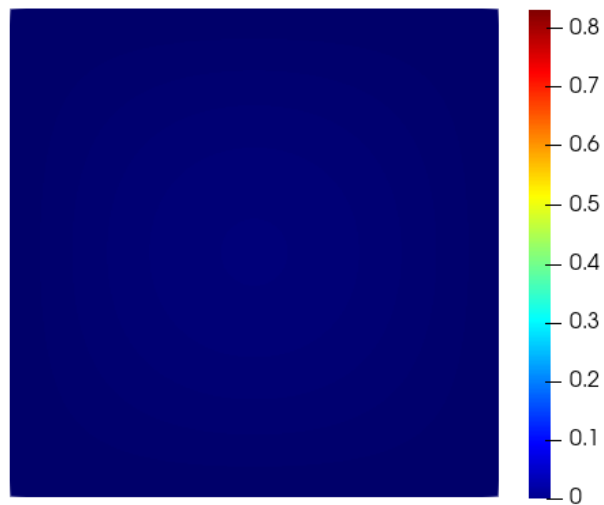


Figura 4.25: Simulação 2:  $t = 0,1984$ .

A placa não sofre a ação de forças quando  $t = 0,2864$  :

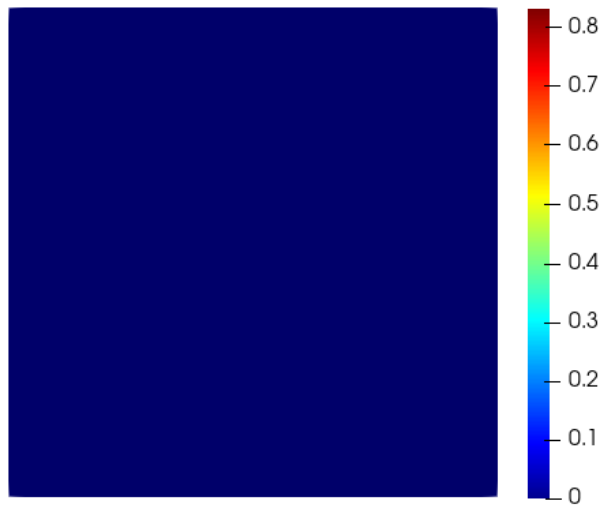


Figura 4.26: Simulação 2:  $t = 0,2864$ .

Finalmente, quando  $t = T = 0,4$  a placa permanece sem forças aplicadas:

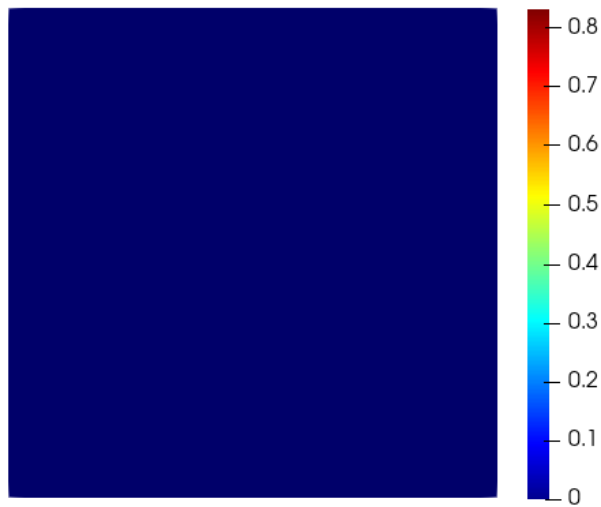


Figura 4.27: Simulação 2:  $t = T = 0,4$ .

### 4.1.3 Simulação 3

Suponhamos que, nesta última simulação computacional,  $N = 400$  isso significa que a malha foi particionada em  $400 \times 400$ . Para o tempo final consideramos  $T = 0,5$  isso implica que o intervalo de tempo foi dado por

$$\delta t = \frac{0,5}{400}$$

ou seja,

$$\delta t = 0,00125.$$

Verificamos que a condição de convergência CFL dada por (4.22) para a referida simulação foi satisfeita

$$2(0,5) \leq 1$$

isto é,

$$1 \leq 1.$$

Nessa simulação, as condições iniciais no tempo  $t = 0$  foram

$$u(x, y, 0) = x^y$$

e

$$v(x, y, 0) = x^y.$$

Quando  $t = 0$  obtemos o seguinte resultado:

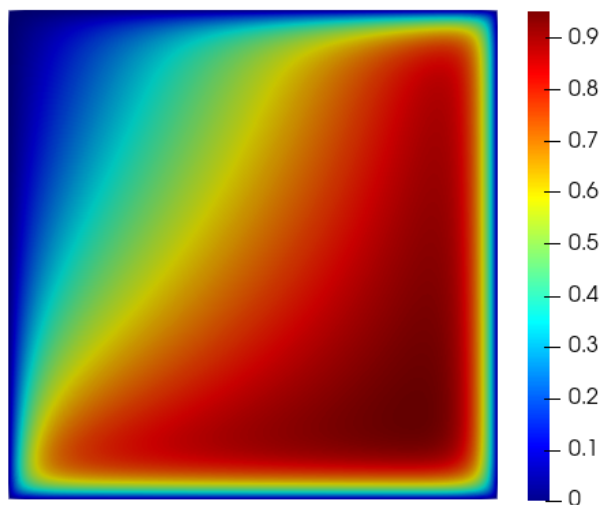


Figura 4.28: Simulação 3:  $t = 0$ .

Evoluindo o tempo para  $t = 0,00375$  segue que:

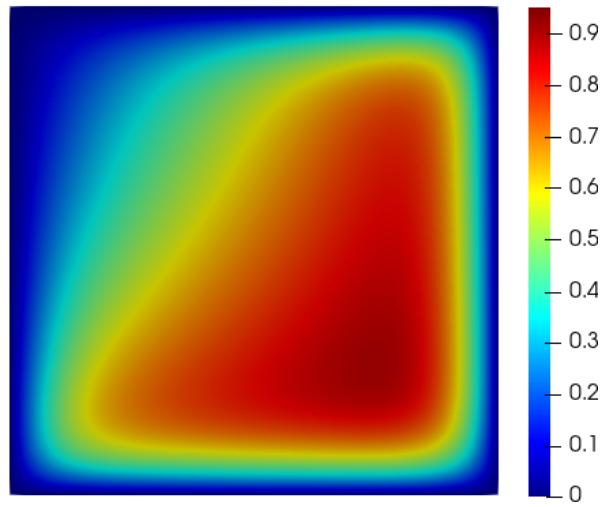


Figura 4.29: Simulação 3:  $t = 0,00375$ .

Para  $t = 0,00875$  o código computacional retornou o seguinte resultado:

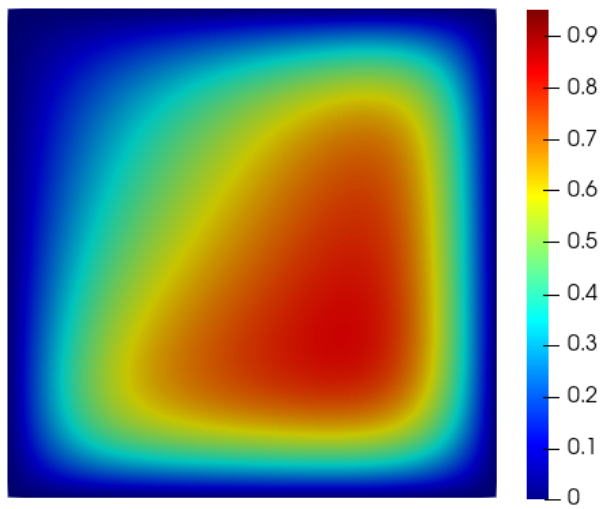


Figura 4.30: Simulação 3:  $t = 0,00875$ .

Se  $t = 0,01625$  então a placa fica da seguinte maneira:

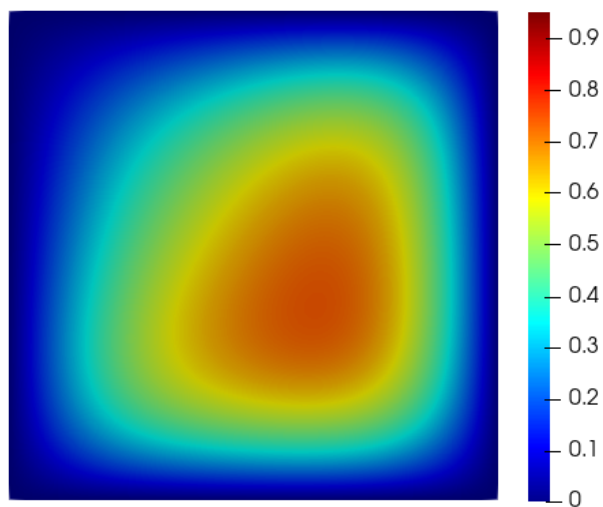


Figura 4.31: Simulação 3:  $t = 0,01625$ .

Quando  $t = 0,02375$  obtemos:

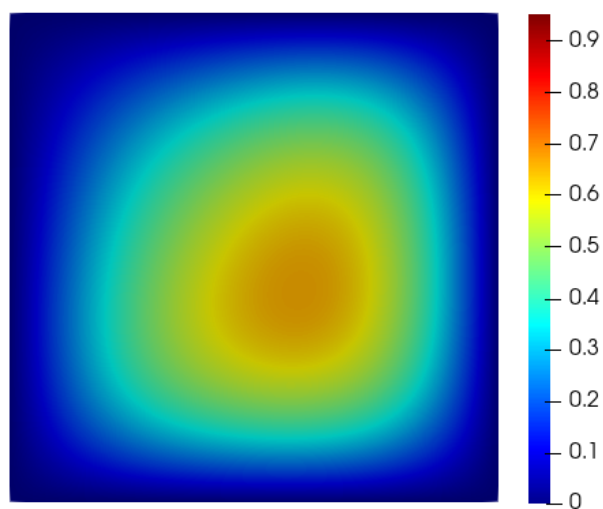


Figura 4.32: Simulação 3:  $t = 0,02375$ .

Supondo  $t = 0,03$  segue que:

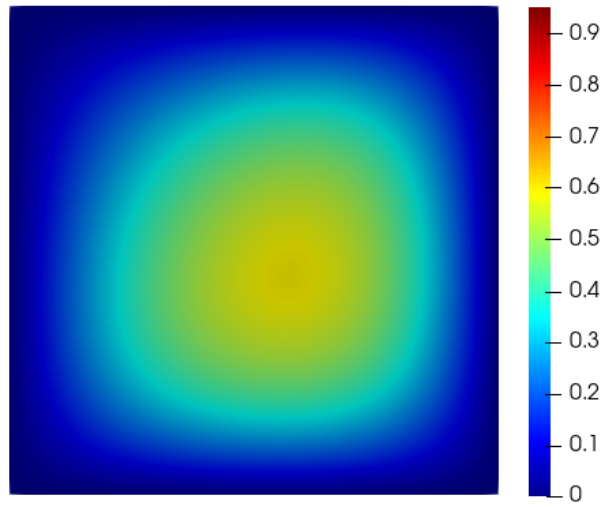


Figura 4.33: Simulação 3:  $t = 0,03$ .

Para  $t = 0,04125$  o código resulta em:

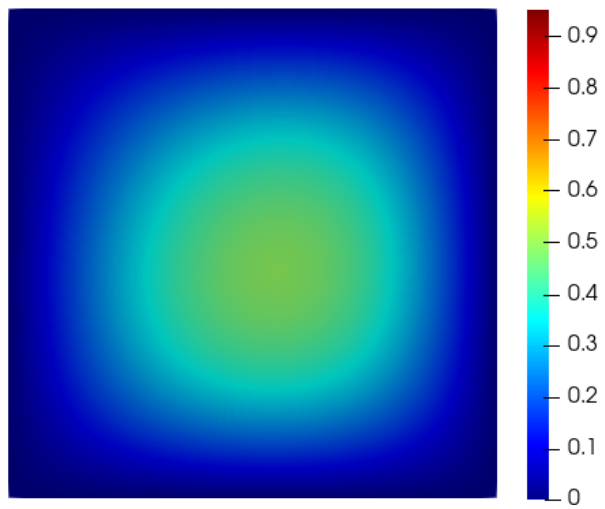


Figura 4.34: Simulação 3:  $t = 0,04125$ .

Ao evoluir o tempo para  $t = 0,05250$  obtem-se que:

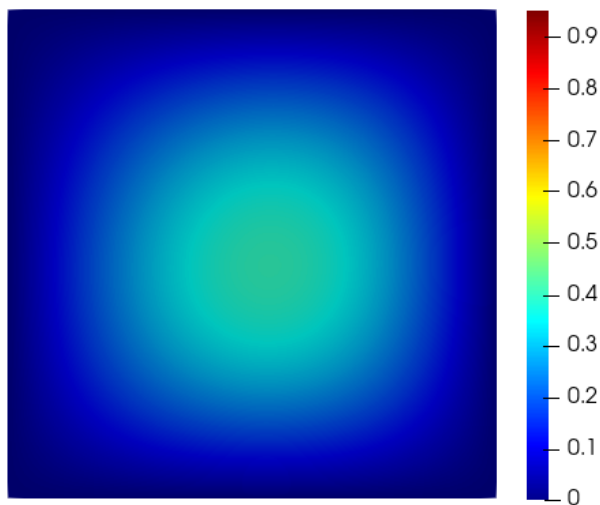


Figura 4.35: Simulação 3:  $t = 0,05250$ .

Quando  $t = 0,06125$  o código resulta em:

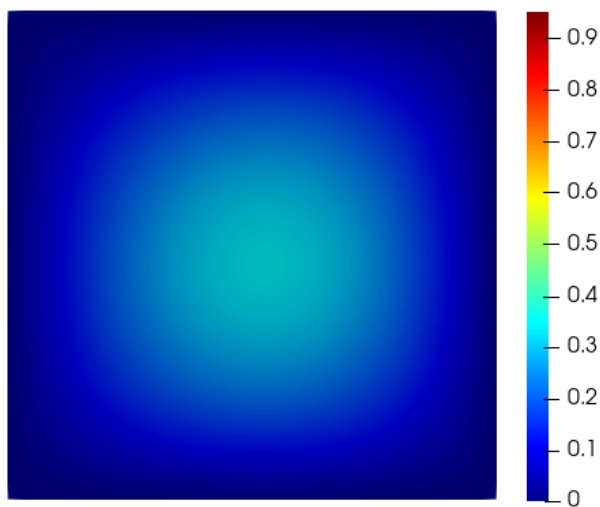


Figura 4.36: Simulação 3:  $t = 0,06125$ .

Se  $t = 0,08250$  então obtemos:

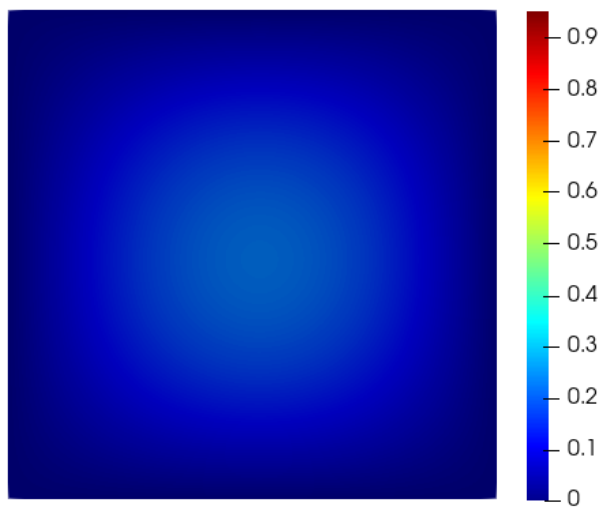


Figura 4.37: Simulação 3:  $t = 0,08250$ .

Com o tempo  $t = 0,11625$  o código gera o seguinte resultado:

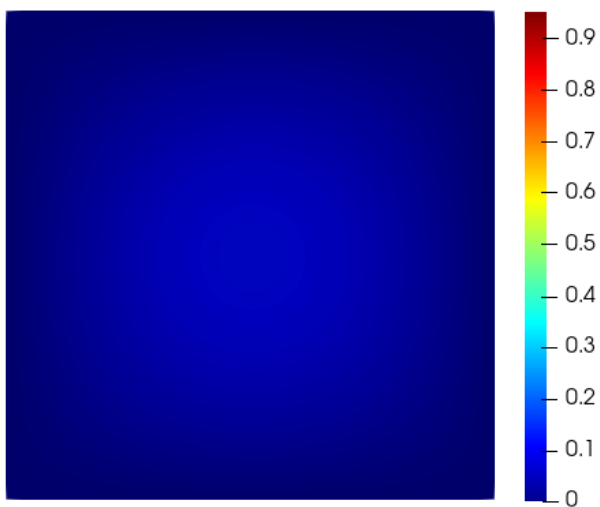


Figura 4.38: Simulação 3:  $t = 0,11625$ .

Para  $t = 0,14250$  obtemos que:

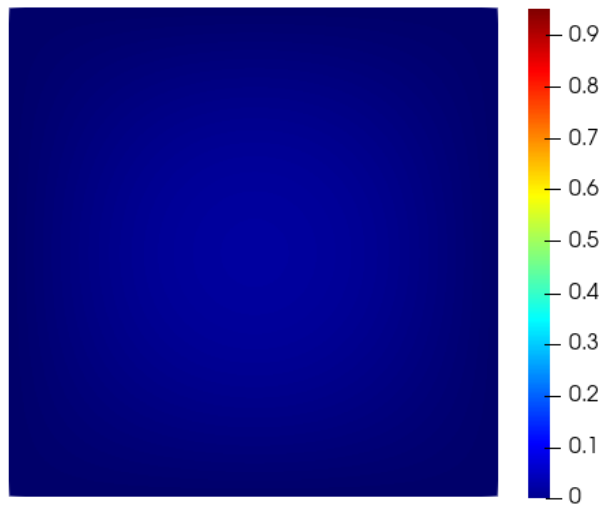


Figura 4.39: Simulação 3:  $t = 0,14250$ .

Ao evoluir  $t = 0,19375$  segue que:

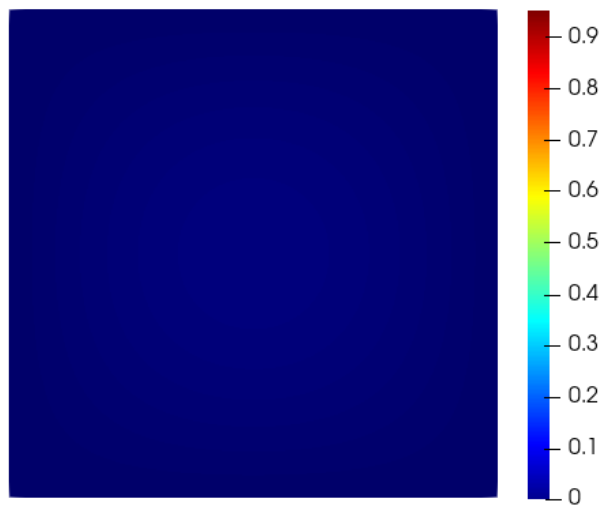


Figura 4.40: Simulação 3:  $t = 0,19375$ .

Quando o tempo assume o valor de  $t = 0,23250$  o código resulta em:

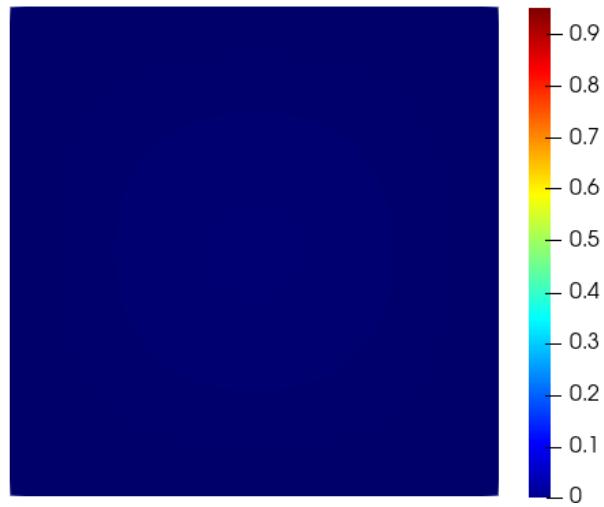


Figura 4.41: Simulação 3:  $t = 0,23250$ .

Se  $t = 0,24875$  segue que:

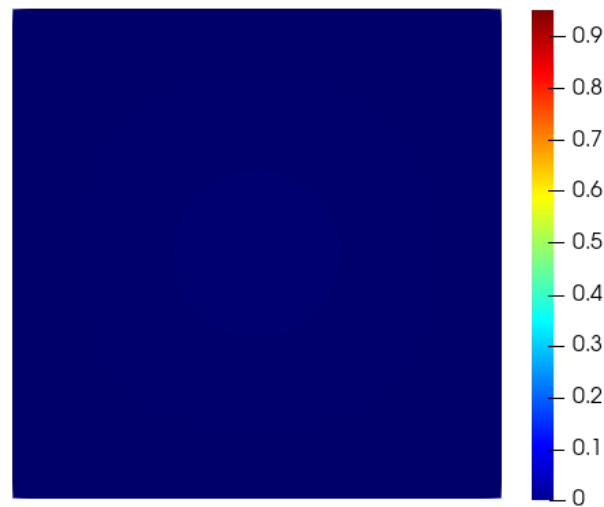


Figura 4.42: Simulação 3:  $t = 0,24875$ .

Percebemos que quando o tempo é definido por  $t = 0,29375$  a placa não sofre a ação de forças:

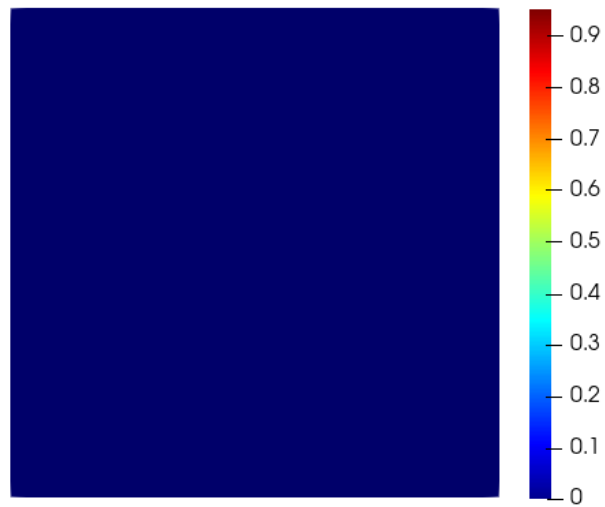


Figura 4.43: Simulação 3:  $t = 0,29375$ .

Conforme esperado, quando  $t = T = 0,5$  a placa também não está sofrendo a ação de forças:

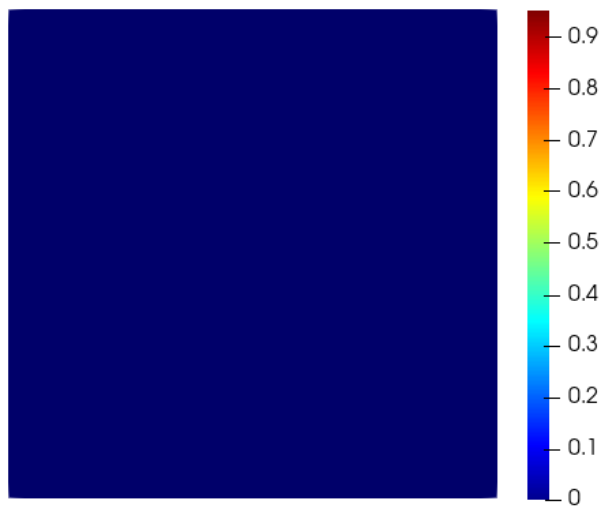


Figura 4.44: Simulação 3:  $t = T = 0,5$ .

# Capítulo 5

## Conclusões e trabalhos futuros

### 5.1 Conclusões

Nessa dissertação demonstramos que a equação de viga de quarta ordem não linear com dissipação forte e perturbação de ordem inferior do tipo  $p(x)$ -Laplaciano sobre um domínio limitado possui solução fraca. Essa demonstração foi realizada baseada no método de Faedo-Galerkin munido de resultados clássicos de Análise Funcional, espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis.

Com o auxílio do lema desenvolvido por Nakao [58], obtivemos o comportamento assintótico da solução fraca. Tal comportamento pode ser exponencial ou polinomial dependendo dos expoentes variáveis.

Ao analisarmos numericamente o referido problema optamos por abordar um caso particular, visto que atualmente não existem resultados na literatura referentes a análise numérica e a simulação computacional envolvendo problemas hiperbólicos com expoentes variáveis. Nesse caso particular do problema original, aplicamos o método de elementos finitos na parte espacial e o método das diferenças finitas na parte temporal.

Nas simulações computacionais utilizamos a linguagem de computação Python com o software FEniCS. Tais escolhas foram justificadas devido ao FEniCS ser baseado no método de elementos finitos. Realizamos três simulações computacionais onde foram modificados o particionamento da malha computacional, o tempo final e as condições iniciais.

## 5.2 Recomendações para trabalhos futuros

Como recomendação para estudos futuros podemos analisar as propriedades do problema (3.1) em domínio não limitado ou com fronteira móvel. Também podem ser investigadas as desigualdades variacionais relacionadas ao referido problema e suas ramificações, pretende-se também obter um resultado substancial para a equação diferencial parcial de quarta ordem envolvendo expoente variável não linear sem o termo dissipativo forte  $-\Delta \frac{\partial u}{\partial t}$ .

Como a unicidade da solução fraca do problema (3.1) não foi demonstrada, pretendemos usar o método da energia para verificar se o referido problema possui, de fato, uma única solução fraca.

Pretende-se implementar computacionalmente o problema (3.1) considerando as hipóteses originais enunciadas para o aludido problema, isto é, **(H.1)**, **(H.2)** e **(H.3)**.

Postulamos generalizar o problema (3.1) usando os operadores  $p(x, t)$ -Laplaciano ou  $p(u)$ -Laplaciano.

# Referências

- [1] ABDULLA, U. G., JELI, R. Evolution of Interfaces for the Non-Linear Parabolic  $p$ -Laplacian Type Reaction-Diffusion Equations. *European Journal of Applied Mathematics* 28 (2017), 827–853.
- [2] ACERBI, E., MINGIONE, G. Regularity Results for Electrorheological Fluids: the stationary case. *C. R. Acad. Sci. Paris* 334 (2001), 817–822.
- [3] ADAMS, R., FOURNIER, J. *Sobolev Spaces*, 2 ed. Academic Press, 2006.
- [4] ALVES, C. O. Existence of Solution for a Degenerate  $p(x)$ -Laplacian Equation in  $\mathbb{R}^n$ . *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 345 (2008), 731–742.
- [5] AMORIM, P., ANTONTSEV, S. Young Measure Solutions for the Wave Equation with  $p(x, t)$ -Laplacian: existence and blow-up. *Nonlinear Analysis* 92 (2013), 153–167.
- [6] ANDRADE, D., SILVA, M. A. J., MA, T. F. Exponential Stability for a Plate Equation with  $p$ -Laplacian and Memory Terms. *Math. Meth. Appl. Sci.* 35 (2012), 417–426.
- [7] ANDRADE, J. P. *Análise Numérica para as Equações de Navier-Stokes, em 2D, com Viscosidade Não-Local*. PhD thesis, Dissertação de Mestrado, PPG - MCCT - Universidade Federal Fluminense, 2019.
- [8] ANDREIANOV, B., BENDAHDANE, M., OUARO, S. Structural Stability for Variable Exponent Elliptic Problems. II. The  $p(u)$ -Laplacian and Coupled Problems. *Nonlinear Analysis* 72 (2010), 4649–4660.
- [9] ANTONTSEV, S. Wave Equation with  $p(x, t)$ -Laplacian and Damping Term: existence and blow-up. *Differential Equations and Applications* 3 (2011), 503–525.
- [10] ANTONTSEV, S., FERREIRA, J. Existence, Uniqueness and Blowup for Hyperbolic Equations with Nonstandard Growth Conditions. *Nonlinear Analysis* 93 (2013), 62–77.
- [11] ANTONTSEV, S., FERREIRA, J. On a Viscoelastic Plate Equation with Strong Damping and  $p(x, t)$ -Laplacian: existence and uniqueness. *Differential and Integral Equations* 27 (2014), 1147–1170.
- [12] ANTONTSEV, S., FERREIRA, J. A Nonlinear Viscoelastic Plate Equation with  $p(x, t)$ -Laplace Operator: blow up of solutions with negative initial energy. *Submitted in Nonlinear Analysis: Real World and Applications* (May 2020).

- 
- [13] ANTONTSEV, S., FERREIRA, J., PIŞKIN, E. Existence and Blow up of Solutions for a Strongly Damped Petrovsky Equation with Variable Exponent Nonlinearities. *Submitted in Electronic Journal of Differential Equations* (April 2020).
- [14] ANTONTSEV, S., FERREIRA, J., PIŞKIN, E. Existence and Nonexistence of Solutions to a Timoshenko Equation with Variable Exponents. *Submitted in Differential Equations and Applications* (June 2020).
- [15] ANTONTSEV, S., RODRIGUES, J. F. On Stationary Thermo-Rheological Viscous Flows. *Ann. Univ. Ferrara* 52 (2006), 19–36.
- [16] ANTONTSEV, S., SHMAREV, S. I. A Model Porous Medium Equation with Variable Exponent of Nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions. *Nonlinear Analysis* 60 (2005), 515–545.
- [17] ANTONTSEV, S., SHMAREV, S. I. Existence and Uniqueness of Solutions of Degenerate Parabolic Equations with Variable Exponents of Nonlinearity. *Journal of Mathematical Sciences* 150 (2008), 2289–2301.
- [18] ANTONTSEV, S., SHMAREV, S. I. *Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up*, 1 ed., vol. 4. Atlantis Press, 2015.
- [19] ARONSO, D. G. *The Porous Medium Equation*. Springer, Berlin, 1986.
- [20] AUTUORI, G., PUCCI, P., SALVATORI, M. C. Asymptotic Stability for Anisotropic Kirchhoff Systems. *J. Math. Anal. Appl.* 352 (2009), 149–165.
- [21] BAI, Z., DU, Z., ZHANG, S. Iterative Method for a Class of Fourth-Order  $p$ -Laplacian Beam Equation. *Journal of Applied Analysis and Computation* 9 (2019), 1443–1453.
- [22] BLOMGREN, P., CHAN, T., MULET, P., WONG, C. Total Variation Image Restoration: numerical methods and extensions. *IEEE Computer Society Press* 3 (1997), 384–387.
- [23] BOLLT, E., CHARTRAND, R., ESEDOGLU, S., SCHULTZ, P., VIXIE, K. Graduated, Adaptive Image Denoising: local compromise between total-variation and isotropic diffusion. *Adv. Comput. Math.* 31 (2007), 61–85.
- [24] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [25] CHEN, Y., LEVINE, S., RAO, M. Variable Exponent, Linear Growth Functionals in Image Restoration. *SIAM J. Appl. Math.* 66 (2006), 1383–1406.
- [26] CHIPOT, M. *Elements of Nonlinear Analysis*, 1 ed. Birkhäuser, Berlin, 2000.
- [27] CHIPOT, M., DE OLIVEIRA, H. B. Some Results on the  $p(u)$ -Laplacian Problem. *Mathematische Annalen* 375 (2019), 283–306.
- [28] CLEMENTS, J. Existence Theorems for a Quasilinear Evolution Equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 26, 4 (1974), 745–752.

- [29] CORDEIRO, S. M. S., PEREIRA, D. C., FERREIRA, J., RAPOSO, C. A. Global Solutions and Exponential Decay to a Klein-Gordon Equation of Kirchhoff-Carrier type with Logarithmic Source Term. *Submitted in Partial Differential Equations in Applied Mathematics* (May 2020).
- [30] CUCCU, F., EMAMIZADEH, B., PORRU, G. Nonlinear Elastic Membranes Involving the  $p$ -Laplacian Operator. *Electronic Journal of Differential Equations* 49 (2006), 1–10.
- [31] DE OLIVEIRA, J. V. *Análise Numérica e Simulação para uma Equação Parabólica não Linear com Termo de Reação-Difusão não Local*. PhD thesis, Dissertação de Mestrado, PPG - MCCT - Universidade Federal Fluminense, 2019.
- [32] DIENING, L. *Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids*. PhD thesis, Tese de Doutorado, Universidade de Freiburg, Germany, 2002.
- [33] DIENING, L., HARJULEHTO, P., HÄSTÖ, P., RŮŽIČKA, M. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, vol. 2017. Springer, Berlin, 2011.
- [34] DOS SANTOS, M. J. *Existência e Unicidade de Solução de uma Equação Parabólica com Expoente Variável da não Linearidade*. PhD thesis, Dissertação de Mestrado, PPGME - Universidade Federal do Pará, 2008.
- [35] DREHER, M. The Wave Equation for the  $p$ -Laplacian. *Hokkaido Math. J.* 36 (2007), 21–52.
- [36] FAN, X. L., ZHAO, D. On the Spaces  $L^{p(x)}(\Omega)$  and  $W^{m,p(x)}(\Omega)$ . *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 263 (2001), 424–446.
- [37] FERREIRA, J., MATOS, M. P., PIŞKIN, E., CORDEIRO, S. M. S., RAPOSO, C. A. Hidden Regularity for a Nonlinear Hyperbolic-Parabolic Partial Differential Equations. *Submitted in Communications on Pure and Applied Analysis* (June 2020).
- [38] FERREIRA, J., MESSAOUDI, S. A. On the General Decay of a Nonlinear Viscoelastic Plate Equation with a Strong Damping and  $p(x, t)$ -Laplacian. *Nonlinear Analysis* 104 (2014), 40–49.
- [39] FERREIRA, J., RAPOSO, C. A., SANTOS, M. L. Global Existence for a Quasilinear Hyperbolic Equation in a Noncylindrical Domain. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 29 (2006), 457–467.
- [40] FU, Y. The Existence of Solutions for Elliptic Systems with Nonuniform Growth. *Studia Mathematica* 151 (2002), 227–246.
- [41] GAO, H., MA, T. F. Global Solutions for a Nonlinear Wave Equation with  $p$ -Laplacian Operator. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* 11 (1999), 1–13.
- [42] GEORGIE, V., TODOROVA, G. Existence of a Solution of the Wave Equation with Nonlinear Damping and Source Terms. *Journal Differential Equations* 109 (1994), 295–308.

- [43] GREEN, J. W., VALENTINE, F. A. On the Arzela-Ascoli Theorem. *Mathematics Magazine* 34 (1961), 199–202.
- [44] GUIMARÃES, C. J. *Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o  $p(x)$ -Laplaciano*. PhD thesis, PPGM - Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, 2006.
- [45] HAASE, M. *Functional Analysis: an elementary introduction*, vol. 156. American Mathematical Society, 2014.
- [46] KAFINIA, M., MESSAOUDI, S. A. A Blow-Up Result in a Cauchy Viscoelastic Problem. *Applied Mathematics Letters* 21 (2008), 549–553.
- [47] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, 1 ed. Wiley Classics Library, 1989.
- [48] LANDES, R. On the Existence of Weak Solutions for Quasilinear Parabolic Initial-Boundary Value Problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 89 (1981), 217–237.
- [49] LANGTANGEN, H. P., LOGG, A. *Solving PDEs in Python: the FEniCS tutorial I*, vol. 3. Springer, 2016.
- [50] LIONS, J. L. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Nonlineaires*. Dunod, Paris, 1969.
- [51] LOBATO, R. F. C. *Solvabilidade e Decaimento Exponencial para um Sistema de EDP Não Linear com Acoplamento na Fonte*. PhD thesis, PPGME - Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará, 2006.
- [52] LOGG, A., MARDAL, K. A., WELLS, G. N. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer, 2012.
- [53] MA, T. F., PELICER, M. L. Attractors for Weakly Damped Beam Equations with  $p$ -Laplacian. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Special* (2013), 525–534.
- [54] MEDEIROS, L. A., MIRANDA, M. A. M. *Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elíticos Não Homogêneos*. UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.
- [55] MESSAOUDI, S. A., HOUARI, B. S. Blow Up in a Nonlinearly Damped Wave Equation. *Mathematische Nachrichten* 231 (2001), 105–111.
- [56] MESSAOUDI, S. A., HOUARI, B. S. Blow Up in the Cauchy Problem for a Nonlinearly Damped Wave Equation. *Communications in Applied Analysis* 7 (2002), 379–386.
- [57] MESSAOUDI, S. A., HOUARI, B. S. Global Non-Existence of Solutions of a Class of Wave Equations with Non-Linear Damping and Source Terms. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 27 (2004), 1687–1696.
- [58] NAKAO, M. Asymptotic Stability of the Bounded or Almost Periodic Solutions of the Wave Equation with Nonlinear Dissipative Terms. *J. Math. Anal. Appl.* 58 (1977), 368–386.

- [59] NAKAO, M., YANG, Z. Global Attractors for Some Quasi-Linear Wave Equations with a Strong Dissipation. *Adv. Math. Sci. Appl.* 17 (2007), 89–105.
- [60] PANI, W. S., FERREIRA, J. Existence of Solutions to a Fourth-Order Wave Equation involving Variable Exponent. Em *XVII WPDE - Workshop on Partial Differential Equations* (2018), LNCC - Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis - RJ.
- [61] PANI, W. S., FERREIRA, J. Comportamento Assintótico para a Equação da Viga não Linear com Expoente Variável. Em *V SIMMA - Simpósio de Matemática da Região Sul Fluminense* (2019), UFF - Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda - RJ.
- [62] PANI, W. S., FERREIRA, J. Existence, Uniqueness and Asymptotic Behavior to a Fourth-Order Equation involving  $p(x)$ -Laplacian Operator. Em *XVIII WPDE - Workshop on Partial Differential Equations* (2019), LNCC - Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis - RJ.
- [63] PANI, W. S., FERREIRA, J. Existência e Comportamento Assintótico da Solução Fraca para a Equação de Viga não Linear envolvendo o  $p(x)$ -Laplaciano. Em *XIII ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações* (2019), UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC.
- [64] PANI, W. S., FERREIRA, J. Existência e Comportamento Assintótico das Soluções Fracas de uma Equação de Evolução não Linear envolvendo o Operador  $p(x)$ -Laplaciano. Em *32º CBM - Colóquio Brasileiro de Matemática* (2019), IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro - RJ.
- [65] PANI, W. S., FERREIRA, J. Existência e Comportamento Assintótico das Soluções Fracas para uma E.D.P. de Quarta Ordem com Dissipação Forte e Perturbação de Ordem Inferior do Tipo  $p(x)$ -Laplaciano. Em *XII ENMC - Encontro Nacional de Modelagem Computacional e X ECTM - Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais* (2019), UFJF - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora - MG.
- [66] PANI, W. S., FERREIRA, J. Existência e Comportamento Assintótico de Soluções para a Equação da Onda de 4ª Ordem envolvendo Expoente Variável. Em *5º Colóquio de Matemática da Região Norte* (2019), UFAC - Universidade Federal do Acre, Rio Branco - AC.
- [67] PANI, W. S., FERREIRA, J. Existência e Comportamento Assintótico de Soluções para a Equação da Onda de 4ª Ordem envolvendo Expoente Variável. Em *XII EAMC - Encontro Acadêmico de Modelagem Computacional* (2019), LNCC - Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis - RJ.
- [68] PANI, W. S., FERREIRA, J. Existência e Decaimento de Energia para uma E.D.P. de 4ª Ordem não Linear envolvendo o Operador  $p(x)$ -Laplaciano. Em *XXXIX CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional* (2019), UFU - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG.
- [69] PEANO, G. Démonstration de L'Intégrabilité des Équations Différentielles Ordinaires. *Math. Ann.* 37 (1890), 182–228.

- 
- [70] RIVERA, J. E. M. *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*. Laboratório Nacional de Computação Científica, 2004.
- [71] RŮŽIČKA, M. *Electrorheological Fluids: modeling and mathematical theory*, 1 ed., vol. 1748. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [72] TODOROVA, G., VITILLARO, E. Blow-Up for Nonlinear Dissipative Wave Equations in  $\mathbb{R}^n$ . *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 303 (2005), 242–257.
- [73] TÜROLA, J. Image Denoising Using Directional Adaptive Variable Exponents Model. *J. Math. Imaging. Vis.* 57 (2017), 56–74.
- [74] URIBE, D. C., FIORENZA, A. *Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis*. Birkhäuser - Springer, Heidelberg, 2013.
- [75] VITALI, G. Sui Gruppi di Punti e Sulle Funzioni di Variabili Reali. *Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino* 43 (1908), 75–92.
- [76] WILSTEIN, Z. *Global Well-Posedness for a Nonlinear Wave Equation with  $p$ -Laplacian Damping*. PhD thesis, Dissertation, University of Nebraska-Lincolny, 2011.
- [77] ZHANG, C., ZHOU, S. A Fourth-Order Degenerate Parabolic Equation with Variable Exponent. *Journal Partial Differential Equations* 22 (2009), 376–392.
- [78] ZHIKOV, V. V. Averaging of Functionals of the Calculus of Variations and Elasticity Theory. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 29 (1987), 33–66.