

Universidade Federal Fluminense

JOSIANE CAMPOS DA SILVA

Caos em um circuito eletrônico análogo ao  
oscilador de Duffing excitado por duas  
frequências

VOLTA REDONDA

2023

JOSIANE CAMPOS DA SILVA

Caos em um circuito eletrônico análogo ao  
oscilador de Duffing excitado por duas  
frequências

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados à Engenharia e Ciência.

Orientador:

Prof. D.Sc. André Gusso

Coorientador:

Prof. D.Sc. Wellington Gomes Dantas

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

VOLTA REDONDA

2023

Ficha catalográfica automática - SDC/BEM  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

S586c Silva, Josiane Campos da  
Caos em um circuito eletrônico análogo ao oscilador de  
Duffing excitado por duas frequências / Josiane Campos da  
Silva. - 2023.  
89 p.: il.

Orientador: André Gusso.  
Coorientador: Wellington Dantas.  
Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,  
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta  
Redonda, Volta Redonda, 2023.

1. Caos Experimental. 2. Caotificação. 3. Circuito  
Eletrônico. 4. Oscilador de Duffing. 5. Produção  
intelectual. I. Gusso, André, orientador. II. Dantas,  
Wellington, coorientador. III. Universidade Federal  
Fluminense. Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de  
Volta Redonda. IV. Título.


CDD - XXX

# Caos em um circuito eletrônico análogo ao oscilador de Duffing excitado por duas frequências

Josiane Campos da Silva


Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados à Engenharia e Ciência.

Aprovada por:

Documento assinado digitalmente  
 **ANDRE GUSSO**  
Data: 19/12/2023 15:15:13-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Prof. André Gusso, D.Sc. / MCCT-UFF (Orientador)

Documento assinado digitalmente  
 **ELIANE DA SILVA CHRISTO**  
Data: 20/12/2023 19:09:12-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof(a). Eliane da Silva Christo, D.Sc. / MCCT-UFF

Documento assinado digitalmente  
 **MARCIO EISENCRAFT**  
Data: 20/12/2023 18:30:47-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Marcio Eisenkraft, D.Sc. / POLI-USP

Volta Redonda, 07 de dezembro de 2023.

*"Ao meu amado Felipe Elias Pereira, por toda sua compreensão".*

# Agradecimentos

A Deus, por ser essencial em minha vida. A todos os Mestres do curso, que foram importantes na minha vida acadêmica e no desenvolvimento desta dissertação. Aos orientadores e professores André Gusso e Wellington Dantas. A meu marido Felipe Elias Pereira, por todo suporte, apoio e força que me deu neste percurso. Aos amigos deste curso, pelo apoio e colaboração nesta trajetória acadêmica: Caio Damasceno Gonçalves, Fernando Antônio Azevedo Pereira, Raila de Medeiros Melo. Agradeço também ao meu amigo Ricardo Pereira Abrão por incentivar nos momentos mais desafiadores da construção deste trabalho e proporcionar o crescimento acadêmico.

# Resumo

Sistemas físicos com dinâmica caótica possuem várias possíveis aplicações práticas. Contudo, o sucesso de tais aplicações depende da qualidade e robustez do sinal caótico. A maioria dos sistemas físicos estudados até o momento apresentam caos em regiões muito específicas dos seus espaços de parâmetros. Com isso, flutuações nos parâmetros do sistema em relação àqueles que geram caos, sejam decorrentes do processo de fabricação ou de outros efeitos externos, podem fazer com que deixe de gerar um sinal caótico. Tais problemas podem ser evitados através da caotificação do sistema físico, aumentando a região do espaço de parâmetros na qual caos pode ser obtido. Recentemente, foi descoberto um método de caotificação altamente eficiente, que funciona em alguns sistemas físicos. Trata-se da excitação com duas frequências de sistemas com potencial de dois poços. A fim de comprovar os estudos teóricos, neste trabalho realiza-se um estudo experimental da dinâmica caótica de um sistema físico real. O sistema físico considerado foi um circuito eletrônico análogo ao oscilador de Duffing. O objetivo principal do trabalho é desenvolver um processo automatizado de geração de ondas e coleta de dados para aplicação no circuito. Essa automação tende a facilitar análises para esse tipo de sistema e similares. O circuito foi modelado teoricamente para permitir que simulações numéricas indicassem a região do espaço de parâmetros onde investigar o circuito experimentalmente. O sistema automatizado foi empregado para obter dados sobre a dinâmica do sistema para excitação por uma e duas frequências. Os dados foram analisados e mostraram boa concordância com o esperado teoricamente. Mais importante, os resultados experimentais confirmaram a eficácia do método de caotificação por duas frequências.

# Abstract

Physical systems with chaotic dynamics have several possible practical applications. However, the success of such applications depends on the quality and robustness of the chaotic signal. However, most physical systems studied to date present chaos in very small regions of its parameter spaces. As a result, fluctuations in the system parameters arising from the manufacturing process or other external effects, may cause it to no longer generate a chaotic signal. Such problems can be avoided through the chaotification of the physical system, increasing the region of parameter space in which chaos can be obtained. Recently, it was discovered a highly efficient method of chaotification that works on some physical systems. It involves the two-frequency excitation of systems with two-well potential. In order to check the theoretical predictions, in this work an experimental study of the chaotic dynamics of a real physical system. The physical system considered was an electronic circuit analogue to the Duffing oscillator. The main objective of the work is to develop an automated process of generating waves and collecting data to be used with the circuit. This automation tends to facilitate analyzes for this type of system and similar ones. The circuit was modeled theoretically to allow numerical simulations to indicate the region of parameter space in which to investigate the circuit experimentally. The automated system was used to obtain data on the dynamics of the system for excitation at one and two frequencies. The data were analyzed and showed good agreement with theoretical expectations. More importantly, the experimental results confirmed the effectiveness of the two-frequency chaotification method.

# Palavras-chave

1. Caos
2. Caos robusto
3. Caotificação
4. Circuitos eletrônicos
5. Arduino
6. Oscilador de Duffing

# Sumário

<b>Lista de Símbolos</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>16</b>
<b>2 Sistemas Dinâmicos</b>	<b>19</b>
2.1 Tipos de sistemas . . . . .	22
2.1.1 Sistema unidimensional . . . . .	22
2.1.2 Sistema bidimensional . . . . .	25
2.2 Sistema Caótico . . . . .	30
2.2.1 Equações de Lorenz . . . . .	31
2.2.2 Mapa logístico . . . . .	33
2.3 Expoente de Lyapunov . . . . .	38
2.4 O oscilador de Duffing . . . . .	40
<b>3 Circuito eletrônico análogo ao oscilador Duffing</b>	<b>45</b>
3.1 Equações da dinâmica do circuito . . . . .	45
3.1.1 Modelagem dos diodos e de $F(V_C)$ . . . . .	49
3.2 Resultados das simulações numéricas . . . . .	51
<b>4 O Sistema Experimental</b>	<b>53</b>

---

4.1	A plataforma de prototipagem eletrônica Arduino . . . . .	53
4.2	Circuito experimental . . . . .	56
4.3	Automação de geração e leitura de sinais . . . . .	59
4.4	Síntese digital direta . . . . .	60
4.5	Implementação da Síntese Digital Direta no Arduino Due . . . . .	61
4.5.1	Calibração do gerador de ondas pelo DAC . . . . .	68
4.6	Leitura de amplitude de ondas complexas com Arduino Due . . . . .	71
4.7	Implementação da automatização . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Resultado</b>	<b>77</b>
5.1	Resultados teóricos . . . . .	77
5.2	Resultados experimentais . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Conclusão e Trabalho Futuro</b>	<b>84</b>
6.1	Conclusão . . . . .	84
6.2	Trabalho Futuro . . . . .	85
	<b>Referências</b>	<b>87</b>

# Lista de Símbolos

$m$	: Massa
$l$	: Comprimento
$\theta$	: Ângulo de deslocamento
$g$	: Gravidade
$t$	: Tempo
$\mathbb{R}^2$	: Plano de 2 dimensões
$\tau$	: Traço
$\Delta$	: Determinante da matriz
$\alpha$	: Coeficiente linear
$\zeta$	: Frequência normalizada de Duffing no cap.2
$\beta$	: Coeficiente não linear
$\lambda$	: Expoente de Lyapunov
$\sigma$	: Número de Prandtl
$\delta$	: Coeficiente de amortecimento
$\varepsilon$	: Diferença da trajetória
lim	: Limite
$\infty$	: Infinito
$D$	: Diodo
$R$	: Resistor
$L$	: Indutor
$C$	: Capacitor
$V$	: Tensão
$G$	: Ganho do amplificador operacional
$I$	: Corrente elétrica
$F$	: Força
$\eta$	: Fator de idealidade do diodo
$T$	: Temperatura
$W$	: Função W de Lambert

$\Omega$  : Frequência normalizada

$V_{pp}$  : Volts pico a pico

# Lista de Figuras

2.1	Pêndulo Simples. . . . .	21
2.2	Campo vetorial para o sistema $\dot{x} = \sin(x)$ . . . . .	23
2.3	Ponto fixo semi-estável . . . . .	24
2.4	Retrato de fase do sistema $\dot{x} = \sin(x)$ . . . . .	25
2.5	Classificação de pontos fixos de um sistema bidimensional . . . . .	26
2.6	Ponto de sela . . . . .	26
2.7	Diagrama de pontos fixos de um sistema bidimensional . . . . .	27
2.8	Espiral estável (esquerda) e Espiral instável (direita) . . . . .	28
2.9	Nó estável e nó instável, respectivamente. . . . .	29
2.10	Série temporal de $x(t)$ do sistema das Equações de Lorenz. . . . .	32
2.11	Atrator de Lorenz . . . . .	33
2.12	Mapa de Bifurcação onde caos acontece com $r \approx 3.54087$ . . . . .	34
2.13	$x_n$ obtido como solução da equação 2.17 para $r = 2.0$ . . . . .	35
2.14	$x_n$ obtido como solução da equação 2.17 para $r = 3.2$ . . . . .	35
2.15	$x_n$ obtido como solução da equação 2.17 para $r = 3.5$ . . . . .	36
2.16	$x_n$ obtido como solução da equação 2.17 para $r = 3.9$ . . . . .	36
2.17	$x_n$ obtido como solução da equação 2.17 para $r = 4.0$ . . . . .	37
2.18	Comportamento do mapa logístico para diferentes condições iniciais na região caótica . . . . .	37
2.19	Expoente de Lyapunov . . . . .	38
2.20	Expoente de Lyapunov para equação 2.17 . . . . .	40
2.21	Gráfico de sobreposição do expoente Lyapunov e mapa de bifurcação . . . . .	40

---

2.22	Exemplos de poço simples e duplo do oscilador de Duffing . . . . .	42
2.23	Simulação do oscilador de Duffing com método de Runge-Kutta com $\zeta =$ 0.7 . . . . .	42
2.24	Simulação do oscilador de Duffing com método de Runge-Kutta com $\zeta =$ 1.0 . . . . .	43
2.25	Simulação do oscilador de Duffing com método de Runge-Kutta com $\zeta =$ 1.1 . . . . .	43
2.26	Simulação do oscilador de Duffing com método de Runge-Kutta com $\zeta =$ 1.1 . . . . .	43
2.27	Simulação do oscilador de Duffing com método de Runge-Kutta com $\zeta =$ 1.2 . . . . .	43
2.28	Simulação do oscilador de Duffing com método de Runge-Kutta com $\zeta =$ 1.3 . . . . .	44
3.1	Diagrama esquemático do circuito análogo ao oscilador de Duffing. . . . .	45
3.2	Simbologia de um amplificador operacional (AO) . . . . .	46
3.3	Curva característica de um diodo de silício . . . . .	49
4.1	Plataforma Arduino DUE . . . . .	55
4.2	Diagrama em blocos do experimento . . . . .	57
4.3	Diagrama do circuito implementado . . . . .	58
4.4	Diagrama do circuito somador . . . . .	58
4.5	Diagrama em bloco do experimento automatizado . . . . .	59
4.6	Análise de período de onda de X passos e onda de X/2 passos . . . . .	61
4.7	Senóide com 100 amostras . . . . .	62
4.8	Código de geração automatizada das ondas senoidais para 10 mil amostras	63
4.9	Superposição de ondas senoidais com razão de 1/1.07 . . . . .	64
4.10	Fluxograma parte 1 do gerador de onda senoidal . . . . .	66
4.11	Fluxograma parte 2 do gerador de onda senoidal . . . . .	67
4.12	Atraso com a instrução <i>nop</i> entre as amostras . . . . .	68

---

4.13	Regressão linear de período e quantidade de <i>nop's</i> para repetição do array com 10 mil amostras. . . . .	70
4.14	Frequência da onda senoidal em função da repetição da <i>nop's</i> . . . . .	70
4.15	Código no IDE Arduino para leitura de onda com até 20 mil pontos de amostras . . . . .	71
4.16	Relação dos pontos experimentais e da reta ajustada . . . . .	72
4.17	Taxa de leituras por segundos . . . . .	73
4.18	Fluxograma do processo (Automação) . . . . .	74
4.19	Montagem experimental . . . . .	75
4.20	Regressão linear de <i>nop</i> e períodos para vetor de 32 pontos com valores de frequência . . . . .	76
5.1	Mapa de cores para o maior expoente de Lyapunov para a dinâmica de excitação de uma frequência dada pela equação (5.1) para (a) e pontos com expoente de Lyapunov positivo destacado em cor clara(b). Em (c) temos resultados para o caso em que a força é aquela do oscilador de Duffing	79
5.2	Mapa de cores para o maior expoente de Lyapunov para a dinâmica de excitação de 2 frequências ( $r = 1/1.07$ ) dada pela equação (5.1) para (a) e pontos com expoente de Lyapunov positivo destacado em cor clara(b). Em (c) temos resultados para o caso em que a força é aquela do oscilador de Duffing . . . . .	79
5.3	Séries temporais experimentais para excitação por duas frequências (a) e (b) $f = 740\text{Hz}$ , (c) e (d) $f = 920\text{Hz}$ , (e) e (f) $f = 1200\text{Hz}$ . . . . .	80
5.4	Resultados experimentais para excitação por uma frequência . . . . .	81
5.5	Resultados experimentais para excitação por duas frequências . . . . .	83

# Lista de Tabelas

4.1	Resultados experimentais . . . . .	69
-----	------------------------------------	----

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo da dinâmica, que se preocupa com as forças e movimentos dos objetos, teve um grande avanço com as descobertas de Isaac Newton no final do século XVII [42]. Ele desenvolveu as três leis do movimento e criou as equações diferenciais para descrever a relação entre a força aplicada em um objeto e a aceleração resultante [49]. Essas equações se tornaram a base da mecânica clássica e permitiram a previsão do comportamento dos objetos em movimento [15]. A geração seguinte de físicos e matemáticos estenderam os métodos analíticos de Newton para problemas mais abrangentes e complexos, aplicando para sistemas de três corpos, problema de difícil solução analítica [16]. Após décadas, problemas desse tipo começaram a ser trabalhados de forma mais qualitativa. Assim, Henri Poincaré, um matemático francês do final do século XIX, desenvolveu um método inovador para estudar os sistemas dinâmicos complexos, e anos depois essas técnicas implementadas foram reconhecidas como a base da teoria do caos [22]. Uma das ferramentas que ele criou foi a análise topológica, que permitia estudar o comportamento de um sistema sem a necessidade de resolver as equações diferenciais analiticamente [17]. Em vez disso, ele usou técnicas geométricas para entender as propriedades qualitativas dos sistemas dinâmicos, como a existência de órbitas periódicas, a estabilidade dos pontos de equilíbrio e a sensibilidade às condições iniciais. Essa abordagem revolucionou o estudo da dinâmica e teve implicações significativas em várias áreas da ciência e engenharia.

Em 1950, a invenção do computador de alta velocidade foi um marco na história da dinâmica e teve um grande impacto na capacidade de modelar e simular sistemas dinâmicos complexos [36]. Antes da invenção dos computadores, as equações diferenciais que descreviam o movimento dos sistemas dinâmicos, geralmente precisavam ser resolvidas de forma analítica, o que era uma tarefa árdua e muitas vezes impossível para sistemas mais complexos. Com a chegada dos computadores de alta velocidade, os cientistas puderam

usar métodos numéricos para resolver essas equações e obter soluções aproximadas em tempo hábil [9]. Isso permitiu que os pesquisadores explorassem uma ampla gama de fenômenos dinâmicos em detalhes, desde o comportamento de partículas subatômicas até o movimento de planetas inteiros em sistemas solares.

A evolução do estudo de sistemas dinâmicos levou a descoberta do caos. Este corresponde a uma dinâmica que, apesar de determinística, resulta em uma dinâmica complexa, aperiódica [18]. Uma de suas principais características é a sensibilidade do sistemas às condições iniciais, pois o mesmo sistema, partindo de estados muito próximos, tendem a ter um comportamento distinto ao longo do tempo [41]. O caos hoje não é uma mera curiosidade acadêmica, tem várias possíveis aplicações práticas: criptografia, comunicação de banda larga, sonar, radares, geração de números aleatórios e outros [23]. O advento dos computadores também levou ao desenvolvimento de novas técnicas de análise de dados, como a análise de séries temporais e a análise de caos, que se tornaram ferramentas essenciais para a compreensão da dinâmica de sistemas complexos.

Um exemplo de sistema dinâmico não linear que exhibe comportamento complexo, incluindo oscilações amortecidas, autoexcitação e caos [27] é o oscilador de Duffing. A motivação de estudos sobre esse oscilador, se dá em função de que vários sistemas físicos podem ser modelados, pelo menos de forma aproximada, como um oscilador de Duffing, tais como modelos de vigas elásticas, sistemas com molas não-lineares, molas não-lineares, aproximação de baixa ordem para equações com não-linearidade mais forte dentre outras.

O oscilador de Duffing é modelado por uma equação diferencial ordinária não-linear de segunda ordem. Em função dos parâmetros da equação modelamos diferentes comportamentos físicos. O caso mais interessante é aquele no qual as forças estão associados a um potencial de poço duplo. Neste caso, a dinâmica pode ser bastante rica e complexa, incluindo-se certa facilidade no aparecimento de regimes de dinâmica caótica

Representações gráficas, como diagramas de fase ou gráficos de posição em função do tempo, podem ajudar a ilustrar esses diferentes comportamentos desse tipo de sistema em resposta a diferentes valores de seus parâmetros. Para uma análise mais aprofundada e visualizações detalhadas, é necessário utilizar ferramentas de simulação numéricas.

Recentemente, os orientadores e seus colaboradores demonstraram teoricamente, através de simulações numéricas, que a dinâmica caótica do oscilador de Duffing com poço duplo e outros sistemas similares pode ser melhorada através da excitação por duas frequências [23] [24]. Observou-se uma grande caotificação, com grandes regiões contínuas de caos, associada ainda à presença de caos robusto.

Devido á importância de se terem disponíveis sistemas físicos que gerem caos com essas características de robustez, buscou-se neste trabalho verificar experimentalmente a efetividade do método de caotificação por duas frequências. Para isso se utilizou um circuito eletrônico simples, análogo ao oscilador de Duffing com dois poços de potencial. Para uma verificação sistemática do processo de caotificação para diferentes amplitudes de excitação e frequências, um sistema de geração de sinais e leitura automatizado foi concebido e desenvolvido com base na plataforma Arduino

Dessa forma, este trabalho está organizado como segue. No capítulo 2, fornece uma introdução aos conceitos básicos de sistemas dinâmicos, incluindo definições e classificações. Além de apresentar alguns métodos de análise para sistemas unidimensionais, bidimensionais e caóticos. Também exploramos em maiores detalhes o oscilador de Duffing e discutimos seu comportamento caótico.

No capítulo 3, será apresentada a análise das equações de movimento do circuito eletrônico análogo aos oscilador de Duffing e uma previsão numérica de comportamento por simulações computacionais pelo método de *Runge-Kutta* [7].

No capítulo 4, será abordado a aplicação da técnica de síntese direta para controle de frequências através de um geração de ondas automatizado. O gerador de sinais caóticos é implementado usando um oscilador de Duffing. O circuito eletrônico é projetado para captar os comportamentos do oscilador de Duffing e convertê-los em sinais elétricos. Os sinais elétricos são então coletados por um coletor de dados automatizado usando a plataforma Arduino Due. No Capítulo 5 serão apresentados os resultados teóricos e experimentais, com a devida comparação entre eles. Finalizando, no Capítulo 6 com as considerações finais sobre este trabalho e suas perspectivas futuras.

# Capítulo 2

## Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico é um modelo físico que possui uma dinâmica adjacente que controla a evolução de seu estado ao longo do tempo. Esses sistemas são geralmente usados para modelar e fazer previsões de sistemas mecânicos, econômicos, biológicos, entre outros. Para definir um sistema dinâmico, é preciso conhecer suas equações de movimento associadas ou o conjunto de equações que definem sua evolução. A título de exemplo desses sistemas, que são abordados na área das ciências e da engenharia, citam-se o pêndulo simples, o sistema de equações climáticas e o sistema massa-mola.

Os sistemas dinâmicos também podem ser classificados como linear ou não linear, contínuo ou discreto, determinístico ou estocástico, autônomo e não-autônomo [35]. Em geral, o termo sistema dinâmico vem associado às equações diferenciais, sejam elas do tipo ordinárias ou parciais. Em geral, as equações lineares permitem a obtenção de soluções exatas, enquanto as equações diferenciais não lineares, são muito complicadas de serem resolvidas analiticamente, restando a possibilidade de sua solução através de métodos numéricos ou aproximativos[50].

Um sistema dinâmico do tipo contínuo [35] é aquele em que o tempo evolui de forma contínua, em oposição ao caso discreto [11], no qual o tempo assume apenas certos valores determinados. Alguns exemplos de equações diferenciais que descrevem sistemas contínuos são:

- A equação do oscilador harmônico simples[3] é um exemplo clássico de equação diferencial ordinária para sistema massa-mola. Nesse sistema, uma massa está presa a uma mola ideal e sujeita apenas à força restauradora da mola. A equação diferencial

que descreve o movimento do sistema é

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \quad (2.1)$$

onde  $m$  é a massa do objeto em movimento,  $x$  é a posição da massa em relação à posição de equilíbrio,  $t$  é o tempo,  $k$  é a constante elástica da mola.

- A equação do calor[48] é uma equação diferencial parcial que descreve como a temperatura varia em um meio contínuo, como um sólido, líquido ou gás. A equação é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q \nabla^2 u \quad (2.2)$$

onde  $u$  é a temperatura,  $t$  é o tempo e  $Q$  é a condutividade térmica.

Contraopondo-se aos exemplos anteriores, tem-se as equações de tempo discreto, que são baseadas em diferenças finitas ao invés de derivadas. Por exemplo, os mapas são sistemas governados por equações de tempo discreto. Essas equações são chamadas de equações de diferença e podem ser representadas de forma genérica por  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Um modelo de equação de tempo discreto em sistema dinâmicos é a equação logística (2.3), utilizada para modelar o crescimento populacional[33].

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n/K), \quad (2.3)$$

em que  $x_n$  é a densidade populacional no instante de tempo discreto  $n$ ,  $r$  é a taxa de crescimento,  $K$  a capacidade de suporte do ambiente.

Estes exemplos citados anteriormente pertencem à categoria de sistemas dinâmicos determinísticos. Estes sistemas recebem tal nomenclatura devido ao fato que sua evolução é regida por leis físicas ou naturais conhecidas [14]. Em contraposição, existem casos em que um sistema físico pode ser descrito por regras estocásticas, ou aleatórias. É o caso, por exemplo, do movimento de uma partícula que pertence a um volume de um gás. Tal partícula se move no espaço sujeita à forças de colisão com outras partículas que só podem ser descritas em termos probabilísticos. Assim, a evolução desse sistema é distinta daquela mencionada nos exemplos prévios, uma vez que não conhecemos em detalhes sua dinâmica[20].

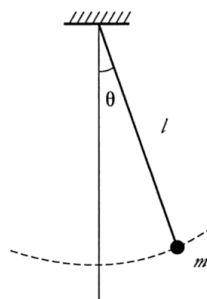
Uma equação diferencial não autônoma é uma equação que depende explicitamente do tempo [54]. Em outras palavras, a taxa de variação de uma variável, não depende apenas de funções das demais variáveis do problema, mas dependente de uma certa função do tempo,  $F(t)$ . Como é o caso, por exemplo do caso do oscilador harmonico forçado, onde

temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\omega_0^2 x + F(t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Portanto, pode-se definir um sistema dinâmico autônomo como um conjunto de equações diferenciais que não depende explicitamente do tempo. O pêndulo simples[19] é um exemplo de sistema autônomo, no qual é formado por uma massa pontual suspensa por um fio e que oscila em torno de sua posição de equilíbrio sob ação da força gravitacional, conforme figura 2.1. Observa-se que a composição dessa sistema, onde  $m$  é massa,  $l$  o comprimento da corda e  $\theta$  a angulação de deslocamento do pêndulo.

Figura 2.1: Pêndulo Simples.



Fonte:[37]

No exemplo do pêndulo simples, a equação diferencial que descreve o movimento do pêndulo contém um termo que depende implicitamente do tempo, o ângulo ( $\theta$ ). A equação diferencial (2.5) que governa o movimento do pêndulo simples é

$$\ddot{\theta}(t) + (g/L)\text{sen}(\theta) = 0, \quad (2.5)$$

onde  $\theta(t)$  é o deslocamento angular do pêndulo em relação à posição de equilíbrio,  $t$  é o tempo,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $L$  é o comprimento do pêndulo,  $\ddot{\theta}(t)$  é a segunda derivada de  $\theta$  em relação ao tempo.

Como um exemplo de aplicação da descrição da evolução de um sistema por equações diferenciais temos o modelo de Lotka-Volterra [40]. Essa modelo, também conhecido como modelo de presa-predador, é um sistema de equações diferenciais que descreve a dinâmica entre duas espécies em um ecossistema, uma atuando como a presa e a outra como o predador. Esse modelo, consiste em duas equações diferenciais conforme equação (2.6), onde temos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= cxy - dy,\end{aligned}\tag{2.6}$$

em que  $x$  é a população de presas,  $y$  é a população de predadores e as demais variáveis representam parâmetros no modelo. Essas equações (2.6) descrevem as taxas de variação das populações ao longo do tempo. A primeira equação descreve como a população de presas cresce a uma taxa proporcional à sua própria população (termo  $ax$ ) e diminui a uma taxa proporcional ao número de encontros com predadores (termo  $bxy$ ). A segunda equação descreve como a população de predadores aumenta a uma taxa proporcional ao número de encontros com presas (termo  $cxy$ ) e diminui a uma taxa proporcional à sua própria população (termo  $dy$ ).

Esse sistema pode gerar oscilações periódicas nas populações de presas e predadores. Quando a população de presas aumenta, a população de predadores também aumenta devido ao maior número de presas disponíveis para alimentação. No entanto, à medida que a população de predadores cresce, a disponibilidade de presas diminui, o que resulta em uma diminuição na população de predadores. Esse ciclo se repete, criando um padrão de oscilação.

É importante ressaltar que o modelo de Lotka-Volterra é uma simplificação da dinâmica complexa dos ecossistemas e possui limitações. Por exemplo, assume-se que as populações de presas e predadores são homogêneas e interagem de maneira linear.

Assim sendo, observa-se que existem diversos exemplos de sistemas dinâmicos em diferentes áreas da ciência e da engenharia, como dito na introdução deste capítulo. Na seção a seguir, passa-se a apresentar exemplos de sistemas descritos por equações de única variável e múltiplas variáveis. Em adição a essa apresentação, abordaremos que tais sistemas podem ser descritos por variáveis que não evoluem de forma contínua, mas sim de forma discreta.

## 2.1 Tipos de sistemas

### 2.1.1 Sistema unidimensional

Os sistemas dinâmicos unidimensionais[39] são sistemas em que a dinâmica é descrita por uma única variável de estado. Esse tipo de sistema é representado pela equação

diferencial ordinária

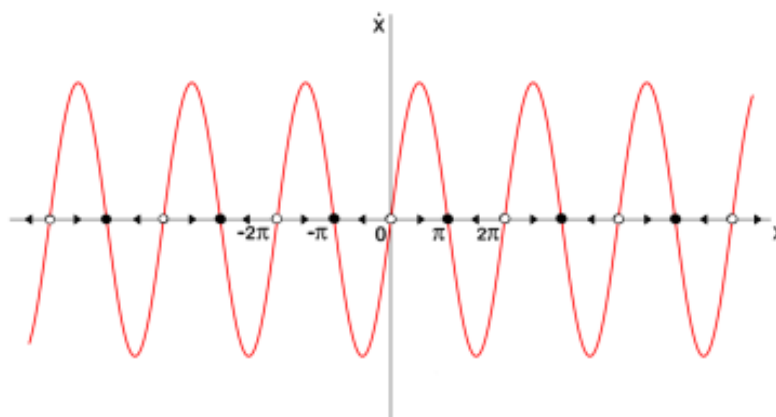
$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (2.7)$$

em que  $x$  é a variável de estado,  $t$  o tempo e  $f$  uma função de  $x$ , que determina a evolução do sistema. Cabe ressaltar que a solução do sistema dinâmico unidimensional consiste em encontrar as funções  $x(t)$  e a evolução do sistema está sujeita às condições iniciais  $x(t_0) = x_0$ .

Assim sendo, para analisar e visualizar o comportamento dinâmico de um sistema, é necessário utilizar o retrato de fase. O retrato de fase é uma representação num espaço  $n$ -dimensional, no qual  $n$  é o número de equações de primeira ordem que definem a evolução do sistema, das possíveis trajetórias que este pode seguir a partir de uma dada condição inicial. Nesse sentido, no retrato de fase as coordenadas do ponto representam os valores das variáveis de estado do sistema em um dado momento, e a trajetória do ponto no espaço de fase representa a evolução temporal do sistema [18].

Além disso, os retratos de fase podem ser usados para identificar os pontos de equilíbrio do sistema, que correspondem a pontos estacionários no espaço de fase, bem como para visualizar as possíveis órbitas das trajetórias deste sistema em torno dos ditos pontos de equilíbrio[4]. Uma vez que um sistema atinge um ponto de equilíbrio, ele permanece nesse estado, desde que não haja uma perturbação externa que o faça mudar. Existem diferentes tipos de pontos de equilíbrio a depender do comportamento do sistema em torno deles, podendo ser estável, instável e semi-estável [52].

Figura 2.2: Campo vetorial para o sistema  $\dot{x} = \sin(x)$



Fonte:[38]

Para melhor entendimento da dinâmica de sistemas unidimensionais e os tipos de retratos de fase que podem surgir a partir deles, é importante definir e analisar os pontos fixos [45]. A nível de exemplificação, a figura 2.2 ilustra o campo vetorial relacionado a

equação não linear (2.8)

$$\dot{x} = \text{sen}(x). \quad (2.8)$$

Observando o sinal de  $\dot{x}$  consegue-se analisar para onde o campo vetorial “flui” (representado graficamente pelas setas). Em regiões em que  $\dot{x} > 0$  o fluxo é para direita, em regiões onde  $\dot{x} < 0$  o fluxo é para esquerda e nos pontos em que  $\dot{x} = 0$ , o sistema encontra-se num ponto de equilíbrio [38]. Esses pontos em que  $\dot{x} = 0$  são, justamente, os pontos fixos, que são classificados em três grupos, como já mencionados: estáveis, semi-estáveis e instáveis.

Os estáveis (também conhecidos como atratores ou sumidouros), são representados graficamente pelos pontos cheios. Um ponto é considerado estável se, quando o sistema é perturbado a partir desse ponto, as soluções retornam para ele ao longo do tempo.

Os semi estáveis, responde de forma mista às perturbações, ou seja, dependendo da magnitude da perturbação inicial, o sistema pode ou não retornar ao ponto fixo. Em função do comportamento, os pontos semiestáveis são representando por um ponto misto, conforme figura 2.3. E por último, os instáveis (também conhecidos como repulsores ou fontes), são representados graficamente pelos pontos vazios.

Figura 2.3: Ponto fixo semi-estável



Fonte:[50]

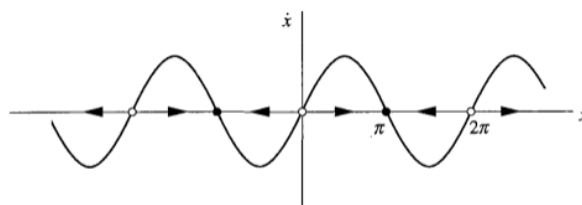
Um ponto fixo é considerado instável se, quando o sistema é perturbado a partir desse ponto, as soluções se afastam dele ao longo do tempo. Cabe ressaltar que, os pontos estáveis desempenham um papel importante na estabilidade e convergência do sistema, enquanto os pontos instáveis podem indicar transições, bifurcações ou outras mudanças qualitativas no comportamento dinâmico.

Isto posto, visando melhor entendimento, na equação (2.8) os pontos fixos irão ocorrer quando  $\text{sen}(x^*) = 0$ , logo, eles serão  $x^* = n\pi$  onde  $n$  é um número inteiro. Linearizando as equações do sistema ao redor desse ponto fixo dos pontos fixos  $x^*$ , obtemos que se  $n$  é ímpar os pontos são estáveis e se par, são instáveis.

Na figura 2.4 observa-se o comportamento do sistema para essa equação, onde os

pontos estáveis são preenchidos por bolinhas pretas ou cheias. Já os pontos instáveis são preenchidos por bolinhas vazias e o campo vetorial tende a solução do retrato de fase.

Figura 2.4: Retrato de fase do sistema  $\dot{x} = \sin(x)$



Fonte:[45]

A partir do exposto, em conclusão desta subseção, nota-se que para o sistema unidimensional, a dinâmica de um ponto fixo só pode ser estável, semi-estável e instável. Porém, um sistema unidimensional não pode apresentar um comportamento oscilante do fluxo em torno de um ponto fixo. Para sistemas com maiores dimensões, outros elementos de classificação e análise são necessárias, o que passa a ser explorado na próxima subseção.

## 2.1.2 Sistema bidimensional

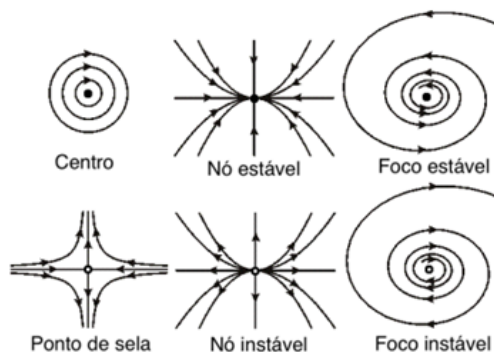
Um sistema dinâmico bidimensional é um sistema de equações diferenciais ordinárias que descrevem a evolução temporal de 2 variáveis de estado interdependentes [39]. A forma geral de um sistema bidimensional é,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y), \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $x$  e  $y$  são as variáveis de estado,  $f(x, y) = \dot{x}$  e  $g(x, y) = \dot{y}$  são funções que descrevem a taxa de mudança de  $x$  e  $y$ , respectivamente, em relação ao tempo.

A solução do sistema dinâmico bidimensional consiste em encontrar as funções  $x(t)$  e  $y(t)$ , que satisfazem as equações (2.9), sujeitas às condições iniciais  $x(t_0) = x_0$  e  $y(t_0) = y_0$ . Antes de apresentar um modelo de aplicação de análise de um sistema bidimensional, importante ressaltar, que o retrato de fase apresenta curvas mais complexas em função de existir maior volume acessível no espaço de fase, assim as trajetórias tende ao fluxo de solução [1]. Dessa forma, os pontos fixos de um sistema podem receber diversos tipos de classificação. Na figura 2.5, observa-se a representação geral de todos os tipos de classificação de pontos fixos de um sistema dinâmico bidimensional.

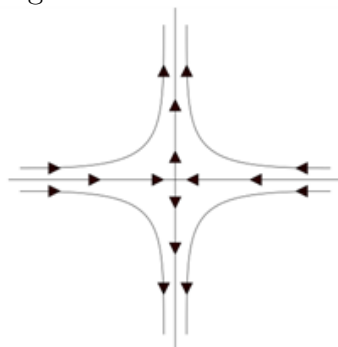
Figura 2.5: Classificação de pontos fixos de um sistema bidimensional



Fonte:[46]

Por exemplo, um ponto fixo atrator é quando, as trajetórias que começam, suficientemente, próximas do ponto fixo, permanecem próximas a ele para todos os tempos  $t$  posteriores e elas convergem para o ponto fixo quando  $t \rightarrow \infty$ . No entanto, quando a trajetória é não oscilatória e tende a se aproximar da solução, o ponto fixo é definido como nó estável. Quando a convergência for oscilatória (com atenuação), o ponto fixo é classificado como espiral estável. Se trajetórias não ficarem retidas a uma vizinhança do ponto fixo e divergirem, o ponto fixo é chamado de repulsor. Neste cenário, caso a divergência não seja oscilatória, o ponto fixo é chamado de nó instável, mas, se a divergência envolver oscilações com amplitudes cada vez maiores, o ponto fixo é chamado de espiral instável. Cumpre ressaltar que, quando um ponto fixo é classificado como ponto de sela, tem-se que em uma das direções os pontos na vizinhança do ponto de sela são atraídos, enquanto na outra direção os pontos são repelidos conforme figura 2.6 [47].

Figura 2.6: Ponto de sela



Fonte:[45]

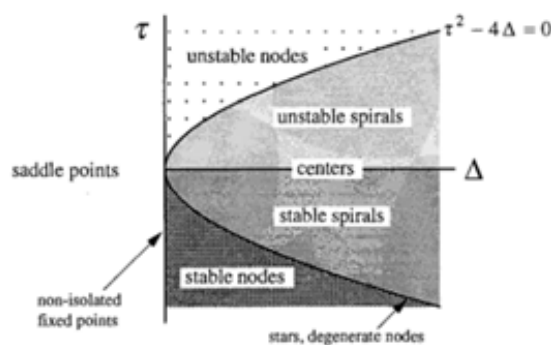
Um ponto fixo é definido como ponto de sela quando existirem duas linhas especiais passando pelo ponto, de modo que qualquer trajetória que comece sobre a primeira linha dirija-se para o ponto fixo quando  $t \rightarrow \infty$  e qualquer trajetória que comece sobre a

segunda linha afasta do ponto fixo para  $t \rightarrow \infty$ , e as demais trajetórias tendam assintoticamente para a linha de divergência quando  $t \rightarrow \infty$  e se aproximem assintoticamente da linha de convergência quando  $t \rightarrow -\infty$ . A linha de convergência é chamada de estável do ponto de sela e a linha de divergência é chamada de variedade instável do ponto de sela [44].

Já o ponto fixo definido como centro, se dá quando as trajetórias vizinhas a ele formam órbitas fechadas [46]. Logo, um centro é um ponto fixo neutralmente estável. Posta a explanação acerca das classificação dos pontos, verifica-se que é possível realizar uma análise comportamental do sistema através da classificação do espaço fásico. E, como mencionado anteriormente, o retrato fásico é uma forma de representação das variáveis conjugadas do sistema dinâmico, onde uma trajetória no espaço, corresponde a evolução temporal do sistema, em relação a suas variáveis relevantes desde às condições iniciais [25].

Na figura 2.7 é ilustrado de maneira geral todos os tipos de classificação ou trajetória de um sistema bidimensional. Destarte, para analisar a dinâmica local de um sistema de equações diferenciais e compreender a estabilidade e o comportamento ao redor dos pontos de equilíbrio, o método da matriz jacobiana é uma ferramenta aplicada. Assim, será apresentado um modelo de sistema aplicando essa metodologia. Mas antes, de calcular a matriz jacobiana em relação as variáveis do sistema, é necessário identificar os pontos de equilíbrio.

Figura 2.7: Diagrama de pontos fixos de um sistema bidimensional



Fonte:[45]

Para melhor compreensão será considerado o sistema linear abaixo,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax \\ \dot{y} &= -y, \end{aligned} \tag{2.10}$$

que pode ser escrito na forma matricial, apresentado pela equação (2.11).

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

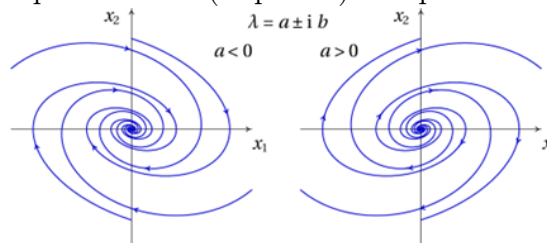
Para a aplicação do método da matriz jacobiana[47], é necessário o cálculo de duas variáveis da matriz:  $\tau$  (traço) e  $\Delta$  (determinante).

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

Essas duas variáveis, calculadas da matriz resultante da linearização da equação do sistema, permitem a classificação do espaço fásico em função do valor da equação característica  $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$ .

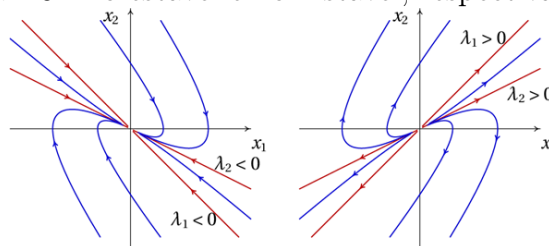
Quando  $\Delta$  é negativo, cada direção terá uma tendência oposta de se aproximar ou se afastar do ponto fixo sendo, portanto, este ponto um ponto de sela. Já no caso em que  $\tau$  é negativo, então o ponto fixo será estável, podendo ser um um nodo se  $\tau^2 - 4\Delta > 0$  ou uma espiral se  $\tau^2 - 4\Delta < 0$ . Para  $\tau$  positivo, o ponto fixo será instável. Sendo neste caso,  $\tau^2 - 4\Delta > 0$  um nodo e se  $\tau^2 - 4\Delta < 0$ , um espiral. Finalmente, na situação em que  $\tau = 0$  e  $\Delta > 0$ , então a dinâmica leva a uma oscilação em torno deste ponto fixo, tornando-o um ponto neutramente estável, ao qual se dá o nome de "centro". E, para o caso  $\Delta = 0$ , tem-se uma linha de pontos fixos. Na figura 2.8 é representado os espirais estáveis (lado esquerdo) e os espirais instáveis (lado direito). Já na figura 2.9 ilustra-se os dois casos de nós, no lado esquerdo do diagrama, o estado está inicialmente localizado próximo ao nó estável. O estado então se move lentamente em direção ao nó e, eventualmente, o atinge. No lado direito do diagrama, o estado está inicialmente localizado próximo ao nó instável. O estado então se move rapidamente para longe do nó e, eventualmente, diverge dele.

Figura 2.8: Espiral estável (esquerda) e Espiral instável (direita)



Fonte:[55]

Figura 2.9: Nó estável e nó instável, respectivamente.



Fonte:[55]

A partir desses conceitos, é possível fazer análises de um sistema dinâmico bidimensional. Como exemplo, consideraremos a equação (2.13), onde  $k$  e  $k_3$  são constantes positivas e reais. Para determinar os pontos fixos, se desacopla o sistema de duas dimensões e realiza a linearização, conforme explicada anteriormente.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -kx + k_3x^3 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Igualando  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} = 0$ , encontram-se para  $x$  os valores  $0, \pm\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$ . E para  $y$ , encontramos o valor de 0.

Em seguida, o sistema é modelado em ordem matricial jacobiana,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

obtendo seguinte resultado,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 + 3k_2x^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Assim, para classificação dos pontos, aplica-se o método da Jacobiana, onde calcula-se o  $\tau$  e  $\Delta$  da matriz conforme já abordado. Dessa forma, os pontos encontrados na relação  $(x, y)$  são respectivamente:

- $d(0,0)$  onde  $\tau = 0$  e  $\Delta = 0$
- $e(\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, 0)$  onde  $\tau = 0$  e  $\Delta < 0$
- $f(-\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, 0)$  onde  $\tau = 0$  e  $\Delta > 0$

Assim, para a equação (2.13) os pontos encontrados e rotulados de  $d$ ,  $e$  e  $f$ , podem ser classificados, nessa ordem, como: centro, ponto de sela e ponto de sela.

Para concluir, é importante ressaltar que um sistema bidimensional não possui espaço suficiente para a interação complexa que caracteriza o comportamento caótico. Da mesma forma, embora os sistemas bidimensionais possam ser complexos e exibir padrões interessantes, eles não podem demonstrar a forma de comportamento caótico que é característica de sistemas tridimensionais.

Para que um sistema exiba um verdadeiro comportamento caótico, é necessário que seja maior que duas dimensões ( $d > 2$ ). Isso se dá devido aos atratores do sistema caótico necessitarem de um volume maior para terem a forma característica que possuem. Assim, o sistema permite a existência de órbitas instáveis, bifurcações e outras interações dinâmicas complexas que levam à imprevisibilidade e à sensibilidade extrema às condições iniciais. Considerando isso, na próxima seção serão abordados métodos de análise para sistemas dinâmicos caóticos, considerando alguns conceitos introdutórios.

## 2.2 Sistema Caótico

O sistema caótico é um tipo de sistema dinâmico não linear, que exibe um comportamento imprevisível e altamente sensível às condições iniciais. São caracterizados por sua complexidade, aparente desordem e capacidade de produzir padrões que parecem aleatórios.

Nesse sentido, reproduzir a análise de retrato de fase desse sistema pode ser algo complexo, por apresentar sensibilidade às condições iniciais. Às vezes, a análise visual do retrato de fase pode não ser suficiente para compreender completamente o comportamento. Assim, análises mais avançadas, como diagramas de bifurcação e cálculos numéricos detalhados, podem ser necessárias para uma compreensão completa do sistema.

Em sistemas dinâmicos, a teoria do caos é associada a não linearidade das equações que regem o sistema. Porém, nem todos os sistemas não lineares são caóticos. O caos é caracterizado pela sensibilidade de um sistema às condições iniciais que, apresentando erros ou mesmo perturbações, dão ensejo a produção de resultados imprevisíveis [29]. Podemos citar como exemplos de sistemas dinâmicos caóticos, os seguintes modelos relacionados abaixo:

- Mapa logístico: consiste em uma equação simples que modela a dinâmica de uma população em crescimento, considerando a limitação de recursos. Embora, seja uma equação simples, ele exibe comportamento caótico em determinadas condições.

- Oscilador de Van der Pol: é um sistema que modela a dinâmica de um oscilador não linear, usado em aplicações como transmissão de rádio e radar. Exibe comportamento caótico em certas condições.
- Pêndulo duplo: é um sistema mecânico que consiste em dois pêndulos acoplados, que exibem comportamento caótico em determinadas condições.

Outro exemplo clássico de sistema caótico são as equações de Lorenz. Esse sistema é composto por três equações diferenciais não lineares que descrevem a evolução temporal de três variáveis: a velocidade relativa da convecção do ar, a diferença de temperatura entre duas regiões próximas e o desvio da temperatura em relação a uma média. Tais variáveis foram usadas para servir de modelo para a dinâmica de grandezas meteorológicas. Dessa forma, para o desenvolvimento deste tópico, considera-se como essencial, apresentar e discutir as equações propostas e estudadas por Edward Lorenz.

### 2.2.1 Equações de Lorenz

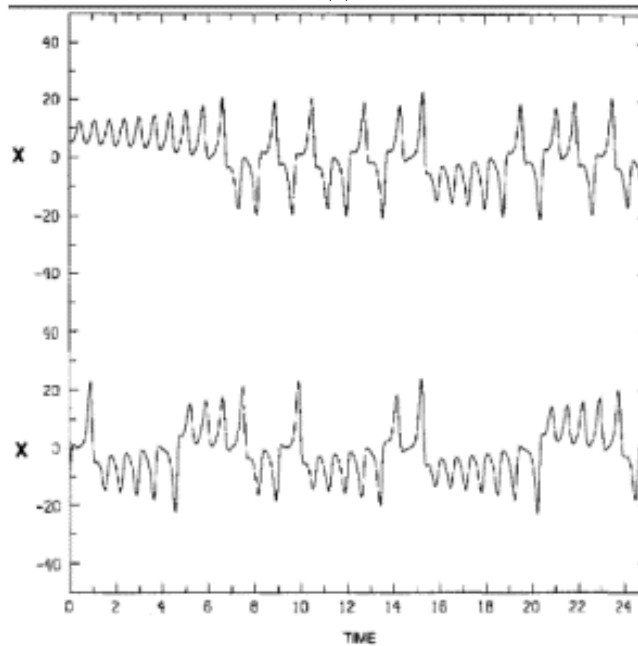
O meteorologista Edward Lorenz desenvolveu um modelo matemático simplificado para simular as evoluções climáticas. Inicialmente, imaginava-se que, modificar as condições iniciais acarretaria pequenas alterações no quadro do sistema como um todo. Todavia, obteve-se o contrário, as pequenas alterações iniciais provocaram efeitos desproporcionais e com padrões diferentes. Em função disso, as equações de Lorenz se tornaram o mais clássico exemplo de sistema caótico. O sistema de equações envolve três variáveis dependentes do tempo,  $x$ ,  $y$  e  $z$  e tem a forma,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{2.16}$$

onde  $\sigma$ ,  $r$ ,  $b > 0$  são parâmetros do sistema. Nota-se que se trata de um sistema não linear, pois apresenta dependência em termos quadráticos  $xy$  e  $xz$ . Ademais, observa-se também, que as equações possuem simetria sob a mudança  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ . Dessa maneira, todas as soluções são simétricas. Além disso, o sistema de Lorenz é dissipativo, ou seja, os volumes no espaço de fase se contraem sob o fluxo.

Nessa perspectiva, Lorenz, ao observar a dinâmica estranha desse sistema, verificou que, apesar do número amplo de parâmetros, as soluções dessas equações oscilavam e nunca se repetiam de forma exata, mas sempre limitavam-se a uma região do espaço físico. Dessa forma, valendo-se da integração numérica para obter a solução desse sistema, Lorenz estudou em particular o comportamento das equações para os parâmetros quando  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = \frac{8}{3}$ . A solução  $x(t)$  em relação ao tempo mostra que o sistema está em equilíbrio instável, e depois sofre oscilações amplificadoras sobre um estado, até as oscilações se tornarem muito fortes. Depois o sistema para o estado instável e novamente as oscilações se tornem muito fortes. Em seguida, comportamento do sistema alterna continuamente entre esses dois modos. A principal característica desse sistema é retratada na figura 2.10, onde apresenta como os números sucessivos de oscilações, sobre um estado ao outro, ocorrem em uma sequência irregular.

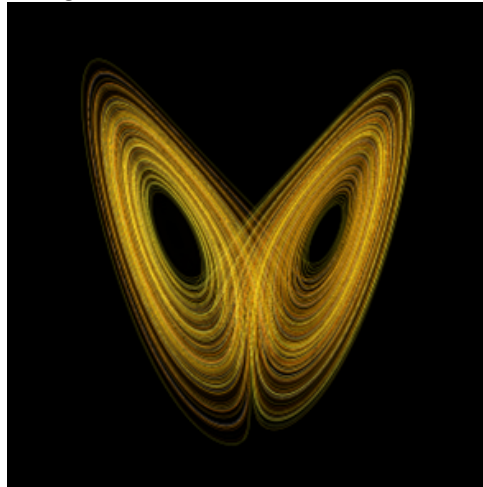
Figura 2.10: Série temporal de  $x(t)$  do sistema das Equações de Lorenz.



Fonte:[29]

Ao esboçar as curvas de trajetórias dessas equações em três dimensões, obtém-se a forma do fluxo no retrato de fase, conhecido como atrator estranho. Projetando as trajetórias tridimensionais em um plano bidimensional, as trajetórias parecem se cruzar assumindo um formato similar a de asas de borboleta conforme figura 2.11.

Figura 2.11: Atrator de Lorenz



Fonte:[13]

O termo "efeito borboleta" foi cunhado por Lorenz, que usou a imagem de uma borboleta batendo suas asas no Brasil que poderia, teoricamente, provocar um furacão no Texas. A ideia por trás disso é que pequenas perturbações em um sistema podem causar mudanças em cascata que, eventualmente, afetam outros sistemas de maneiras imprevisíveis. O efeito borboleta é uma consequência direta da sensibilidade às condições iniciais em sistemas dinâmicos caóticos. Uma pequena variação nas condições iniciais pode levar a uma divergência exponencial nas soluções das equações diferenciais que descrevem o sistema. Uma solução não periódica é instável ou sensivelmente dependente, e se a solução geral de um sistema não é periódica, o seu comportamento geral é caótico [25]. Na próxima subseção, será apresentado um modelo de sistema que a evolução depende das condições iniciais.

### 2.2.2 Mapa logístico

Mapas são relações matemáticas, que representam sistemas dinâmicos onde o tempo é uma variável discreta e a evolução temporal da variável  $x_{n+1}$  depende do valor do estado anterior,  $x_n$  [8]. Apesar de serem versões simplificadas de uma dinâmica, mapas podem ser aplicados em áreas como economia, biologia e cosmologia. Um exemplo de sistema dinâmico não linear abordado na literatura, exibindo um comportamento caótico, é a equação (2.17), conhecida como mapa logístico.

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (2.17)$$

Esta equação foi descrita pelo biólogo Robert May em 1976, como um modelo popu-

lacional para insetos, com  $x_n$  sendo o número de indivíduos na  $n$ -ésima geração, e  $r$  como uma taxa de crescimento da população [31]. Sendo  $r$ , um parâmetro de controle, variando de  $0 \leq r \leq 4$ . Ao variar os valores do parâmetro  $r$ , a equação de mapa logístico apresenta diferentes comportamentos. Por exemplo, suponha que a equação (2.17) seja usada para modelar matematicamente o comportamento da população de seres vivos.

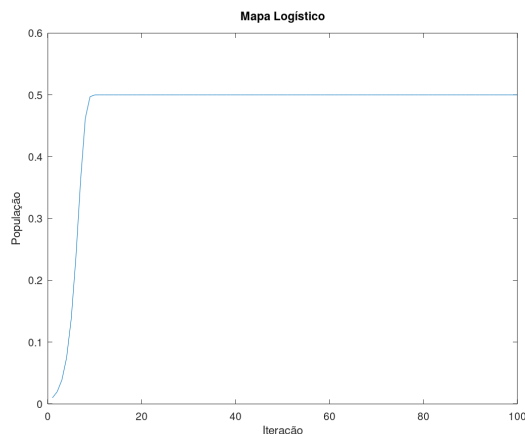
A figura 2.12 apresenta um diagrama de bifurcações resumindo as classificações para soluções do sistema em função de  $r$ . O diagrama foi obtido tomando-se  $x_0 = 0.01$  e descartando-se um certo número de interações iniciais, que correspondem ao transiente da dinâmica. Nota-se que para  $r$  no intervalo  $[0, 1]$ , os valores de  $x$  acabam tendendo para zero, apesar do intervalo não aparecer na figura. Para  $r$  no intervalo  $[1, 3]$ ,  $x_n$  tende a um único valor, independente de  $n$ . Para  $3 < r < 3.5$  o equilíbrio oscila entre dois valores. Quando  $3.6 < r < 4$  apesar de janelas periódicas, é encontrado um início de comportamento caótico. O comportamento caótico é caracterizado pelo fato de que infinitos valores de  $x_n$  podem ser obtidos dentro de um intervalo finito, preenchendo uma linha vertical para um dado  $r$ .

Figura 2.12: Mapa de Bifurcação onde caos acontece com  $r \approx 3.54087$



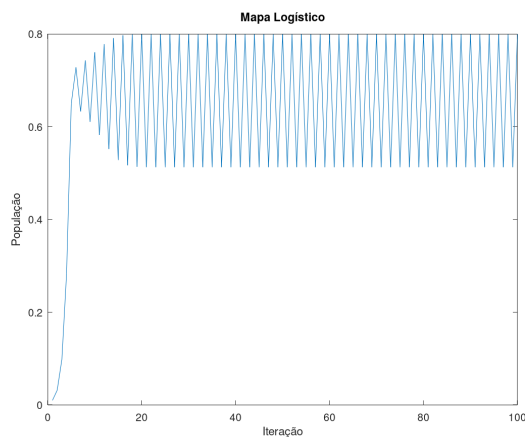
Fonte:[21]

Atribuindo valores para  $r$  entre 1 e 3, o mapa tem um atrator em  $x = \frac{r-1}{r}$ , uma vez que  $x < 1$ . As populações pequenas tendem a estabilizar em função do seu crescimento para um estado estável de  $x = \frac{r-1}{r}$ , conforme ilustrado na figura 2.13 para o caso em que  $r = 2.0$ .

Figura 2.13:  $x_n$  obtido como solução da equação 2.17 para  $r = 2.0$ 

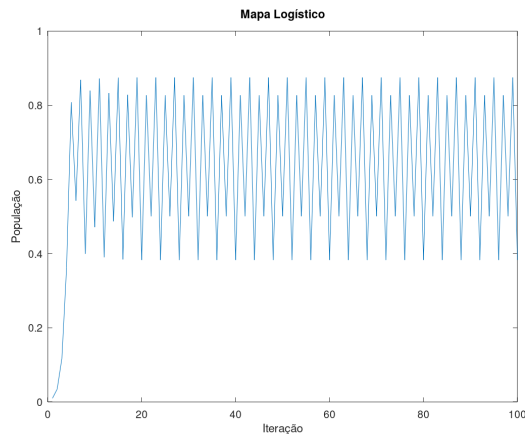
Fonte:Autor

Na figura 2.14, observa-se o comportamento resultante do mapa, caso o valor atribuído seja para  $r = 3.2$ , o ponto  $x = \frac{r-1}{r}$  é instável gerando um segundo período desde que  $x > 1$ . Após o transiente, o sistema varia entre dois valores para  $x_n$ .

Figura 2.14:  $x_n$  obtido como solução da equação 2.17 para  $r = 3.2$ 

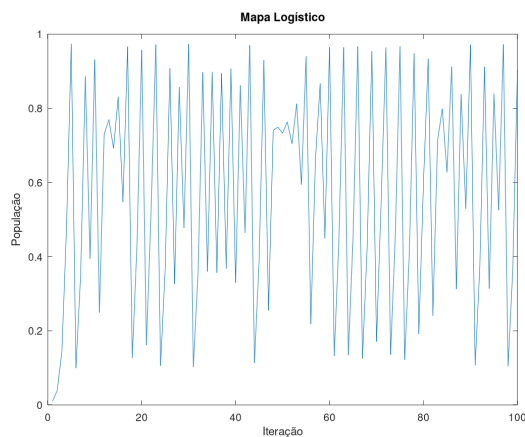
Fonte:Autor

Se o parâmetro  $r$  da equação for escolhido com valor acima de 3.3 até 3.5, o período dois também se torna instável, se duplicando novamente e fazendo com que o ciclo se repita a cada quatro. A figura 2.15 mostra esse efeito para  $r = 3.5$ .

Figura 2.15:  $x_n$  obtido como solução da equação 2.17 para  $r = 3.5$ 

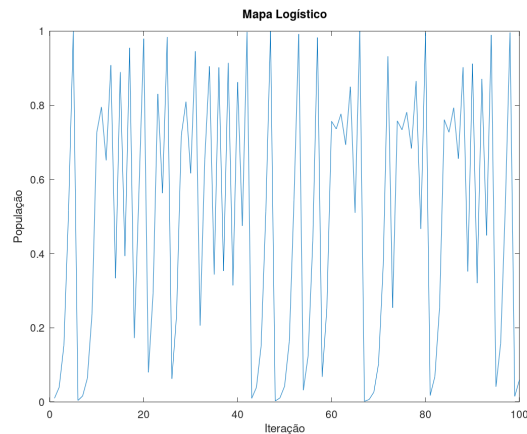
Fonte:Autor

Caso  $r$  esteja entre 3.5 e 3.9, uma instabilidade ocorre neste sistema, causando grandes variações por conta dos ciclos se multiplicarem por diversas vezes conforme apresenta a figura 2.16. Observa-se que nesta simulação  $r = 3.9$  e após o transiente a variações da soluções ocorrem, instabilidade.

Figura 2.16:  $x_n$  obtido como solução da equação 2.17 para  $r = 3.9$ 

Fonte:Autor

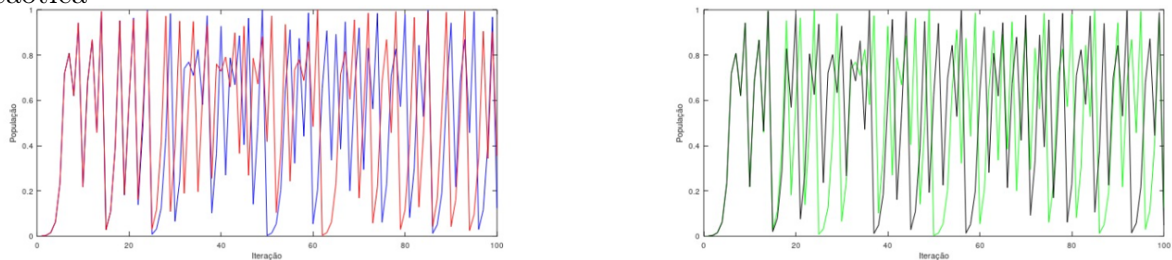
Observa-se que pequenas diferenças no valor da população inicial podem levar a resultados dramaticamente diferentes no passar das gerações. Após  $r = 4$ , os valores da população começam a divergir conforme figura 2.17, uma assinatura do caos neste mapa.

Figura 2.17:  $x_n$  obtido como solução da equação 2.17 para  $r = 4.0$ 

Fonte:Autor

Para comprovar a forte dependência das condições iniciais na evolução de um sistema, o mapa logístico foi simulado na região de comportamento caótico. Para isso, usou-se a taxa de crescimento  $r = 4.0$  e as condições iniciais de  $x_0 = 1 \cdot 10^{-3}$  e para  $x_1 = x_0 + 1 \cdot 10^{-9}$  na figura 2.18 (lado esquerdo). Nota-se que as trajetórias são idênticas no início, mas depois divergem. As cores vermelha e azul se desatrelam perto de 20 iterações. No lado direito, nas cores verde e preto, é demonstrado o mesmo comportamento caótico, usando as condições iniciais  $x_0 = 1 \cdot 10^{-3}$  e para  $x_1 = x_0 + 1 \cdot 10^{-7}$ . No entanto, observa-se que, apesar das pequenas diferenças numéricas nas condições iniciais, a tendência comportamental do sistema é sensível às condições simuladas.

Figura 2.18: Comportamento do mapa logístico para diferentes condições iniciais na região caótica



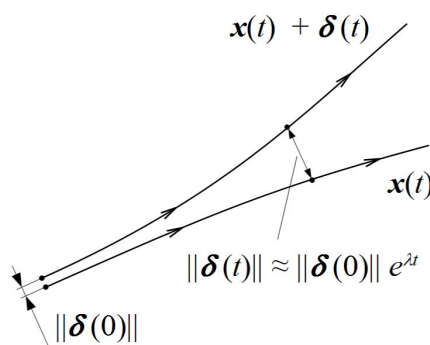
Fonte:Autor

Apesar do mapa logístico sugerir que uma equação de diferença possui como característica o caos, o cálculo do expoente de Lyapunov, é uma forma de confirmar ou validar a existência de caos no sistema. A seguir, serão abordados alguns conceitos e essa metodologia de aplicação para a equação de modelo de crescimento populacional.

## 2.3 Expoente de Lyapunov

O expoente de Lyapunov[8] descreve a velocidade de fase com a qual dois pontos próximos no espaço fásico se aproximam ou se afastam. É um método de medir a diferença entre os pontos iniciais considerando que a taxa de aumento da distância entre eles seja exponencial, conforme figura 2.19.

Figura 2.19: Expoente de Lyapunov



Fonte: Autor

Por definição, adota-se a seguinte aproximação:

$$\varepsilon(n) \approx \varepsilon_0 e^{\lambda n}, \quad (2.18)$$

onde  $\varepsilon_0(n)$  é a distância entre os pontos na  $n$ ésima medida e  $\lambda$  é o expoente de Lyapunov. O expoente Lyapunov pode ter três possíveis valores: positivo, negativo e nulo. Se positivo, a trajetória do sistema é divergente em função do tempo, caracterizando-se como caótico. Se negativo, o sistema é dissipativo, ou seja, houve perda de energia em função de um atrito ou turbulência. E, se nulo, trata-se de um sistema conservativo. Cabe ressaltar que, o cálculo do expoente Lyapunov deve considerar um tempo longo após o transiente do sistema quando estabilizado.

Neste sentido, calcular o expoente de Lyapunov, dependendo da dimensão do sistema pode ser computacionalmente intensivo. Assim, é possível aplicar um método de aproximação para calcular o expoente de Lyapunov em um sistema dinâmico. Para calcular o expoente de Lyapunov usando a distância de  $\varepsilon$ , siga os seguintes passos:

1. Primeiramente, deve-se escolher uma condição inicial para o sistema dinâmico e determinar duas trajetórias muito próximas, por exemplo, com uma diferença inicial de  $\varepsilon$ .
2. Calcular os valores das trajetórias ao longo do tempo.

3. A cada passo de tempo, calcular a distância entre as duas trajetórias, ou seja, a separação entre elas. Seja  $\Delta(t)$ , a distância entre as trajetórias no tempo  $t$ .
4. Calcular o logaritmo da separação, ou seja, a cada passo de tempo deve-se atualizar o logaritmo da separação. Calcule  $\ln(\Delta(t)/\varepsilon)$ , onde  $\varepsilon$  é a diferença inicial entre as trajetórias.
5. Calcular o expoente de Lyapunov pela média do logaritmo da separação ao longo do tempo. Ou seja, o expoente de Lyapunov é dado pela equação (2.19), onde temos

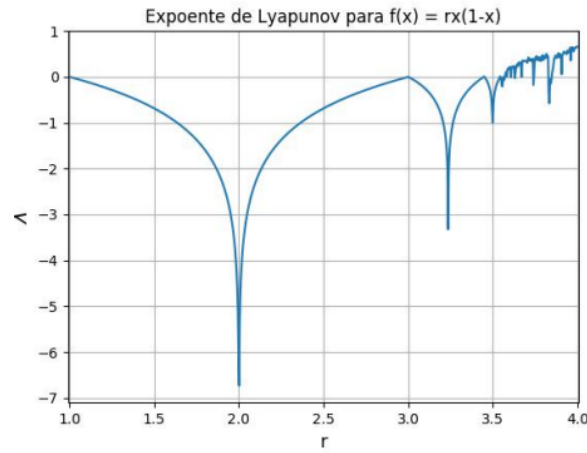
$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0}, \quad (2.19)$$

sendo a soma total do logaritmo das separações vai de  $t = 1$  a  $t = T$ , onde  $T$  é o tempo final da integração. Divida o logaritmo médio das separações pelo tempo total decorrido.

É importante ressaltar que o cálculo do expoente de Lyapunov é uma tarefa complexa e requer cuidado, especialmente na escolha adequada de  $\varepsilon$  e no tempo de integração. Além disso, pode ser necessário realizar médias sobre diferentes condições iniciais para obter uma estimativa mais precisa do expoente de Lyapunov.

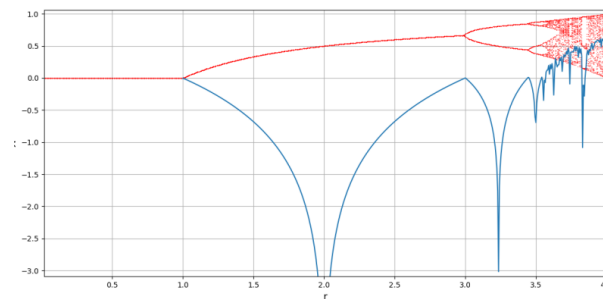
Aplicando essa metodologia de forma computacional à equação de modelo de crescimento populacional, na equação (2.17), verifica-se o comportamento caótico, assim como para o mapa de bifurcação do sistema. No mapa logístico, obtém-se um comportamento caótico para a equação (2.17), quando o parâmetro  $r$  for maior ou igual a 3,54087. Calculando o expoente  $\lambda$  para a mesma equação, obtém-se o comportamento conforme a figura 2.20. Ao relacionar a análise do mapa de bifurcação para a equação (2.17) com o expoente de Lyapunov, obtém-se a figura 2.21, que verifica e valida o comportamento caótico.

Figura 2.20: Expoente de Lyapunov para equação 2.17



Fonte:[21]

Figura 2.21: Gráfico de sobreposição do expoente Lyapunov e mapa de bifurcação



Fonte:[21]

Dessa maneira, o método de Lyapunov pode ser utilizado para analisar a estabilidade de modelos de crescimento populacional ou mesmo o comportamento de outros sistemas.

## 2.4 O oscilador de Duffing

O oscilador de Duffing[?] é um tipo específico de oscilador não linear que exibe um comportamento complexo e caótico. É um sistema dinâmico descrito pela equação diferencial não linear de segunda ordem conhecida como equação de Duffing.

A equação do oscilador de Duffing é dada por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_3x^3 = F(t), \quad (2.20)$$

onde  $m$  é a massa,  $x$  é a posição do oscilador,  $t$  é o tempo,  $c$  é o coeficiente de amortecimento,  $k$  corresponde a rigidez,  $k_3$  é o coeficiente de não linearidade e  $F(t)$  é força externa

aplicada.

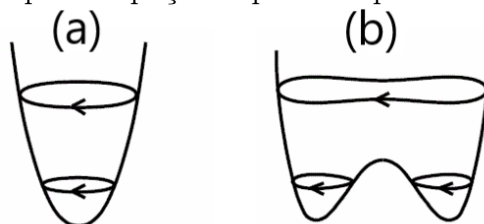
Escolhendo os parâmetros de modo que  $k_3 = c = F(t) = 0$ , a equação torna-se a equação do oscilador harmônico simples. Mas quando  $k_3$  é diferente de zero, o sistema pode exibir comportamentos complexos, como bifurcações e caos. A resposta do sistema pode depender sensivelmente das condições iniciais, ou seja, pequenas variações nas condições iniciais podem levar a resultados muito diferentes ao longo do tempo.

Observa-se que quando o coeficiente  $k$  é negativo, o termo linear no sistema reforça a direção da força externa. Isso pode levar a uma amplificação do movimento oscilatório. O sistema pode entrar em um regime de oscilações sustentadas com amplitudes muito maiores do que a força externa aplicada. Mas quando o coeficiente  $k$  é positivo, o termo linear no sistema empurra a partícula na direção oposta à força externa. Isso pode levar a comportamentos interessantes, como a partícula exibindo um movimento complexo com várias frequências e mudanças de amplitude ao longo do tempo. O sistema pode exibir caos ou comportamento não periódico.

As propriedades não lineares e caóticas do oscilador de Duffing tem sido amplamente discutidas ao longo dos anos. Um dos resultados mais importantes é a observação de que caos é muito mais facilmente obtido em um oscilador de Duffing de poço duplo do que poço simples, quando excitado por uma força harmônica [27]. O sistema pode apresentar configurações físicas distintas dependendo do sinal dos parâmetros  $k$  e  $k_3$ . Se  $k$  e  $k_3$  forem maiores que zero, a mola sofre um enrijecimento não linear para grandes deformações. Se  $k_3$  for menor que zero, a mola sofre o efeito oposto, tornando-se menos rígida com a amplitude.

Se  $k$  e  $k_3$  forem positivos, então o potencial associado à força restauradora da mola possui um único mínimo, e o potencial é representado por um poço simples, como mostra a figura 2.22(a). Sabe-se que o caos é mais facilmente obtido no caso em que o oscilador de Duffing possui uma força associada a um potencial de poço duplo. Essa configuração ocorre se  $k$  for menor que zero e  $k_3$  for maior que zero. O potencial de poço duplo está ilustrado na figura 2.22(b).

Figura 2.22: Exemplos de poço simples e duplo do oscilador de Duffing



Fonte:[26]

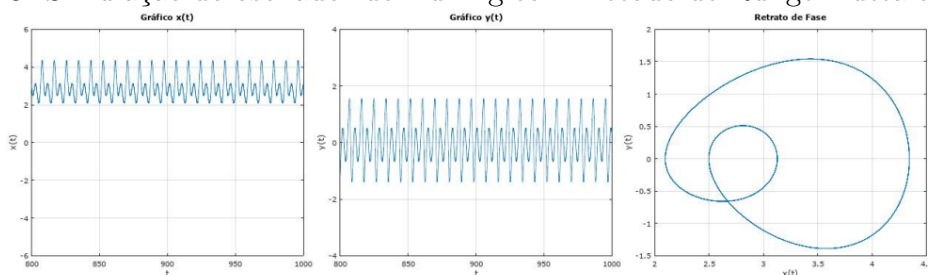
Para analisar numericamente o sistema, simplifica-se a equação através de uma mudança de variáveis conveniente.

$$s = k \frac{x}{A}, \quad \alpha = \frac{c}{\sqrt{k_1 m}}, \quad \beta = k_3 \frac{A^2}{k^3}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \tau = \omega_0, \quad \zeta = \frac{\omega}{\omega_0} t. \quad (2.21)$$

Logo, a equação (2.20) pode ser simplificada, diminuindo-se o número de parâmetros livres

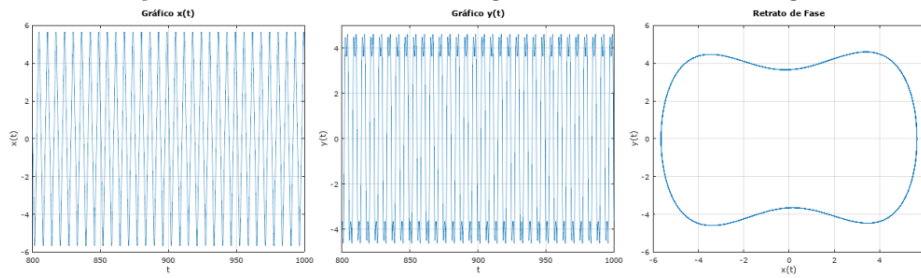
$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} - x + \beta x^3 = \cos(\zeta t). \quad (2.22)$$

Para resolver o oscilador de Duffing utiliza-se o método de Runge-Kutta, discretizando a equação diferencial e através das iterações de tempo para obter a solução numérica para  $x(t)$  e  $y(t) = dx(t)/dt$ . A solução da equação (2.22) pelo *software Octave* mostra diferentes comportamentos dinâmicos dependendo dos valores dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\zeta$ .

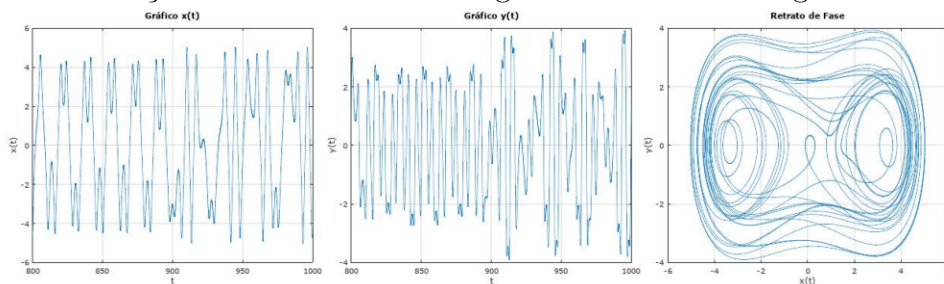
Figura 2.23: Simulação do oscilador de Duffing com método de Runge-Kutta com  $\zeta = 0.7$ 

Fonte:Autor

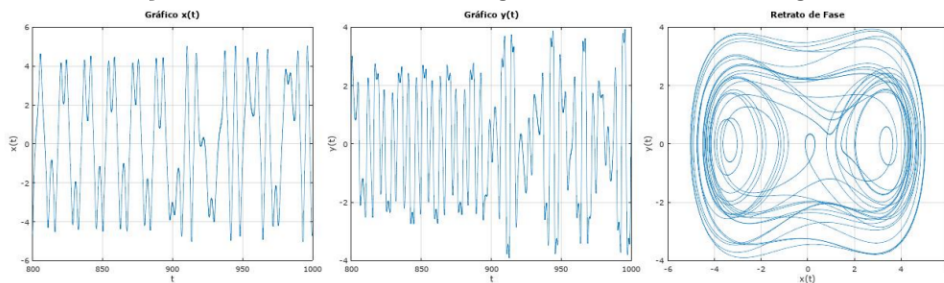
Observa-se que se não houver energia (força) suficiente, o sistema oscila em torno de um dos mínimos do potencial de dois poços como ilustrado na figura 2.22. Se a energia aumenta, o sistema pode transicionar entre os dois poços de potencial. A tendência é o sistema ser periódico enquanto preso a um dos poços. Este comportamento está ilustrado na figura 2.23. Quando passa a transicionar entre dois poços, o movimento pode ser periódico, como ilustrado na figura 2.24 ou caótico, conforme figuras 2.26 e 2.27.

Figura 2.24: Simulação do oscilador de Duffing com método de Runge-Kutta com  $\zeta = 1.0$ 

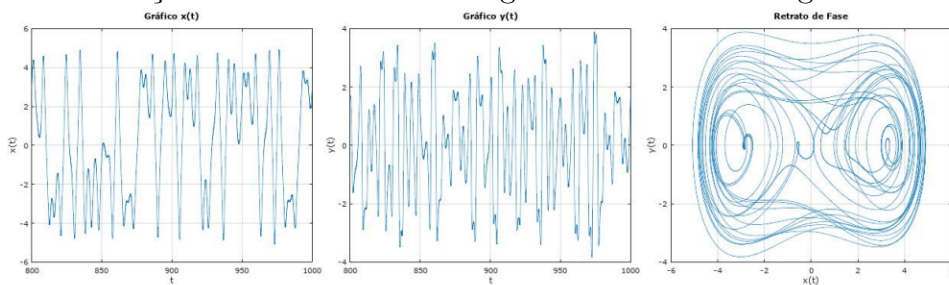
Fonte:Autor

Figura 2.25: Simulação do oscilador de Duffing com método de Runge-Kutta com  $\zeta = 1.1$ 

Fonte:Autor

Figura 2.26: Simulação do oscilador de Duffing com método de Runge-Kutta com  $\zeta = 1.1$ 

Fonte:Autor

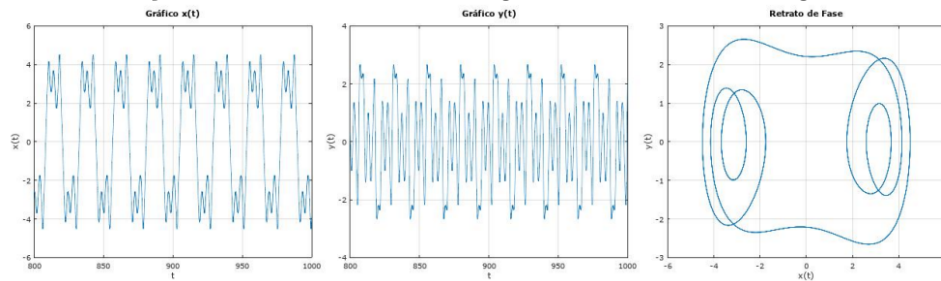
Figura 2.27: Simulação do oscilador de Duffing com método de Runge-Kutta com  $\zeta = 1.2$ 

Fonte:Autor

Devido à dinâmica rica do oscilador de Duffing, além do sistema oscilar em torno de um poço ou dois poços, como apresentado nos exemplos acima, temos bifurcações

que resultam em movimentos periódicos, mas com oscilações bem complexas, conforme observado na figura 2.28.

Figura 2.28: Simulação do oscilador de Duffing com método de Runge-Kutta com  $\zeta = 1.3$



Fonte: Autor

Este capítulo destacou os métodos de análise de sistemas dinâmicos, observando sua complexidade para sistemas caóticos. Contudo, a presente dissertação tem como foco apresentar o desenvolvimento de um modelo de circuito eletrônico análogo ao circuito de Duffing. No próximo capítulo, serão abordadas as equações desse circuito, considerando algumas análises teóricas e numéricas.

# Capítulo 3

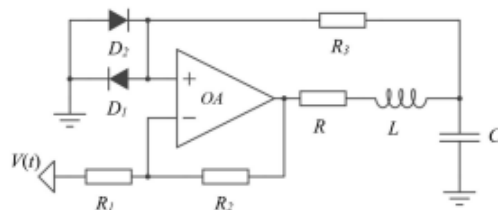
## Circuito eletrônico análogo ao oscilador Duffing

Neste capítulo, o circuito proposto por Tamaseviciute [51] é apresentado e analisado como um análogo eletrônico ao oscilador de Duffing com potencial de poço duplo. As equações de movimento para as correntes e tensões relevantes no circuito são deduzidas, evidenciando sua analogia com a equação Duffing (2.20). Em seguida, as previsões numéricas resultantes destas equações são apresentadas, para que possam ser comparadas com os resultados experimentais posteriormente.

### 3.1 Equações da dinâmica do circuito

O circuito abordado no experimento é apresentado na figura 3.1. Ele é constituído por dois diodos ( $D_1$  e  $D_2$ ), um amplificador operacional (AO), e resistores ( $R_1, R_2, R_3$ ). Além disso, na saída do amplificador operacional, temos um circuito RLC, composto por um resistor ( $R$ ), um indutor ( $L$ ) e um capacitor ( $C$ ).

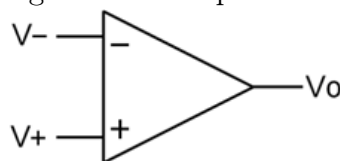
Figura 3.1: Diagrama esquemático do circuito análogo ao oscilador de Duffing.



Fonte:Autor

Nesta seção, é feita uma análise do circuito apresentado, considerando as leis das malhas, as características dos diodos e do amplificador operacional. Para melhor compreensão, é importante destacar que o amplificador operacional é um circuito integrado (CI) que pode ser facilmente configurado para amplificar ou atenuar sinais. Ele pode ser usado em filtros de sinais, além de permitir a realização da soma, subtração, integração e diferenciação de sinais.

Figura 3.2: Simbologia de um amplificador operacional (AO)



Fonte: [56]

Na figura 3.2, pode-se observar uma representação da simbologia elétrica de um amplificador operacional, onde  $V_o$  é a tensão de saída,  $V^+$  a entrada não inversora e  $V^-$  a entrada inversora. Basicamente, um amplificador operacional tem uma tensão de saída baseada na diferença entre os valores de tensão nas entradas inversora e não inversora, multiplicado pelo fator ganho da malha aberta ( $G$ ), resultando na seguinte relação

$$V_o = G (V^+ - V^-). \quad (3.1)$$

Dessa forma, conectando a saída  $V_o$  a entrada inversora  $V^-$ , através da malha, com os resistores  $R_1$  e  $R_2$ , a configuração do amplificador operacional da figura 3.1 é modificada, onde o amplificador operacional é não inversor com realimentação negativa. À vista disso, a tensão na entrada inversora é resultante da queda de tensão no resistor,  $R_1$ . Nota-se que nesta configuração, a entrada inversora é conectada por um nó entre os resistores, estabelecendo um divisor de tensão. Em outros termos, a tensão em  $V^-$  é uma fração da diferença de tensão entre  $V_o$  e  $V(t)$  do circuito já ilustrado na figura 3.1, levando a seguinte equação

$$V^- = (V_o - V(t)) \frac{R_1}{R_1 + R_2} + V(t). \quad (3.2)$$

Substituindo na equação (3.2) o valor de  $V_o$  conforme definição na equação(3.1), tem-se que

$$V_o = GV^+ - G \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_o + G \left[ \frac{R_1}{R_1 + R_2} V(t) - V(t) \right], \quad (3.3)$$

$$\therefore V_o = GV^+ - G \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_o + G \frac{R_2}{R_1 + R_2} V(t) \quad (3.4)$$

Simplificando a equação acima, onde  $k = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$  e  $k' = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ , a equação (3.5) é obtida.

$$V_o = GV^+ - GkV_o + Gk'V(t) \quad (3.5)$$

Colocando a variável  $V_o$  em evidência, leva-se a equação (3.6).

$$(1 + Gk)V_o = G(V^+ + k'V(t)) \quad (3.6)$$

E em seguida, dividi-se a equação (3.6) pela variável  $G$ , resultando na equação (3.7). Cabe ressaltar que  $G$ , é o ganho de malha aberta e como sua ordem de grandeza é alta,  $1/G$  torna-se desprezível. Isso leva a equação (3.7).

$$kV_o = V^+ + k'V(t). \quad (3.7)$$

Assumindo que neste circuito o amplificador operacional é ideal, com ganho de malha aberta e impedância de entrada sendo infinita, tem-se que

$$V_o = \frac{1}{k} V^+ + \frac{k'}{k} V(t), \quad (3.8)$$

$$\therefore V_o = gV^+ + g'V(t), \quad (3.9)$$

onde  $g = 1 + \frac{R_2}{R_1}$  e  $g' = \frac{R_2}{R_1}$ .

A análise da malha de saída leva à seguinte equação para a tensão resultante do amplificador operacional em função do circuito RLC:

$$V_o = V_R + V_L + V_C. \quad (3.10)$$

Na equação (3.10),  $V_R$  é a queda de tensão sobre o resistor (R),  $V_L$  a tensão no indutor (L) e  $V_C$  é a diferença de potencial sobre o capacitor. A dinâmica do circuito deste experimento pode ser entendida focando na corrente da malha do indutor. As

equações de movimento do circuito são derivadas a partir da análise da malha do indutor. Relacionando a equação (3.10), temos que

$$V_o = R \cdot I_L + L \cdot \frac{d}{dt} \cdot I_L + V_C. \quad (3.11)$$

Como já dito, pelas leis da eletricidade o circuito da figura 3.1, em relação a malha aberta do amplificador operacional, resulta na equação (3.1). Entretanto, para determinar a tensão na entrada não inversora do amplificador operacional, é importante destacar que esta tensão é igual ao valor da diferença de potencial sobre o par de diodos  $D_1$  e  $D_2$ .

A malha do circuito que determina  $V_D$  contém o resistor ( $R_3$ ) em série com os diodos, e a mesma está sujeita a tensão  $V_C$ . Como  $V_D$  é uma função não linear da corrente do diodo e que também depende do seu próprio valor, definir a queda de tensão na entrada não inversora se torna complexo. Será detalhado na próxima subseção como se determinar  $V_D$  no circuito.

Na equação (3.11) a variável  $V_o$  é substituída pela equação (3.9), determinando a equação (3.12)

$$L \frac{d}{dt} I_L = (gV_D - V_C) - RI_L + g'V(t), \quad (3.12)$$

onde  $V$  é escrita como função explícita do tempo, e todas as demais tensões e correntes do circuito dependentes do tempo. É conveniente reescrever a equação (3.12) da seguinte forma,

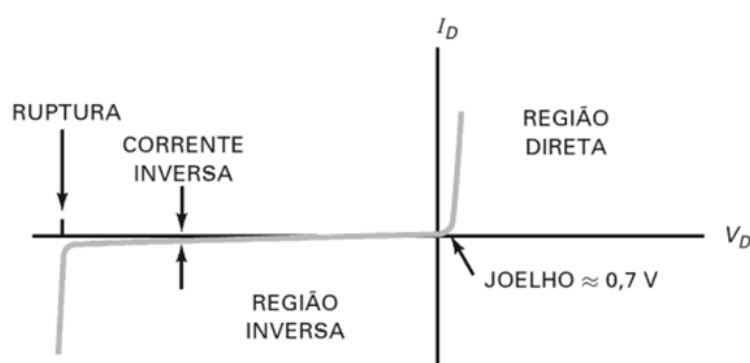
$$L \frac{d}{dt} I_L = F(V_C) - RI_L + g'V(t), \quad (3.13)$$

em que  $F(V_C)$  desempenha um papel equivalente a força restauradora não linear, que atua sobre uma partícula no movimento mecânico do oscilador Duffing, ou seja,  $F(V_C)$  equivalente ao termo  $-kx + k_3x^3$  da equação (2.20). Assim, para obter a forma final das equações da dinâmica do circuito, é necessário modelar a tensão nos diodos. Isso pode ser feito na próxima subseção. A forma de  $F(V_C)$  será determinada a partir do modelo dos diodos.

### 3.1.1 Modelagem dos diodos e de $F(V_C)$

Antes de detalhar o comportamento dos diodos no circuito Duffing, diodo pode ser definido como a união de um semicondutor P com N, constituindo um cristal único. Esse cristal é denominado de junção PN ou diodo [12]. Geralmente, são feitos de silício ou germânio. A principal característica do diodo é sua relação não linear entre a tensão aplicada e a corrente. Na figura 3.3, representa o comportamento genérico de um diodo semicondutor de silício.

Figura 3.3: Curva característica de um diodo de silício



Fonte:[30]

O diodo, quando polarizado inversamente ( $V_D < 0$  na figura (3.3)), atua como chave aberta, praticamente não conduzindo corrente. Quando polarizado diretamente ( $V_D > 0$ ), o diodo apresenta grandes variações de corrente para pequenas variações de  $V_D$ , numa relação aproximadamente exponencial entre tensão e corrente. O cálculo da tensão sobre um diodo em um circuito elétrico pode ser bastante complexo. Existem diferentes modelos físicos e elétricos que buscam aproximar o comportamento real do diodo [2]. Neste trabalho, dois modelos foram adotados para comparação. O primeiro modelo é o mesmo adotado por Tamaseviciute [51] no trabalho em que apresentou o circuito da figura 3.1. Nesse modelo, os diodos são modelados como uma simples chave, aberta ou fechada.

Quando o diodo é diretamente polarizado, ele conduz ou comuta, desde que a tensão aplicada seja maior ou igual a tensão de joelho ( $V_D$ ). Já na polarização reversa e quando a tensão de comutação é menor que o valor da tensão de joelho, o diodo tende a apresentar uma resistência infinita. Isso significa, que o diodo se comporta como uma chave aberta no circuito. Este comportamento pode ser descrito matematicamente pelo seguinte modelo,

$$V^+ = \begin{cases} -V_D & , \quad V_C < -V_D \\ V_C & , \quad -V_D \leq V_C \leq V_D \\ V_D & , \quad V_C > V_D. \end{cases} \quad (3.14)$$

Nesta equação,  $V_D$  está denotando a tensão de chaveamento, ou seja, acima desta tensão o diodo conduz corrente com resistência zero e abaixo é uma chave aberta. Esta tensão tem que ser escolhida de forma adequada para que o modelo seja minimamente realista. Esta escolha, normalmente, estará baseada na corrente que espera-se flua pelo diodo. No caso, o circuito que implementaremos essa corrente será de, no máximo, da ordem de 0,1 mA. Para tais correntes, os diodos aplicados apresentam  $V_D \sim 0.5$  V, que será a tensão adotada em futuras simulações.

Notamos agora, que o termo correspondente a força  $F(V_C)$  na equação (3.14) é dado por  $gV^+ - V_C$ , e, considerando o resultado acima, obtém-se a equação (3.15).

$$F(V_C) = \begin{cases} -(V_C + gV_D) & , \quad V_C < -V_D \\ -(g-1)V_C & , \quad -V_D \leq V_C \leq V_D \\ -(V_C - gV_D) & , \quad V_C > V_D. \end{cases} \quad (3.15)$$

A equação (3.15) foi obtida aproximando-se a tensão sobre o diodo polarizado diretamente como sendo constante. Como o modelo do diodo pode influenciar na dinâmica não linear do circuito e resultar em diferenças significativas, neste trabalho foi utilizado também um modelo mais realista do comportamento do diodo. Para obter resultados mais realistas e confiáveis de grandezas físicas do circuito, foi usado o modelo desenvolvido por Banwell e Jayakumar[2]. Este modelo apresenta uma solução mais realista para a relação entre a tensão aplicada a um resistor em série com um diodo e a corrente resultante, proporcionando um circuito mais preciso da queda de tensão do diodo.

Banwell e Jayakumar , consideraram o diodo modelado como um diodo Shockley, onde a corrente e a tensão do diodo estão relacionadas pela equação.

$$I_D = I_S \left( e^{\frac{V_D}{\eta V_T}} - 1 \right) \quad (3.16)$$

Na equação (3.16), a corrente de saturação do diodo é representada pela variável  $I_S$ ,  $I_D$  a corrente do diodo,  $V_T$  a tensão térmica do mesmo, e  $V_D$  é a tensão sobre o diodo. Por fim, o fator de idealidade do diodo é representado pela variável  $\eta$ , que varia entre 1 e 2 para diodos de silício.

Banwell e Jayakumar[2], conseguem obter uma equação analítica e exata para a corrente no diodo em função da tensão aplicada quando um resistor está em série com o diodo. No circuito da figura 3.1, os diodos estão em série com o resistor  $R_3$  e sujeitos a uma tensão aplicada igual a  $V_C$ , a tensão sobre o capacitor. A equação abaixo apresenta a relação da equação de Bawell e Jayakumar, escrita em termos da função  $W$  de Lambert,  $W(x)$ .

$$I_D(V_C) = \frac{\eta V_T}{R_3} W \left( \frac{I_S R_3}{\eta V_T} e^{\frac{V_C}{\eta V_T}} \right) \quad (3.17)$$

Analisando a malha fechada para este modelo de diodo, a tensão na entrada não inversora é obtida como

$$\begin{aligned} V_C - V_{R3}, & \quad V_C > 0V \\ V_C + V_{R3}, & \quad V_C < 0V. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como o potencial elétrico é dado pelo produto da corrente pela resistência,  $V_{R3}$  pode ser definido por:

$$V_{R3} = I_D(|V_C|) \cdot R_3 \quad (3.19)$$

Substituindo a equação (3.19) na equação (3.18) a expressão para força externa usando o modelo de Banwell e Jayakumar, torna-se

$$F(V_C) = (g - 1) \cdot V_C - \text{sign}(V_C)g \cdot I_D(|V_C|) \cdot R_3 \quad (3.20)$$

## 3.2 Resultados das simulações numéricas

A fim de analisar a dinâmica do circuito, as equações serão transformadas em um fluxo ou em um conjunto de equações de 1° ordem. Para isso, serão realizadas mudanças de variáveis onde

$$x = V_C, \quad y = \sqrt{\frac{L}{C}} I_L, \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad \Omega = w = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad b = \sqrt{\frac{C}{L}} R. \quad (3.21)$$

Representando as modificações de variáveis na equação (3.12), tem-se que

$$L \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{d}{d\tau} \sqrt{\frac{c}{L}} y = F(x) - \sqrt{\frac{C}{L}} y \cdot R + V(t), \quad (3.22)$$

resulta em,

$$\frac{dy}{d\tau} = F(x) - by + V(t) \quad (3.23)$$

onde adota-se que  $g' = 1$  e  $V(t) = A[\text{sen}(z) + a \text{sen}(rz)]$ . Nesse caso,  $V(t)$  é a força externa aplicada. Sendo  $r$ , a razão entre as duas frequências de excitação do circuito. A variável,  $a$ , pode ser 0, se for uma única frequência, ou 1 quando há duas frequências de excitação.

É importante ressaltar que, pela definição de capacitância, tem-se que

$$C \frac{dV}{dt} = I_L. \quad (3.24)$$

Logo, é deduzido  $\frac{dx}{d\tau} = y$ . Em seguida, o valor da força externa de  $V(t)$  é substituído na equação (3.23), surgindo o sistema abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= y \\ \frac{dy}{d\tau} &= F(x) - by + A[\text{sen}(z) + a \text{sen}(rz)] \\ \frac{dz}{d\tau} &= \Omega \end{aligned} \quad (3.25)$$

Resumindo, pode-se afirmar que  $F(x)$  corresponde a força para o oscilador de Duffing ou para as forças apresentadas na equação (3.15) e equação (3.20). A partir disso, com base na equação (3.25), análises e resultados de simulações numéricas para as equações serão apresentados e discutidos no capítulo 5.

# Capítulo 4

## O Sistema Experimental

Neste capítulo, discute-se a montagem experimental composta pelo circuito análogo ao oscilador de Duffing, sistemas de geração sintética de sinais usados na sua excitação com uma e duas frequências e sistemas de leitura de sinais, usados para medir as tensões no circuito. Apresenta-se como foi realizado o controle de amplitude e frequência das formas de ondas geradas e aplicadas no circuito, para que uma segunda plataforma Arduino coletasse esses dados para posterior análise. As próximas subseções estão organizadas visando estes objetivos: A plataforma de prototipagem Arduino e suas características funcionais são apresentadas na subseção 4.1. O desenvolvimento e implementação do circuito análogo ao circuito Duffing são abordados na subseção 4.2. A subseção 4.3 visa apresentar o processo de geração de ondas através da técnica de síntese digital direta. Detalhes práticos sobre a implementação da geração de ondas com uma e duas frequências são apresentados na subseção 4.4. O leitor de tensões com a plataforma de prototipagem Arduino e os resultados discutidos desta implementação são apresentados na subseção 4.5.

### 4.1 A plataforma de prototipagem eletrônica Arduino

O Arduino é uma plataforma de prototipagem eletrônica com um microcontrolador ATMEL AVR [32]. Os microcontroladores são circuitos integrados, capazes de serem programados e realizar o controle de sistemas com instruções básicas, possibilitando a criação de diversos tipos de aplicações. Este único circuito integrado contém: microprocessador, memória RAM, memória ROM, temporizadores, contadores, porta serial, conversores e portas de entrada e saída, dentre outros.

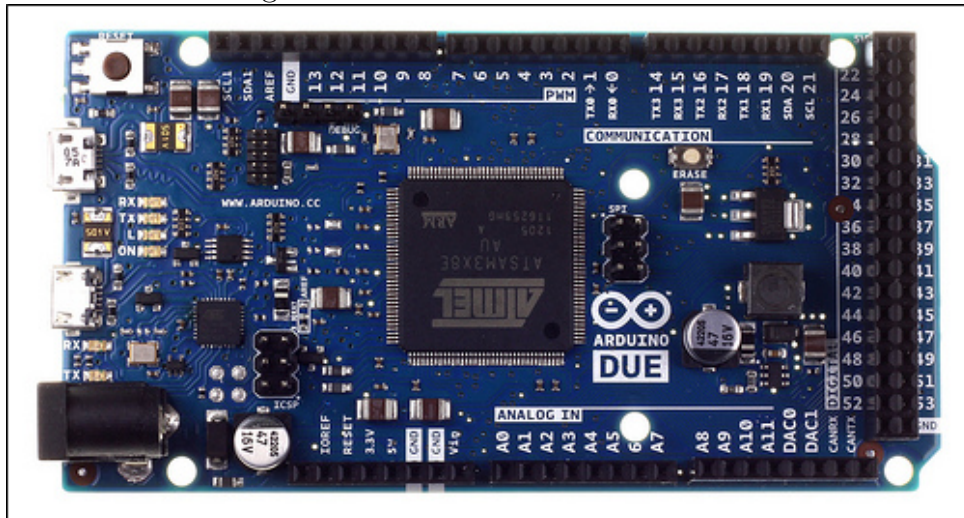
A partir disso, tem-se que a plataforma Arduino é composta, essencialmente, por duas partes: o *hardware* e o *software*. O *hardware* é uma placa eletrônica que possui

todos os componentes necessários para o funcionamento do sistema. Em termos de *software*, o Arduino é uma placa cuja programação é suportada por um compilador gcc (C e C++) baseado em *Wiring*[34] usa uma interface gráfica construída em Java baseado em *Processing* [43]. As vantagens do hardware são as seguintes:

- Pode trabalhar ou receber diferentes fontes de energia, como baterias ou fontes de alimentação contínuas;
- Permite o uso de circuitos internos (*drivers*, módulos, circuitos integrados encapsulados e outros) conectados a portas de saídas ou portas com funções especiais. Por exemplo: pode-se utilizar um módulo com acesso a comunicação *bluetooth* conectado às portas específicas da placa Arduino para enviar e receber dados para controle de demais dispositivos conectados às portas de entradas e saídas.
- Fácil de ser modificada e adaptada, pois os componentes eletrônicos da placa são de fácil obtenção no mercado brasileiro.
- Fácil programação, pois o código gerado é gravado na placa dentro de um chip controlador (*firmware*).

Assim, por alinhar a esses motivos o baixo custo, os técnicos optam pelo uso do Arduino entre outros microcontroladores, pois a maioria das plataformas disponíveis hoje em dia usam controladores sofisticados, que acabam por elevar o custo destas. Existem diferentes modelos de placas como: Arduino Nano, Arduino Mini, Arduino BT, Arduino Mega, Arduino Due dentre outras. A diferenças entre elas se dão pelos recursos de *hardware*, como: memórias, portas analógicas, CPU e outros. Nesse contexto, para a execução do projeto de pesquisa, foi escolhido a plataforma Arduino DUE, conforme o modelo mostrado na figura 4.1, por possuir a maior velocidade de processamento, memória e conversores analógico-digital e digital analógico mais rápidos.

Figura 4.1: Plataforma Arduino DUE



Fonte: [28]

Dessa forma, como dito anteriormente, a placa Arduino Due é uma plataforma da família Arduino que, devido ao processador ARM Cortex-M3, o Atmel SAM3X8E, possui alto poder de processamento. Os processadores ARM Cortex-M3 usam uma arquitetura de 32 bits, logo os registradores internos com banco de registradores podem realizar operações de até 4 bytes em um único ciclo de *clock*. A arquitetura do conjunto de instruções suporta uma mistura de instruções de 16 e 32 bits e 4GB de espaço em memória.

Em termos de porta digitais, a placa Arduino Due possui 54 portas de entradas e saídas que podem ser utilizadas conforme a necessidade de seu projeto. As portas operam com tensão de 3.3V. Além disso, possui 12 portas de entradas analógicas e conta com uma memória Flash de 512Kb e 96KB de SRAM, onde são armazenados dados e programas. Essa placa também apresenta:

- *Clock* de 84 MHz
- 4 UARTS (interfaces seriais)
- Botão de *reset*
- Botão “*erase*”, que elimina o programa presente na memória da placa
- 2 TWI (*Two Wire interface / Interface de 2 fios*), que nada mais é do que a interface I2C
- 2 saídas analógicas, que são nomeadas como DAC0 e DAC1.

Para a investigação experimental da dinâmica caótica do circuito eletrônico, as características importantes da placa Arduino Due são dois conversores digitais-analógicos (DAC do acrônimo em inglês) e um conversor analógico-digital (ADC do acrônimo em inglês).

De maneira geral, um conversor digital-analógico é um circuito eletrônico que tem a função de converter sinais binários/digitais para grandezas analógicas como tensão ou corrente. Os DACs são formados por componentes básicos, fontes de referência, chaves e amplificadores operacionais [5].

De acordo com manual da fabricante, o DAC opera na metade de velocidade do *clock* externo ou MCK (*Master Clock*) e demora 25 períodos de *clock* para atualizar o valor [ATMEL 15, p.1358]. Ou seja, o DAC opera com um clock de 42 MHz e tem uma taxa máxima de conversão de 1.68 MHz.

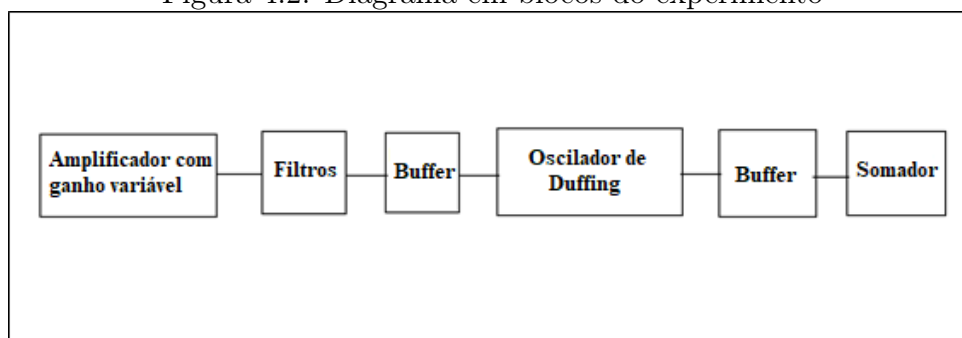
Os pinos DAC0 e DAC1 fornecem saídas analógicas reais de até 12 bits de resolução. Isto é, podemos ter uma saída com 4096 valores diferentes dentro da faixa de limitação de tensão e corrente da interface utilizada do Arduino Due. Assim, na geração de ondas senoidais pela plataforma Due, podemos variar valores de amplitude até 4095 níveis, considerando as características e limitações do pino DAC0, bem como a frequência. Os pinos DACs especificamente possuem uma faixa de tensão de saída de 0.55V a 2.75V.

A partir das características apresentadas, a próxima subseção irá destacar particularidades do circuito experimental e algumas melhorias para o sistema de geração de ondas automatizadas.

## 4.2 Circuito experimental

Para gerar um sinal adequado para ser aplicado ao circuito do oscilador de Duffing e ser capaz de ler o sinal com as placas Arduino Due, foram adicionados mais elementos ao circuito. Os circuitos adicionados podem ser visualizados de maneira esquemática na figura 4.2. A figura 4.3 apresenta o diagrama elétrico correspondente.

Figura 4.2: Diagrama em blocos do experimento



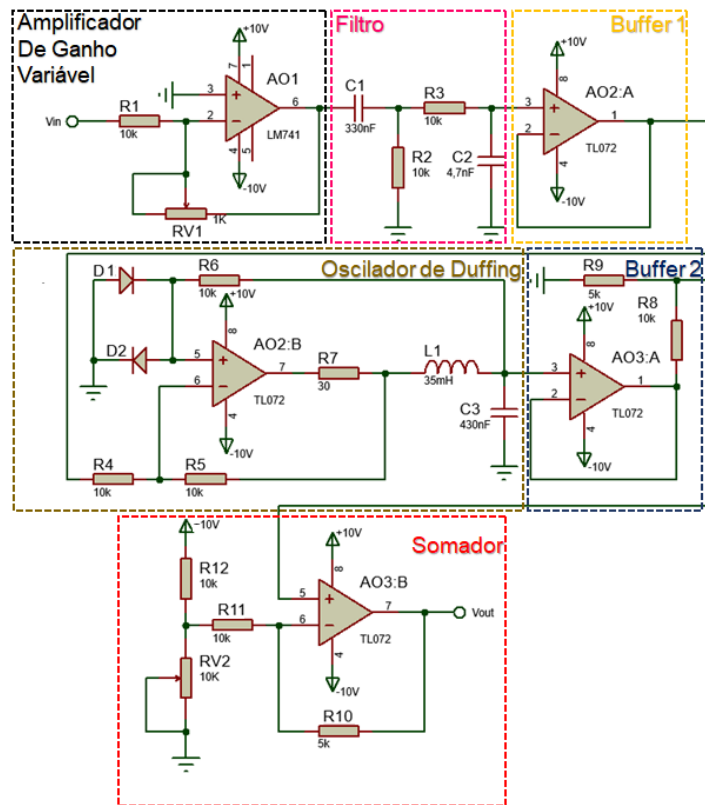
Fonte: Autor

Em função da necessidade de variar a amplitude de entrada, foi implementado um amplificador operacional com ganho variável. O bloco de filtro corresponde aos dois filtros que existem: um filtro passa-alta e um filtro passa-baixa. O filtro passa-alta é responsável por eliminar a componente contínua do sinal e o filtro passa-baixa elimina os degraus do sinal gerado pelo DAC. Em seguida, um *buffer*<sup>1</sup> (ou *buffer* de tensão) é adicionado para isolar o circuito Duffing e termos uma fonte de tensão mais próxima da ideal na entrada do circuito oscilador de Duffing. Após o circuito oscilador de Duffing, um segundo *buffer* é aplicado como responsável por separar o oscilador do estágio de leitura.

A figura 4.3 apresenta o diagrama eletrônico interno de cada bloco mencionado nos parágrafos anteriores, ora relacionados na figura 4.2. O bloco responsável pelo amplificador de ganho variável recebe pela entrada inversora do amplificador operacional  $AO_1$  as tensões do sinal gerado pelo DAC da plataforma Arduino Due e possibilita o ajuste da amplitude do sinal enviado ao circuito de Duffing. O potenciômetro  $RV_1$ , fisicamente é um dispositivo de multivoltas, cuja finalidade é proporcionar no experimento uma melhor precisão no ajuste da amplitude no amplificador variável. Os capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , juntamente com os resistores  $R_2$  e  $R_3$ , desempenham a função de filtros. O oscilador de Duffing corresponde ao circuito apresentado anteriormente na seção 3.1. O circuito somador de tensão foi introduzido tendo em vista que o conversor ADC do Arduino Due tem uma faixa de valores de entrada entre 0.0 e 3.3 V e as tensões sobre o capacitor variam entre valores positivos e negativos. Assim, é necessário condicionar os valores de  $V_C$  de modo a serem compatíveis com a faixa de leitura. Para tanto, o somador tem o papel de readequar os níveis de tensão entre a saída do circuito oscilador de Duffing e o pino de entrada ADC do Arduino Due.

<sup>1</sup>Um *Buffer* é um amplificador de ganho unitário usado para isolar e conectar um estágio de alta impedância de entrada a uma carga de baixa impedância de saída [6]

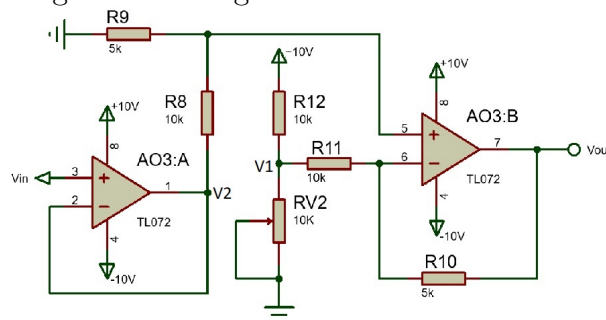
Figura 4.3: Diagrama do circuito implementado



Fonte:Autor

Em realidade, o bloco do somador de tensão foi obtido, na prática, empregando-se um circuito subtrator não-inversor, conforme observamos na figura 4.4. Esse circuito foi utilizado pois permite adicionar uma tensão negativa ao sinal de entrada, elevando a tensão como necessário, e ainda permite um ganho menor do que 1. Salienta-se, que este ganho foi necessário, pois as tensões medidas sobre o capacitor podiam ter amplitudes maiores que os 3.3V disponíveis para a leitura do ADC do Arduino.

Figura 4.4: Diagrama do circuito somador



Fonte:Autor

Para que os sinais gerados, então, ficassem dentro da faixa de tensão adequada, o sinal de entrada teve sua amplitude diminuída pela metade. Isto foi conseguido usando o

subtrator com ganho igual a 0.5. Uma tensão negativa de referência foi então aplicada à entrada inversora. A tensão total de saída será dada por

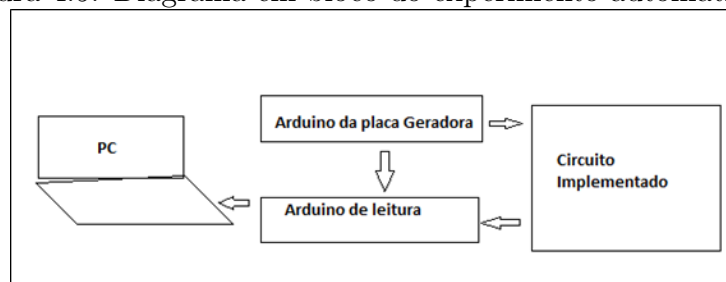
$$V_{out} = \frac{R_9}{R_8}(V_2 - V_1) = 0.5(V_2 - V_1), \quad (4.1)$$

onde a tensão  $V_2$  corresponde ao sinal na saída do *buffer* feito com o amplificador AO3 e  $V_1$  é a tensão constante negativa obtida ajustando-se o valor de  $RV_2$  no circuito divisor de tensão.  $V_1$  foi ajustada para aproximadamente -3.3 V de forma a elevar o zero de tensão ao meio da faixa de leitura do ADC.

### 4.3 Automação de geração e leitura de sinais

O objetivo do experimento com o circuito análogo ao oscilador de Duffing é verificar a sua dinâmica variando-se alguns parâmetros externos. No caso, os parâmetros escolhidos foram a amplitude de oscilação e a frequência do forçamento. Para poder comparar adequadamente as previsões teóricas com os resultados experimentais, era necessário realizar uma varredura adequada dentro de uma faixa de valores de amplitude ( $A$ ) e frequência ( $f$ ). Para auxiliar nesta tarefa, escolheu-se usar a plataforma Arduino para gerar e ler os sinais elétricos relevantes, além de automatizar o máximo possível o processo. Com isso, foram utilizadas duas placas Arduino Due, respectivamente para geração de frequências e leituras dos dados. A necessidade do processo de automação usar duas placas Arduino Due, se dá em função da capacidade de memória da plataforma de prototipagem eletrônica apresentar lentidão, e não garantir o sincronismo dos processos de geração e leitura. Primeiramente, o circuito recebe frequências de excitação geradas pela primeira placa Arduino Due pelo pino DAC. A leitura dos sinais pelo ADC e o envio dos dados para o computador é realizado pela segunda placa Arduino Due. Este arranjo é representado esquematicamente na figura 4.5.

Figura 4.5: Diagrama em bloco do experimento automatizado



Fonte: Autor

De maneira sucinta será abordado de forma resumida a responsabilidade de cada item ilustrado na figura acima. A placa geradora tem a função de gerar ondas com frequências dentro de uma faixa de forma automatizada. O circuito eletrônico análogo ao de Duffing, recebe em sua entrada o sinal de frequência automatizado. Em paralelo, enquanto a frequência é aplicada, ou gerada, a placa Due de coleta realiza a leitura dos dados de saída do circuito da frequência atual. A coleta é feita até 20 mil amostra por frequência conforme frequência gerada, mas para que haja esse sincronismo entre gerar e coletar dados, o processo de automação é essencial. O processo de automação entre as placas Arduino de geração e leitura de dados será explicado com maiores detalhes na seção 4.7.

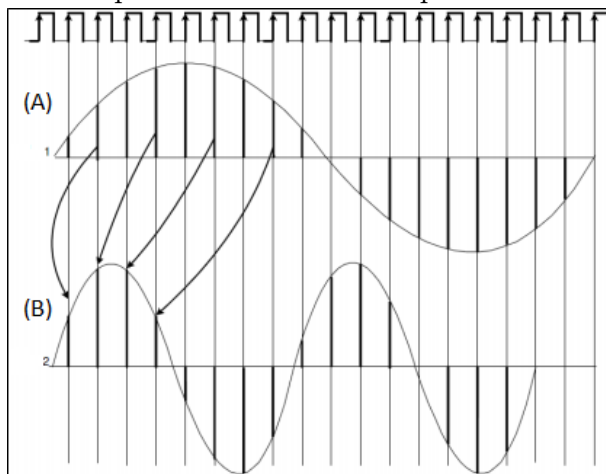
Em breve, será explicado a implementação dos processos de geração dos sinais com uma e duas frequências, bem como o processo de leitura e armazenamento dos sinais gerados no circuito. Mas antes, a técnica de síntese digital direta será abordada, que foi fundamental para o processo de geração.

## 4.4 Síntese digital direta

Para gerar os sinais senoidais simples e aquele resultante da soma de duas senóides, empregamos o método de síntese digital direta (SDD). Antes de detalhar a implementação do método usando a plataforma Arduino, vejamos como funciona a SDD.

A técnica SDD utiliza um sinal de referência para definir intervalos de tempo, dentro dos quais são geradas amostras digitais de valores de uma senóide ou qualquer outra forma de onda [53]. Cada amostra representa uma amplitude digital correspondente e estas, por sua vez, são convertidas por um conversor digital-analógico produzindo o sinal elétrico de saída desejado. Por último, um filtro linear elimina os resíduos da quantização, produzindo o sinal analógico de saída, exatamente como implementado pelo gerador de sinais e explicado na seção 4.2.

Nesse sentido, a forma de onda gerada por essa técnica tem sua duração relacionada ao *clock* de referência e a quantidade de passos das amostras digitais. Uma onda tem a duração de tempo para executar uma oscilação completa em um período. Logo, se existe uma onda A discretizada em  $X$  amostras e uma onda B em  $\frac{X}{2}$  amostras, conforme figura (4.6), nota-se, que a onda com metade de amostras consegue executar uma oscilação completa na metade de tempo da onda A.

Figura 4.6: Análise de período de onda de  $X$  passos e onda de  $X/2$  passos

Fonte:[53]

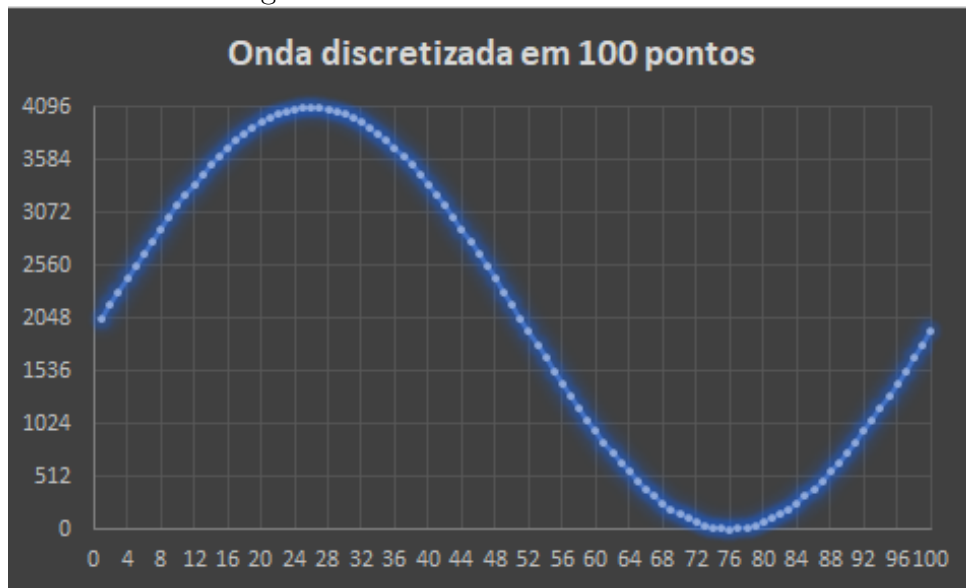
Portanto, para um clock fixo, ou seja, se o tempo entre cada amostragem  $\Delta t$  é mantido fixo, pode-se variar a frequência da onda gerada mudando-se  $X$ . Outra maneira de variar a frequência da onda é, mantendo-se  $X$  fixo, altera-se o tempo  $\Delta t$  entre cada amostragem. O período total sempre será  $T = X\Delta t$ , em ambos os casos. No arranjo experimental escolheu-se um número fixo para  $X$  e variou-se  $\Delta t$  por meio de software, como explicação na seção 4.5.

## 4.5 Implementação da Síntese Digital Direta no Arduino Due

Neste experimento, foi simulada a técnica SDD com a plataforma Arduino Due, mapeando, dentro da memória Arduino, em forma de vetores, os valores de amplitude da forma de onda. Os termos do vetor foram limitados ao valor de até  $2^n$ , onde  $n$  é o valor da resolução de bits do conversor. Após discretizada a onda em  $X$ , o DAC traduz o valor da grandeza digital para analógica.

Na figura 4.7, observa-se a discretização de uma senóide, que foi utilizada no presente experimento, com 100 amostras. Cada passo contém o valor da amplitude digital que é convertido em um valor analógico pelo conversor digital analógico (D/A). Considerando as especificações e características funcionais do Arduino Due, utilizamos a máxima resolução disponível do DAC, de 12 bits, que limita os valores das amostras à faixa de 0 a 4095.

Figura 4.7: Senoide com 100 amostras



Fonte:Autor

Conforme apresentado na seção 4.1, o DAC pode operar na frequência de até 1.68MHz. Assim, como o *clock* do conversor D/A é utilizado como referência para a execução dos ciclos de programa de conversão, isso interfere na frequência resultante do experimento. Desse modo, quanto maior a frequência de referência pela técnica SDD, maior a capacidade de ajuste de sintonia.

Um dos objetivos deste trabalho, era ter o controle mais refinado possível das frequências, ou seja, controlar o tempo entre cada conversão realizada pelo DAC com o menor intervalo de tempo possível. Após alguns testes, concluiu-se que o menor tempo de atraso possível era aquele gerado pela realização de uma instrução *nop*, introduzida diretamente em código de máquina. Assim, gerando sinais através da porta analógica com a função DAC, a frequência foi controlada com uso da instrução *nop*. Essa instrução proporciona uma melhor precisão nas frequências resultantes.

No processo de geração de ondas para única frequência de excitação ao circuito, cada ponto discretizado recebe um valor de 0 a 4095, correspondente ao valor de amplitude. Em seguida, é gerado um vetor com os atrasos referenciados pela técnica SDD, que proporcionarão frequências dentro de uma faixa de 700 a 1300 Hz. Cabe ressaltar, que o período das ondas foi controlado através da quantidade de operações da instrução *nop*, em um laço de repetição. Cada repetição adicional do laço, incrementa o atraso. Assim, foi necessário realizar uma calibração da relação da instrução *nop* com o período da onda gerada. Esse processo de calibração resultou em uma relação de frequência em função do número de repetições.

A partir dessas gerações de atrasos, é possível gerar uma relação linear da quantidade de atrasos pela instrução *nop* com o valor de frequência desejável. De modo que, a porta analógica com a função DAC, gere esses 10 mil sinais com um atraso para obter as frequências necessárias, através da instrução *nop*.

Em termos de programação, pode ser feita uma análise com maiores detalhes do processo de geração de onda de uma única frequência de excitação na figura 4.8. Nota-se que, um vetor de nome “freq” é criado com 31 posições. Essas posições são a quantidade de *nop*'s já considerando a relação linear do tempo e atraso para obter as frequências. A faixa de frequência, conforme já abordado, é de 700 a 1300 Hz, sendo incrementada a cada 20 Hz, ou seja, sendo a primeira posição do vetor 700 Hz, a segunda posição corresponde a 720 Hz e assim sucessivamente. Os valores das 100 amostras para gerar uma senóide com resolução de 12 bits, são declarados no escopo e no *void setup* são repetidos 100 vezes para gerar 10 mil amostras resultantes. Em seguida, no *void loop* a placa geradora envia um pulso através do pino digital 8, e somente quando a placa de leitura receber, é que irá coletar os dados depois do transiente. Assim, toda vez que a placa geradora muda de frequência, esse pulso de nível alto para baixo é captado pela placa de leitura e habilitado para coletar os dados do circuito. Esse pulso entra para o gatilho da placa coletora de dados até terminar a faixa de frequência e em seguida, manda o nível lógico zero até uma nova amplitude ser ajustada manualmente e o processo automatizado seja reiniciado.

Figura 4.8: Código de geração automatizada das ondas senoidais para 10 mil amostras

```

10milauto_700hz $
int senoidea[100]={2048,1919,1791,1664,1538,1415,1294,1176,1061,950,844,742,646,555,470,391,319,253,195,
144,100,64,36,16,4,0,4,16,36,64,100,144,196,253,319,391,470,555,646,742,844,950,1061,1176,1294,1415,1538,
1664,1791,1919,2048,2176,2304,2431,2557,2680,2801,2919,3034,3145,3251,3353,3449,3540,3625,3704,3776,3842,
3900,3951,3996,4031,4059,4079,4091,4095,4091,4079,4059,4031,3995,3951,3900,3842,3776,3704,3625,3540,3449,
3353,3251,3145,3034,2919,2801,2680,2557,2431,2304,2176};
int freq[31]={148,142,137,132,127,123,118,114,111,107,103,100,97,94,91,88,85,82,80,77,75,73,71,69,67,65,
63,61,59,57,56};

int resultado[10000];
int j,p=0;
void setup() {
  analogWriteResolution(12);
  for(int a=0;a<100;a++)
  {for(int i=0;i<100;i++)
  { resultado[j]=senoidea[i];
  j++;} } }

void loop()
{digitalWrite(8,1);// enviando o sinal 1 para a placa coletora
  delay(1000);
  digitalWrite(8,0);
  int a=freq[p];
  for(int u=0;u<300;u++)
  {for(int p=0;p<10000;p++)
  {analogWrite(DAC1, resultado[p]);
  for(int k=0;k<a;k++)
  {asm volatile ("nop\n\t");// geração de atrasos
  }}}
  p++;
  if(p>30)
  {digitalWrite(8,0);
  delay(1000);}
}

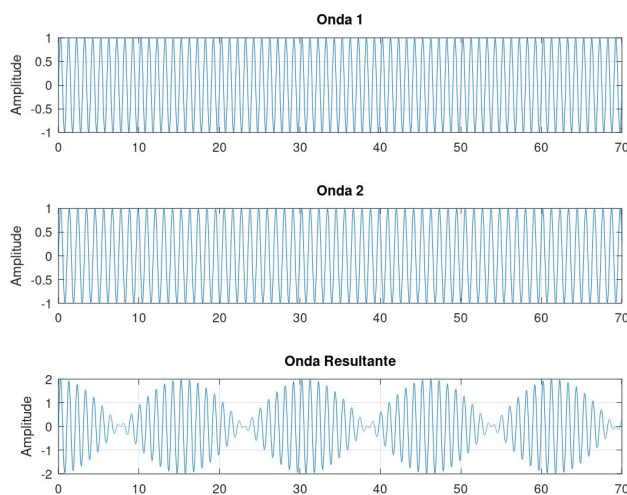
```

Fonte: Autor

O processo de geração de ondas automatizadas para duas frequências de excitação é idêntico ao de única frequência. Porém existe uma razão diferente entre elas, os vetores relacionados a amplitude das mesmas, são criados separadamente. Outro ponto a ser ressaltado, é que a resolução de cada onda gerada foi limitada a resolução de 11 bits, apesar do pino DAC ter 12 bits. Isso se deu para evitar o *overflow* pela onda resultante da soma dessas duas frequências desejadas.

Antes de entrar em detalhes sobre o processo de geração de ondas com duas frequências de excitação, é importante considerar a teoria de superposição de senoides. Para uma melhor análise de sinais dessa superposição de onda senoidal, é recomendável considerar, o resultado simulado da soma de duas ondas no Octave. A senoide ( $A$ ) é de frequência de 1.00 Hz e a senoide ( $B$ ) é de 1/1.07 Hz, conforme figura 4.9. A primeira onda é repetida 64 vezes dentro de um tempo de 64 segundos, logo cada ciclo completo da onda  $A$  dura um intervalo de 1 segundo. Já a onda  $B$  é defasada pela razão de  $\frac{1}{1.07}$  e a soma de ambas é apresentada na onda resultante. Assim, é possível observar as interferências das ondas  $A$  e  $B$  pela superposição.

Figura 4.9: Superposição de ondas senoidais com razão de 1/1.07



Fonte:Autor

Se temos os sinais AC (ou senoidal)  $V_1(t) = V \cos(\omega_1 t)$  e  $V_2(t) = V \cos(\omega_2 t)$ , ao somá-las temos uma tensão dependente do tempo, na forma

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) = 2V \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right]. \quad (4.2)$$

Sinais periódicos têm uma razão de frequências que pode ser representada com um número racional com casas decimais finitas. Já para sinais aperiódicos, essa razão resulta

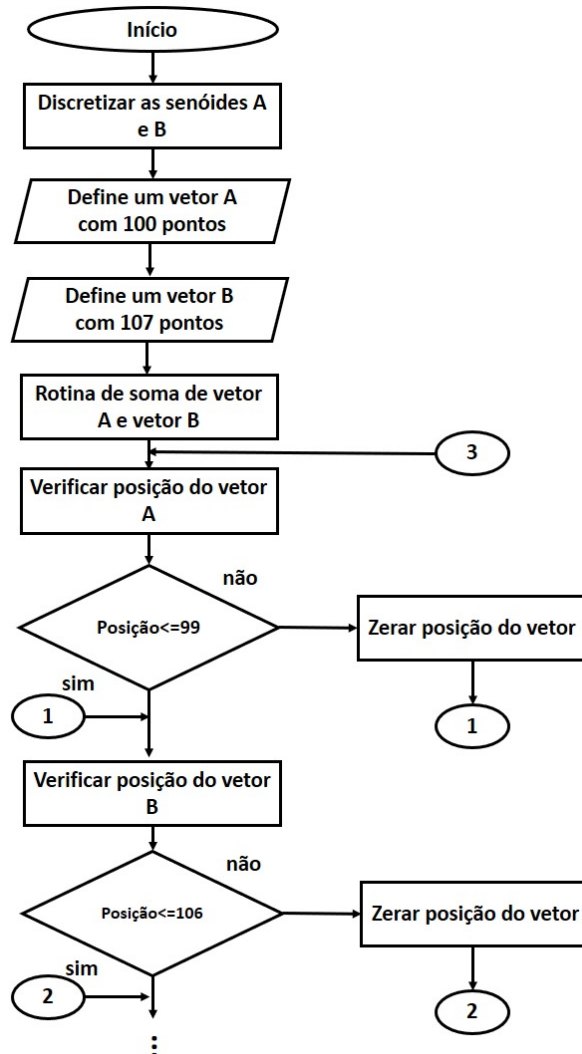
em um número irracional. A partir disso, se estabelece uma relação para a razão das frequências angulares  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , conforme equação a seguir, e verifica se o sinal resultante será ou não aperiódico.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} \quad (4.3)$$

Para exemplificação considere duas ondas, sendo uma de frequência 1.00 kHz e outra de 1/1.07 kHz, conforme essa implementação. Aplicando a equação (4.3), temos a razão entre as frequências,  $r = 100/107$ . Como essa razão é racional, o resultado é um sinal periódico. Porém, para corresponder a um período completo da onda resultante, seriam necessários 107 ciclos da frequência com menor período. Um sinal é periódico quando, dentro de um intervalo de tempo mensurável, ele repete um comportamento padrão do sinal, definido como ciclo.

Agora que os conceitos básicos da teoria de superposição de ondas senoidais com razões diferentes foram explanados, podemos prosseguir com a explicação da geração de ondas de duas frequências de excitação. Para a segunda implementação com a geração de ondas automatizadas com 2 frequências, foram geradas duas ondas senoidais, uma com 100 pontos e a outra com 107 pontos. Na figura 4.10, mostramos o processo da discretização das duas ondas em vetores e a forma de percorrer esses vetores, que contém em cada posição o valor de amplitude da onda.

Figura 4.10: Fluxograma parte 1 do gerador de onda senoidal

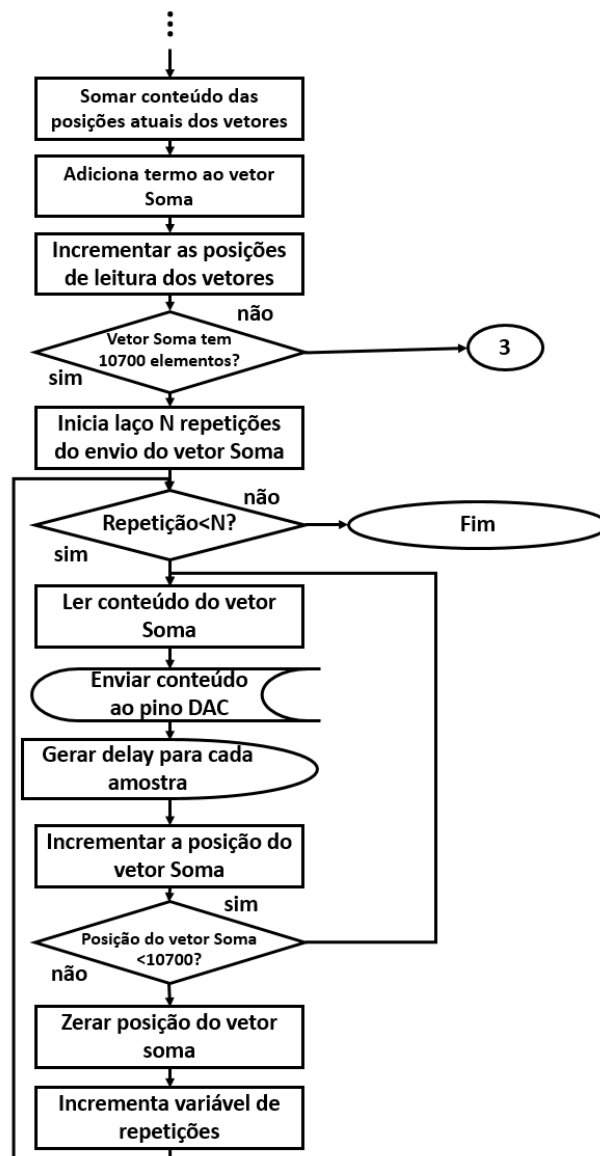


Fonte: Autor

Na figura 4.11, observa-se a aplicação da teoria da superposição pela soma dos vetores A e B, que resultam em uma onda com 10700 amostras, ou seja, o batimento<sup>2</sup> entre as duas ondas. O processo de gerar um vetor resultante garante o batimento entre as ondas e em seguida, esse vetor é enviado como conteúdo para as portas analógicas do tipo DAC. Para o pino DAC gerar as ondas dentro das frequências, atrasos entre cada amostras são introduzidos. E até que todos os vetores resultantes de 10700 amostras sejam executados dentro de 30 segundos, assim como na geração de única frequência para garantir os sincronismos, esse processo de ler o conteúdo do vetor que somou as ondas até gerar pelo DAC fica em *loop* (repetição).

<sup>2</sup>O fenômeno conhecido por batimento é o resultado da superposição de duas ondas que se propagam numa mesma direção com frequências ligeiramente diferentes de acordo com Ramos e Chiquito [10].

Figura 4.11: Fluxograma parte 2 do gerador de onda senoidal



Fonte:Autor

Na figura 4.12, em destaque na cor laranja, nota-se o trecho do código responsável pela geração de atrasos com a instrução *nop*. Portanto, através desse trecho ajusta-se a frequência do processo de geração de ondas.

Figura 4.12: Atraso com a instrução *nop* entre as amostras

```
10milauto_700hz
int resultado[10000];
int j,p=0;
void setup() {
  analogWriteResolution(12);
  for(int a=0;a<100;a++)
  {for(int i=0;i<100;i++)
  { resultado[j]=senoidea[i];
  j++;}} }

void loop()
{digitalWrite(8,1);// enviando o sinal 1 para a placa coletora
  delay(1000);
  digitalWrite(8,0);
  int a=freq[p];
  for(int u=0;u<300;u++)
  {for(int p=0;p<10000;p++)
  {analogWrite(DAC1,resultado[p]);
  for(int k=0;k<a;k++)
  {asm volatile ("nop\n\t");// geracao de atrasos
  }}}
  p++;
  if (p>30)
  {digitalWrite(8,0);
  delay(1000);}
}
```

Fonte:Autor

Apesar de ser possível alterar as frequências usando a quantidade de repetições da instrução *nop*, a relação entre o número de repetições e as frequências obtidas era inicialmente desconhecida. No entanto, poderia ser esperada uma relação linear entre o número de repetições e o período. Na próxima seção, será apresentado como esta relação foi verificada e como ela pode ser usada para o controle da frequência gerada.

#### 4.5.1 Calibração do gerador de ondas pelo DAC

No experimento, foi gerada uma única frequência de 10 mil amostras para servir de referência para a implementação de duas frequências em função das relações lineares e calibrações realizadas. Primeiramente, manteve-se a quantidade de passos fixos em 10 mil amostras e variou-se a frequência de saída. Essa variação de frequência foi baseada no controle do tempo de processamento entre a execução do comando nativo do Arduino para o envio de uma nova amostra da onda ao DAC.

A frequência máxima de saída para uma senóide discretizada em 100 pontos, foi obtida em torno de 2.5 kHz. Ou seja, cada ciclo completo da onda senoidal gerado pela técnica SDD, durou um intervalo de tempo de  $4 \cdot 10^{-4}$  segundos. Como cada ciclo é gerado por 100 conversões do DAC, conclui-se que o menor tempo possível para cada conversão é de, aproximadamente,  $\Delta T/100 = 4\mu s$ . A partir desses valores de base, é possível controlar a frequência da placa geradora através da inserção de atrasos a cada conversão do DAC.

Tabela 4.1: Resultados experimentais

Repetições $n$	$T(10^{-6}s)$
5	412
10	436
15	460
20	484
25	508
30	532
35	554
40	578
45	604
50	626
55	650
60	676
70	722
80	770
90	818
100	865
110	913
120	960

Na tabela 4.1, temos os resultados obtidos para geração de única frequência para uma onda senoidal de 10 mil amostras. Esse processo de calibração através de atrasos com a instrução *nop*, resultaram em uma base de tempo como referência. Esses dados foram analisados a fim de se estabelecer uma relação linear.

Para um ajuste entre a relação do período de uma oscilação e a quantidade de repetição da instrução geradora de atraso, *nop*, foi utilizada a equação da reta abaixo.

$$T = an + b \quad (4.4)$$

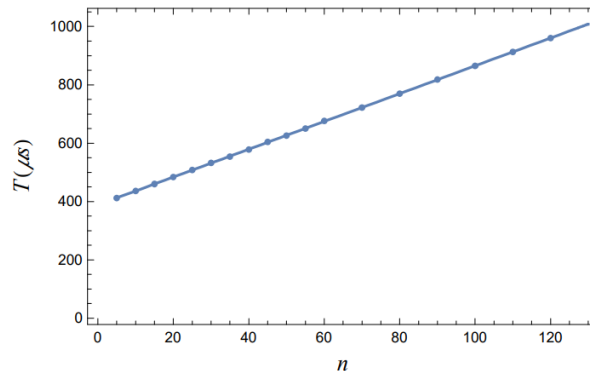
Nesta equação,  $T$  é o intervalo de tempo de uma oscilação,  $n$  é o número de repetições de *nop*,  $a$  é o coeficiente angular e  $b$ , o coeficiente linear. As ondas senoidais geradas com diferentes números de repetições de *nop* foram medidas utilizando um osciloscópio digital USB Hantek 6022BE. Os períodos e frequências eram medidos digitalmente pelo próprio osciloscópio e então anotados. Com o conjunto de pares de ponto experimentais de  $(n, T)$ , empregou-se o programa *Mathematica* para realizar um ajuste á equação da reta 4.4 baseado no método dos mínimos quadrados. Nesta subseção, o método de calibração será abordado considerando os resultados obtidos para a geração pela repetição de *arrays* com 10 mil pontos.

A reta ajustada tem a forma,

$$T = 388.37 + 4.768n. \quad (4.5)$$

onde  $T$  é dado em microsegundos. Pode-se ver a excelente qualidade do ajuste através da figura 4.13, onde se tem a reta ajustada superposta aos dados experimentais.

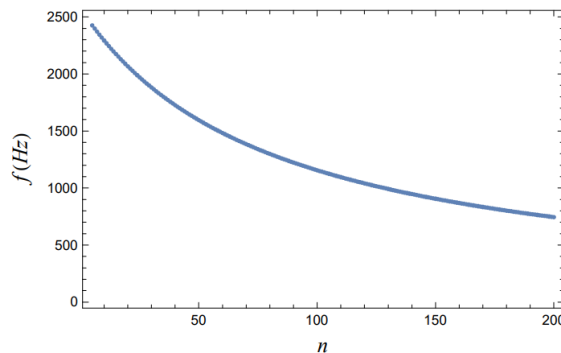
Figura 4.13: Regressão linear de período e quantidade de *nop*'s para repetição do array com 10 mil amostras.



Fonte: Orientadores

A equação (4.5) indica que o menor período possível é de  $388.37 \cdot 10^{-6}$ , o que corresponde a uma frequência de 2575 Hz. O menor incremento temporal viável é  $= 4.768 \cdot 10^{-6} s$ . A figura 4.14, apresenta a relação da quantidade de repetições da instrução *nop* e frequência. Para a geração de ondas com 10 mil pontos, sem a automatização com vetor de frequência, observa-se que seria necessário aproximadamente 128 instruções *nop*'s para gerar 1 kHz.

Figura 4.14: Frequência da onda senoidal em função da repetição da *nop*'s.



Fonte: Orientadores

Na próxima seção, será abordado o desenvolvimento de um coletor de dados feito com a plataforma Due, com objetivo de apresentar resultados do uso do gerador de sinais automatizados aplicado ao oscilador Duffing.

## 4.6 Leitura de amplitude de ondas complexas com Arduino Due

Após a geração de ondas, conforme já abordada na seção 4.3, uma placa específica realiza a leitura dos valores analógicos resultante de aplicação do circuito eletrônico. Esses valores são lidos pelos pinos ADC pela placa Arduino Due e armazenados em sua memória RAM. Em seguida, o processo de coleta de dados para armazenamento no computador em forma de arquivo ".txt" ou ".dat" se inicia.

Os dados são captados ou lidos por uma porta de entrada analógica (A0) conforme trecho do código implementado na figura 4.15. Essa porta coleta as informações e converte pelo ADC, e trafega esses dados pelas portas de comunicação RX e TX através do cabo USB do Arduino para o computador (notebook/PC).

Figura 4.15: Código no IDE Arduino para leitura de onda com até 20 mil pontos de amostras

```
int lido[20000];
int i,x,j,cont=0;
void setup() {
  Serial.begin(74880);
  analogReadResolution(12);
  pinMode(8,INPUT);}

void loop() {
  // inicialização
  while(digitalRead(8)==0)
  { // loop de leitura
    delay(100); }

  delay(3000); // transiente
  while(i<20000)
  {lido[i]=analogRead(A0);
  for(int k=0;k<2190;k++)
  {asm volatile ("nop\n\t");// geracao de atrasos
  } i++;
  }
  while(x<20000)
  { Serial.println(lido[x]);
  x++;
  }
  for(int u=0;u<10;u++)
  { Serial.println("0");}
  for(int w=0;w<10;w++)
  { Serial.println("4095");}
  x=0;
  i=0;
  cont++;
  if(cont>30)
  exit(0);}
```

Fonte: Autor

A comunicação da placa Arduino com o computador se dá pelos pinos de dados do USB (Rx e Tx) com sua IDE, pela janela monitor serial. O pino de transmissão de dados (Tx) é ligado ao de recepção de dados do computador e vice-versa. Esse tipo de comunicação é classificada como assíncrona, onde dados são transmitidos de forma sequencial, bit a bit.

Nesta implementação, a velocidade de comunicação é de 74880 bits por segundo e essa frequência é setada na IDE do Arduino.

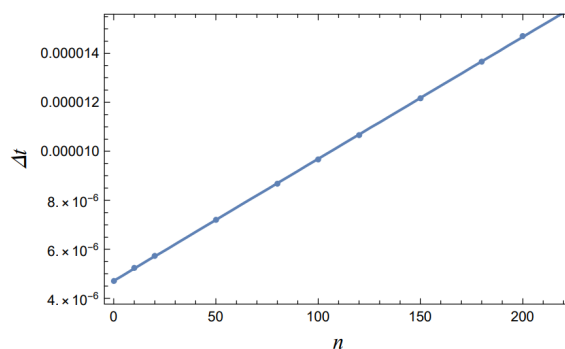
Para relacionar a taxa de leitura com a quantidade de instrução *nop* lida pela porta analógica do Arduino, foi usada como referência uma onda quadrada de 1 kHz. Assim, o tempo de cada semi-ciclo positivo e negativo é respectivamente de  $5 \cdot 10^{-4}$  segundos.

Desta forma, foi realizada a contagem do número de leituras de cada ciclo de 1 ms da onda quadrada, e com isso, foi calculado o tempo de cada leitura individual em função do número  $n$  de repetições do laço de atraso com o comando *nop*. A equação da reta para o tempo de leitura é dada pela equação (4.6), onde o tempo é dado em segundos.

$$\Delta t = 4.715 \cdot 10^{-6} + 4.974 \cdot 10^{-8}n \quad (4.6)$$

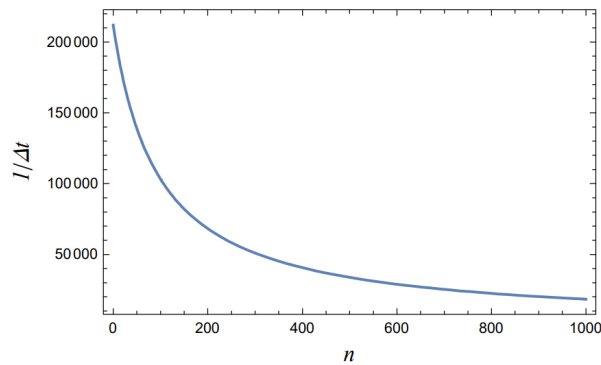
Na figura 4.16, tem um gráfico da reta ajustada dos pontos experimentais e mostra que a expectativa de uma relação linear é satisfeita. A partir desse resultado, é possível estimar a frequência de leitura baseada na quantidade de *nop's* conforme ilustrado na figura 4.17.

Figura 4.16: Relação dos pontos experimentais e da reta ajustada



Fonte: Orientadores

Figura 4.17: Taxa de leituras por segundos



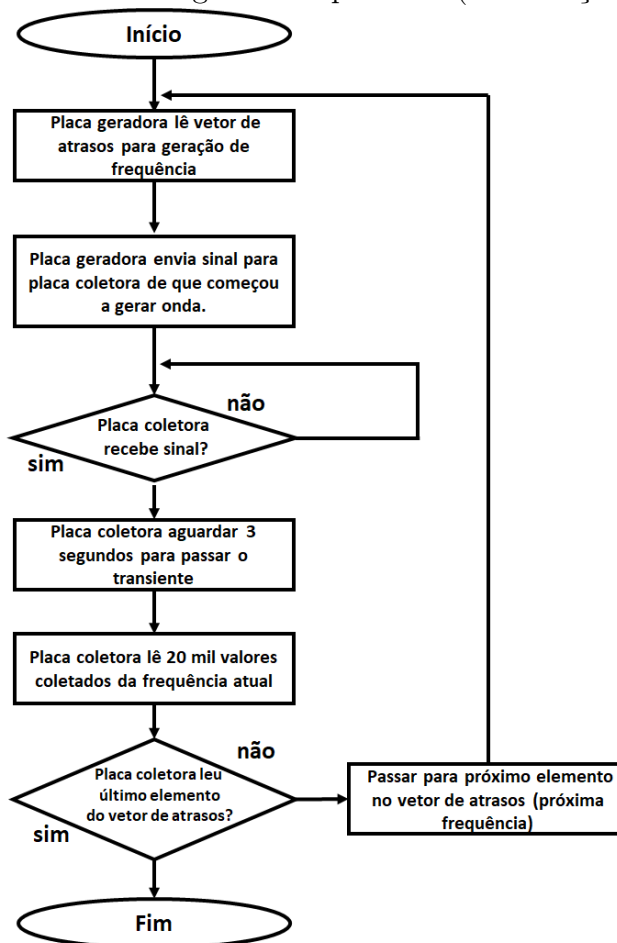
Fonte: Orientadores

A relação linear entre a geração de frequência e a leitura proporciona a automatização da análise de caos para o circuito Duffing. Na próxima subseção, será abordado o sincronismo entre os dados gerados e recebidos pelas placas.

## 4.7 Implementação da automatização

Esta seção visa apresentar a abordagem que foi adotada para a implementação no circuito análogo ao de Duffing com a geração de ondas e coleta de dados de forma automatizada. Observa-se pelo fluxograma na figura 4.18 que, no início, a placa geradora envia ondas com uma frequência pré-programada. O processo de geração, consiste de enviar sinais analógicos pela porta DAC do Arduino Due com atrasos entre cada amostra. Simultaneamente, a placa de leitura dos dados fica aguardando receber um sinal como nível lógico da placa geradora, para dar início ao armazenamento dos dados lidos. Apenas quando esse sinal lógico da placa Arduino geradora for recebido pela placa coletora, o processo de armazenamento prossegue. Cabe ressaltar que esse sinal serve para garantir a comunicação e sincronismo entre o processo de geração de ondas e coleta de dados. Nota-se que o processo de armazenamento de dados em um arquivo do tipo ".txt" só acontece após a coleta de dados. A leitura de dados são no total de 20 mil pontos por cada uma das 31 frequências que serão geradas automaticamente. Vale destacar que as ondas geradas são coletadas apenas após um tempo correspondente ao estado transiente do sistema. Com isso, um período de 3 segundos durante a leitura do pino ADC é descartado após o início do processo de geração. Assim, após a leitura e armazenamento dos 20 mil pontos, o próximo ciclo de leitura inicia para uma nova frequência gerada, ou seja, o processo se reinicia.

Figura 4.18: Fluxograma do processo (Automação)



Fonte: Autor

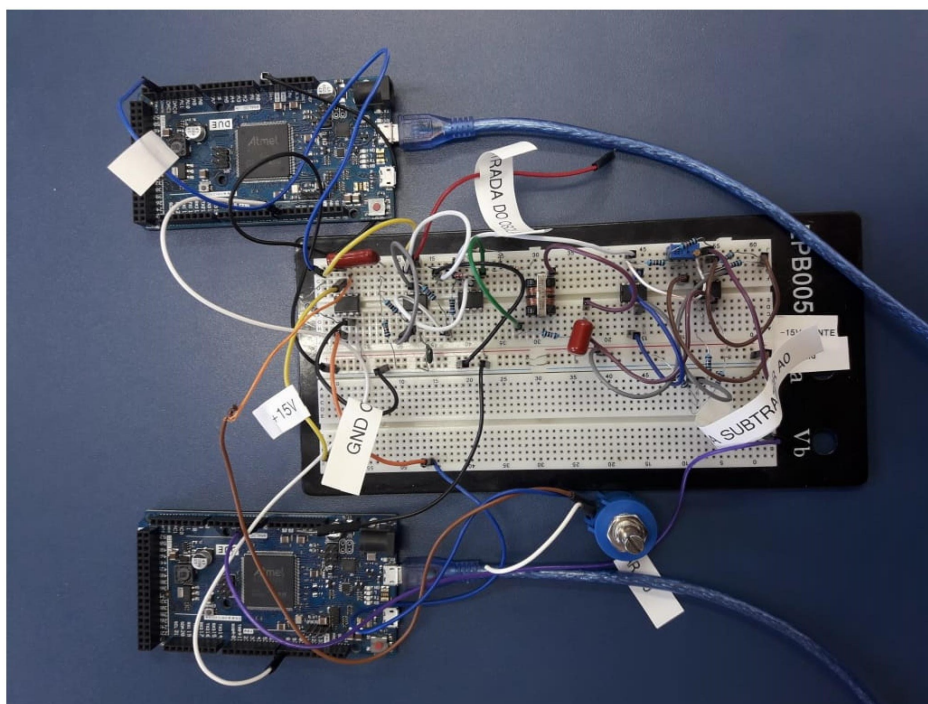
O processo de geração de uma única frequência de excitação aplicada ao circuito análogo de Duffing, consiste na geração de 100 pontos de uma onda discretizada. Os valores de amostras são repetidos 100 vezes gerando um vetor resultante de 10 mil pontos, que são armazenados. A placa geradora envia um sinal digital através do pino 8 para a placa coletora. em seguida o vetor de 10 mil pontos é enviado pelo pino DAC para ser aplicado no circuito.

Existem 31 frequências a serem executadas dentro de uma faixa de frequência conforme já abordado na seção 4.4. Antes da próxima frequência ser gerada de forma automatizada, a placa de leitura ou coleta, confirma que os dados foram lidos. Além disso, para garantir que haja sincronismo entre as placas geradora e coletora, um tempo de 30 segundos foi estabelecido para manter o loop de repetição de geração da onda de única frequência dentro desse tempo. Por isso, as 10 mil amostras são enviadas ao DAC repetidamente por 300 vezes, uma vez que o tempo médio para cada envio é de 0.1s, mas variando com a frequência do sinal gerado.

Já o processo de geração automatizada para duas frequências, só se diferencia devido o processo ter duas ondas geradas. Nesta implementação usamos uma onda de frequência  $f$  e a segunda com uma razão de 1.07 de  $f$ . Logo, é gerado o vetor resultante de 10700 amostras. Após, enviar um sinal digital para placa de coleta, a geração de onda com a frequência estabelecida se inicia. Em paralelo, ocorre o processo de leitura dos dados, conforme já abordado anteriormente.

Para entendimento e comprovação de que existe uma relação linear satisfatória, um método experimental de calibração também foi adotado. Observa-se que o atraso pela instrução *nop* no programa de leitura foi de 2190, garantindo assim uma taxa de 8800 leituras por segundo. Com o apoio do orientador, foi observado que uma boa amostragem de pontos em um ciclo de tempo é entre 5 a 10 amostras. Logo 8 pontos de amostragem foi escolhido por ciclo, nos dando uma taxa de leitura de 8800 Hz. A fim, de coletar dados caóticos em frequências que não estavam sendo geradas, o vetor de frequência automatizada foi modificado para a faixa de 700 Hz a 1300 HZ.

Figura 4.19: Montagem experimental



Fonte: Autor

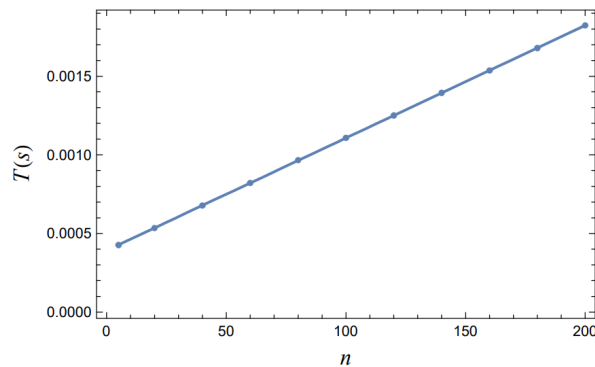
A figura 4.19 mostra uma foto da montagem do experimento, apresentando as duas placas Arduino Due junto ao circuito eletrônico montado em um protoboard. É importante ressaltar, a importância do sincronismo desse processo de geração de ondas e coleta de dados automatizada, como já explanado. Finalizando a implementação de forma au-

tomatizada, nota-se que a introdução do loop para mudança automática do número de *nop's* causou um atraso extra inesperado. Por isso, houve a necessidade de uma recalibração que resultou na relação de geração de atrasos por quantidade de instruções *nop's* conforme equação(4.7). No momento em que a memória interna do Arduino era destinada para executar o vetor de amostras dentro do *loop*, o tempo de geração de ondas era influenciado. Ao realizar análises dessa mudança no tempo de atraso, a equação (4.5) é substituída pela equação,

$$T = 370,32 + 7.168n. \quad (4.7)$$

A figura 4.20 apresenta a regressão linear da equação acima, onde em função da quantidade de *nop's* obtemos uma relação linear ao tempo para obtermos a faixa de frequências desejáveis

Figura 4.20: Regressão linear de *nop* e períodos para vetor de 32 pontos com valores de frequência



Fonte:Orientadores

Na próximo capítulo, serão abordados os resultados de medição automatizada pelas plataformas Arduino Due. Além disso, os dados coletados serão analisados e comparados com as simulações teóricas.

# Capítulo 5

## Resultado

### 5.1 Resultados teóricos

Esta dissertação fez parte de um trabalho mais amplo de pesquisa que contou com o apoio dos orientadores e professores colaboradores do Departamento de Ciências Exatas. Os professores realizaram as simulações numéricas do sistema apresentado na equação (3.25) com o objetivo de verificar a caotificação do sistema induzida pela excitação por duas frequências. Foi investigada a dinâmica do sistema em função da variação dos parâmetros externos correspondentes à amplitude da tensão de excitação,  $A$  e a sua frequência  $f$ .

As simulações a seguir foram realizadas empregando-se os valores medidos para os componentes do circuito. No caso, os valores foram  $R = 20.3 \Omega$ ,  $L = 34.6 \text{ mH}$ ,  $R_L = 4.0 \Omega$ ,  $C = 476 \text{ nF}$ ,  $R_1 = 10.12 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 10.15 \text{ k}\Omega$  e  $R_3 = 10.12 \text{ k}\Omega$ . Os diodos  $D_1$  e  $D_2$  eram modelos 1N4148. Os parâmetros físicos dos diodos, presentes na equação (3.6), foram medidos pelo orientador e que resultaram ser:  $I_S = 5.01 \text{ nA}$  e  $\eta = 1.99$ , para um  $V_T = 26 \text{ mV}$ .

Durante o processo de comparação entre os resultados teóricos obtidos usando a equação (3.25) com os resultados experimentais, uma discrepância significativa foi observada. Isto levou a uma investigação posterior por parte dos orientadores, que concluíram que o modelo teórico precisava ser aperfeiçoado. No caso, introduziu-se no modelo o efeito da corrente que flui pelo ramo do circuito contendo o resistor  $R_3$  e os diodos. Na modelagem inicial, seguiu-se a ideia de Tamaseviciute [51], de que esta corrente seria desprezível em relação a  $I_L$ . Esta mudança na primeira equação decorre diretamente do uso da equação para as correntes  $I_L = I_C + I_D$ , juntamente com as transformações de variáveis da equação(3.21). Contudo, ela tem um efeito significativo, ao alterar a dissipação no cir-

cuito. A corrente neste ramo deixa de se transformar em energia armazenada no capacitor  $C$ , tendo efeito semelhante ao do resistor  $R$ , ao fazer parte da energia do circuito  $RLC$  se dissipar. As equações usadas nas simulações abaixo são uma variação da equação (3.25) sendo na realidade

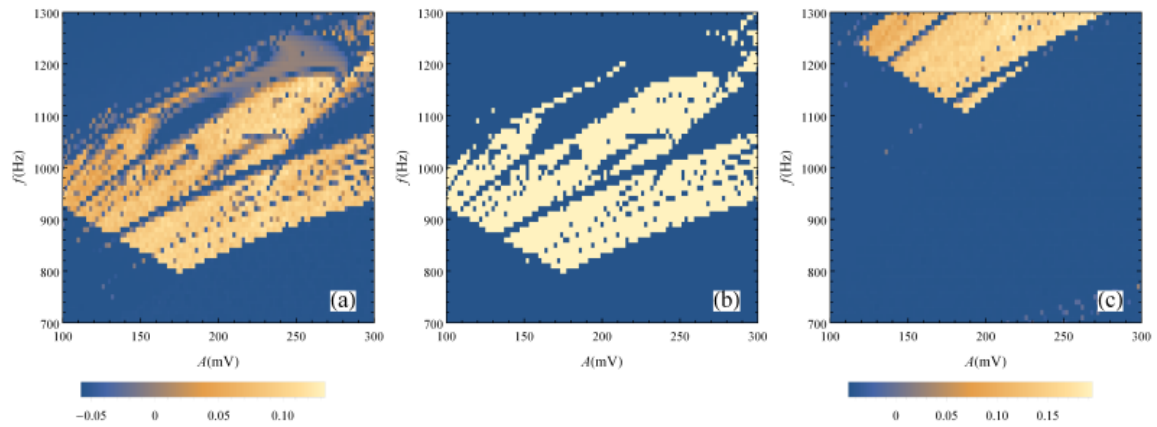
$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y - \rho I_D \\ \frac{dy}{d\tau} = F(x) - by + A[\text{sen}(z) + \text{asen}(rz)] \\ \frac{dz}{d\tau} = \Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

Vê-se que a mudança matemática é pequena e introduz um termo de dissipação não-linear na forma  $\rho I_D(x)$ . Contudo, o efeito desse termo extra trouxe os resultados teóricos muito mais próximo aos resultados experimentais, como será discutido adiante.

## 5.2 Resultados experimentais

A figura 5.1 apresenta os resultados numéricos obtidos para o expoente máximo de Lyapunov para o caso de excitação por uma única frequência. Em 5.1(a), observa-se que o caos pode ser facilmente obtido no sistema dentro da faixa de amplitude e frequência considerada, a região nos lembra uma cabeça de cobra. Destaca-se na figura 5.1(b) a região prevista na qual haveria caos. Esta região é bastante descontínua, apresentando uma mistura de pequenas regiões com caos e com periodicidade. Para efeito de comparação, na figura 5.1(c) as previsões numéricas são apresentada caso fosse utilizada uma força como a da equação de Duffing(2.20) ao invés do modelo mais realista do circuito. Observa-se que a região da cabeça de cobra é deslocada , aparecendo apenas a parte inferior, para altas frequências. Esse deslocamento se dá, pelo circuito implementado não reproduzir exatamente o oscilador Duffing e mostra a importância do mesmo ser modelado adequadamente.

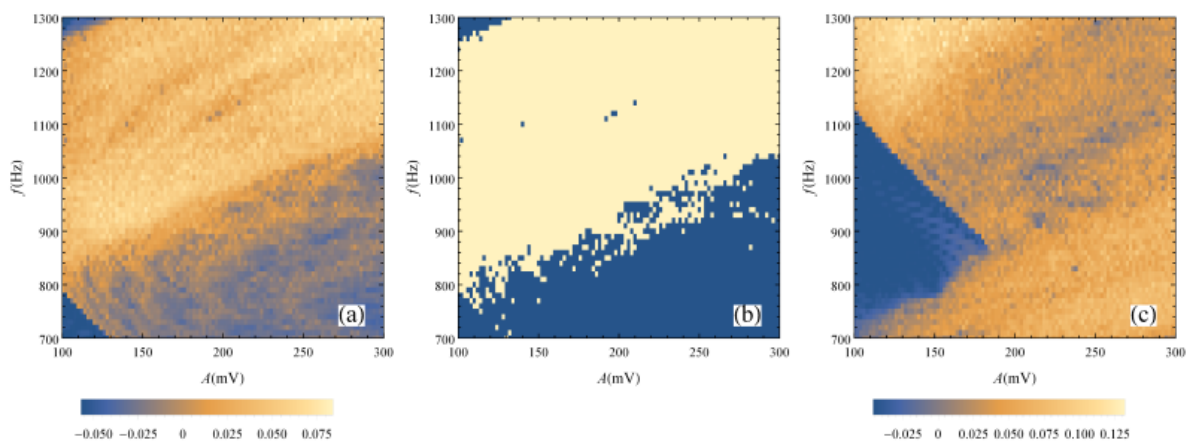
Figura 5.1: Mapa de cores para o maior expoente de Lyapunov para a dinâmica de excitação de uma frequência dada pela equação (5.1) para (a) e pontos com expoente de Lyapunov positivo destacado em cor clara(b). Em (c) temos resultados para o caso em que a força é aquela do oscilador de Duffing



Fonte:Orientadores e colaboradores

A fim de aumentar os pontos caóticos no mesmo domínio considerado para 1 frequência de excitação, na figura 5.2 é obtido o resultado para excitação de 2 frequências. Pode-se observar que a região caótica teve uma expansão significativa. Comparando as figuras 5.1 e 5.2, nota-se que o total da área do espaço de parâmetros ocupada por caos corresponde a cerca de 30% para excitação por uma frequência e passa a 65% no segundo caso.

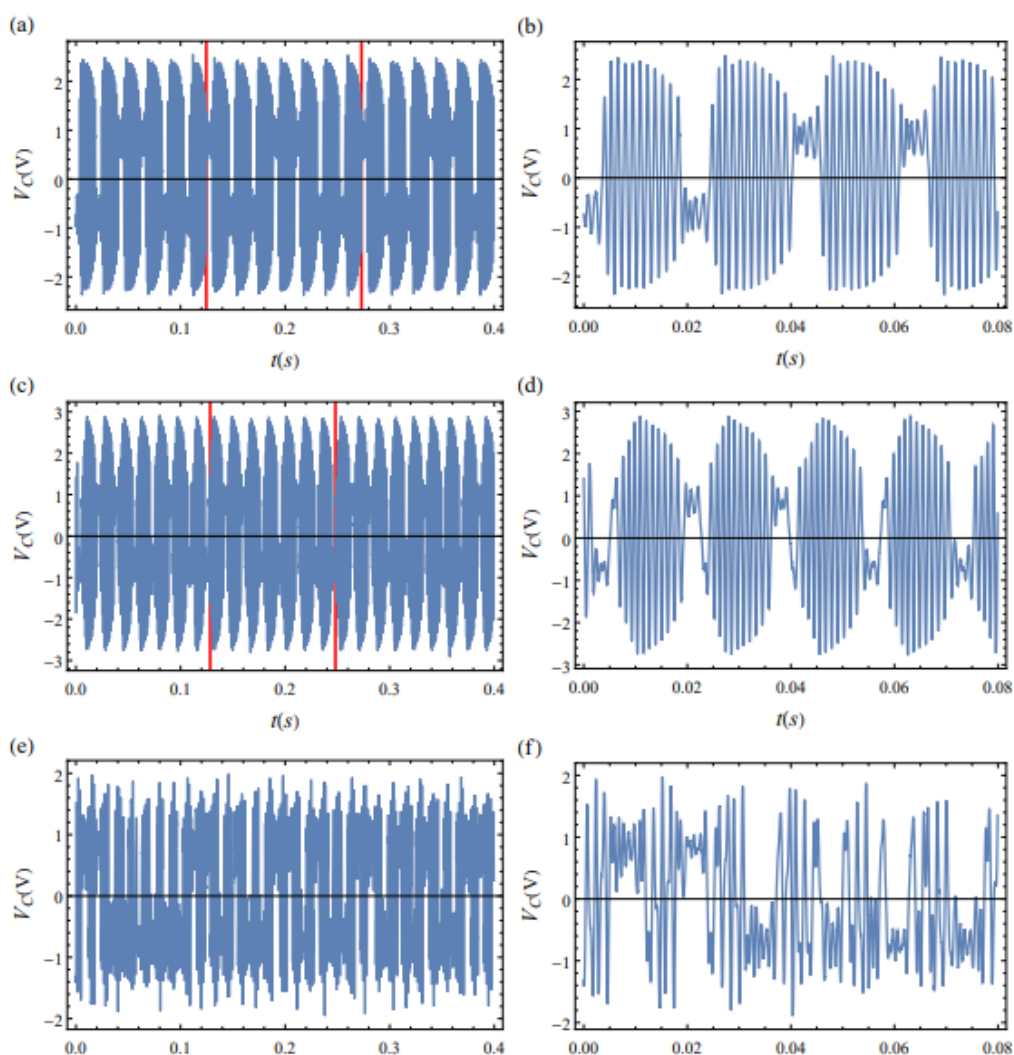
Figura 5.2: Mapa de cores para o maior expoente de Lyapunov para a dinâmica de excitação de 2 frequências ( $r = 1/1.07$ ) dada pela equação (5.1) para (a) e pontos com expoente de Lyapunov positivo destacado em cor clara(b). Em (c) temos resultados para o caso em que a força é aquela do oscilador de Duffing



Fonte:Orientadores e colaboradores

Na Figura 5.3 alguns modelos dos resultados obtidos experimentalmente são apresentados. Para todas as imagens a taxa de amostragem é de 50 kHz, a amplitude de 250 mV e foi descartado o transiente dentro do período de 3 segundos conforme já explanado no capítulo anterior. Observa-se a alta complexidade do comportamento periódico para o poço duplo nas figuras 5.3(a) e (c), as linhas verticais vermelhas limitam o ciclo de oscilação periódica. Destaca-se que a dinâmica periódica é complexa pelos movimentos periódicos apresentarem oscilações bastante complexas. As figuras 5.3(b) (d) (f), lado direito, são janelas de tempos menores do lado esquerdo, respectivamente, de (a) (c) e (e). Nota-se também, que aumentando a frequência ocorre uma evolução distinta da dinâmica do sistema. E finalmente, a dinâmica caótica é observada para  $f = 1200\text{kHz}$  conforme figura 5.3(e).

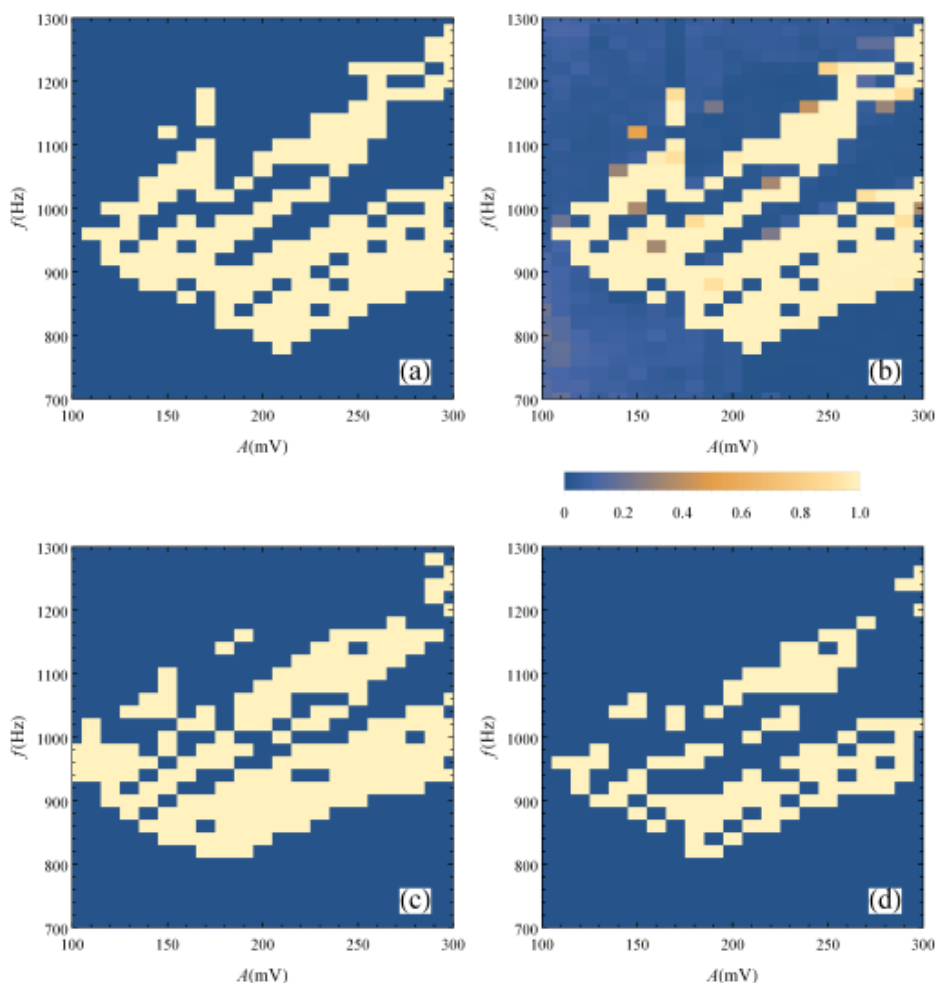
Figura 5.3: Séries temporais experimentais para excitação por duas frequências (a) e (b)  $f = 740\text{Hz}$ , (c) e (d)  $f = 920\text{Hz}$ , (e) e (f)  $f = 1200\text{Hz}$



Fonte: Orientadores e colaboradores

Como já comentado no Capítulo 4, o objetivo da análise experimental do circuito era realizar uma varredura nos parâmetros de frequência ( $f$ ) e amplitude de excitação ( $A$ ). Os dados coletados a partir desta varredura foram, então, analisados de duas formas pelos orientadores e o colaborador Sebastian Ujevic. Uma análise puramente visual buscando verificar os padrões de repetições periódicas ou sua ausência, indicando a possibilidade de caos. Uma análise mais formal foi feita empregando-se o método de teste 0-1. Resumidamente, neste teste a série temporal experimental é analisada gerando um parâmetro,  $K$ , que tende a 0 (zero) quando a dinâmica é periódica e a 1 (um) quando é caótica. O teste 0-1 provou-se mais difícil de aplicar ao caso de duas frequências do que no caso de uma frequência. Isso decorreu de alta complexidade das oscilações periódicas para a excitação com duas frequências, que geram um valor mínimo de fundo para  $K$  que não se aproxima tanto de zero. Na figura 5.4 os resultados são apresentados para uma única frequência de excitação.

Figura 5.4: Resultados experimentais para excitação por uma frequência

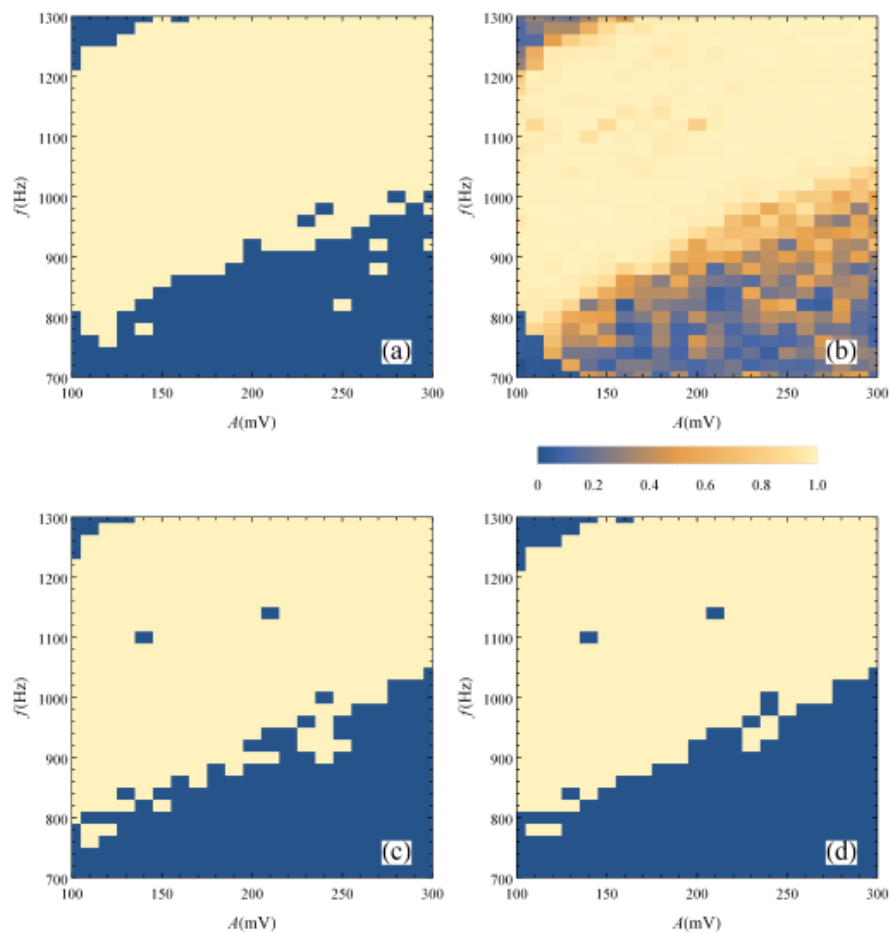


Fonte: Orientadores e colaboradores

A figura 5.4(a) mostra as regiões de caos e periodicidade para o caso de excitação por uma frequência. A figura 5.4(b) mostra os valores correspondentes de  $K$ . Os valores de  $K$  mostram uma clara distinção entre os dois regimes dinâmicos. Para comparação, a figura 5.4(c) mostra as previsões teóricas calculadas com as equações (5.1) usando os pontos da grade correspondentes às medições experimentais. Há um bom acordo qualitativo entre teoria e experimento, pois as regiões de caos também apresentam uma estrutura similar à cabeça de uma cobra. A boa concordância quantitativa entre teoria e experimento é evidenciada pela figura 5.4(d), que destaca as regiões onde o caos foi observado tanto na teoria quanto experimentalmente.

A figura 5.5(a) mostra uma grande região contínua de caos no caso de excitação por duas frequências. Na figura 5.5(b), as regiões de dinâmica periódica apresentam valores comparativamente altos de  $K$  devido à sua complexidade. No entanto, ainda é clara a existência de uma grande região contínua com  $K$  mais próximo de um. A figura 5.5(c) mostra as previsões teóricas calculadas usando os pontos da grade correspondentes às medições experimentais. Neste caso, a concordância entre teoria e experimento é melhor do que a observada para excitação de única frequência. Isso é uma consequência da sensibilidade paramétrica mais fraca no caso de excitação de duas frequências. A superposição das regiões com valores teóricos e as experimentais resulta na grande região contínua vista na figura 5.5(d). Consequentemente, se um determinado conjunto de parâmetros  $A$  e  $f$  fossem escolhidos para operar o circuito com base nas previsões teóricas, haveria uma grande chance de que o caos fosse realmente obtido experimentalmente. Obviamente, existem algumas escolhas que maximizam essa oportunidade, e isso é um problema que poderia ser resolvido teoricamente levando em conta as incertezas estimadas sobre os vários componentes e parâmetros do sistema.

Figura 5.5: Resultados experimentais para excitação por duas frequências



Fonte: Orientadores e colaboradores

Felizmente foi comprovado experimentalmente a forte caotificação prevista para o oscilador Duffing de poço duplo sob excitação de duas frequências. No próximo capítulo serão apresentadas as conclusões obtidas deste trabalho.

# Capítulo 6

## Conclusão e Trabalho Futuro

### 6.1 Conclusão

Este trabalho apresentou uma análise experimental aprimorada do circuito investigado, utilizando um modelo realista da função potencial equivalente do circuito. Esse modelo, baseado na relação corrente-tensão realista dos diodos, permitiu a derivação das equações de movimento de forma mais precisa, ao mesmo tempo em que manteve a simplicidade das equações do oscilador de Duffing conforme a teoria apresentada.

Resultados teóricos e experimentais destacaram a viabilidade do circuito investigado como uma fonte confiável de sinais caóticos em tempo contínuo. Sob a excitação por duas frequências, a dinâmica caótica demonstrou ser estável contra imprecisões nos parâmetros externos e internos do circuito. Embora a robustez do caos esperado para a excitação por duas frequências no circuito análogo ao oscilador de Duffing, conforme discutido em outros estudos, não tenha sido abordada, este trabalho se concentrou na confirmação da caotificação.

Além disso, o trabalho incluiu uma breve discussão sobre sistemas dinâmicos em geral, pontos fixos, estabilidade e dimensionalidade. A introdução do conceito de caos e sistemas caóticos, usando o exemplo do oscilador de Duffing, proporcionou um entendimento mais amplo do contexto em que o experimento se insere. A análise qualitativa da dinâmica do circuito análogo ao oscilador de Duffing contribuiu para a compreensão do sistema e dos objetivos do trabalho.

O novo método de caotificação baseado na excitação por duas frequências e o uso de ferramentas para o reconhecimento de sistemas caóticos foram fundamentais para o sucesso do experimento. Os resultados práticos obtidos no experimento confirmaram a

grande sensibilidade de um sistema dinâmico quando excitado por duas frequências.

Embora os resultados deste trabalho tenham se concentrado na confirmação da existência de um atrator caótico robusto, eles também abriram possibilidades de aplicações futuras, como mudanças paramétricas, especialmente em áreas relacionadas a comunicações seguras e criptografia. Por fim, este trabalho demonstrou que a análise experimental está alinhada com os resultados numéricos de estudos anteriores, fornecendo uma base sólida para pesquisas futuras e aplicações práticas.

## 6.2 Trabalho Futuro

A abordagem proposta nesta pesquisa demonstrou eficácia na manipulação e controle das amplitudes na geração de ondas. No entanto, a contínua busca por aprimoramentos tecnológicos nos conduz a identificar áreas de potencial aprimoramento. Um desses pontos diz respeito ao controle das amplitudes, que, atualmente, é realizada por meio de um potenciômetro multivoltas. Neste contexto, vislumbramos a automação desse processo por meio da adoção de um potenciômetro digital no lugar do potenciômetro multivoltas.

O potenciômetro digital representaria um avanço em comparação com sua contrapartida analógica tradicional. Esse dispositivo, ao invés de utilizar um caminho condutivo contínuo, emprega um elemento resistivo digital composto por uma série de resistores eletronicamente distribuídos. Cada segmento desse elemento resistivo digital corresponde a um valor de resistência específico. A principal característica diferenciadora do potenciômetro digital reside na sua capacidade de ajuste controlado por meios digitais, viabilizado, neste contexto, pela plataforma Arduino.

Com o uso do potenciômetro digital, a configuração da amplitude das ondas torna-se um processo altamente flexível e automatizado, não mais dependente da intervenção física do operador para girar um *"knob"*, como é o caso dos potenciômetros tradicionais. A capacidade de seleção e definição precisa do valor da resistência desejada torna-se uma realidade acessível por meio da interface digital.

O emprego do potenciômetro digital, com sua notável capacidade de controle digital, promete ser um avanço significativo para a pesquisa e aplicação prática, permitindo uma manipulação precisa e programável das amplitudes das ondas geradas. Esse desenvolvimento tecnológico traz consigo o potencial de aprimorar a eficiência e a precisão das aplicações que dependem do controle das amplitudes, e representa um caminho promissor a ser explorado em futuras pesquisas.

Outra aplicação para circuito análogo ao Oscilador de Duffing é a geração de números aleatórios de alta qualidade que desempenha um papel crucial em diversas aplicações, como criptografia, simulações numéricas e experimentos científicos. Para aplicar essa abordagem, é necessário coletar dados gerados pelo circuito anaálogo ao oscilador de Duffing em intervalos regulares. Os dados coletados serão representativos das oscilações caóticas do sistema. Isso permite criar uma sequência de números que reflita as características caóticas do circuito. Os dados coletados serão armazenados e preparados para análises subsequentes.

Uma vez que é gerado uma sequência de números a partir do circuito análogo ao oscilador de Duffing, diversas técnicas podem ser aplicadas para analisar a qualidade dos números aleatórios. Isso inclui a realização de testes estatísticos, como o teste de Kolmogorov-Smirnov e o teste de autocorrelação, para verificar se os números gerados atendem às propriedades desejadas de aleatoriedade. Além disso, é necessário examinar a distribuição dos números para garantir uma distribuição uniforme.

Portanto, a utilização do circuito oscilador de Duffing para a geração de números aleatórios representa um emocionante campo de investigação futuro para este trabalho. A capacidade do circuito de produção de séries temporais caóticas e imprevisíveis, sugere que ele pode ser uma fonte valiosa de números aleatórios. A análise subsequente garantirá a qualidade e confiabilidade desses números, o que pode ter implicações significativas em várias aplicações práticas.

# Referências

- [1] BALTHAZAR, J. M., TUSSET, A. M., RIBEIRO, M. A., LENZ, W. B., PICCIRILLO, V., COLÓN, D., BUENO, Á. M., LENZI, G. G., JANZEN, F. C. *Sistemas dinâmicos e mecatrônicos-Volume 1: Teoria e aplicação de controle*. 2021. ISBN:9786555062656.
- [2] BANWELL, T., JAYAKUMAR, A. Exact analytical solution for current flow through diode with series resistance. *Electronics Letters* 36, 4 (2000), 291–292.
- [3] BARROS, L. D. S., CAVALCANTE, M., SOLEDADE, P., SBRISSA NETO, D. A., SIQUEIRA, M. Oscilador harmônico simples, série e transformada de fourier e operador de sturm-liouville—uma breve discussão. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 45 (2023), e20230046.
- [4] BERALDI, L. Dinâmica de um oscilador não linear forçado sujeito a um potencial biestável. *Dissertação de Mestrado da Universidade Federal do Paraná* (1995).
- [5] BONFIM, M. Medidas elétricas. *Apostila. Conversores Digital/Analogico (D/A) e Analogico/Digital (A/D). Universidade Federal do Paraná* (2002).
- [6] BOYLESTAD, R., NASHELSKY, L. *Eletrônica: Teoria de Circuitos Y Dispositivos Eletrônicos*. 2003. ISBN:9789702604365.
- [7] BUTCHER, J. A history of runge-kutta methods. *Applied Numerical Mathematics* 20, 3 (1996), 247–260. ISSN:0168-9274.
- [8] CARVALHO, F. L. D. Expoentes de lyapunov a tempo finito. *Relatório final de iniciação científica apresentada a Universidade Estadual de Campinas* (2015).
- [9] CHAPRA, S., CANALE, R. *Métodos Numéricos para Engenharia - 7ª Edição*. 2016. ISBN:9788580555691.
- [10] CHIQUITO, A. J., RAMOS, A. C. A. Analyzing a diapason beating and resonance effects using an oscilloscope. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 27 (2005), 219–223.
- [11] CIPOLLI, V. G. Sistemas dinâmicos discretos: análise de estabilidade. *Dissertação de Mestrado da Universidade Estadual Paulista* (2012).
- [12] CRUZ, E. C. A., JÚNIOR, S. A. C. *Eletrônica aplicada*. 2007. ISBN:9788536511634.
- [13] CUNHA, É. F. D. Identificação de um sistema experimental caótico: circuito de chua. *Dissertação de Mestrado da Universidade Tecnológica Federal do Paraná* (2019).
- [14] DA SILVEIRA, F. L. Determinismo, previsibilidade e caos. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* 10, 2 (1993), 137–147.

- 
- [15] DE AGUIAR, M. A. Tópicos de mecânica clássica. *Livraria da Física, 1a edição* (2011), 18.
- [16] DOS SANTOS, F. Formas normais e estabilidade de equilíbrios para sistemas hamiltonianos. *Dissertação de Mestrado da Universidade Federal de Pernambuco* (2004).
- [17] FERREIRA, F. A. Dinâmica simbólica e ferradura de smale. *Tékhne: Revista de Estudos Politécnicos. Instituto Politécnico do Cávado e do Ave* (2007), 183–199.
- [18] FIEDLER-FERRARA, N., DO PRADO, C. P. C. *Caos: uma introdução*. 1994. ISBN:9788521214229.
- [19] FIGUEIREDO, R. A., DANTAS, M. J. H. Dinâmica do sistema carro-pêndulo. *FAMAT em revista. Universidade Federal de Uberlândia* (2008).
- [20] FREITAS, M. M. Atratores para sistemas dinâmicos deterministas, não autônomos e estocásticos em dimensão infinita: Aplicações à modelos de edps. *Tese de Doutorado da Universidade Federal do Pará* (2017).
- [21] GALDINO, V. G. Técnicas para estimação de expoentes de lyapunov em sistemas dinâmicos não-lineares. *Dissertação de Mestrado da Universidade Federal da Paraíba* (2018).
- [22] GOMES, A. L. B., ET AL. Aspectos gerais da teoria do caos. *Trabalho de Conclusão de Curso da Universidade Federal de Santa Catarina* (2022).
- [23] GUSSO, A., DANTAS, W., UJEVIC, S. Prediction of robust chaos in micro and nanoresonators under two-frequency excitation. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 29, 3 (2019).
- [24] GUSSO, A., UJEVIC, S., VIANA, R. L. Strong chaotification and robust chaos in the duffing oscillator induced by two-frequency excitation. *Nonlinear Dynamics*. 103 (2021), 1955–1967.
- [25] HISSA, L. D. Estudo de sistemas dinâmicos não lineares. *Trabalho de Conclusão de Curso da Universidade Federal do Ceará* (2022).
- [26] KANAMARU, T. Duffing oscillator. *Scholarpedia* 3, 3 (2008), 6327. revision 91210.
- [27] KOVACIC, I., BRENNAN, M. J. *The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour*. 2011. ISBN: 978-0-470-71549-9.
- [28] KURNIAWAN, A. *Getting Started with Arduino and. NET*. 2012. ISBN: 1230000094758.
- [29] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences* 20, 2 (1963), 130–141.
- [30] MALVINO, A. P., BATES, D. J. *Eletrônica*, 8 ed. 2016. ISBN: 978-8580555769.
- [31] MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* 261 (1976), 459–467.
- [32] MCROBERTS, M. *Arduino básico*. 2015. ISBN:978-85-7522-404-5.

- [33] MIRANDA, L. M. S. Uma generalização da equação logística no crescimento do tumor avascular. *Trabalho de Conclusão de Curso da Universidade Federal de Sergipe* (2020).
- [34] MONK, S. *Programação com Arduino: começando com Sketches*. 2017.
- [35] MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas dinâmicos*, 4 ed. 2019. ISBN: 9788578615970.
- [36] MOURA, A. D. Von neumann e a previsão numérica de tempo e clima. *Estudos Avançados 10* (1996), 227–236.
- [37] NETO, J. A. B. *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana*, 2 ed. 2004. ISBN:97885883252652.
- [38] ONIAS, H. H. D. S. Bifurcações dinâmicas em circuitos eletrônicos. *Dissertação de Mestrado da Universidade Federal de Pernambuco* (2012).
- [39] OTHECHAR, P. F. S., CAUZ, L. O. Introdução aos sistemas dinâmicos. *ANAIS DO ENIC*, 1 (2009).
- [40] PATA, R. B. Modelo de lotka-volterra para a dinâmica predador-presa. *Trabalho de Conclusão de Curso da Universidade Federal do Pampa* (2017).
- [41] PINOCHET, L. H. C. Sistemas dinâmicos e caos: Um estudo sobre a família quadrática. *Trabalho de Conclusão de Curso da Universidade de Santa Catarina* (2023).
- [42] PROTO, V. G. Estudo de estabilidade e bifurcações em sistemas não-lineares. *Dissertação de Mestrado da Universidade Estadual Paulista* (2013).
- [43] REAS, C., FRY, B. *Getting Started with Processing: A Hands-on introduction to making interactive Graphics*, 2 ed. 2015. ISBN :9781457187087.
- [44] ROCHA, P. H. D. Controle h-infinito não-linear aplicado em sistema de levitação magnética: projeto e implementação em dsp de ponto-fixa. *Tese de Doutorado da Universidade de São Paulo* (2009).
- [45] RODRIGUES, R. Um modelo mecânico como proposta para um gerador de números pseudo-aleatórios. *Dissertação de Mestrado da Universidade Federal Fluminense* (2018).
- [46] ROQUE, A. Análise qualitativa do modelo de hodgkin-huxley. *Notas de aula- Laboratório de Sistemas Neurais (SisNe). Universidade de São Paulo* (2022).
- [47] SILVEIRA, F. A. O. Propriedades dinâmicas de um modelo bouncer em campo não homogêneo. *Dissertação de Mestrado da Universidade Federal de São João Del-Rei* (2020).
- [48] SODRÉ, U. Equações diferenciais parciais. *Apostila.Londrina:[sn].Disponível: <https://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/edp.pdf>.Acessado:05/09/2023*.
- [49] SOUSA, D. F. M. Equações diferenciais ordinárias aplicadas na física clássica. *Trabalho de Conclusão de Curso da Universidade Federal de Campina Grande* (2021).

- 
- [50] STROGATZ, S. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering, 1st pbk*, 2 ed. 2014. ISBN : 978-0813349107.
- [51] TAMAŠEVIČIŪTĖ, E., TAMAŠEVIČIUS, A. V., MYKOLAITIS, G., BUMELIENĖ, S., LINDBERG, E. Analogue electrical circuit for simulation of the duffing-holmes equation. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 13, 2 (2008), 241–252.
- [52] VALLE, J. Equações de diferença e teoria de estabilidade. *Trabalho de Conclusão de Curso da Universidade do Estado de Santa Catarina* (2016).
- [53] VAZ, P. I. Síntese digital direta. *Trabalho de Conclusão de Curso da Universidade Federal do Rio Grande do Sul* (2012).
- [54] VILLATE, J. Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com máxima. *Livro online* (2005). ISBN: 972-99396-0-8.
- [55] VILLATE, J. E. Dinâmica e sistemas dinâmicos. quinta edição. *Livro Online* (2019). ISBN: 978-972-99396-5-5.
- [56] WENDLING, M. Amplificadores operacionais. *Nota de Aula. Universidade Estadual Paulista* (2010).